Modelamiento y simulación de un robot redundante de tipo manipulador SCARA

John Kern M.[1,2], **Claudio Urrea O.**[1]
[1]*Departamento de Ingeniería Eléctrica, Universidad de Santiago de Chile, Av. Ecuador Nº 3519, Estación Central. Santiago, Chile.*
[2]*Escuela de Ingeniería Electrónica y Computación, Universidad Iberoamericana de Ciencias y Tecnología, Manuel Rodríguez Sur Nº 220, Santiago. Santiago, Chile.*

E-mail: johnkernm@gmail.com

(Recibido el 14 de Octubre de 2011; aceptado el 18 de Diciembre de 2011)

Resumen

En este trabajo se presenta el modelamiento de un robot redundante de tipo manipulador SCARA de cinco grados de libertad. Se desarrollan tres controladores: seno-coseno hiperbólico; modo deslizante y par calculado los cuales se aplican al modelo tratado. Se realiza un entorno de simulación, utilizando herramientas de programación MatLab/Simulink, que se emplea para realizar diferentes ensayos del modelo del manipulador redundante junto a cada controlador, incluyendo la dinámica de los actuadores, cuando se someten al seguimiento de una trayectoria en el espacio. Los resultados se obtienen mediante curvas comparativas e índices *rms* de los errores articulares y cartesianos.

Palabras clave: Manipuladores redundantes, modelo dinámico, controladores, simulación.

Abstract

In this paper modeling of a redundant SCARA-type five degrees of freedom robotic manipulator is presented. Three controllers are developed: hyperbolic sine and hyperbolic cosine, sliding mode and calculated torque which are applied to the model considered. We performed a simulation environment, by employing MatLab/Simulink programming tools, which is used to perform various tests on the model of redundant manipulator with each controller, including the dynamics of the actuators, when subjected to follow a desired trajectory in space. The results are obtained by means of comparative curves and rms index of joint and Cartesian errors.

Keywords: Redundant manipulators, dynamic model, controllers, simulation.

PACS: 45.40.Ln, 45.40.-f, 07.05.Dz, 07.07.Tw **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Actualmente en la industria, la utilización de robots manipuladores se ha masificado provocando un aumento en la productividad y una mejora en la calidad de los productos fabricados, gracias a una mejor repetibilidad de los movimientos de dichos robots, lo que conlleva a una mejor precisión en su desempeño. Aunque las primeras aplicaciones de estos manipuladores se hicieron en los procesos de pintura y soldadura, la industria automovilística no tardó en utilizarlos ampliando su campo de aplicación en la manipulación de: carrocerías, motores, chasis y otros [1, 2, 3, 4, 5] y requirió como consecuencia una flexibilización de su espacio de trabajo: característica que puede lograrse aumentando el número de grados de libertad del robot, es decir, dotándolo de redundancia. Sin embargo, todas estas actividades no serían posibles sin un diseño adecuado del robot y de una técnica de control. Para cumplir con este cometido se requiere del conocimiento y del estudio de un modelo matemático y de una cierta clase de "inteligencia" que logre dirigir el manipulador para cumplir con las labores asignadas. Empleando las leyes físicas básicas que gobiernan la dinámica del robot, es posible derivar un modelo que represente su comportamiento y, a través de apropiadas herramientas de programación, desarrollar un entorno de simulación para someterlo a diferentes ensayos como por ejemplo seguimientos de trayectorias.

En este artículo se aborda el modelamiento de un robot redundante de tipo manipulador SCARA de cinco grados de libertad el cual se ensaya sometiéndolo al seguimiento de una trayectoria de prueba compuesta por una espiral en el espacio cartesiano. Se elaboran tres controladores para probar el modelo: seno-coseno hiperbólico; modo deslizante y par calculado. Se desarrolla un simulador, mediante el *software* MatLab/Simulink, en el que se ejecuta el modelo del robot redundante en conjunto con cada controlador. Además, se incluye en este análisis la dinámica de los actuadores. Los resultados se consiguen mediante curvas comparativas e índices *rms* de los errores articulares y cartesianos.

II. ROBOTS REDUNDANTES

Los robots redundantes corresponden a aquellos que poseen más grados de libertad que los necesarios para realizar una determinada tarea [6, 7]. En los últimos años se ha prestado especial atención al estudio de los manipuladores redundantes, esta redundancia ha sido considerada como una característica importante en el desempeño de tareas que requieren destreza comparable a la del brazo humano, por ejemplo, en aplicaciones de la tecnología espacial como en el SPDM[4] componente esencial del *Canadarm-2*: Brazo robotizado diseñado por Canadá para la Estación Espacial Internacional, como se señala en la Fig. 1.

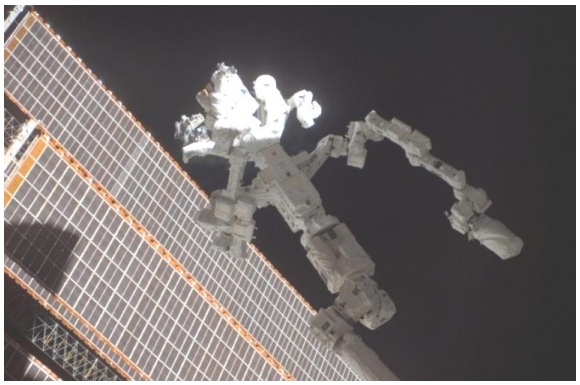

FIGURA 1. SPDM (Special Purpose Dexterous Manipulator).

Si bien la mayoría de los manipuladores no redundantes disponen de los grados de libertad suficientes para realizar sus tareas principales, por ejemplo, el seguimiento de la posición y/o la orientación, se sabe que su manipulabilidad restringida resulta en una reducción del espacio de trabajo[5], debido a las limitaciones mecánicas de las articulaciones y a la presencia de obstáculos en dicho espacio. Esto ha motivado a los investigadores a estudiar el comportamiento de los manipuladores al incorporar mayores grados de libertad (redundancia cinemática), que consiguen cumplir con tareas adicionales definidas por el usuario. Dichas tareas pueden ser representadas como funciones cinemáticas, incluyendo no sólo las funciones de la cinemática que reflejan algunas propiedades deseables del comportamiento del manipulador, como las características de las articulaciones y la evasión de obstáculos, sino que también pueden ampliarse para incluir medidas del rendimiento de la dinámica a través de la definición de funciones en el modelo dinámico del robot, por ejemplo, la fuerza de choque, el control de la inercia, etc. [8].

El manipulador robotizado en estudio incorpora dos grados de libertad adicionales dotándolo de redundancia tanto en su movimiento rotatorio, en el plano *x-y*, como en su movimiento prismático, en el eje *z*, como se aprecia en la Fig. 2.

FIGURA 2. Esquema de un manipulador robotizado con redundancia rotatoria y prismática.

Es posible generalizar la redundancia cinemática en el plano *x-y* como se muestra en la Fig. 3, en donde la variable interna θ_i establece el ángulo relativo entre dos eslabones adyacentes, y determinar la posición del efector terminal de acuerdo a la Ec. (1) [9].

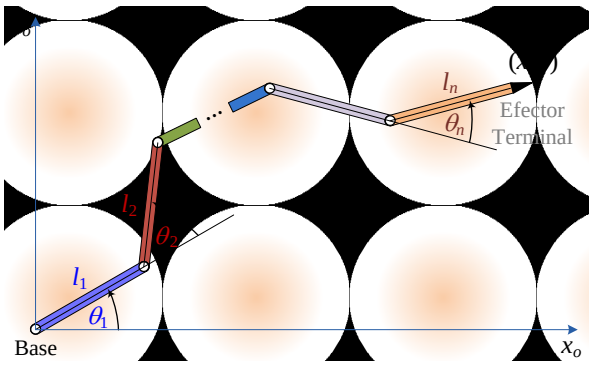

FIGURA 3. Esquema de un manipulador con redundancia rotacional generalizada en el plano *x-y*.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left[\sum_{i=1}^{n} l_i \cos\psi_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} l_i \sin\psi_i \right]^T , \tag{1}$$

donde ψ_i corresponde al ángulo absoluto del eslabón dado por la Ec. (2):

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{i} \theta_j . \tag{2}$$

[4] Robot de dos brazos telemanipuladores, que es parte del *Canadarm*-2 en la Estación Espacial Internacional (EEI).

[5] Región del espacio donde el manipulador puede posicionar su efector terminal (extremo de su muñeca), y queda determinada por la configuración geométrica del robot.

III. MANIPULADOR REDUNDANTE TIPO SCARA

La Fig. 4 muestra un esquema del manipulador redundante de tipo SCARA en el que se aprecia su redundancia tanto en su movimiento rotatorio, en el plano *x*-*y*, como en su movimiento prismático, en el eje *z*, así como la distribución de los sistemas de ejes coordenados y la ubicación de los centroides.

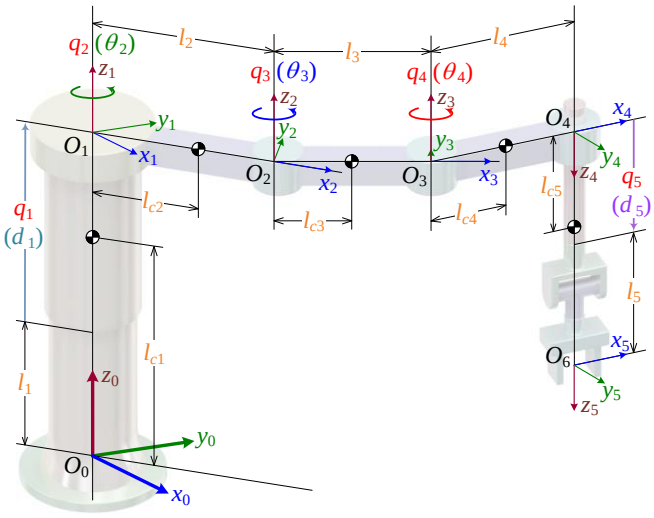

FIGURA 4. Esquema de un manipulador redundante de tipo SCARA.

