Un ejemplo físico de la potencia del cálculo infinitesimal

C. H. Wörner,
Instituto de Física, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Av. Brasil 2950, Valparaíso 02, Chile.

E-mail: cworner@ucv.cl

(Recibido el 20 de Septiembre de 2011, aceptado el 23 de Diciembre de 2011)

Resumen

Se presenta un ejemplo físico de un problema que puede resolverse sin usar cálculo infinitesimal. Se describe una comparación –usando el cálculo del centro de masa de un arco de circunferencia- con la práctica actual de cálculo integral, para destacar el potente enfoque que ofrece esta rama de las matemáticas.

Palabras clave: Centro de masa, cálculo elemental, cálculo infinitesimal.

Abstract

A physical problem is studied without reference to infinitesimal calculus. A comparison is described –using a center of mass calculation for an arch of circle- with the present habitual method of integral calculus in order to stress the power of this branch of Mathematics.

Keywords: Center of mass, elementary computation, infinitesimal calculus.

PACS: 01.40.ek; 01.40.gb; 45.10.-b **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Ya Arquímedes había utilizado la relación entre física y matemáticas para mostrar relaciones geométricas, por ejemplo en la cuadratura de la parábola [1]. Aquella vez, utilizando la física (regla de la palanca) para la demostración de un teorema geométrico. Esta tradición fue recogida –siglos después- por Galileo quien utilizó recurrentemente la matemática (estrictamente, la geometría euclidiana) en los argumentos utilizados en sus diálogos, especialmente en el "Diálogo acerca de dos nuevas ciencias" [2]. Con ese énfasis, algunos aspectos de los trabajos de Galileo han sido comentados en recientemente [3, 4]. Resulta notable estudiar los procesos de argumentación utilizados por estos dos genios en el tratamiento que hoy hacemos cuasi trivialmente usando cálculo infinitesimal. Además, Galileo usó diagramas geométricos para encontrar las leyes del movimiento uniformemente acelerado, sin usar explícitamente la definición de aceleración como hoy la conocemos.

Durante la enseñanza de cursos introductorios de cálculo, la falta de tiempo y el espacio dificulta una apreciación completa de la fuerza y belleza de esta disciplina matemática. Aunque hay varios ejemplos que un profesor puede utilizar para mostrar el ingenio de este asunto, hemos seleccionado una que toma algunos elementos simples de un curso típico de Introducción a la Física y, además, muestra algunas manipulaciones elementales con productos infinitos, algo que normalmente no se toca en el tratamiento estándar.

II. EL EJEMPLO

La cuestión en el estudio considera que la determinación del centro de masa de un arco de circunferencia. Buscamos el vector (x_{CM}, y_{CM}) que especifica las coordenadas del centro de masa. Supongamos que el arco es uniforme (es decir, masa/longitud es una constante), con un radio a y un ángulo central 2θ.

El argumento central que usaremos para obtener la coordenada y_{CM} es el simple hecho de que el centro de masa de dos masas iguales se encuentra en el punto medio de la línea que los une. Este simple hecho intuitivamente evidente, más algunas consideraciones simples de simetría y conceptos básicos de trigonometría serán los únicos supuestos de este ejemplo.

Es evidente que al poner el sistema de coordenadas como se muestra en la Fig. 1, por consideraciones de simetría $x_{CM} = 0$.

Entonces, el anillo uniforme está compuesto por una serie de elementos de igual masa, como los marcados A y B en la Fig. 1. El centro de masa de este sistema de dos partículas está en el punto C, el centro de la cuerda AB. Si tenemos en cuenta cualquier otro par de puntos A'B' distantes entre sí la misma longitud, el centro de masa de este nuevo sistema de dos partículas está en el punto C' en el centro de la cuerda A'B'.

Al continuar este proceso, se cubre todo el arco teniendo en cuenta las demás cuerdas similares A"B", A'"B'", etc. (que no se muestran en la figura) y la obtención de sus respectivos centros de las masas de C", C''', etc. El lugar geométrico de dichos centros está en un arco de circunferencia con radio $a_1=a\cos(\theta/2)$ y ángulo central θ y este nuevo arco (por construcción) será también de densidad lineal constante.

