

Rendimiento térmico de Carnot de un LASER



Víctor David Granados García, Julia Mariana Iturbe Ponce

Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Edif. 9 U. P. "Adolfo López Mateos" C. P. 073380, México D. F.

E-mail: granados@esfm.ipn.mx, ²julia.iturbe@gmail.com

(Recibido el 17 de Noviembre de 2011; aceptado el 30 de Diciembre de 2011)

Resumen

En este trabajo se hace un resumen de la teoría de la radiación térmica de cuerpo negro de un sistema con dos niveles utilizando la teoría de los coeficientes A y B de Einstein. Luego estudiamos un LASER como un sistema con tres niveles y aplicamos la teoría de Einstein para determinar la eficiencia térmica de Carnot de un LASER. Utilizamos también dos tipos de ecuaciones cinéticas para las transiciones entre dos niveles y en equilibrio probamos que la eficiencia térmica es la misma que la de Carnot en función de la temperatura de la fuente de calor y el medio. Usamos también el ciclo de Carnot en el plano TS para probar que es la misma eficiencia asumiendo que el potencial químico de la radiación es cero.

Palabras clave: Coeficientes de Einstein, eficiencia térmica de Carnot, LASER.

Abstract

In this work we present a summary on the theory of thermal black body radiation in a two-level system using the coefficients A and B of Einstein. Then we study a LASER as a three-level system and we apply Einstein's theory to determine the Carnot's thermal efficiency of a LASER. We also use two kinds of kinetic equations for the transitions between two levels and, in equilibrium, we prove that the thermal efficiency is the same as the Carnot efficiency as a function of the temperature of the heat source and the medium. We also use the Carnot cycle in the TS plane to prove that it is the same efficiency assuming that the chemical potential of the radiation is zero.

Keywords: Einstein's coefficients, Carnot thermal efficiency, LASER.

PACS: 42.55.Ah, 05.30.-d, 07.20.Pe.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

LASER es un acrónimo compuesto por las primeras letras "light amplification by stimulated emission of radiation" que significa "amplificación de luz por emisión estimulada de radiación". El principio del laser surgió del principio del máser, que es también un acrónimo de "microwave amplification by stimulated emission of radiation", es decir, "amplificación de microonda por emisión estimulada de radiación". El concepto de emisión estimulada surge con Einstein cuando en 1917 derivó la ley de radiación de Planck. Pero no fue sino hasta casi 40 años después que se vió que este proceso se podía utilizar en un dispositivo para producir microondas coherentes y, en particular, un nuevo tipo de luz, luz laser. Los láseres siguen siendo un campo lleno de actividad, un campo que continua expandiendo fronteras científicas y tecnológicas. Es por esto que resulta un ejemplo atractivo para aplicar los conocimientos adquiridos por alumnos de nivel licenciatura en los cursos de física estadística y termodinámica. El primer tratamiento que se le da en este trabajo ha sido ya desarrollado y puede encontrarse en algunos libros de texto [1, 2, 3, 4]; sin embargo, el segundo tratamiento es más novedoso.

II. COEFICIENTES A Y B DE EINSTEIN

Cuando el número promedio de partículas por estado cuántico es mucho menor que uno, las distribuciones cuánticas convergen a las distribuciones clásicas. En esta región, es particularmente útil el *factor de Boltzmann*

$$\frac{n_{Boltz}(E_2)}{n_{Boltz}(E_1)} = e^{-(E_2-E_1)/kT}, \quad (1)$$

que proporciona el número relativo de partículas por estado cuántico con dos energías diferentes E_1 y E_2 , para un sistema en equilibrio térmico a temperatura T .

Consideremos transiciones entre dos estados de energía de un átomo en presencia de un campo electromagnético. Hay tres procesos de transición: emisión espontánea, absorción estimulada y emisión estimulada.

En la emisión espontánea, el átomo se encuentra inicialmente en el estado superior de energía E_2 y decae al nivel inferior de energía E_1 por la emisión de un fotón de frecuencia $\nu_{12}=(E_2-E_1)/h$.

En el proceso de absorción estimulada el átomo es estimulado por un fotón de frecuencia ν , de un campo electromagnético aplicado al átomo, que induce una

transición del estado de baja energía al de alta energía, en tanto que un fotón es absorbido por el átomo.