A continuación, se procede a realizar los cálculos correspondientes al modelo cinemático del manipulador.

A. Cinemática

Para la obtención del modelo cinemático se ha considerado el método de Denavit-Hartember estándar cuyos parámetros se indican en la Tabla I.

TABLA I. Asignación de parámetros Denavit-Hartemberg.

Articulación i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	0º	$l_1 + d_1$	0	0º
2	θ_2	0	l_2	0º
3	θ_3	0	l_3	0º
4	θ_4	0	l_4	180º
5	0º	$l_5 + d_5$	0	0º

Luego, aplicando las transformaciones homogéneas dadas por las Ecs. (3) y (4) se obtiene el modelo cinemático directo dado por la matriz (5).

$$ {}^{i-1}\mathbf{T}_i = \mathrm{Rot}(z_{i-1},\theta_i)\cdot\mathrm{Tras}(z_{i-1},d_i)\cdot\mathrm{Tras}(x_i,a_i)\cdot\mathrm{Rot}(x_i,\alpha_i), \quad (3) $$

$$ {}^{i-1}\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\cos\alpha_i\sin\theta_i & \sin\alpha_i\sin\theta_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\alpha_i\cos\theta_i & -\sin\alpha_i\cos\theta_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4) $$

$$ \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{234} & s_{234} & 0 & l_2 c_2 + l_3 c_{23} + l_4 c_{234} \\ s_{234} & -c_{234} & 0 & l_2 s_2 + l_3 s_{23} + l_4 s_{234} \\ 0 & 0 & -1 & l_1 + d_1 - l_5 - d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5) $$

donde:

$$ s_2 = \sin\theta_2, \qquad s_{23} = \sin(\theta_2+\theta_3), \qquad s_{234} = \sin(\theta_2+\theta_3+\theta_4), $$

$$ c_2 = \cos\theta_2, \qquad c_{23} = \cos(\theta_2+\theta_3), \qquad c_{234} = \cos(\theta_2+\theta_3+\theta_4). $$

La obtención de la cinemática inversa en un robot redundante requiere contemplar de diferentes métodos y seleccionar el más adecuado de acuerdo a las consideraciones del modelo. Si se utilizan matrices de transformación homogénea es necesario despejar las *n* variables q_i en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p** correspondientes al modelo cinemático directo, como se señala en la expresión (6):

$$ \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}, \quad (6) $$

donde los elementos t_{ij} son funciones de las coordenadas articulares $[q_1,\ldots,q_n]^T$, de esta forma es posible pensar que mediante ciertas combinaciones de las 12 ecuaciones planteadas en (6), se puedan despejar las *n* variables articulares q_i en función de las componentes de los vectores **n**, **o**, **a** y **p**. En la mayoría de los casos este método es tedioso, apareciendo ecuaciones trascendentes. Sin embargo, si se consideran tres grados de libertad, puede simplificarse el procedimiento de la siguiente forma:

$$ \mathbf{T} = {}^0\mathbf{T}_1\,{}^1\mathbf{T}_2\,{}^2\mathbf{T}_3, \quad (7) $$

reordenando se obtiene:

$$ \left({}^0\mathbf{T}_1\right)^{-1}\mathbf{T} = {}^1\mathbf{T}_2\,{}^2\mathbf{T}_3 $$

$$ \left({}^1\mathbf{T}_2\right)^{-1}\left({}^0\mathbf{T}_1\right)^{-1}\mathbf{T} = {}^2\mathbf{T}_3, \quad (8) $$

puesto que **T** es conocida, los miembros a la izquierda en las expresiones (8) son funciones de las variables articulares $(q_1,\ldots,q_k)$ mientras que los miembros de la derecha lo son de las variables articulares $(q_{k+1},\ldots,q_n)$, de este modo es posible reducir la complejidad en la obtención de las variables articulares.

Aplicando este método a los tres grados de libertad rotatorios que rigen el movimiento del robot en el plano *x-y*, como se indica en la Fig. 5, se obtendrán múltiples soluciones. Para resolver esta limitación se establece la condición señalada por la Ec. (9):

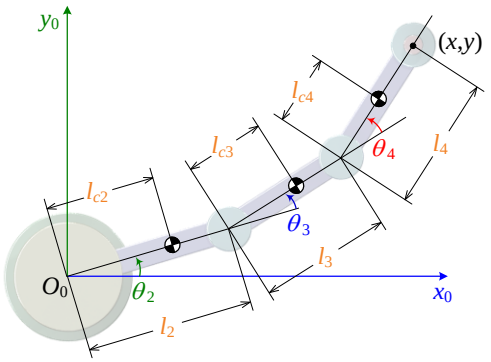

FIGURA 5. Esquema de los tres GDL rotatorios del manipulador robotizado redundante de tipo SCARA.

$$\theta_4 = \theta_3. \tag{9}$$

De acuerdo a estas consideraciones, y luego de adecuadas simplificaciones, se obtiene el modelo cinemático inverso expresado por:

$$\theta_3 = \pi \pm \arccos(\alpha), \tag{10}$$

$$\alpha = l_2(l_1+l_3)/4l_1l_3 \pm \ldots$$
$$\left(\left(4l_1l_3-{l_2}^2\right)\left(2l_1l_3-{l_1}^2-{l_3}^2\right)+4l_1l_3\left(x^2+y^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}/4l_1l_3, \tag{11}$$

$$\theta_2 = -2\arctan(\beta), \tag{12}$$

$$\beta = \frac{x \pm \left(x^2+y^2-\mathrm{s}^2{}_3\left(4l_3\,\mathrm{c}_3\left(l_3\,\mathrm{c}_3+l_2\right)+{l_2}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{y+l_2\,\mathrm{s}_3+l_3\,\mathrm{s}_{2\cdot3}}, \tag{13}$$

$$d_5 = l_1+d_1-l_5-z, \tag{14}$$

en donde z y d_1 son conocidos.

B. Dinámica

Teniendo presente el manipulador hasta aquí expuesto, es necesario obtener ahora su modelo dinámico. Para este cometido se utiliza la formulación de Lagrange-Euler que se basa en el principio de conservación de la energía [10]. Así, es necesario obtener la energía cinética y la energía potencial del manipulador. Por lo tanto, para obtener la ecuación dinámica del manipulador robotizado, se debe determinar [11]:

- la energía cinética y potencial del manipulador,
- el Lagrangiano[6] (Ec. (15)), y
- sustituir en la ecuación de Lagrange-Euler (16),

$$L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = K(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})-U(\mathbf{q}), \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)-\frac{\partial L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}}, \tag{16}$$

donde:

L : Función Lagrangiana (Lagrangiano).
K : Energía cinética.
U : Energía potencial.
$\mathbf{q}$: Vector de coordenadas generalizadas (articulares).
$\dot{\mathbf{q}}$: Vector de velocidades generalizadas (articulares).
$\boldsymbol{\tau}$: Vector de fuerzas generalizadas (fuerzas y pares).

De esta manera, el modelo dinámico de un manipulador de *n* articulaciones puede expresarse a través de la Ec. (17) [9, 12, 13]:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(q,\dot{q})+\mathbf{G}(q)+\mathbf{F}(\dot{q}), \tag{17}$$

donde:

$\boldsymbol{\tau}$: Vector de fuerzas generalizadas (de dimensión $n\times1$).
$\mathbf{M}$: Matriz de inercia (de dimensión $n\times n$).
$\mathbf{C}$: Vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis (de dimensión $n\times1$).
q : Componentes del vector de posición de las articulaciones.
$\dot{q}$: Componentes del vector de velocidad de las articulaciones.
$\mathbf{G}$: Vector de fuerza gravitatoria (de dimensión $n\times1$).
$\ddot{\mathbf{q}}$: Vector de aceleración de las articulaciones (de dimensión $n\times1$).
$\mathbf{F}$: Vector de fuerzas de fricción (de dimensión $n\times1$).

Por lo tanto, de acuerdo a las Ecs. (15), (16) y (17) el modelo dinámico para el manipulador robotizado redundante puede expresarse a través de las Ecs. (18) a (35):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & M_{15} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & M_{25} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} & M_{35} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} & M_{45} \\ M_{51} & M_{52} & M_{53} & M_{54} & M_{55} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

[6] Función escalar que se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial de un sistema mecánico.