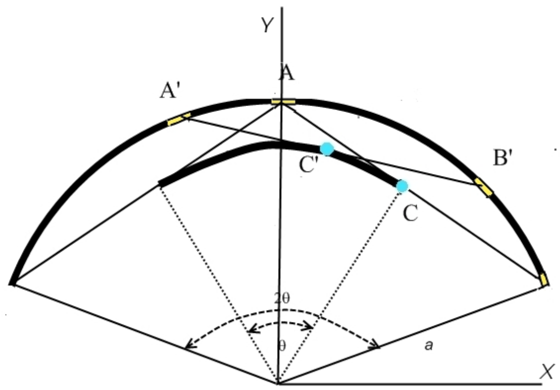

FIGURA 1. Un arco de circunferencia con radio *a* y ángulo central 2θ. C y C' son los centros de masa de los pares de puntos ubicados en los extremos de las cuerdas AB y A'B'.

Entonces el problema original se reduce a calcular el centro de masa de este arco más pequeño (geométricamente equivalente al anterior).

De nuevo, se puede re usar el argumento anterior e iterar a arcos sucesivamente más pequeños, con ángulos centrales $\theta/2$, $\theta/4$, etc., con radios $a_2=a_1\cos(\theta/4)$, $a_3=a_2\cos(\theta/8)$, etc., y entonces se obtiene como límite:

$$y_{cm}=a\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)..., \qquad (1)$$

Es posible obtener un resultado compacto (ver Apéndice) para la ecuación anterior que nos entrega:

$$y_{cm}=a\frac{\sin\theta}{\theta} \qquad (2)$$

Aunque ingenioso, el método descrito es claramente más complejo que el utilizado actualmente usando cálculo elemental.

Volviendo al tratamiento habitual contemporáneo y usando las coordenadas polares convencionales, la coordenada y_{CM} se obtiene fácilmente:

$$y_{cm}=\frac{a}{2\theta}\int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta'\right)d\theta'. \qquad (3)$$

Esta última expresión es fácilmente integrable, obteniéndose la Ec. 2. De esta manera, se evidencia la potencia del cálculo infinitesimal. Sin embargo, el argumento de este tratamiento -que no utiliza el cálculo- muestra facetas que no entrega el desarrollo convencional.

Para la prueba del apéndice hemos utilizado el argumento descrito en el texto de Jeans [5]. Este problema es descrito en un contexto mecánico convencional por Resnick *et al*., [6] (u otro texto cualquiera de física introductoria). Chrernoutsan [7], resolvió la misma cuestión invocando argumentos basados en energía. El capítulo IV del texto ya citado de Jeans contiene un conjunto de hermosos problemas relacionados con este tema.

II. CONCLUSIONES

Hemos calculado el centro de masa de un arco de circunferencia con densidad de masa uniforme utilizando un método *ad-hoc* que no recurre al cálculo infinitesimal. Este ejercicio nos muestra la enorme simplificación que nos entrega el cálculo infinitesimal. El énfasis en estas simples ideas puede poner en contexto la enseñanza de la mecánica introductoria.

REFERENCIAS

[1] Arquímedes, *Quadrature of the parabola*, trabajos compilados por T. L. Health, *The works of Archimedes*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1897) http://www.archive.org/details/worksofarchimede029517mbp, (retrived July 2010).

[2] Galilei, G., *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias*, traducción de J. San Román Villasante con comentarios matemáticos de T. Isnardi, (Losada, Buenos Aires, 1945).

[3] Wörner, C. H. y Iommi-Amunátegui, G., *Galileo's treatment of the center of gravity of solids*, European Journal of Physics **28**, 643-648 (2007).

[4] Wörner, C. H., *Galileo's method proves useful in today's classroom*, Physics Education **42**, 437-438 (2007).

[5] Jeans, J. H., *An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics*, (Ginn and Co., Boston, 1907), p. 125.

[6] Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S., *Physics*, 4th Ed. (Wiley, New York, 1992), p. 187.

[7] Chernoustsan, A., Problema P72, Quantum **3**, p. 25 (1993).

APÉNDICE

Si escribimos la conocida expresión para el ángulo doble como *sin*θ*=2sin(*θ*/2)cos(*θ*/2), sin(*θ*/2= 2sin(*θ*/4)cos(*θ*/4),* y así consecutivamente, podemos escribir las ecuaciones:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin\theta}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}, \qquad \text{(A1)}$$

$$\cos\left(\frac{\theta}{8}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{8}\right)},$$

etc.

Si multiplicamos, término a término, *n* de estas ecuaciones, obtenemos:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right)...\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}. \qquad \text{(A2)}$$

En el límite, cuando $n\to\infty,\ \frac{\theta}{2^n}\to 0$, la expresión converge y $\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\to\frac{\theta}{2^n}$, de tal manera que:

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right), \qquad \text{(A3)}$$

Obteniendo finalmente, la Ec. 2:

$$y_{cm}=a\frac{\sin\theta}{\theta}. \qquad \text{(A4)}$$