



**Alejandro González y Hernández<sup>1</sup>, César Mora<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Departamento de Física, Facultad de Ciencias, UNAM, Universidad 3000, Circuito Exterior s/n, C.P. 04510, Ciudad Universitaria, México, D. F.*

<sup>2</sup>*Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694. Col. Irrigación, C. P. 11500, México D. F.*

**E-mail:** agh@hp.fciencias.unam.mx, ceml36@gmail.com

(Recibido el 28 de Enero de 2010; aceptado el 25 de Octubre de 2010)

## Resumen

El movimiento de un deslizador sobre un riel de aire, construidos de aluminio, se ve afectado por una fuerza dependiente de la velocidad que va en contra de su movimiento. Esta fuerza se debe a la presencia de imanes colocados a los lados del deslizador que inducen corrientes de eddy sobre el riel de aire y que dan origen a una fuerza magnética de arrastre que se opone al movimiento del deslizador. Dos tipos de movimientos se analizan experimentalmente: el caso en que el riel de aire se coloca horizontalmente y el deslizador se mueve mediante un impulso inicial y el caso en que el riel de aire está inclinado y el deslizador se mueve desde el reposo. La teoría de estos movimientos se lleva a cabo y los resultados experimentales que se presentan gráficamente, se analizan mediante esta teoría y un modelo numérico y gráfico que se propone para el análisis general de este tipo de movimientos.

**Palabras clave:** Fuerza, magnetismo, movimiento, mecánica, experimentos.

## Abstract

The movement of a glider on an air track, constructed of aluminum, is affected by a velocity-dependent force that goes against their movement. This force is due to the presence of magnets positioned on either side of the glider which induce eddy currents on air track that give rise to a magnetic drag force that opposes to the motion of the glider. Two types of motions are analyzed experimentally: the case where the air track is positioned horizontally and the glider moves through an initial impulse and the case where the air track is inclined and the glider moves from rest. The theory of these movements is carried out, the experimental results are presented graphically, they are analyzed using this theory and a numerical model is proposed for the general analysis of such movements.

**Keywords:** Force, magnetism, motion, mechanics, experiments.

**PACS:** 45.20.D-, 45.50.Dd, 47.54.De.

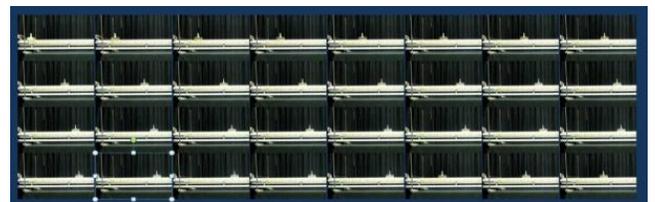
**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

El movimiento rectilíneo de un deslizador sobre un riel de aire horizontal con impulso inicial diferente de cero, se ve afectado por una fuerza de frenado magnético, cuando se colocan a los lados del deslizador discos magnéticos de neodimio que se atraen mutuamente, Figura 1. Las líneas de campo magnético que atraviesan la superficie metálica del riel de aire, construido también de aluminio, dan origen a una fuerza que se opone al movimiento del deslizador con los discos magnéticos sobre él.

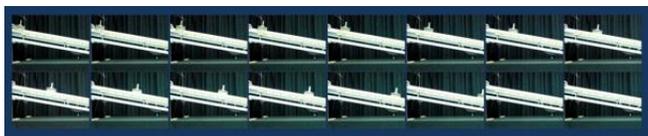
El movimiento del deslizador que parte del reposo en el plano inclinado es igualmente afectado por la fuerza de freno magnético inducido en el riel de aire por los discos magnéticos sobre el deslizador. La diferencia con el movimiento horizontal se debe a la componente de la fuerza de gravedad en la dirección del movimiento la cual es opuesta a la fuerza de freno magnético que es dependiente de la velocidad del deslizador y aumenta en la dirección opuesta al movimiento, según aumenta la rapidez del movimiento, de tal manera que al transcurrir el tiempo

de recorrido estas dos fuerzas llegan a ser iguales y se anulan, alcanzando el deslizador una velocidad constante llamada velocidad terminal, ver Figura 2.