$$M_{11} = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5, \tag{19}$$

$$M_{12} = M_{21} = M_{13} = M_{31} = M_{14} = M_{41} = \ldots \\ M_{25} = M_{52} = M_{35} = M_{53} = M_{45} = M_{54} = 0 \tag{20}$$

$$M_{15} = M_{51} = -m_5 \tag{21}$$

$$\begin{aligned} M_{22} = {} & l_{c2}{}^2 m_2 + \left(l_2{}^2 + l_{c3}{}^2 + 2 l_2 l_{c3} \mathrm{c}_3\right) m_3 + \ldots \\ & \left(l_2{}^2 + l_3{}^2 + l_{c4}{}^2 + 2 l_2 l_3 \mathrm{c}_3\right) m_4 + \ldots \\ & 2\left(l_3 l_{c4} \mathrm{c}_4 + l_2 l_{c4} \mathrm{c}_{34}\right) m_4 + \ldots \\ & \left(l_2{}^2 + l_3{}^2 + l_4{}^2 + 2 l_2 l_3 \mathrm{c}_3\right) m_5 + \ldots \\ & 2\left(l_3 l_4 \mathrm{c}_4 + l_2 l_4 \mathrm{c}_{34}\right) m_5 + \ldots \\ & I_{2zz} + I_{3zz} + I_{4zz} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} M_{23} = M_{32} = {} & \left(l_{c3}{}^2 + l_2 l_{c3} \mathrm{c}_3\right) m_3 + I_{3zz} + I_{4zz} + \ldots \\ & \left(l_3{}^2 + l_{c4}{}^2 + l_2 l_3 \mathrm{c}_3 + 2 l_3 l_{c4} \mathrm{c}_4\right) m_4 + \ldots \\ & \left(l_2 l_{c4} \mathrm{c}_{34}\right) m_4 + \left(l_2 l_4 \cos_{34}\right) m_5 \ldots + \\ & \left(l_3{}^2 + l_4{}^2 + l_2 l_3 \mathrm{c}_3 + 2 l_3 l_4 \mathrm{c}_4\right) m_5 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} M_{24} = M_{42} = {} & \left(l_{c4}{}^2 + l_3 l_{c4} \mathrm{c}_4 + l_2 l_{c4} \mathrm{c}_{34}\right) m_4 + \ldots \\ & \left(l_4{}^2 + l_3 l_4 \mathrm{c}_4 + l_2 l_4 \mathrm{c}_{34}\right) m_5 + I_{4zz} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} M_{33} = {} & l_{c3}{}^2 m_3 + \left(l_3{}^2 + l_{c4}{}^2 + 2 l_3 l_{c4} \mathrm{c}_4\right) m_4 + \ldots \\ & \left(l_3{}^2 + l_4{}^2 + 2 l_3 l_4 \mathrm{c}_4\right) m_5 + I_{3zz} + I_{4zz} \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} M_{34} = M_{43} = {} & \left(l_{c4}{}^2 + l_3 l_{c4} \mathrm{c}_4\right) m_4 + \ldots \\ & \left(l_4{}^2 + l_3 l_4 \mathrm{c}_4\right) m_5 + I_{4zz} \end{aligned} \tag{26}$$

$$M_{44} = l_{c4}{}^2 m_4 + l_4{}^2 m_5 + I_{4zz} \tag{27}$$

$$M_{55} = m_5 \tag{28}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} \end{bmatrix}^T \tag{29}$$

$$C_{11} = C_{15} = 0 \tag{30}$$

$$\begin{aligned} C_{12} = {} & -\left(l_{c3} m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_3 \cdot \dot{\theta}_3{}^2 + \ldots \\ & \left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_{34} \cdot \dot{\theta}_3{}^2 + \ldots \\ & -\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right)\left(l_2 \mathrm{s}_{34} + l_3 \mathrm{s}_4\right) \dot{\theta}_4{}^2 + \ldots \\ & -2\left(l_{c3} m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_3 \cdot \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \ldots \\ & \left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_{34} \cdot \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 + \ldots \\ & -2\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right)\left(l_2 \mathrm{s}_{34} + l_3 \mathrm{s}_4\right) \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \ldots \\ & -2\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right)\left(l_3 \mathrm{s}_4 + l_2 \mathrm{s}_{34}\right) \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} C_{13} = {} & \left(l_{c3} m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_3 \cdot \dot{\theta}_2{}^2 + \ldots \\ & \left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_2 \mathrm{s}_{34} \cdot \dot{\theta}_2{}^2 + \ldots \\ & -\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_3 \mathrm{s}_4 \cdot \dot{\theta}_4{}^2 + \ldots \\ & -2\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_3 \mathrm{s}_4 \cdot \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_4 + \ldots \\ & -2\left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_3 \mathrm{s}_4 \cdot \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_4 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} C_{14} = {} & \left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right)\left(l_3 \mathrm{s}_4 + l_2 \mathrm{s}_{34}\right) \dot{\theta}_2{}^2 + \ldots \\ & \left(l_{c4} m_4 + l_4 m_5\right) l_3 \mathrm{s}_4 \cdot \dot{\theta}_3{}^2 + \ldots \\ & 2\left(l_4 m_5 + l_{c4} m_4\right) l_3 \mathrm{s}_4 \cdot \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \left(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5\right) g_z & 0 & 0 & 0 & -m_5 g_z \end{bmatrix}^T \tag{34}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} & F_{41} & F_{51} \end{bmatrix}^T \tag{35}$$

donde:

$\mathrm{s}_3 = \sin\theta_3$, $\mathrm{s}_4 = \sin\theta_4$, $\mathrm{c}_3 = \cos\theta_3$, $\mathrm{c}_4 = \cos\theta_4$,
$\mathrm{s}_{34} = \sin\left(\theta_3 + \theta_4\right)$, $\mathrm{c}_{34} = \cos\left(\theta_3 + \theta_4\right)$,

m_1 : Masa del primer eslabón.
m_2 : Masa del segundo eslabón.
m_3 : Masa del tercer eslabón.
m_4 : Masa del cuarto eslabón.
m_5 : Masa del quinto eslabón.
l_1 : Longitud del primer eslabón.
l_2 : Longitud del segundo eslabón.
l_3 : Longitud del tercer eslabón.
l_4 : Longitud del cuarto eslabón.
l_5 : Longitud del quinto eslabón.
l_{c2} : Longitud desde el origen del 2^{o} eslabón hasta su centroide.
l_{c3} : Longitud desde el origen del 3er eslabón hasta su centroide.
l_{c4} : Longitud desde el origen del 4^{o} eslabón hasta su centroide.
l_{2zz} : Momento de inercia del 2^{o} eslabón con respecto al 1er eje *z* de su articulación.
l_{3zz} : Momento de inercia del 3er eslabón con respecto al 1er eje *z* de su articulación.

l_{4zz} : Momento de inercia del 4º eslabón con respecto al 1er eje z de su articulación.

En el modelo dinámico del manipulador, de la forma indicada en la Ec. (17), el término correspondiente a las fuerzas centrifugas y de Coriolis es frecuente expresarlo a través de una matriz $\mathbf{V_m}$, como en (36):

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(q)\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{V_m}(q,\dot{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(q) + \mathbf{F}(\dot{q}) \tag{36}$$

De acuerdo a esta consideración la matriz $\mathbf{V_m}$ puede expresarse mediante las Ecs. (37) a (46):

$$\mathbf{V_m} = \begin{bmatrix} V_{m11} & V_{m12} & V_{m13} & V_{m14} & V_{m15} \\ V_{m21} & V_{m22} & V_{m23} & V_{m24} & V_{m25} \\ V_{m31} & V_{m32} & V_{m33} & V_{m34} & V_{m35} \\ V_{m41} & V_{m42} & V_{m43} & V_{m44} & V_{m45} \\ V_{m51} & V_{m52} & V_{m53} & V_{m54} & V_{m55} \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} &V_{m11} = V_{m12} = V_{m13} = V_{m14} = V_{m15} = V_{m21} = \ldots \\ &V_{m25} = V_{m31} = V_{m35} = V_{m41} = V_{m44} = V_{m45} = \ldots \\ &V_{m51} = V_{m52} = V_{m53} = V_{m54} = V_{m55} = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} V_{m22} = &-(l_{c3}m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5) l_2 s_3 \cdot \dot{\theta}_3 + \ldots \\ &(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_2 s_{34} \cdot \dot{\theta}_3 + \ldots \\ &-(l_{c4}m_4 + l_4 m_5)(l_3 s_4 + l_2 s_{34})\dot{\theta}_4 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} V_{m23} = &-(l_{c3}m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5) l_2 s_3 \dot{\theta}_2 + \ldots \\ &-(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_2 s_{34} \dot{\theta}_2 + \ldots \\ &-(l_{c3}m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5) l_2 s_3 \dot{\theta}_3 + \ldots \\ &-(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_2 s_{34} \dot{\theta}_3 + \ldots \\ &-((l_{c4}m_4 + l_4 m_5)(l_3 s_4 + l_2 s_{34}))\dot{\theta}_4 \end{aligned} \tag{40}$$

$$V_{m24} = -(l_{c4}m_4 + l_4 m_5)(l_3 s_4 + l_2 s_{34})(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \tag{41}$$

$$\begin{aligned} V_{m32} = &(l_{c3}m_3 + l_3 m_4 + l_3 m_5) l_2 s_3 \cdot \dot{\theta}_2 + \ldots \\ &(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_2 s_{34} \cdot \dot{\theta}_2 + \ldots \\ &-(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_3 s_4 \cdot \dot{\theta}_4 \end{aligned} \tag{42}$$

$$V_{m33} = -(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_3 s_4 \cdot \dot{\theta}_4 \tag{43}$$

$$V_{m34} = -(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_3 s_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_4) \tag{44}$$

$$\begin{aligned} V_{m42} = &(l_{c4}m_4 + l_4 m_5)(l_2 s_{34} + l_3 s_4)\dot{\theta}_2 + \ldots \\ &(l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_3 s_4 \cdot \dot{\theta}_3 \end{aligned} \tag{45}$$

$$V_{m43} = (l_{c4}m_4 + l_4 m_5) l_3 s_4 (\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \tag{46}$$

IV. DINÁMICA DE LOS ACTUADORES

Los actuadores considerados en este estudio corresponden a servomotores, los cuales están constituidos por un motor de corriente continua, un juego de engranajes para la reducción de velocidad de giro y aumento de torque en su eje motriz, un potenciómetro conectado a este eje de salida, que es utilizado para conocer la posición, y un circuito de control de realimentación que convierte una señal de entrada de tipo modulación por ancho de pulsos PWM (*Pulse-Width Modulation*) a tensión, comparándola con la posición realimentada para luego amplificarla y accionar un puente H para producir un giro a una determinada velocidad [3].

En las Fig. 6 y 7 se aprecian un diagrama esquemático y un diagrama de bloques de un servomotor acoplado a un manipulador robotizado como carga, respectivamente [14].