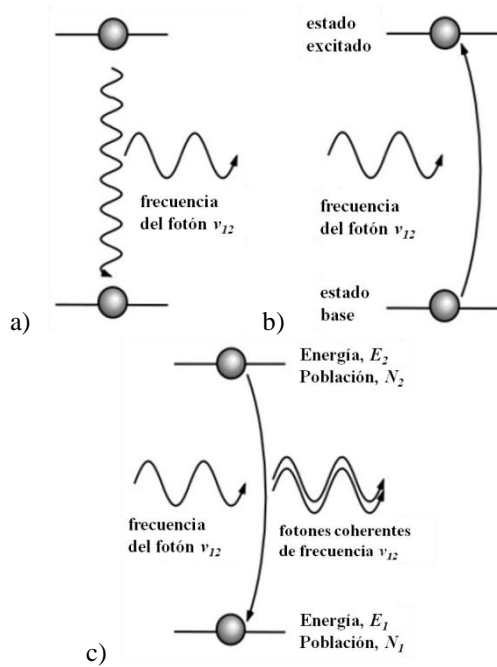


FIGURA 1. Procesos de a) emisión espontánea, b) absorción estimulada y c) emisión estimulada.

En la emisión estimulada, un fotón de frecuencia ν estimula al átomo para que realice una transición del estado de alta energía al estado de baja energía. El átomo se queda en este estado más bajo mientras que emergen dos fotones, el incidente y el emitido.

A continuación se mostrará la relación cuantitativa entre estos tres procesos. Sea $\rho(\nu)$ la densidad espectral de radiación electromagnética aplicada a los átomos. Considere que existen n_1 átomos en un estado de energía E_1 y n_2 en un estado E_2 , donde $E_2 > E_1$. La probabilidad por átomo por unidad de tiempo (o razón de transición por átomo) de que un átomo en un estado 1 lleve a cabo una transición al estado 2 (absorción estimulada) será claramente proporcional a la densidad de energía $\rho(\nu)$ de la radiación aplicada a la frecuencia $\nu = (E_2 - E_1)/h$. La razón de transición para emisión estimulada también es proporcional a $\rho(\nu)$. Sin embargo, la razón de transición para emisión espontánea no contiene a $\rho(\nu)$ ya que el proceso no involucra el campo electromagnético aplicado.

Las razones de transición también dependen de las propiedades detalladas de los estados atómicos 1 y 2 a través del elemento de matriz del momento dipolar eléctrico. Por lo tanto, la probabilidad por unidad de tiempo para una transición del estado 1 al estado 2 se puede escribir como:

$$R_{1 \rightarrow 2} = B_{12}\rho(\nu), \quad (2)$$

en donde B_{12} es un coeficiente que incluye la dependencia con propiedades de los estados 1 y 2. La probabilidad por unidad de tiempo de que un átomo en el estado 2 realice una transición al estado 1 es la suma de dos términos: la probabilidad por unidad de tiempo A_{21} de emisión espontánea y la probabilidad por unidad de tiempo $B_{21}\rho(\nu)$ de emisión estimulada. De igual manera, A_{21} y B_{21} son coeficientes cuyos valores dependen de las propiedades de los estados 1 y 2, a través de los elementos de matriz apropiados. Por lo tanto:

$$R_{2 \rightarrow 1} = A_{21} + B_{21}\rho(\nu). \quad (3)$$

Si consideramos que los n_1 átomos del estado 1 y los n_2 átomos del estado 2 están en equilibrio térmico a una temperatura T con el campo de radiación de densidad de energía $\rho(\nu)$, entonces, las razones totales de absorción para los dos sistemas son iguales:

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2} = n_2 R_{2 \rightarrow 1}. \quad (4)$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$n_1 B_{12}\rho(\nu) = n_2 [A_{21} + B_{21}\rho(\nu)]. \quad (5)$$

Resolviendo esta ecuación para $\rho(\nu)$ se obtiene:

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{n_1 B_{12}}{n_2 B_{21}} - 1}. \quad (6)$$

Ahora supongamos que se puede utilizar el factor de Boltzmann, Ec. (1), con $h\nu = E_2 - E_1$ para obtener:

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{(E_2 - E_1)/kT} = e^{h\nu/kT}, \quad (7)$$

y entonces la Ec. (7) se convierte en:

$$\rho(\nu) = \frac{\frac{A_{21}}{B_{21}}}{\frac{B_{12}}{B_{21}} e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (8)$$

Esta ecuación que proporciona la densidad de energía espectral de radiación de frecuencia ν que se encuentra en equilibrio térmico a temperatura T con átomos de energía E_1 y E_2 , debe concordar con el espectro del cuerpo negro de Planck

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (9)$$

y al comparar estas dos obtenemos que:

$$\frac{B_{12}}{B_{21}} = 1 \text{ y } \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}. \quad (10)$$

Estos resultados fueron obtenidos por primera vez en 1917 por Einstein, y por lo tanto son llamados *Coefficientes A y B de Einstein*.