**FIGURA. 1.** Fotografías del movimiento de un deslizador sobre un riel de aire horizontal que es frenado magnéticamente. La velocidad inicial que se le proporciona por un impulso inicial, se reduce a cero después de recorrer una cierta distancia en un tiempo dado.

Para describir los movimientos del deslizador con discos magnéticos en el riel de aire horizontal e inclinado se hace un modelo de la fuerza de frenado magnético en el plano inclinado y que se reduce a los casos experimentales.



**FIGURA 2.** Fotografías del movimiento de un deslizador que parte del reposo sobre un riel de aire inclinado que es frenado magnéticamente hasta alcanzar la velocidad terminal.

## II. MODELO DE FUERZA DE FRENADO

La fuerza magnética de frenado, que llamaremos  $F_m$ , es una fuerza que se opone al movimiento y es directamente proporcional a la velocidad del deslizador, la cual se expresa como  $F_m = -rv$ .

Si el deslizador, de masa  $M$ , se mueve en un riel de aire inclinado un ángulo  $\theta$ , con velocidad  $v_0$  en  $t_0 = 0$ , la ecuación de movimiento del móvil queda establecida, de acuerdo a la Segunda Ley de Newton, como:

$$M \frac{dv}{dt} = Mg \operatorname{sen} \theta - rv, \quad (2.1)$$

cuya solución analítica es:

$$v = v_T \left( 1 - e^{-\frac{r}{M}t} \right) + v_0 e^{-\frac{r}{M}t}, \quad (2.2)$$

donde  $v_T$  es la velocidad terminal del movimiento del deslizador, la cual se alcanza cuando la aceleración  $a = dv/dt$  en la ecuación (2.1) se hace cero, esto es, cuando:

$$Mg \operatorname{sen} \theta - rv_T = 0, \quad (2.3)$$

o bien, cuando:

$$v_T = \frac{Mg \operatorname{sen} \theta}{r}, \quad (2.4)$$

Dos casos interesantes se pueden observar en la ecuación (2.1), cuando  $\theta = 0$  y cuando  $v_0 = 0$ . En el primer caso el deslizador se mueve en un riel de aire horizontal y en el segundo caso, la velocidad de partida del deslizador en el riel de aire inclinado es cero. El análisis de ambos casos es:

Caso 1:  $\theta = 0$ .

La ecuación (2.2) para este caso, queda reducida a:

$$v = v_0 e^{-\frac{r}{M}t}. \quad (2.5)$$

Para determinar la constante  $r$  y la velocidad inicial del movimiento, se aplica a cada lado de la ecuación (2.1) el logaritmo natural, esto es,

$$\ln v = -\frac{r}{M}t + \ln v_0. \quad (2.6)$$

La ecuación (2.6) es una línea recta, cuando se grafica  $\ln v$  vs  $t$ , con una pendiente  $p = -r/M$  y una ordenada al origen  $b = \ln v_0$ . Por lo tanto,

$$r = -Mp \text{ y } v_0 = e^b. \quad (2.7)$$

Dado los valores de  $r$  y  $v_0$ , se puede ajustar una curva a los puntos experimentales de posición y tiempo que se determinan del video (grabado a 30 cuadros/s, como se ha mostrado en los fotogramas de la Figura 1, seleccionados de la grabación del video cada 1/10 s), si se considera la integración de la ecuación (2.5).