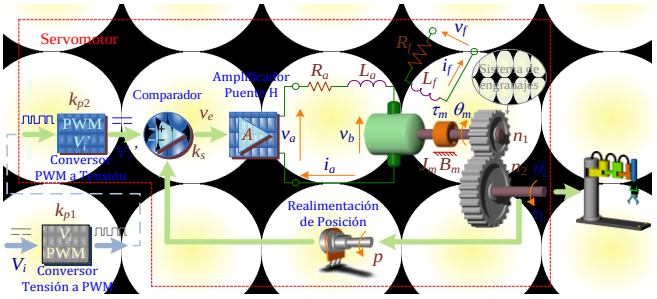

FIGURA 6. Diagrama esquemático de un servomotor acoplado a un manipulador robotizado como carga.

El modelo dinámico de los servomotores contemplados ha sido desarrollado por los autores en [14], y está dado por las expresiones (47) y (48):

$$\begin{aligned} \tau_L = &\frac{1}{n}\left(\frac{k_a}{R_a} A k_s k_p v_i - J_m \frac{1}{n}\ddot{q}\right) - \ldots \\ &\frac{1}{n}\left(\left(\frac{k_a k_b}{R_a} + B_m\right)\frac{1}{n}\dot{q} + \frac{k_a}{R_a} A k_s pq + f_{ec}\left(\frac{1}{n}\dot{q}\right)\right) \end{aligned} \tag{47}$$

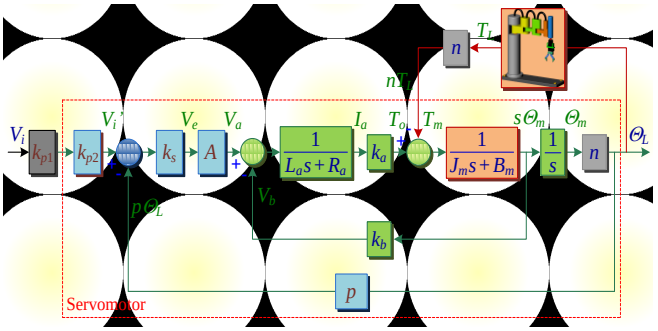

FIGURA 7. Diagrama de bloques de un servomotor acoplado a un manipulador robotizado como carga.

$$f_{ec}(\dot{q}) = F_{ec1}\tanh(k\dot{q})\left(1+\operatorname{sgn}(\dot{q})\right)/2+... \\ F_{ec2}\tanh(k\dot{q})\left(1-\operatorname{sgn}(\dot{q})\right)/2 \quad (48)$$

donde:

n : Relación de engranajes (n_1/n_2).
k_a : Constante de par del motor.
R_a : Resistencia de armadura.
A : Ganancia del amplificador de corriente (puente H).
k_s : Sensibilidad del comparador.
k_p : Ganancia total de la conversión PWM ($k_{p1} \cdot k_{p2}$).
v_i : Tensión de entrada al servomotor.
J_m : Momento de inercia del motor.
k_b : Constante de fuerza electromotriz inversa.
B_m : Fricción viscosa del motor.
p : Ganancia del potenciómetro de posición.
k : Ganancia de la pendiente de la función tanh.

k es una constante que utilizada para aumentar o reducir la pendiente de la curva en el cruce por cero.

V. CONTROLADORES CONSIDERADOS

A continuación, se señala un resumen de los controladores considerados para la evaluación: del modelo del robot en conjunto con sus actuadores y de sus respectivos desempeños.

A. Controlador Seno-Coseno Hiperbólico

Este controlador que fue presentado en [15], está compuesto por una parte proporcional basada en funciones seno y coseno hiperbólico, una parte derivativa basada en un seno hiperbólico y una compensación de gravedad, como se indica en la Ecs. (49) y (50).

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K_p}\sinh(\mathbf{q_e})\cosh(\mathbf{q_e})+... \\ -\mathbf{K_v}\sinh(\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (49)$$

$$\mathbf{q_e} = \mathbf{q_d} - \mathbf{q} \quad (50)$$

donde:

$$\mathbf{K_p} = \operatorname{diag}(K_{p1}, K_{p2}, \ldots, K_{pn}) \quad (51)$$

$\mathbf{K_p}$: Matriz de ganancia proporcional, diagonal y definida positiva (de dimensión $n \times n$).

$$\mathbf{K_v} = \operatorname{diag}(K_{v1}, K_{v2}, \ldots, K_{vn}) \quad (52)$$

$\mathbf{K_v}$: Matriz de ganancia derivativa, diagonal y definida positiva (de dimensión $n \times n$).
$\mathbf{q_e}$: Vector de error de posición de las articulaciones (de dimensión $n \times 1$).
$\mathbf{q_d}$: Vector de posición deseada de las articulaciones (de dimensión $n \times 1$).

En [15] se establece que el error de posición articular del manipulador robotizado tenderá asintóticamente a cero conforme el tiempo evoluciona al infinito:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{q_e} \to 0 \quad (53)$$

este comportamiento es demostrado analizando la Ec. (54) e identificando que el único punto de equilibrio del sistema es el origen (0, 0).

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\mathbf{q_e}\\ \dot{\mathbf{q}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} \\ a_1 = -\dot{\mathbf{q}} \\ a_2 = \mathbf{M}(\mathbf{q})^{-1}\left(\mathbf{K_p}\sinh(\mathbf{q_e})\cosh(\mathbf{q_e})+... \right. \\ \left. -\mathbf{K_v}\sinh(\dot{\mathbf{q}})-\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\right) \quad (54)$$

B. Controlador por Modo Deslizante

Los sistemas de Control por Modo Deslizante (SMC[7]) corresponden a un tipo particular de sistemas de Control de Estructura Variable (VSC[8]) que tienen la característica de cambiar de estructura, por medio de alguna ley, de manera de satisfacer características deseadas [16]. El SMD consiste en definir una ley de control que conmutando a alta frecuencia consigue llevar el estado de un sistema a una superficie denominada superficie de deslizamiento y una vez en ella mantenerlo ante posibles perturbaciones externas [17]. Una de las ventajas del control por modo deslizante es su invariancia contra las incertidumbres de parámetros y las perturbaciones externas. Sin embargo, las altas frecuencias de conmutación no pueden ser implementadas [18], además, también introduce, en los actuadores, el fenómeno de vibración "*chattering*" que debe ser evitado en muchos sistemas físicos, como sistemas de control de servos, sistemas de control de vibración de estructura y sistemas robotizados [19].

La ley de control corresponde a:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{K}\cdot\operatorname{sgn}(\mathbf{s}) \quad (55)$$

donde:

$$\mathbf{K} = \operatorname{diag}(K_1, K_2, \ldots, K_n) \quad (56)$$

$\mathbf{K}$: Matriz diagonal definida positiva (de dimensión $n \times n$).

y la superficie de deslizamiento está dada por:

$$\mathbf{s} = \mathbf{W}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q_d})+(\dot{\mathbf{q}}-\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d}) \quad (57)$$

donde:

[7] SMC: *Sliding Mode Control.*
[8] VSD: *Variable Structure Control.*

$$\mathbf{W} = \text{diag}(W_1, W_2, \ldots, W_n) \tag{58}$$

$\mathbf{W}$: Matriz diagonal definida positiva (de dimensión $n \times n$).

C. Controlador Par Calculado

Otro controlador que se desarrolla emplea ley de control por par calculado consistente en la aplicación de un par con el objeto de compensar los efectos centrífugos y de Coriolis; gravitatorios; y de fricciones, como se indica en la Ec. (59) [20]:

$$\boldsymbol{\tau} = \hat{\mathbf{M}}(q)\left(\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} + \mathbf{K}_\mathbf{v}\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{e} + \mathbf{K}_\mathbf{p}\mathbf{q}_\mathbf{e}\right) + \ldots \\ \hat{\mathbf{C}}(q,\dot{q}) + \hat{\mathbf{G}}(q) + \hat{\mathbf{F}}(\dot{q}) \tag{59}$$

donde:

$\hat{\mathbf{M}}$: Estimación de la matriz de inercia (de dimensión $n \times n$).

$\hat{\mathbf{C}}$: Estimación del vector de fuerzas centrífugas y de Coriolis (de dimensión $n \times 1$).

$\hat{\mathbf{G}}$: Estimación del vector de fuerza gravitatoria (de dimensión $n \times 1$).

$\hat{\mathbf{F}}$: Estimación del vector de fuerzas de fricción (de dimensión $n \times 1$).

$\mathbf{K_v}$: Matriz diagonal definida positiva (de dimensión $n \times n$) definida en (52).

$\mathbf{K_p}$: Matriz diagonal definida positiva (de dimensión $n \times n$) definida en (51).

$\mathbf{q_e}$: Vector de error de posición de las articulaciones (de dimensión $n \times 1$) definido en (50).

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{e} = \dot{\mathbf{q}}_\mathbf{d} - \dot{\mathbf{q}} \tag{60}$$

$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{e}$: Vector de error de velocidad de las articulaciones (de dimensión $n \times 1$).

$\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{d}$: Vector de aceleración deseada de las articulaciones (de dimensión $n \times 1$). Si los errores en las estimaciones son pequeños, los errores de las articulaciones se aproximan a una ecuación lineal como se indica en la Ec. (61).

$$\ddot{\mathbf{q}}_\mathbf{e} + \mathbf{K}_\mathbf{v}\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{e} + \mathbf{K}_\mathbf{p}\mathbf{q}_\mathbf{e} \approx 0 \tag{61}$$

VI. ENTORNO DE SIMULACIÓN

Las tres leyes de control mencionadas, junto con el modelo dinámico del manipulador redundante de tipo SCARA y de la dinámica de los actuadores, se ejecutan en una estructura de simulación, realizada utilizando herramientas de programación MatLab/Simulink, como la que se indica en la Fig. 8.

