

# Conducción térmica en una varilla de cobre



**Adrián Corona Cruz, Guillermo Martínez Peña**  
FCFM, BUAP, Apartado Postal 1152, 72001 Puebla, México.

**E-mail:** acorona@fcm.buap.mx

(Recibido el 29 de Agosto de 2011, aceptado el 3 de Diciembre de 2011)

## Resumen

La propagación de calor es uno de los temas básicos de investigación de la termodinámica, que en general son complejos por su modelación matemática ya que involucra ecuaciones diferenciales no lineales. No obstante, a nivel básico, hay casos que analíticamente y experimentalmente son posibles de resolver. En ésta investigación, los estudiantes exploraron experimentalmente la evolución espacial y temporal del calentamiento de una varilla de cobre. Se encontró una buena correlación entre la solución de la ecuación de conductividad térmica de Fourier, usada para describir la evolución de la temperatura a lo largo de una varilla metálica, y los valores experimentales medidos por los estudiantes.

**Palabras clave:** Conductividad Térmica, Ecuación de Fourier.

## Abstract

The propagation of heat is one of the basic research topics of thermodynamics, which are generally complex in that it involves mathematical modeling, nonlinear differential equations. However, in a basic level, there are cases that are analytically and experimentally possible to solve. In this research, students explored experimentally the spatial and temporal evolution of heating a copper rod. A good correlation was found between the solution of the Fourier thermal conductivity, used to describe the evolution of temperature along a metal rod, and the experimental values measured by the students.

**Keywords:** Thermal Conductivity, Fourier Equation.

**PACS:** 01.50.Pa, 72.15.Rn, 02.60. Lj, 65.60.+a

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Estudiar el transporte de energía térmica mediante el proceso conductivo es uno de los temas de enseñanza tratados en el laboratorio de termodinámica de la FCFM. Este trabajo es la primera parte del estudio de la conducción térmica teórico experimental, de una varilla conductora, en un segundo trabajo, se reportará el caso de un tubo donde el proceso de transferencia es conductivo-convectivo y otro reportando las propiedades sus térmicas.

La teoría que estudia la propagación de calor, en general involucra a cinco ecuaciones diferenciales no lineales: la de *continuidad* (conservación de la masa); las *ecuaciones de Navier-Stokes* (conservación del movimiento lineal); y la *ecuación de transferencia de calor* (conservación de energía). En estas ecuaciones están involucradas la distribución de la densidad, la presión, la velocidad del fluido y la temperatura, que con condiciones iniciales y de frontera que deben ser resueltas simultáneamente. Un caso particular de la ecuación de transferencia de calor es la ecuación de Fourier [1]. Ecuación que ha sido usada, por ejemplo, para describir el comportamiento del calor en objetos tales como una varilla con superficie lateral aislada [2]. Evitando la convención, Karls (2003), usó la ecuación de Fourier para describir el enfriamiento del agua contenida

en un termo [3], Sullivan (2008), usando un pulso de calor en una varilla conductora, estudia la difusión térmica [4]. Ibáñez (2008) reporta valores de la conductividad térmica de una varilla de cobre [5].

## II. MODELO PARA UNA VARILLA CONDUCTORA

La ecuación de Fourier, (1) usada para describir la evolución de la temperatura a lo largo de una varilla metálica, suficientemente larga, en la que no se considera flujo de calor radial (efectos convectivos, conductivos, o radiactivos). Se consideran los cambios de temperatura a lo largo de la varilla, suponiendo que la “pérdida de energía a lo largo de la varilla no es cero, como es supuesto en las referencias [2, 4, 6].

$$\frac{\partial T(y,t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \frac{\partial^2 T(y,t)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

donde  $T(y, t)$  es la temperatura en el punto  $y$  al tiempo  $t$ ,  $c$  es la capacidad calorífica de la varilla,  $\rho$  su densidad y  $k$  la conductividad térmica, que aunque es función de la

temperatura usaremos su media aritmética entre las temperaturas de estudio [2, 4].

Bajo las condiciones frontera iniciales; en  $t = 0$ ,  $T(y, 0) = T(l, t) = T_a$ ; y en  $T(0, t) = T_0$  (temperatura de la fuente),  $l$  es la longitud de la varilla, con la consideración de que en condición estacionaria la temperatura varía linealmente con la distancia [7] se obtiene:

$$T(y, t) = T_0 - \frac{T_0 - T_a}{l} y + f(y, t),$$

ecuación en la que  $f(y, t)$  debe cumplir:

$$f(0, t) = 0 = f(l, t) \quad y \quad f(y, 0) = \frac{T_0 - T_a}{l} (y - l).$$

Sustituyendo en la Ec. 1, considerando las soluciones no triviales, y aplicando el método de separación de variables [8, 9],

$$f(y, t) = Y(y)g(t).$$

Ecuación que sustituida 1, después de normalizar se obtiene

$$f(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\lambda_n y) e^{-\left(\frac{\lambda_n^2 k}{\rho c}\right)t},$$

donde  $\lambda_n$  es la solución única derivada con la condición de contorno:

$$\lambda_n = n\pi/l.$$

Para  $t=0$ , tenemos una expresión que es un término de la serie de Fourier, que con las condiciones de frontera se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) = \frac{T_0 - T_a}{l} (y - l).$$