Ya que la velocidad  $v$  del deslizador es la derivada de la posición respecto del tiempo, la ecuación (2.5) se transforma en:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 e^{-\frac{r}{M}t}. \quad (2.8)$$

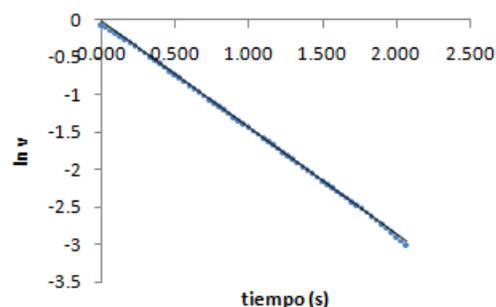
La ecuación (2.8) se puede integrar desde  $x_0$  en  $t_0 = 0$  hasta  $x$  en  $t$ , esto es:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 e^{-\frac{r}{M}t} dt, \quad (2.9)$$

o bien:

$$x = \left( \frac{M}{r} \right) v_0 (1 - e^{-\frac{r}{M}t}) + x_0. \quad (2.10)$$

En la ecuación (2.10) se observa que la posición final que alcanza el deslizador sobre el riel de aire horizontal es  $x_F = Mv_0/r + x_0$ , es decir, el deslizador se detiene en  $x_F$ .



**FIGURA 3.** Gráfica de  $\ln v$  vs  $t$ , que permite determinar los parámetros del movimiento en el riel de aire horizontal.

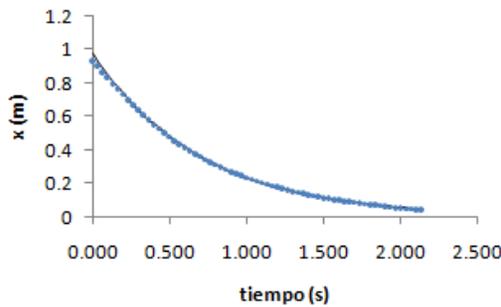
Los datos experimentales  $x-t$  obtenidos en el video y que corresponden a la Figura 1, se utilizan para obtener los valores de  $v-t$  (calculando los valores medios de velocidad y suavizando la gráfica de  $v-t$  por el método de Bezier que emplea el programa Coach6), para poder hacer la gráfica de  $\ln v$  vs  $t$ , ver Figura 3, que es una recta, según la ecuación (2.6). Efectivamente esta gráfica es una recta y sus parámetros se obtienen al hacer un ajuste de recta por mínimos cuadrados. Los resultados del ajuste se dan en la Tabla I, así como los parámetros del experimento.

Con los valores de  $M$ ,  $v_0$  y  $r$  determinados, es posible ajustar las ecuaciones (2.10) y (2.5) a los datos

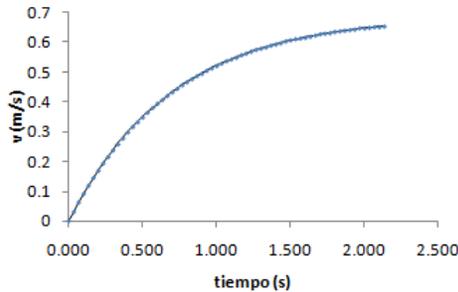
experimentales de  $x-t$  y  $v-t$  respectivamente, ver Figuras 4a y 4b.

**TABLA I.** Datos experimentales y parámetros ajustados para el movimiento del deslizador en un riel de aire horizontal.

Parámetros de la recta ajustada		Parámetros experimentales	
Pendiente, $p$	-1.423	Masa, $M$ (kg)	0.276
Ordenada al origen, $b$	-0.021	$r$ (kg/s)	0.39
		$v_0$ (m/s)	0.98
		$r/M$ (s <sup>-1</sup> )	1.42
		$Mv_0/r$ (m)	0.69



(a)



(b)

**FIGURA 4.** Movimiento de frenado del deslizador en un riel horizontal. (a) Gráfica  $x-t$ , y (b) Gráfica  $v-t$

Las ecuaciones de ajuste, son:

$$x = 0.69(e^{-1.42t} - 1), \quad (2.11)$$

y

$$v = 0.98e^{-1.42t}. \quad (2.12)$$

Caso 2:  $v_0 = 0$ .