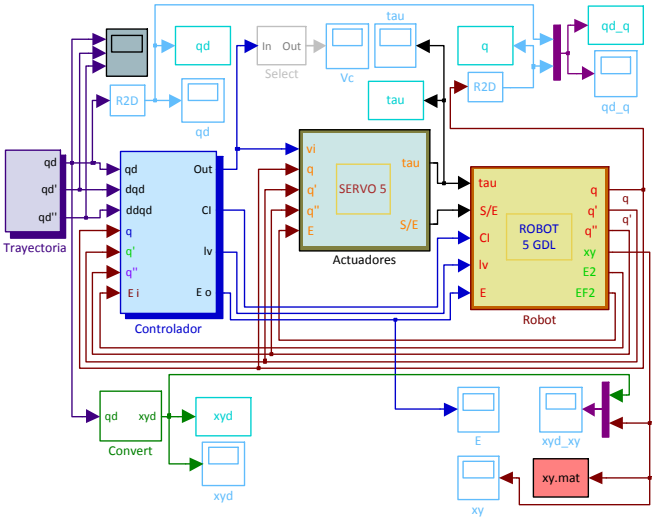

FIGURA 8. Diagrama de bloques del simulador empleado para ensayar el modelo del manipulador junto con las leyes de control mencionadas.

Los valores de los parámetros considerados en el manipulador se muestran en la Tabla II.

TABLA II. Parámetros considerados en el manipulador.

	Eslabón 1	*Eslabón 2*	*Eslabón 3*	*Eslabón 4*	*Eslabón 5*	*Unidades*
l	0.524	0.2	0.2	0.2	0.14	[m]
l_c	-	0.0229	0.0229	0.0229	-	[m]
m	1.228	1.023	1.023	1.023	0.5114	[kg]
I_{zz}	-	0.0058	0.0058	0.0058	-	[kg·m^2]
F_v	0.03	0.025	0.025	0.025	0.02	[N·m·s/rad]
F_{eca}	0.05	0.05	0.05	0.05	0.03	[N·m]
F_{ecb}	-0.05	-0.05	-0.05	-0.05	-0.03	[N·m]

La Tabla III señala el conjunto de los valores de los parámetros utilizados para cada actuador.

TABLA III. Parámetros considerados en los servomotores.

	Servo 1	*Servo 2-3-4*	*Servo 5*	*Unidades*
R_a	1.6	1.6	1.6	[Ω]
L_a	0.0048	0.0048	0.0048	[H]
J_m	0.007	0.007	0.007	[kg·m^2]
B_m	0.01413	0.01313	0.01208	[N·m·s/rad]
k_a	0.35	0.35	0.35	[N·m/A]
k_b	0.04	0.04	0.04	[V·s/rad]
F_{eca}	0.05	0.05	0.03	[N·m]
F_{ecb}	-0.05	-0.05	-0.03	[N·m]
n	1/600	1/561.6	1/561.6	[Veces]
A	15	15	15	[Veces]
k_s	10	10	10	[Veces]
k_p	1	1	1	[Veces]
p	1	1	1	[Veces]

La Tabla IV muestra el conjunto de los valores de las ganancias empleadas para cada tipo de controlador.

TABLA IV. Ganancias consideradas en los controladores.

	Tipo de Controlador		
Constantes	*Sinh-Cosh*	*Modo Deslizante*	*Par Calculado*
K_{p1}, K_{p2}, K_{p3}, K_{p4}, K_{p5}	400, 300, 200, 100, 100	—	400, 600, 700, 800, 100
K_{v1}, K_{v2}, K_{v3}, K_{v4}, K_{v5}	5, 4, 3, 2, 2	—	120, 100, 60, 50, 40
K_1, K_2, K_3, K_4, K_5	—	0.74, 1.45, 1.4, 1.35, 1.54	—
W_1, W_2, W_3, W_4, W_5	—	10, 10, 10, 10, 10	—

VII. RESULTADOS

Luego de desarrollar el modelo del manipulador y el entorno de simulación, incorporando la dinámica de los actuadores, y de establecer las leyes de control a utilizar, se determinó una trayectoria de prueba en el espacio para someter el modelo del manipulador al seguimiento de la misma y consecuentemente estudiar los resultados en función del desempeño de cada controlador, tal trayectoria se indica en la Fig. 9.

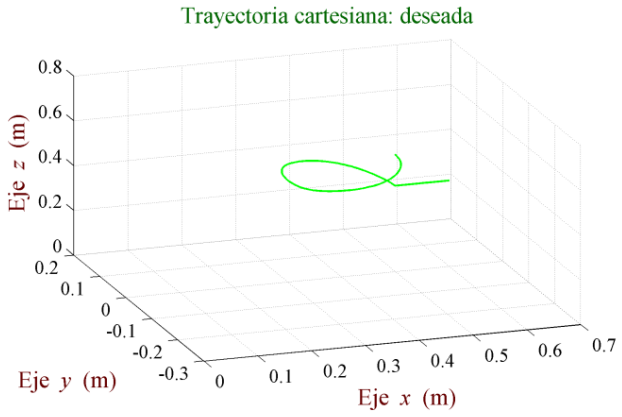

FIGURA 9. Trayectoria cartesiana de prueba.

Las Figs. 10, 11 y 12 muestran las curvas correspondientes a las comparaciones entre la trayectoria cartesiana deseada y la trayectoria cartesiana real señalando las vistas en: el espacio, el plano *x*-*y* y el plano *y*-*z*, respectivamente, esto bajo la acción del controlador seno-coseno hiperbólico, donde:

xyz_d : Trayectoria cartesiana deseada, en el espacio.
xyz : Trayectoria cartesiana real, en el espacio.
xy_d : Trayectoria cartesiana deseada, en el plano *x*-*y*.
xy : Trayectoria cartesiana real, en el plano *x*-*y*.
yz_d : Trayectoria cartesiana deseada, en el plano *y*-*z*.
yz : Trayectoria cartesiana real, en el plano *y*-*z*.

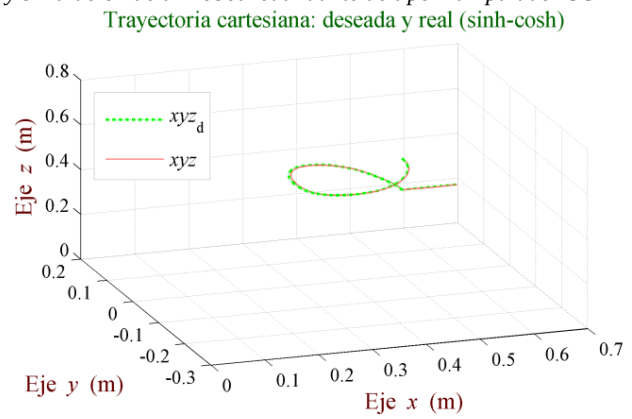

FIGURA 10. Comparación en el espacio de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

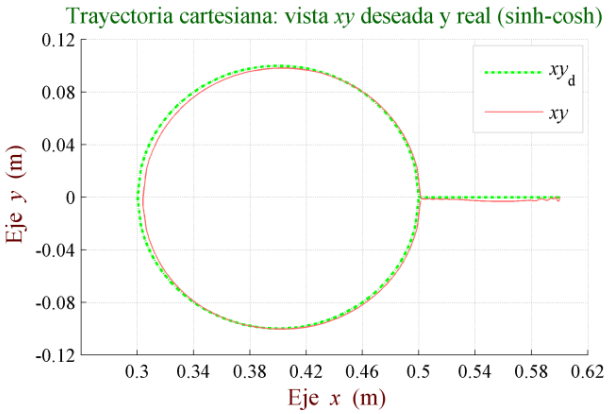

FIGURA 11. Comparación en el plano *x*-*y* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

En la Fig. 13 se señalan las curvas correspondientes a las trayectorias articulares deseadas y reales empleando el controlador seno-coseno hiperbólico, donde:

q_{dn} : Trayectoria articular deseada, donde *n* representa las articulaciones 1 a 5.
q_n : Trayectoria articular real, donde *n* representa las articulaciones 1 a 5.

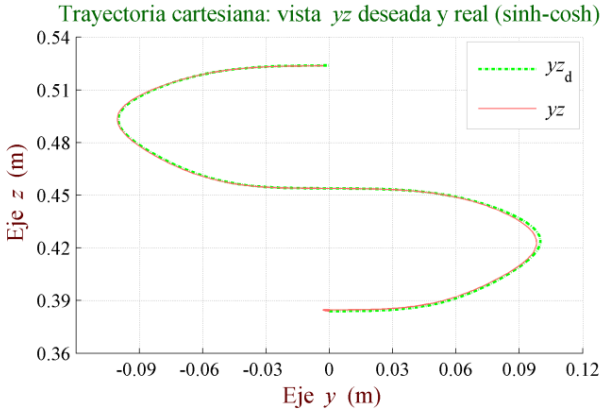

FIGURA 12. Comparación en el plano *y*-*z* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

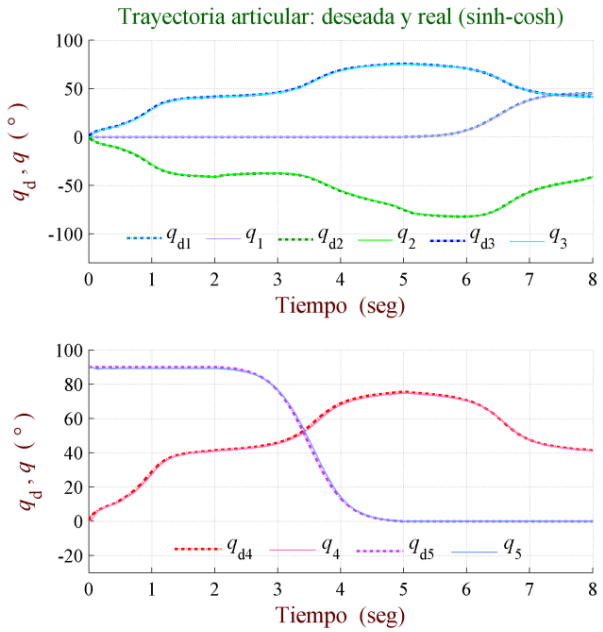

FIGURA 13. Comparación de las trayectorias articulares deseada y real utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

Las fuerzas y los torques proporcionados al robot por los actuadores, de acuerdo a la acción del controlador seno-coseno hiperbólico, exhiben en la Fig. 14, donde:

f_1 : Fuerza aplicada en la articulación 1.
τ_2 : Torque aplicado en la articulación 2.
τ_3 : Torque aplicado en la articulación 3.
τ_4 : Torque aplicado en la articulación 4.
f_5 : Fuerza aplicada en la articulación 5.