Podemos ver que los coeficientes de absorción estimulada y emisión estimulada son iguales. Por otro lado se puede ver que la relación del coeficiente de emisión espontánea al coeficiente de emisión estimulada varía con la frecuencia como ν^3 . Esto quiere decir, por ejemplo, que entre mayor es la diferencia de energía entre los dos estados, más probable es la emisión espontánea comparada con la emisión estimulada. También se puede obtener la relación entre la probabilidad de emisión espontánea A_{12} y la probabilidad de emisión estimulada $B_{21}\rho(\nu)$ es decir

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho(\nu)} = e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1. \quad (11)$$

Esto demuestra que, para átomos en equilibrio térmico con la radiación, la emisión espontánea es mucho más probable que la emisión estimulada si $h\nu \gg kT$. Como esta condición se aplica en transiciones electrónicas en átomos y moléculas, la emisión estimulada se puede ignorar en esas transiciones. Sin embargo, la emisión estimulada puede volverse significativa si $h\nu \approx kT$ y puede ser dominante si $h\nu \ll kT$, condición que se aplica a temperatura ambiente, a transiciones atómicas en la región del espectro correspondiente a microondas donde ν es relativamente muy pequeña.

III. LASER

La emisión inducida encuentra su aplicación tecnológica más impresionante en la producción de radiación electromagnética coherente, monocromática y altamente direccional por medio de la *amplificación de luz por medio de emisión simulada (light amplification through simulated emission)* en un dispositivo llamado *LASER*. Las componentes básicas de un láser son las siguientes:

1. Un medio laser en donde hay por lo menos dos niveles de energía separados por una brecha de energía tal que los átomos en el nivel superior puedan hacer una transición que es estimulada por la presencia de fotones de la frecuencia adecuada.
2. Algún mecanismo para repoblar el nivel de energía superior para repetir la operación.
3. Una cavidad adecuada en donde los fotones estimulantes puedan contenerse y que también contenga el medio laser.

A. Condiciones para la operación de un láser

Consideremos un material y enfoquémonos en dos niveles de energía con energías E_1 y E_0 y $E_1 > E_0$. Etiquetaremos el número de fotones sólo por su frecuencia, suprimiendo la dirección de \mathbf{k} y la polarización λ , ya que estamos hablando de fotones idénticos. El número de fotones $N(\nu)$ cambiará con el tiempo. El número crecerá debido tanto a la emisión estimulada como a la espontánea. Si el número de átomos

emisores en el nivel superior es N_1 , entonces la razón de emisión involucra la razón espontánea (emisión de un único fotón) multiplicado por $(N(\nu)+1)$ y la razón de transición, denotada por A_{10} . El decremento se debe a absorción estimulada, proporcional al número de átomos absorbentes, N_0 , A_{10} y $N(\nu)$. Hay una pérdida de fotones adicional debida a fuga, que es proporcional al número de fotones $N(\nu)$. Las pérdidas por fuga se describen por el último término de la ecuación abajo, y la cavidad debe diseñarse para hacer τ_0 lo más grande posible. Escribimos

$$\begin{aligned} \frac{dN(\nu)}{dt} &= N_1(N(\nu) + 1)A_{10} - N_0N(\nu)A_{10} \\ &\quad - \frac{N(\nu)}{\tau_0} \\ &= N(\nu) \left\{ (N_1 - N_0)A_{10} - \frac{1}{\tau_0} \right\} + N_1A_{10}, \end{aligned} \quad (12)$$

(al escribir lo anterior hemos descuidado el hecho de que diferentes niveles de energía pueden tener diferentes degeneraciones—para el propósito de nuestra discusión esto no es relevante). Vemos de esta ecuación que el número de fotones decrecerá con el tiempo a menos que

$$N_1 - N_0 > 0. \quad (13)$$

En equilibrio térmico tenemos

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{e^{-E_1/kT}}{e^{-E_0/kT}} = e^{-(E_1-E_0)/kT} = e^{-h\nu/kT}, \quad (14)$$

que siempre es menor que 1. Por lo tanto, un laser debe operar en un modo de no equilibrio y debemos crear un exceso de población de átomos en el nivel superior—esto es, una *inversión de población*. Una forma de hacer esto se describe a continuación.