En este caso, la ecuación (2.2) para este caso, se reduce a:

$$v = v_T \left(1 - e^{-\frac{r}{M}t}\right). \quad (2.13)$$

Considerando que  $v = dx/dt$ , se sustituye la derivada en la ecuación (2.2) y se integra desde  $x_0$  en  $t_0 = 0$  hasta  $x$  en  $t$ , obteniéndose:

$$x = v_T t + \left(\frac{M}{r}\right) v_T (e^{-\frac{r}{M}t} - 1) + x_0. \quad (2.14)$$

La ecuación (2.13) establece que el deslizador alcanza velocidad terminal  $v_T$  para un tiempo suficientemente grande, en donde el término exponencial es prácticamente cero. Esta característica del movimiento indica que la curva  $x$  versus  $t$  para  $t$  suficientemente grande es una recta, que se obtiene de la ecuación (2.14) y que se expresa como:

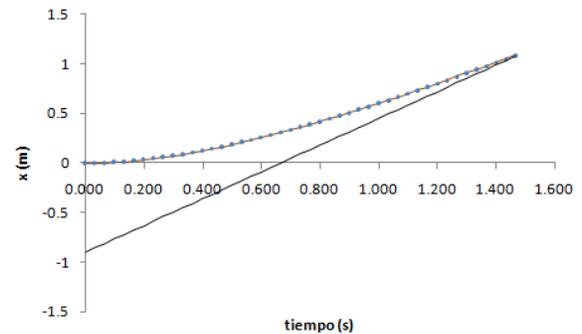
$$x(t \gg 0) = v_T t - \left(\frac{M}{r}\right) v_T + x_0, \quad (2.15)$$

que indica una recta con pendiente  $p = v_T$  y ordenada al origen  $b = -Mv_T/r + x_0$ . De tal forma que los parámetros del movimiento, se pueden determinar en términos de los parámetros de la recta, esto es, de  $p$  y de  $b$ :

$$v_T = p \text{ y } r = -Mv_T/(b - x_0). \quad (2.16)$$

En la figura 5, se muestran los datos experimentales  $x-t$  obtenidos en el video y que corresponden a la Figura 2. Los datos se ajustaron por medio de la recta tangente a la curva en los puntos finales de la gráfica y la ecuación (2.15). Los datos del experimento y los resultados del ajuste se dan en la Tabla II.

También para este movimiento, se grafica la curva  $x-t$ , ver Figura 5, de acuerdo a la ecuación (2.14) y los valores de la Tabla II.



**FIGURA 5.** Gráfica de  $x$  vs  $t$ , con la curva de ajuste y la recta auxiliar para determinar los parámetros del movimiento.

**TABLA II.** Datos experimentales y parámetros ajustados para el movimiento del deslizador en un riel de aire inclinado.

Datos del experimento		Parámetros ajustados	
Masa, $M$ (kg)	0.276	$r/M$ (s <sup>-1</sup> )	1.42
$g$ (m/s <sup>2</sup> )	9.8	$r$ (kg/s)	0.39
$x_0$ (m)	-0.002	$v_T$ (m/s)	1.35
$\theta$ (grad)	12°		

Las ecuaciones de ajuste para las gráficas  $x-t$  y  $v-t$ , son respectivamente:

$$x = 1.35t + 0.7(e^{-1.42t} - 1) - 0.002, \quad (2.17)$$

y

$$v = 1.35(1 - e^{-1.42t}). \quad (2.18)$$

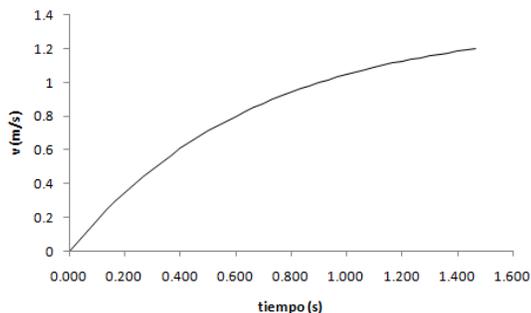


FIGURA 6. Gráfica de  $v$  vs  $t$ , según la ecuación 2.18.