Las Figs. 15 y 16 señalan las gráficas de los errores obtenidos a partir de las trayectorias: cartesiana deseada y real, y articular deseada y real, respectivamente, utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico, donde:

e_x : Error de la trayectoria cartesiana, eje *x*.
e_y : Error de la trayectoria cartesiana, eje *y*.
e_z : Error de la trayectoria cartesiana, eje *z*.
e_n : Error de la trayectoria articular, donde *n* representa las articulaciones 1 a 5.

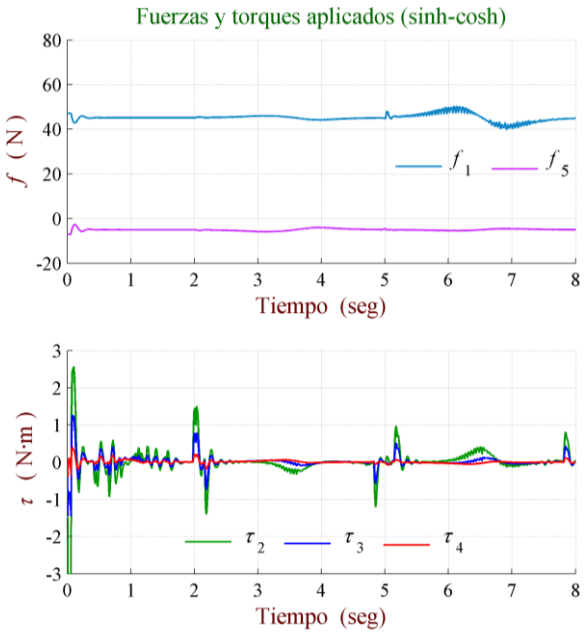

FIGURA 14. Fuerzas y torques aplicados al robot utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

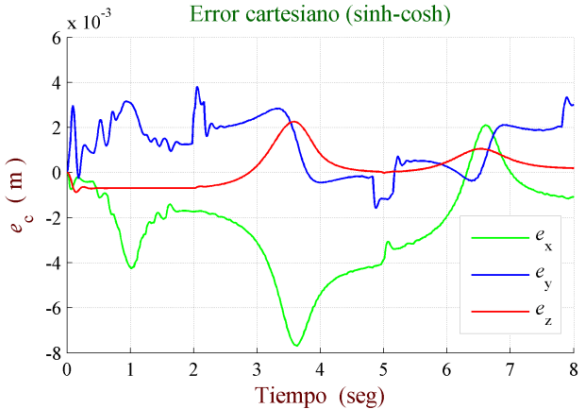

FIGURA 15. Error de la trayectoria cartesiana utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

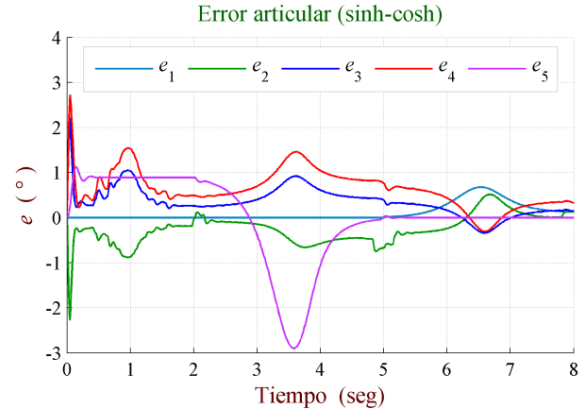

FIGURA 16. Error de la trayectoria articular utilizando el controlador seno-coseno hiperbólico.

Las comparaciones entre la trayectoria cartesiana deseada y la trayectoria cartesiana real, de acuerdo al comportamiento del controlador por modo deslizante, se indican en las Figs. 17, 18 y 19 que muestran las gráficas pertinentes en: el espacio, el plano *x*-*y* y el plano *y*-*z*, respectivamente.

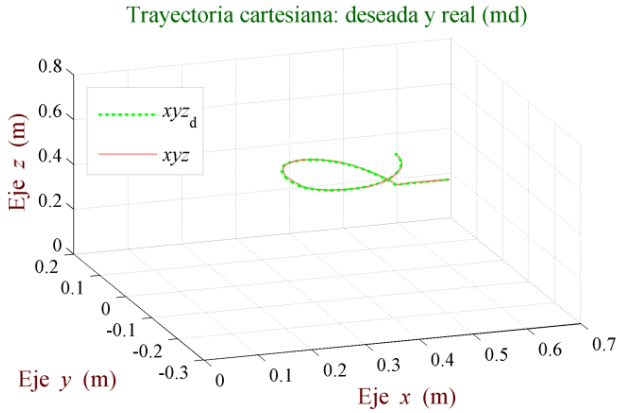

FIGURA 17. Comparación en el espacio de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador por modo deslizante.

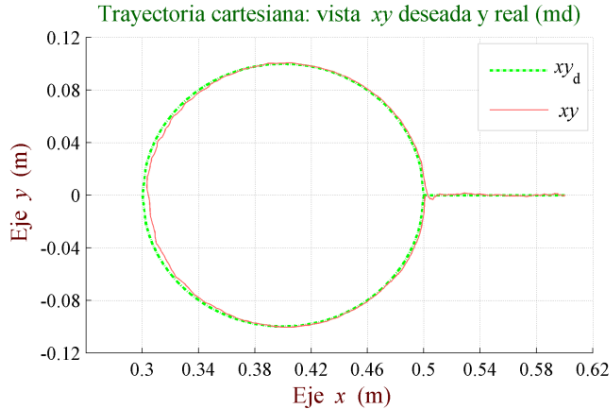

FIGURA 18. Comparación en el plano *x*-*y* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador por modo deslizante.

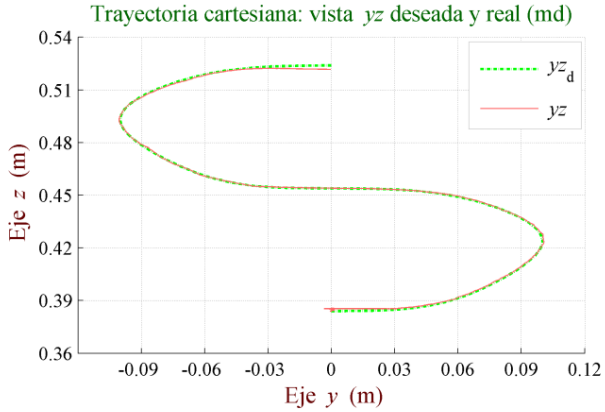

FIGURA 19. Comparación en el plano *y*-*z* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador por modo deslizante.

En la Fig. 20 se indican las gráficas relacionadas a las trayectorias articulares deseadas y reales mediante el uso del controlador por modo deslizante.

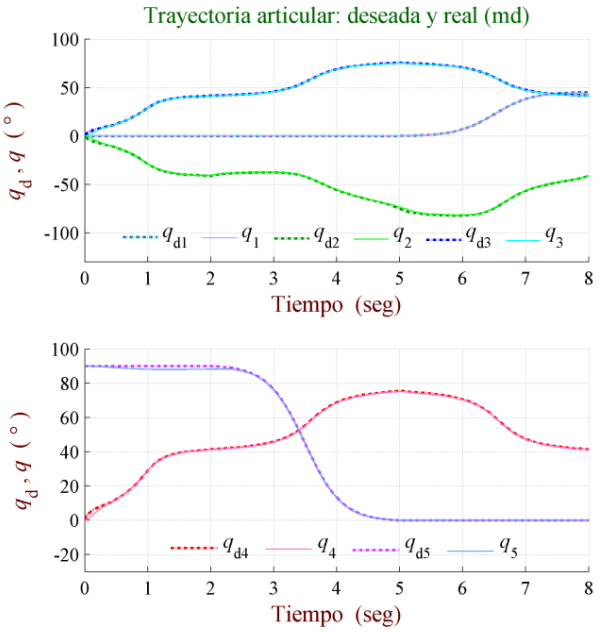

FIGURA 20. Comparación de las trayectorias articulares deseada y real utilizando el controlador por modo deslizante.

La Fig. 21 grafica la respuesta de los actuadores indicando las fuerzas y los torques desarrollados durante el seguimiento de la trayectoria, cuando se utiliza el controlador por modo deslizante.