B. Bombeo Óptico

Una forma de crear una inversión de población es usar un material en donde el proceso involucre transiciones entre tres niveles. La Fig. 2 muestra un sistema de tres niveles. Los niveles tienen energías $E_2 > E_1 > E_0$. El objetivo es crear una inversión de población en el nivel 1 relativo al nivel 0. El estado con energía E_2 debe tener la propiedad de que sea posible incrementar su número de ocupación por algún mecanismo, y debe decaer fácilmente al estado E_1 pero no a E_0 . El bombeo de átomos a este estado excitado se cumple por una variedad de medio, uno de los cuales es sometiendo al material a una poderosa fuente de luz incoherente, como se hace en el laser rubí. En ese material, el nivel E_1 es meta estable: las reglas de selección retardan transiciones espontáneas al nivel base de manera que hay tiempo para una gran acumulación de átomos del nivel 1 por el decaimiento de los átomos del nivel 2. Por supuesto hay muchos tipos de láseres y muchos mecanismos de bombeo. De esta manera uno puede crear láseres en diferentes partes del espectro electromagnético. Al seleccionar materiales en

donde las transiciones laser terminan en un conjunto de niveles moleculares vibracionales muy juntos uno puede construir láseres *sintonizables*.

IV. EL LASER COMO UN MOTOR DE CALOR CUANTICO

Consideremos la situación mostrada en la Fig. 3 donde impulsamos átomos del estado base, g , al estado a mediante el contacto con un baño térmico de temperatura T_h pero el baño no interactúa con los átomos en el estado b . Esto se puede lograr de varias maneras, por ejemplo, usando lámparas de de stello.

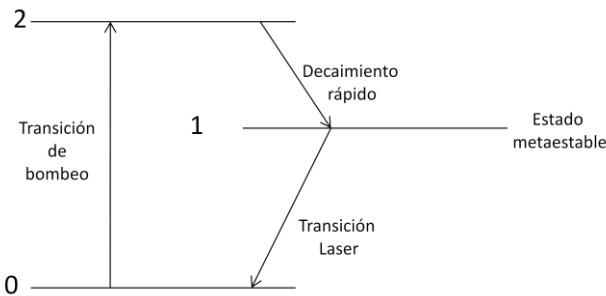


FIGURA 2. Imagen esquemática de una transición de bombeo, seguida de un decaimiento rápido a un estado meta estable, de donde la transición laser ocurre.

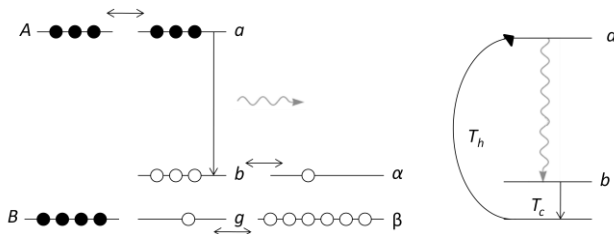


FIGURA 3. Cómo átomos de dos niveles con niveles A y B llevan población de g a a y los átomos del baño frío con niveles α y β tienden a jalar átomos de b y llevarlos a g .

Similarmente, acoplamos el estado base con el estado b mediante un baño frío de temperatura T_c . Podemos pensar que estos baños consisten en átomos con dos niveles como en la Fig. 3. El número de átomos en a y b obedecen ecuaciones de “tasa”:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tasa de crecimiento de la población} \\ \text{en el nivel } a \text{ debido al baño caliente} \end{array} \right\} = H[N_A n_a - N_B n_g], \quad (15)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tasa de crecimiento de la población} \\ \text{en el nivel } b \text{ debido al baño frío} \end{array} \right\} = C[N_\alpha n_b - N_\beta n_g], \quad (16)$$

donde (A, B) y (α, β) denotan poblaciones de átomos en el baño, (n_a, n_b) denotan poblaciones de átomos trabajando y C y H denotan tasas (insustanciales) de impulso y degradación que son regidas por las interacciones con el baño caliente y el frío.

En equilibrio, la razón dada por las Ecs. (15) y (16) se igualan a cero y la Ec. (15) queda

$$\frac{n_a}{n_g} = \frac{N_B}{N_A}, \quad (17)$$

y la Ec. (16) da

$$\frac{n_b}{n_g} = \frac{N_\beta}{N_\alpha}. \quad (18)$$

Ahora expresemos las razones (17) y (18) como se determinan por las temperaturas de los baños caliente y frío como

$$\frac{n_a}{n_g} = \frac{N_B}{N_A} = \exp(-\varepsilon_a/kT_h), \quad (19)$$

y

$$\frac{n_b}{n_g} = \frac{N_\beta}{N_\alpha} = \exp(-\varepsilon_b/kT_c). \quad (20)$$