### III. MODELO GRÁFICO DEL SISTEMA DINÁMICO

El programa Coach6, permite realizar un modelo gráfico del sistema dinámico representado por la ecuación (2.1). El diseño de este modelo es la representación gráfica de las variables del sistema  $x$  y  $v$ , llamadas en Coach6 variables de estado y las variables auxiliares  $a$  y  $F$ , así como las relaciones entre ellas a través de las funciones derivadas  $v = dx/dt$  y  $a = dv/dt$  o la segunda Ley de Newton  $a = F/M$ , más la definición de la Ley de fuerzas  $F = -Mgsen\theta + rv$  y la de todas las constantes que intervengan en las definiciones, junto con las condiciones iniciales.

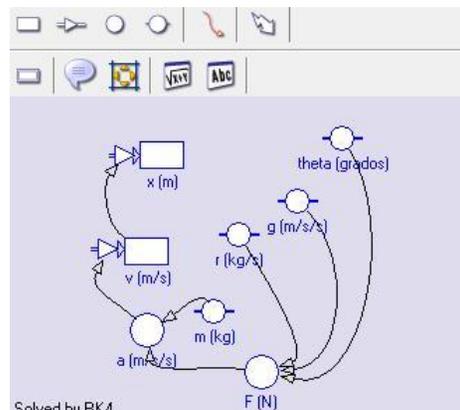
De esta manera, el sistema dinámico queda unívocamente definido y puede ser resuelto por el programa Coach6 mediante métodos numéricos. Coach6 resuelve el sistema dinámico modelado de esta manera, mediante el método de Euler, Runge-Kutta 2 o Runge-Kutta 4, lo único adicional que hay que hacer es seleccionar el paso del intervalo de tiempo en que se va a ejecutar el programa y el tiempo límite al cual deberá correr el programa. En la Figura 7a, se presenta el modelo gráfico en Coach 6 para el caso del movimiento del deslizador en el riel de aire inclinado. y las gráficas resultantes en 7b, 7c y 7d.

Como se puede observar en la esquina superior derecha, donde aparece el modelo gráfico diseñado en Coach6, todas las variables y constantes que definen al sistema dinámico, están relacionadas mediante conectores dirigidos, de esta manera, Coach6 genera un diagrama de flujo que incluye jerárquicamente las definiciones y relaciones establecidas en el modelo gráfico y los valores de los parámetros del sistema y condiciones iniciales que se han definido de manera oculta, que le permite aplicar el método numérico y obtener las soluciones gráficas que en la Figura 7,b,7c y 7d.

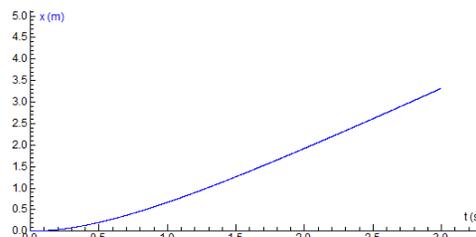
### IV. ENFOQUE DIDÁCTICO

El enfoque que aquí se ha desarrollado para estudiar y analizar los dos problemas de movimiento de un deslizador

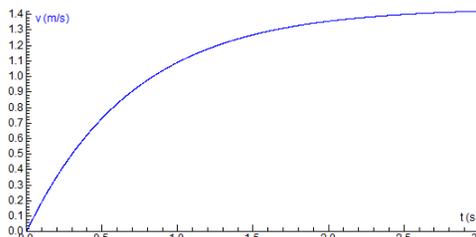
sobre un riel (horizontal o inclinado) de aire sujeto a una fuerza magnética de frenado, es un enfoque global que va de lo particular hasta lo general. Los estudiantes de primer año de una carrera científica universitaria, que llevan a cabo este enfoque, empiezan haciendo experimentos, que de cierta forma es una manera de reconocer el problema de manera directa. Se empieza con un enfoque lúdico en donde los estudiantes se familiarizan con las variables y parámetros del sistema dinámico que está estudiando, antes de hacer mediciones.