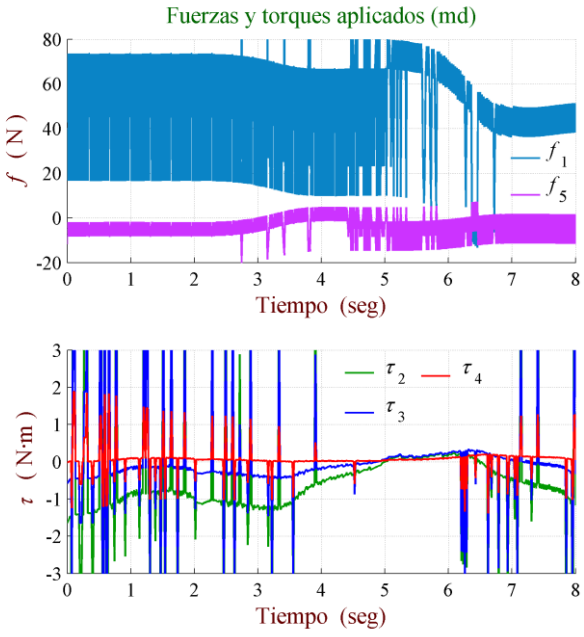

FIGURA 21. Fuerzas y torques aplicados al robot utilizando el controlador por modo deslizante.

Los errores producidos de la diferencia entre las trayectorias: cartesiana deseada y real, y articular deseada y real, aplicando el controlador por modo deslizante, se señalan a través de las Figs. 22 y 23, respectivamente.

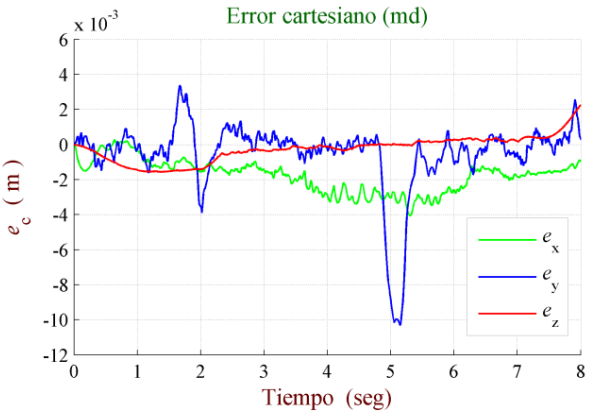

FIGURA 22. Error de la trayectoria cartesiana utilizando el controlador por modo deslizante.

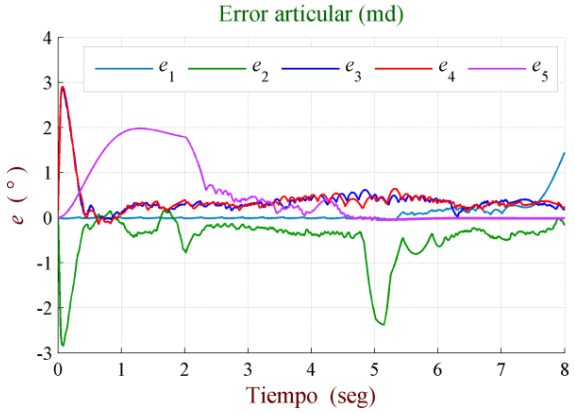

FIGURA 23. Error de la trayectoria articular utilizando el controlador por modo deslizante.

La respuesta de seguimiento del modelo del robot en el espacio articular, a través del uso del controlador par calculado, se indica en las Figs. 24, 25 y 26 señalando las curvas deseada y real en: el espacio, el plano *x*-*y* y el plano *y*-*z*, correspondientemente.

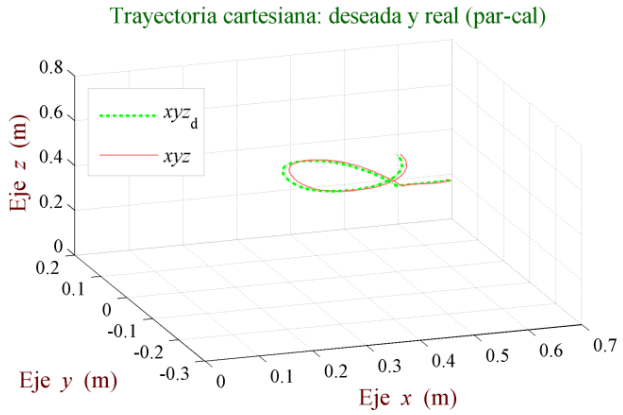

FIGURA 24. Comparación en el espacio de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador par calculado.

Las comparaciones entre la trayectoria articular deseada y la trayectoria articular real, en función del controlador par calculado, se indican en la Fig. 27.

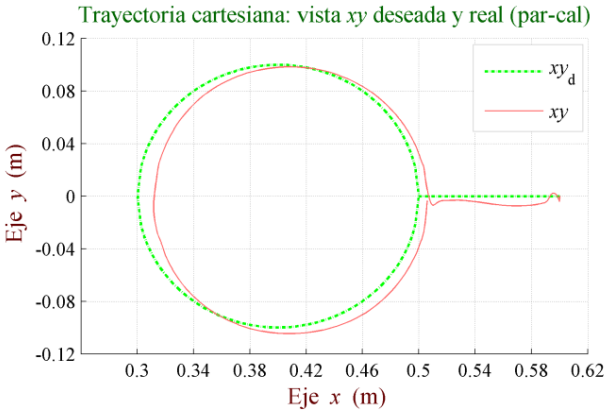

FIGURA 25. Comparación en el plano *x*-*y* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador par calculado.

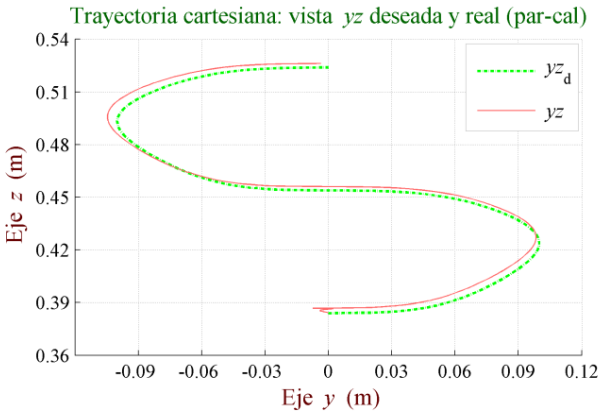

FIGURA 26. Comparación en el plano *y*-*z* de las trayectorias cartesianas deseada y real utilizando el controlador par calculado.

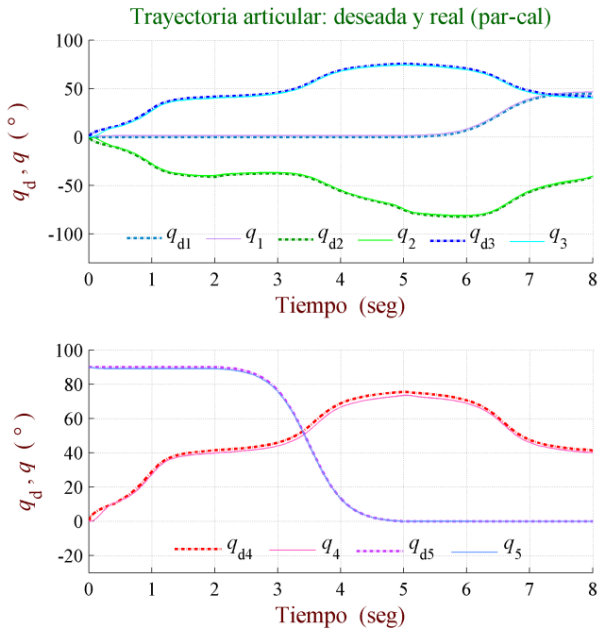

FIGURA 27. Comparación de las trayectorias articulares deseada y real utilizando el controlador par calculado.

En la Fig. 28 se señalan las curvas correspondientes a las fuerzas y los torques generados por los servomotores de acuerdo a la acción del controlador par calculado.

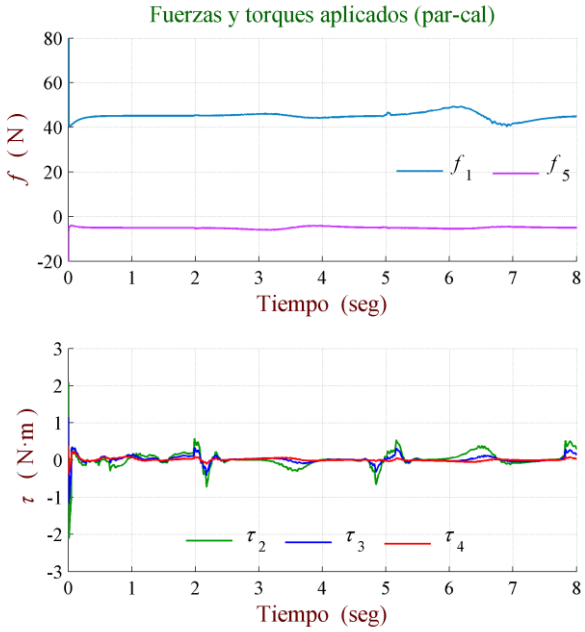

FIGURA 28. Fuerzas y torques aplicados al robot utilizando el controlador par calculado.

En las Figs. 29 y 30 se muestran las curvas de los errores obtenidos a partir de las trayectorias deseada y real: Cartesiana y articular, correspondientemente, utilizando el controlador par calculado.

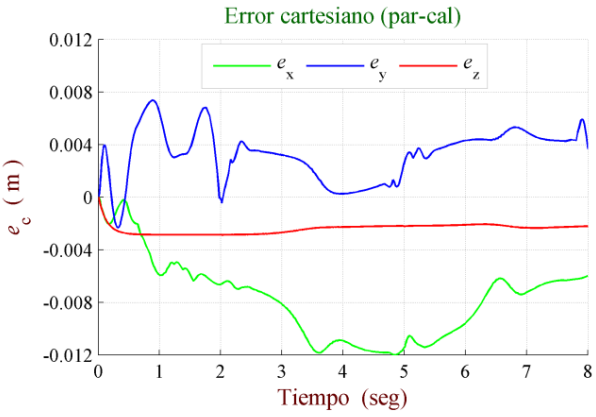

FIGURA 29. Error de la trayectoria cartesiana utilizando el controlador par calculado.