Ecuación que se resuelve usando las propiedades de ortogonalidad de las funciones armónicas de Fourier, multiplicando ambos miembros por la función seno, e integrando:

$$B_n = \frac{T_0 - T_a}{l} \left[ \frac{\int_0^l (y-l) \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) dy}{\int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l} y\right) dy} \right] = -\frac{2}{n\pi} (T_0 - T_a).$$

De donde se obtiene la solución general que describe las variaciones de la temperatura en el tiempo y a lo largo de una varilla conductora,

$$T(y, t) = T_0 - (T_0 - T_a) \left( \frac{y}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 k}{\rho c l^2}\right)t} \right). \quad (2)$$

Solución que será usada para correlacionar los valores experimentales con el modelo que describe la ecuación de difusión o de Fourier. Para considerar la pérdida de calor en la dirección radial, se repite el mismo procedimiento, llegando a obtener:

$$T(y, t) = T_0 - (T_0 - T_a) \left( \frac{y}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} y\right) e^{-n^2 \pi^2 \left( \frac{k}{\rho c l^2} + \frac{\lambda}{\delta \sigma s^2} \right) t} \right), \quad (3)$$

donde  $\lambda$ ,  $\delta$  y  $\sigma$ , son las propiedades del aislante (Polietileno y asbesto) de un espesor promedio  $s = 6$ cm. Es conveniente indicar, que en los sistemas equivalentes antes citados, han recurrido a diferentes métodos de aproximaciones [4].

### III. VERIFICACIÓN DEL MODELO

Con el propósito de validar la ecuación 3, se realizaron mediciones del calentamiento de una barrilla de cobre. A la barrilla de 0.7cm de diámetro y 160cm de longitud, se adhirieron sensores de temperatura (termistores), se aisló térmicamente a todo lo largo con espuma de poliestireno (unicel) envuelto con cinta de asbesto, obteniendo en promedio una envoltura de un espesor de 7cm. Se sumergió aproximadamente 10cm de un extremo en un baño térmico (aceite) controlado a 120°C. Por medio de un sistema de adquisición de datos (PIC 18F4550) conectado a una PC, diseñado a propósito\*, se capturaron datos de temperatura.

En la gráfica mostrada en la Fig. 1, se observa la buena congruencia entre los valores experimentales y valores calculados por medio de *Mathematica 6*, solución de la ecuación de Fourier ( $n=150$ ), datos obtenidos, con las propiedades físicas del cobre, y los materiales usados para aislar la barrilla; asbesto y poliestireno, listados en la tabla 1. Para mostrar la similitud de los valores, se sobreponen los calculados y los medidos.

**TABLA I.** Propiedades térmicas del cobre, asbesto y poliestireno, donde  $k$  es la conductividad térmica,  $c$  el calor específico y  $\rho$  la densidad [10].

	$k$ W/m-K	$C$ J/Kg-K	$\rho$ Kg/m <sup>3</sup>
Cobre	401	385	8933
Asbesto	0.17	1050	2400
Poliestireno	0.036	1300	1050

## IV. CONCLUSIONES

La buena correlación entre los valores experimentales y los obtenidos de la solución de la ecuación de Fourier (Ec. 1), es un resultado que en contados sistemas se logra obtener. En consecuencia, el conjunto de resultados impacta en el aprendizaje básico de la termodinámica de los estudiantes e inclusive el docente.

Los conocimientos generados por el presente trabajo, sirvieron para interpretar los resultados, (que como al inicio se advirtió), de un sistema cuyo proceso de transferencia es la conducción-convección.

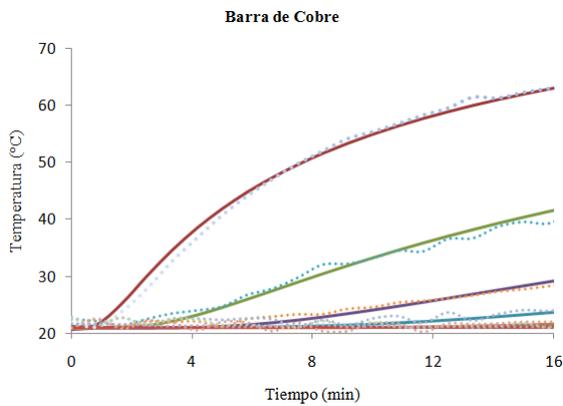
Finalmente, se remarca el que la ecuación de Fourier, para el sistema estudiado, se haya resuelto analíticamente, y esto es el valor más significativo para la comprensión de la conducción del calor en los sólidos.