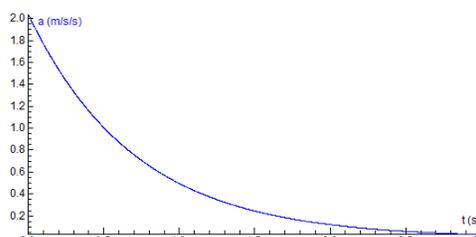
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 7. Modelo del sistema dinámico del deslizador sobre el riel de aire sujeto a una fuerza de frenado magnético. (a) Modelo gráfico, (b) Gráfica  $x-t$ , (c) Gráfica  $v-t$  y (d) Gráfica  $a-t$ .

Una vez que los estudiantes se han familiarizado con los aspectos conceptuales del sistema dinámico bajo estudio, ellos realizan un diagrama de cuerpo libre en donde se

pueda reconocer que las fuerzas verticales al movimiento del deslizador se anulan y la fuerza magnética que depende de la velocidad es opuesta a la dirección del movimiento en el plano horizontal y es la única fuerza que afecta el movimiento del deslizador, por lo tanto es la fuerza que lo frena, en cambio, en el plano inclinado, en el diagrama de cuerpo libre hecho por los estudiantes, se observa que la fuerza magnética opuesta al movimiento empieza a competir con la fuerza debida a la gravedad que está en la dirección del movimiento y por ello, al final, se llega a una velocidad terminal. Así, los estudiantes pasan a la toma de datos experimentales, pero ya teniendo en mente ciertos objetivos, como son los de obtener los parámetros que definen a las fuerzas que se aplican sobre el objeto en movimiento y la determinación de la distancia de frenado en el riel horizontal o velocidad terminal en el riel inclinado.

El siguiente paso es conceptualizar estos problemas, es decir, desarrollar la teoría en clase, para ello los estudiantes ya han tenido la oportunidad de revisar la bibliografía recomendada en el curso o inclusive la que encuentran en Internet. El desarrollo de la teoría no se hace totalmente en clase, sino que parte se deja al estudiante para que el mismo la termine, de esta manera, ellos tienen disponible un tiempo más amplio de reflexión, en donde ellos pueden relacionar su trabajo experimental con su reflexión conceptual del mismo sistema dinámico bajo estudio, que después es comentado y reafirmado en clase. Es decir, ellos participan activamente en el desarrollo del modelo teórico que tendrá como propósito explicar lo que ellos han obtenido de los experimentos realizados.

El paso más complicado, pues es en donde se dispone de menos guías que señalen como abordar este paso, es el de aplicar el modelos conjuntamente con los resultados experimentales para comprender que ambos líneas de investigación coinciden en un mismo enfoque que permitirá entender por completo los problemas abordados. Por una parte, tendrán que obtener de los datos experimentales los valores actuales de los parámetros que definen al sistema dinámico bajo estudio, pero por otro y en cada momento habrá que estar aplicando el modelo teórico realizado, para evitar realizar un enfoque exclusivamente empírico que lleve a resultados parciales. Este doble juego, experimento-teoría-experimento-teoría, establece un flujo y reflujo intelectual que permite al estudiante cimentar cada vez más ideas que empezaron como ideas vagas y que con la persistencia de este reflujo se van haciendo cada vez más solidas y comprensibles en los esquemas mentales de los estudiantes.

Finalmente y como una conclusión de que se ha llegado a un nivel de comprensión avanzado, los estudiantes realizan el modelo gráfico del sistema dinámico de acuerdo a Coach6, en donde todas sus definiciones, planteamientos conceptuales y datos reales que involucran en este modelo, ya han pasado la etapa de automatización y se han convertido en razonamientos escalonados todos ellos comprensibles y significativos, que les hace transparentes no solo las soluciones que han obtenido a través del proceso de investigado seguido, sino que les abre un panorama muy amplio para seguir estudiando el sistema dinámico en todas sus particularidades y más aún les abre el panorama para

que ellos mismos sugieran variantes experimentales que sean interesantes de estudiar.