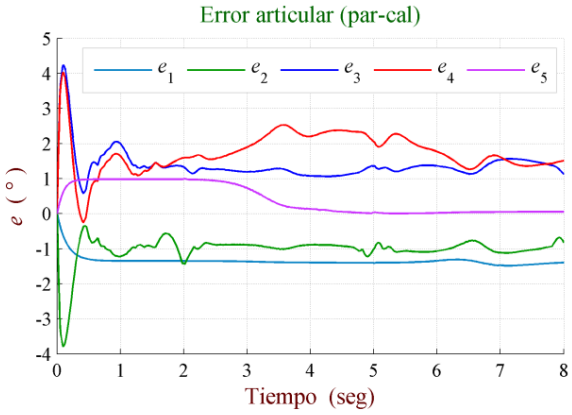

FIGURA 30. Error de la trayectoria articular utilizando el controlador par calculado.

Finalmente las Figs. 31 y 32 señalan los errores articulares y cartesianos *rms*, respectivamente, de acuerdo a la Ec. (62).

$$rms = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^{\,2}} \qquad (62)$$

Donde e_i representa tanto los errores articulares como los errores cartesianos de la trayectoria y n el número de datos.

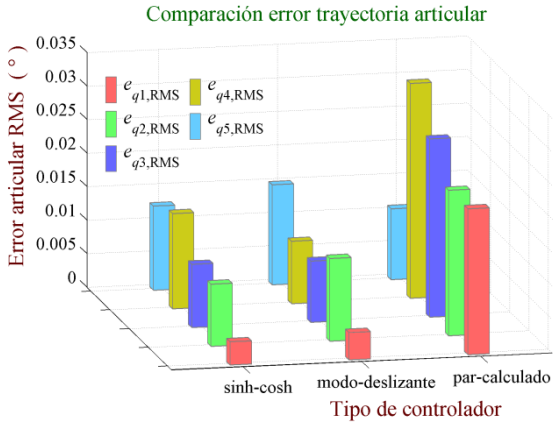

FIGURA 31. Índice de desempeño correspondiente a la trayectoria articular.

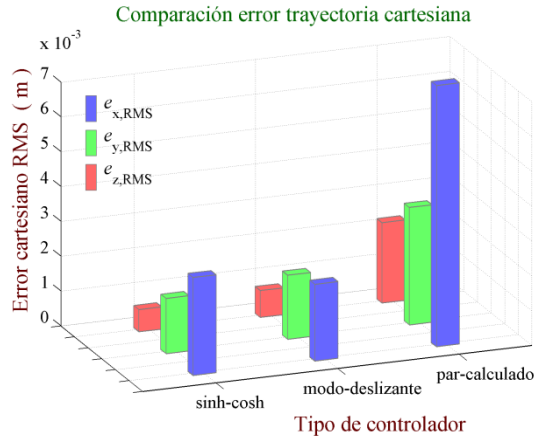

FIGURA 32. Índice de desempeño correspondiente a la trayectoria cartesiana.

VIII. CONCLUSIONES

En este artículo se desarrolló el modelo cinemático y dinámico de un robot redundante de tipo manipulador SCARA de cinco grados de libertad, utilizando los métodos de Denavit-Hartemberg y Lagrange-Euler, respectivamente. Se elaboraron tres controladores: seno-coseno hiperbólico; modo deslizante y par calculado. Se realizó un simulador, empleando el *software* MatLab/Simulink. Se presentaron los ensayos del modelo del manipulador, incluyendo la dinámica de los actuadores y en conjunto con cada controlador, mediante el seguimiento de una trayectoria de prueba compuesta por una espiral en el espacio cartesiano. Se expusieron los resultados, obtenidos a través del entorno de simulación, por medio de curvas comparativas e índices *rms* de los errores articulares y cartesianos.

A partir de los resultados obtenidos se observa que el modelo del manipulador redundante presenta un seguimiento de la trayectoria de prueba cuyos errores máximos son menos severos: al utilizar el controlador seno-coseno hiperbólico que los restantes controladores, lo que se traduce en movimientos más homogéneos del manipulador. Se aprecia que los mayores errores articulares y cartesianos, que se generan al ensayar el modelo del robot, tanto valores máximos como valores *rms*, se producen al utilizar el controlador par calculado. De esta forma los mejores resultados de desempeño del modelo del manipulador robotizado se obtienen al emplear el controlador seno-coseno hiperbólico como se indica en las Figs. 31 y 32. Es importante señalar que tanto el controlador seno-coseno hiperbólico como el controlador por modo deslizante presentan una menor complejidad de simulación, debido al no requerimiento de la segunda derivada de la posición articular, tal situación puede ser determinante si no se cuenta con procesadores de alto rendimiento, sin embargo, la implementación práctica del controlador por modo deslizante presenta las desventajas de: la alta frecuencia de conmutación del controlador y por tanto el notable deterioro de los actuadores.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con el apoyo del Departamento de Investigaciones Científicas y Tecnológicas de la Universidad de Santiago de Chile, por medio del Proyecto 060713UO.

TRABAJOS FUTUROS

Conforme al comportamiento conseguido a través de los ensayos de simulación, del modelo del robot redundante en conjunto con sus actuadores y de las distintas leyes de control tratadas, se comienza una nueva etapa en el estudio y análisis de manipuladores robotizados redundantes consistente en la implementación práctica de: robots de tipo industrial reales; de sus actuadores y de sus controladores, mediante el desarrollo del *hardware* necesario como se esquematiza en las Figs. 33 y 34.

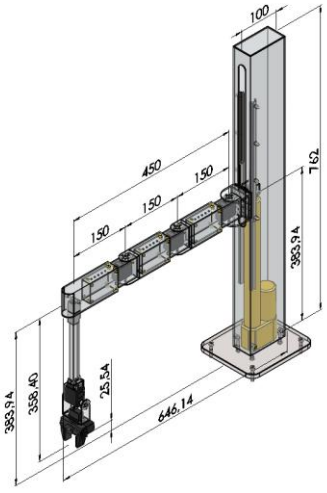

FIGURA 33. Esquema robot redundante tipo SCARA, (vista A).

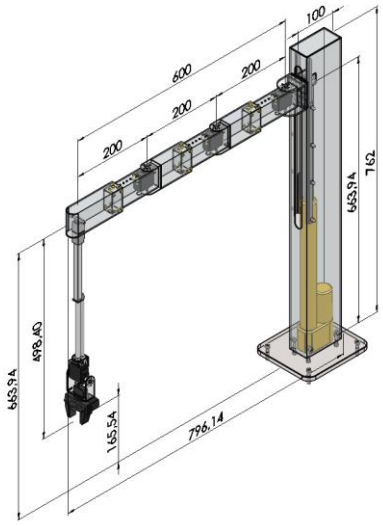

FIGURA 34. Esquema robot redundante tipo SCARA, (vista B).

REFERENCIAS

[1] Angulo, J. y Avilés, R., *Curso de Robótica*, (Paraninfo S.A., Madrid, 1989).
[2] Selig, J. M., *Introductory Robotics*, (Prentice Hall, London, 1992).
[3] Iñigo, R. y Vidal, E., *Robot Industriales Manipuladores*, (Alfaomega Grupo Editor, México, 2004).
[4] Torres, F. y otros, *Robots y Sistemas Sensoriales*, (Pearson Educación S.A., Madrid, 2002).
[5] Craig, J., *Robótica Tercera Edición*, (Pearson Educación, México, 2006).
[6] Rubí, J., *Cinemática, Dinámica y Control de Robots Redundantes y Robots Subactuados*, Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, San Sebastián, España, (2002).
[7] Ollero, A., *Robótica Manipuladores y Robots Móviles*, (Marcombo, S.A., Barcelona, España, 2001).
[8] Patel, R. y Shadpey, F., *Control of Redundant Robot Manipulators*, (Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2005).
[9] Spong, M., Hutchinson, S. y Vidyasagar, M., *Robot Modeling and Control, First Edition*, (John Wiley & Sons, Inc., New York, 2005).
[10] Lewis, F., Dawson, D. y Abdallah, Ch., *Robot Manipulator Control Theory and Practice*, (Marcel Dekker Inc., New York, 2004).
[11] Paul, R., *Robot Manipulators: Mathematics, Programming, and Control*, (The MIT Press., Cambridge, Massachussets, 1981).
[12] Angeles, J., *Fundamentals of Robotic Mechanical System: Theory, Methods, and Algorithms, Third Edition*, (Springer, New York, 2006).
[13] Craig, J., *Introduction to Robotics, Mechanics and Control*, (Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, 1986).
[14] Urrea, E. C. y Kern, J., *A New Model for Analog Servomotors. Practical Implementations*, Canadian Journal on Automation, Control and Intelligent Systems **2**, 29-38 (2011).
[15] Barahona, J., Espinosa, L. y Reyes, F., *Evaluación Experimental de Controladores de Posición tipo Saturados para Robot Manipuladores*, Puebla, México: Congreso Nacional de Electrónica, Centro de Convenciones William o Jenkins (2002).
[16] DeCarlo, R., Zak, S. y Mathews, G., *Variable Structure Control of Nonlinear Multivariable Systems: A Tutorial*, Proc., IEEE **76**, 212-232 (1988).
[17] Slotine, J. and Li, W., *Applied Nonlinear Control*, (Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1991).
[18] Xu, J., Lee, T. H., Wang, M. y Yu, X., *Design of Variable Structure Controllers with Continuous Switching Control*, Int. J. of Control **65**, 409-431 (1996).
[19] Chen, C. L. y Lin, C. J., *A Sliding Mode Control Approach to Robotic Tracking Problem*, Barcelona, Spain IFAC: 15th Triennial World Congress (2002).
[20] Siciliano, B. y Khatib, O., *Handbook of Robotics*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008).