## AGRADECIMIENTO

Al alumno, Joseph Xelhua Corona Pérez, de la Facultad de Ciencias de la Computación de la BUAP, que diseñó e implementó el sistema de adquisición de datos en el programa de servicio social.

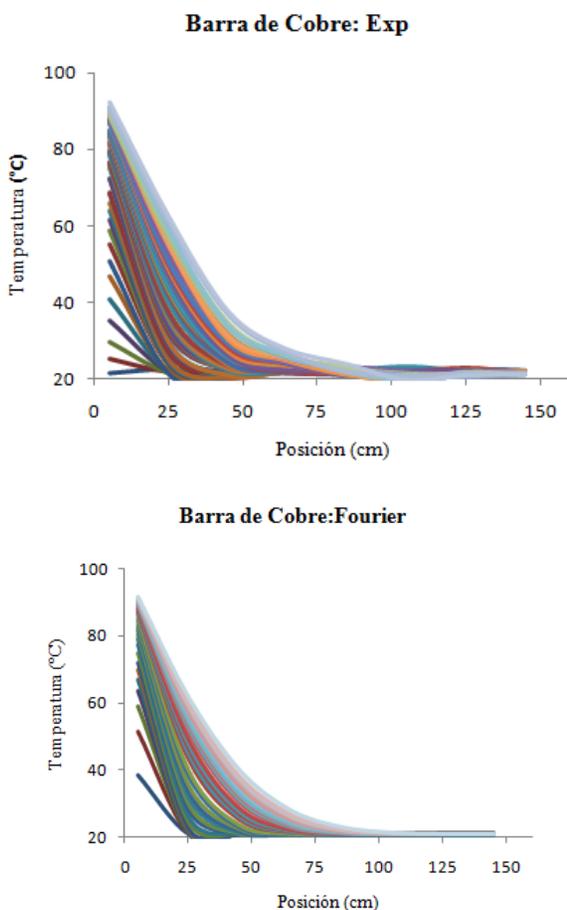
## REFERENCIAS

- [1] Landau, L. D. and Lifshitz, (1987) E. M., *Fluid Mechanics*, Vol. 6, 2<sup>th</sup> English Ed. Pergamon Press.
- [2] Mahjouri, F., *Vacuum Tube Liquid-Vapor (Heat-Pipe) Collectors*, <http://www.thermomax.com/Downloads/Vacuum%20Tube%20Paper.pdf>. Consultado el 10 de Marzo de (2011).
- [3] Karls, A. M. and Scherschel, E. J., *Modeling heat flow in a thermos*, Am. J. Phys. **71**, 678-683 (2003).
- [4] Sullivan, M. C., Thompson, B. G. and Williamson, A. P., *An experiment on the dynamics of thermal diffusion*, Am. J. Phys. **76**, 637-642 (2008).
- [5] Ibáñez, J. A., Abellán, F. J., Valerdi, R. P. y García, J. A. G., *Conductividad térmica de una barra de cobre. Estudio experimental del transitorio*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 259-267 (2008), <http://www.journal.lapen.org.mx>. Consultado el 21 de Noviembre de (2010).
- [6] Diaz, G. A., *On heat conduction in one-dimensional solids*, Am. J. Phys. **58**, 779-780 (1990).
- [7] Perry, J. H., *Manuel del Ingeniero químico*, (Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana (ETEHA), México, 1996), Sección 6, p. 733.
- [8] Lira, C. L., Rodríguez, O. J. G. y Lango, M., *Sistema de Medición de la Conductividad Térmica de Materiales Sólidos Conductores, Diseño y Construcción*, E. Simposio de Metrología Santiago de Querétaro, México, 22 al 24 de Octubre (2008).
- [9] Caffarelli, L., *La Ecuación del Calor*, Department of Mathematics University of Texas at Austin (2003). <http://divulgamat.ehu.es/weborriak/TestuakOnLine/Hasiera/koIkasgaiak/caffarelli2003-04.pdf>. Consultado el 06 de Febrero de (2010).



**FIGURA 1.** Por medio de las curvas continuas se muestra el comportamiento de las temperaturas en el tiempo de la Ec. 3 y con las líneas punteadas los valores experimentales a lo largo de la pared lateral de la barrilla de cobre, térmicamente aislada. Las curvas corresponden a las temperaturas de los puntos donde fueron instalados los sensores (cada 20cm).

El comportamiento de la temperatura en el espacio es mostrado en las gráficas de la Fig. 2, la de la izquierda corresponde a los valores experimentales y la derecha a los valores calculados de la Ec. 3.



**FIGURA 2.** Gráficas T vs x, de los valores experimentales y calculados con la Ec. 3, del calentamiento de la varilla de cobre. Cada curva corresponde a las temperaturas que en el mismo tiempo tenía cada punto a lo largo de la varilla.

*Adrián Corona Cruz y Guillermo Martínez Peña*

[10] diracdelta.co.uk, science & engineering encyclopedia,  
<http://www.diracdelta.co.uk/science/source/h/o/home/source.html>, Consultado el 12 de Mayo de (2011).