## V. CONCLUSIONES

Este enfoque que aquí se ha planteado aquí, de Experimento-Teoría-Modelación y retroalimentación, para estudiar y analizar el sistema dinámico de un deslizador sobre un riel de aire sujeto a una fuerza magnético dependiente de la velocidad, opuesta al movimiento del deslizador y también a una componente de la fuerza de gravedad en la dirección del movimiento, es un planteamiento que se recomienda se lleve a cabo, aún en los sistemas dinámicos más simples de un curso de Laboratorio de Mecánica Clásica, como puede ser el de la caída libre o la caída de cuerpos ligero en el aire. Es decir, para llegar a un grado avanzado de complejidad en el proceso de enseñanza-aprendizaje, hay que transitar por etapas más sencillas que se vayan complicando poco a poco. Es necesario que los estudiantes tengan siempre disponible un periodo de maduración no sólo de los conceptos, procedimiento y métodos científicos que van aprendiendo, sino también en los procedimientos y estrategias que siguen en sus aprendizajes.

Este enfoque se ha ejemplificado con dos problemas que inicialmente se plantearon de manera experimental: el movimiento de un deslizador sujeto a una fuerza magnética de frenado que se mueve sobre un riel de aire horizontal o inclinado.

Lo que hemos observado en nuestros estudiantes que han aplicado este enfoque, es la mayor claridad que ellos logran en la comprensión de los problemas planteados, en su desarrollo experimental y en la elaboración del modelo teórico, lo más importante en este enfoque es el desarrollo de un proceso de razonamientos que les permite realizar el análisis e interpretación de resultados experimentales, bajo un conjunto de representaciones que tienen completo significado para ellos. Sin embargo, es necesario realizar una evaluación más profunda al respecto, antes de manifestar un éxito parcial o completo en la aplicación de esta estrategia de enseñanza, pero por lo pronto, los resultados obtenidos dejan ver que esto es posible de alcanzar.

## REFERENCIAS

- [1] Hahn, K. D., Johnson, E. M., Brokken, A. and Baldwin, S., *Eddy current damping of a magnet moving through a pipe*, Am. J. Phys. **66**, 1066-1076 (1998).
- [2] Rossing, T. D. and Hull, J. R., *Magnetic levitation*, The Phys. Teach. **29**, 553-562 (1991).
- [3] Cadwell, L. H., *Magnetic damping: Analysis of a eddy current brake using an airtrack*, Am. J. Phys. **64**, 917-922 (1996).
- [4] Paetkau, M., Bahniwal, M. and Gamblen, J. *Magnetic Low-Friction Track*, Phys. Teach. **46**, 307-309 (2008).
- [5] Ivanov, D. T., *Another way to demonstrate Lenz's Law*, Phys Teach. **38**, 48-49 (2000).

- [6] Saraiva, C., *A simple way to teach magnetic braking*, *Physics Education* **42**, 330-331 (2007).
- [7] Munguía, A. H., *Magnetic levitation and Newton's Third Law*, *Phys. Teach.* **45**, 278-279 (2007).
- [8] Hallou, I. A. and Hestenes, D., *Modeling instruction in mechanics*, *Am. J. Phys.* **55**, 455-462 (1987).
- [9] Hestenes, D., *Modelling Methodology for Physics Teacher*, *The Changing Role of Physics Departments in Modern Universities*. Proceedings of International Conference on Undergraduate Physics Education, College Park, U.S.A., pp. 935-957, (August, 1996).
- [10] D'Anna, M., *Modelling in the classroom: Linking physics to other disciplines and to real-life phenomena*, Proceeding GIREP Conference, Amsterdam, Netherlands, pp. 111-126, (August 20 – 25, 2006).
- [11] Medin, M. J., *Modelado de Sistemas Dinámicos y Educación en Ciencias e Ingeniería*, *Latin American and Caribbean Journal of Engineering Education* **12**, 75-82 (2007).
- [12] Zollman, D., *Learning Cycles for a Large-Enrollment Class*, *Phys Teach.* **28**, 20-25 (1990).