Por lo tanto, en el límite (número de átomos en el nivel superior n_a igual al número de átomos en el nivel inferior n_b) tenemos:

$$1 = \frac{n_a}{n_b} = \frac{n_a n_g}{n_g n_b} = \exp\left[-\frac{\varepsilon_a}{kT_h} + \frac{\varepsilon_b}{kT_c}\right], \quad (21)$$

por lo tanto,

$$-\frac{\varepsilon_a}{kT_h} + \frac{\varepsilon_b}{kT_c} = 0, \quad (22)$$

o

$$\frac{T_c}{T_h} = \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}. \quad (23)$$

Por cada fotón (con energía $\varepsilon_a - \varepsilon_b$) emitido, debe absorberse un quantum de energía ε_a de un átomo del baño caliente y entonces se tiene una eficiencia

$$\eta_{laser} = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{\varepsilon_a} = 1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}, \quad (24)$$

y usando la Ec. (23) tenemos

$$\eta_{laser} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = \eta_{Carnot}. \quad (25)$$

V. EL LASER COMO UN CICLO DE CARNOT EN EL PLANO TS

A continuación presentamos un método alternativo al que se encuentra en los libros de texto que creemos es más sencillo y directo. Consideremos ahora el ciclo del láser en un plano T-S como se muestra en la Fig. 4 y se ha cambiado la nomenclatura de a y b a 1 y 2. De la primera ley de la termodinámica y del hecho de que, el trabajo realizado para cambiar la población de cierto nivel de energía es $dW = \mu dN$ (conocido como trabajo químico), tenemos:

$$dQ = \mu dN + d\varepsilon, \quad (26)$$

pero para la radiación, el potencial químico $\mu = 0$. De aquí que

$$Q = \varepsilon. \quad (27)$$

En el ciclo tenemos:

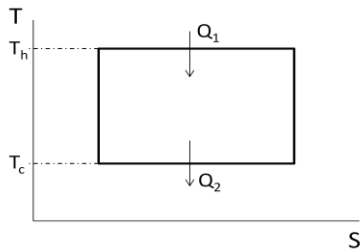


FIGURA 4. Ciclo de funcionamiento de un láser visto en el plano T-S.

$$\frac{Q_1}{T_h} - \frac{Q_2}{T_c} = 0, \quad (28)$$

y esto equivale, por la Ec. (27), a

$$\frac{\varepsilon_1}{T_h} - \frac{\varepsilon_2}{T_c} = 0, \quad (29)$$

lo que a su vez lleva a

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{T_h}{T_c}. \quad (30)$$

Calculemos ahora la eficiencia y utilicemos la Ec. (27):

$$\eta = \frac{|Q_1 + Q_2|}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (31)$$

Rendimiento térmico de Carnot de un LASER

y utilizando la Ec. (30) obtenemos de nuevo

$$\eta_{laser} = 1 - \frac{T_c}{T_h} = \eta_{Carnot}. \quad (32)$$

IV. CONCLUSIONES

Tratamos un láser como un sistema de tres niveles y consideramos las transiciones entre dos de estos niveles como una máquina térmica estando estos niveles a temperaturas diferentes. Analizando de una manera sencilla las ecuaciones maestras para las transiciones dependientes de la temperatura en un factor de Boltzmann y siguiendo el método de Scully [4], obtuvimos que en el bombeo óptico entre los dos niveles y la emisión de luz como energía, el láser funciona como una máquina térmica con un rendimiento de Carnot $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$. Finalmente probamos un ciclo de Carnot en el plano T-S y, sabiendo que el potencial químico μ de la radiación es igual a cero, recuperamos de forma puramente termodinámica el resultado del rendimiento de Carnot.

REFERENCIAS

- [1] Powell, J. L., Crasemann, B., *Quantum Mechanics*, 3^{era} edición, (Addison-Wesley, Richmond TX, 1965).
- [2] Eisberg, R., Resnick, R., *Física Cuántica, Átomos, moléculas, sólidos, Núcleos y Partículas*, (Limusa-Wiley, México D. F., 1979).
- [3] Gasiorowicz, S., *Quantum Physics*, 3^{era} edición, (Wiley, New York, 2003).
- [4] Scully, R. J., *The Demon and the Quantum: From the Pythagorean Mystics to Maxwell's Demon and Quantum Mystery, With Endnotes by M. O. Scully*, (Wiley-VCH, Weinheim, 2007).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Weber, M. J., *Handbook of Lasers*, (CRC Press LLC, Berkeley, 2001).
- [2] Haken, H., *Laser Light Dynamic*, (North-Holland Physics Publishing, Amsterdam, 1985).
- [3] Sharp, J. H., *Laser fundamentals*, (School of Engineering, University of Glasgow, URL: <http://www.mech.gla.ac.uk/~sharpj/lectures/lasers/lasers.html>, 20/07/2011).