

Algunas aplicaciones de la transformada de Laplace en Cinética Química, Circuitos Eléctricos y Transferencia de Calor



Erik Albarrán-Zavala^{1,2}

¹Facultad de Ingeniería, Dirección Académica de Ingeniería Química, Universidad Tecnológica de México, Campus Atizapán, C.P. 52999, México, Edo. Mex.

²Programa de Matemáticas Aplicadas y Computación, Departamento de Matemáticas, Facultad de Estudios Superiores Acatlán, Universidad Nacional Autónoma de México, C.P. 53150, México, Edo. Mex.

E-mail: erik.albarran@gmail.com

(Recibido el 29 de Junio de 2013, aceptado el 13 de Diciembre de 2013)

Resumen

En este artículo mostramos algunos ejemplos simples de ecuaciones diferenciales resueltas utilizando la Transformada de Laplace. Esperamos que esta información sea de utilidad para las personas que imparten cursos de Ecuaciones Diferenciales. La Transformada de Laplace es de gran utilidad para resolver problemas sobre circuitos eléctricos, de hecho, existen muchas referencias que presentan a la transformada de Laplace como una herramienta importante en la resolución de problemas de circuitos eléctricos. Pero si pensamos acerca de la Cinética Química o la Transferencia de Calor, es difícil encontrar algún libro que presente problemas resueltos utilizando esta ponderosa herramienta matemática. Por esta razón, proponemos algunos problemas sencillos de ecuaciones diferenciales correspondientes a Cinética Química, Circuitos Eléctricos y Transferencia de Calor.

Palabras clave: Transformada de Laplace, Cinética Química, Circuitos Eléctricos, Transferencia de Calor.

Abstract

In this paper we show some simple examples of differential equations solved by using the Laplace's Transform. We hope this information will be useful for persons who teach Differential Equations' Courses. The Laplace's Transform is very useful for solving problems about electrical circuits, in fact, there are many references that present the Laplace's Transform like an important tool to solve problems of electrical circuits. But, if we think about Chemical Kinetics or Heat Transfer, it is difficult to find any book presenting problems solved by using this powerful mathematical tool. By this reason, we propose some easy Differential Equations' problems corresponding to Chemical Kinetics, Electrical Circuits and Heat Transfer.

Keywords: Laplace's Transform, Chemical Kinetics, Electrical Circuits, Heat Transfer.

PACS: 01.40.-d, 02.30.Hq, 82.20.-w, 84.32.-y, 44.05.+e

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En distintos planes de estudio, los libros y los cursos de Ecuaciones Diferenciales están enfocados al análisis teórico sobre las diferentes formas de resolver dichas ecuaciones. Pocas veces se pueden ver aplicaciones con ejemplos ilustrativos y fáciles de entender para los alumnos. Por lo general, los cursos de ecuaciones diferenciales se llevan en los primeros semestres, cuando el alumno aún no tiene suficientes conocimientos y/o experiencia para poder conectar la teoría de las Ecuaciones Diferenciales con las distintas ramas de la Física. Por esta razón, los alumnos deben esperarse a los cursos más avanzados donde aprenden claramente la teoría física de un cierto fenómeno junto con la ecuación diferencial que lo describe.

Por lo anterior, proponemos algunas aplicaciones de la Transformada de Laplace en los temas de Cinética Química, Circuitos Eléctricos y Transferencia de Calor, temas en los cuales se pueden encontrar ejemplos cuya teoría física es relativamente sencilla y se pueden exponer durante algunas sesiones dentro de un curso de Ecuaciones Diferenciales, según sea el gusto del profesor.

En el tema de Circuitos Eléctricos ya existe bastante literatura donde se resuelven problemas utilizando la Transformada de Laplace. Sin embargo, en los temas de Cinética Química y Transferencia de Calor no es fácil encontrar libros que aborden y resuelvan problemas utilizando dicho método. Aunque es posible encontrar algunos ejemplos en los libros Control e Instrumentación, dichos ejemplos presentan un enfoque muy avanzado, tal es el caso de *Ingeniería de Control Moderna*, escrito por Katsuhiko Ogata, [1]. Este libro, en sus capítulos 3 y 4 nos

presenta diversos ejemplos sobre sistemas mecánicos, eléctricos, electrónicos, térmicos, hidráulicos, neumáticos y de nivel de líquido.

Para poder leer este manuscrito, estamos suponiendo que el profesor ha cubierto con anterioridad el tema de la Transformada de Laplace, que los alumnos dominan las propiedades de dicha transformada y que han resuelto varios problemas al respecto. El alumno también debe contar con conocimientos de álgebra para resolver sistemas de ecuaciones lineales por eliminación, sustitución, igualación, determinantes, etc., además de conocer el método de separación por fracciones parciales.

II. LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En esta sección nos limitaremos a dar la definición de la transformada de Laplace y nuevamente recordamos al lector que ya debe dominar este tema con anterioridad, para lo cual puede consultar autores como [1, 2, 3, 4].

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ está definida por la siguiente expresión:

$$F(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1)$$

donde t es la variable independiente que casi siempre corresponde con el tiempo, s es la variable de transformación que debe ser un número real positivo, $f(t)$ es la función que se desea transformar y $F(s)$ es la transformada de Laplace.

En este artículo denotaremos por letras minúsculas a las funciones originales, por ejemplo: $f(t)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $q(t)$, $i(t)$, $\theta(t)$, etc. Por otro lado, utilizaremos letras mayúsculas para sus respectivas transformadas, por ejemplo: $F(s)$, $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$, $Q(s)$, $I(s)$, $\Theta(s)$, etc.

Utilizaremos el subíndice 0 para denotar la condición inicial, es decir, la función evaluada en el tiempo $t = 0$, por ejemplo: $f_0 = f(0)$, $a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$, $c_0 = c(0)$, $q_0 = q(0)$, $i_0 = i(0)$, $\theta_0 = \theta(0)$, etc. Haremos lo mismo para las derivadas, es decir: $f_0' = f'(0)$, $a_0' = a'(0)$, $b_0' = b'(0)$, $c_0' = c'(0)$, $q_0' = q'(0)$, $i_0' = i'(0)$, $\theta_0' = \theta'(0)$, etc.

Físicamente, es importante familiarizarnos con el elemento que se comporta como interruptor y que se activa en el tiempo $t = c$, donde c es una constante. Esto puede ser precisamente un interruptor en un circuito eléctrico que enciende una fuente de voltaje y permite el paso de una corriente eléctrica. Pero en el caso de reacciones químicas, el interruptor puede representar el instante donde se agrega súbitamente una especie química para iniciar o cambiar el curso de una reacción química. En transferencia de calor, puede ser el instante en que se inicia la combustión del gas butano en un calentador de agua doméstico, o el instante en el cual se sumerge un objeto caliente en agua fría.

El interruptor corresponde con la **función escalón** denotada por $u(t - c)$, la cual se define como 0 cuando el tiempo t es menor que el valor constante c , y se define como 1 cuando el tiempo t es mayor o igual que c . Dicha función se expresa matemáticamente según la ecuación (2) :

$$u(t - c) \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } -\infty < t < c \\ 1 & \text{si } c \leq t < \infty \end{cases}. \quad (2)$$

Una forma más cómoda para denotar a esta función es poniendo como subíndice a la constante c , para sólo escribir u_c . En lo sucesivo utilizaremos esta última notación para referirnos a la **función escalón**.

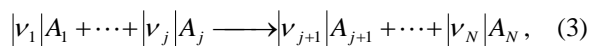
Para ayudar un poco al lector a lo largo de este manuscrito, la tabla I nos presenta algunas funciones y sus respectivas transformadas de Laplace. Si el lector lo desea, puede apoyarse en el libro de Spiegel, *et al.* [5], donde podrá encontrar una gran variedad de transformadas para diferentes funciones.

TABLA I. Algunas funciones y sus transformadas de Laplace.

Función $f(t)$	Transformada $F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
u_c	$\frac{e^{-cs}}{s}$
e^{-kt}	$\frac{1}{s+k}$
$\text{sen}(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\text{senh}(mt)$	$\frac{m}{s^2 - m^2}$
$\text{cosh}(mt)$	$\frac{s}{s^2 - m^2}$
$u_c f(t - c)$	$e^{-cs} F(s)$
$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{F(s)}{s}$
$f'(t)$	$sF(s) - f_0$
$f''(t)$	$s^2 F(s) - sf_0 - f_0'$

III. ¿QUÉ ES UNA REACCIÓN QUÍMICA?

Una reacción química consiste en la interacción entre diferentes especies químicas (elementos y/o compuestos) que provocan la desaparición de algunas de ellas y la aparición de otras nuevas. Una forma general de expresar una reacción química es la siguiente:



donde A_k es la k -ésima especie química y v_k es el k -ésimo coeficiente estequiométrico. Por convención, se asignan valores negativos a los coeficientes estequiométricos de los reactivos y se asignan valores positivos a los coeficientes estequiométricos de los productos. Como ejemplo, abordaremos una reacción en la que intervienen el hierro, el oxígeno y el óxido de hierro III:



Observamos que hay tres especies químicas diferentes, las cuales podemos numerar asignando el número 1 al Fe, el 2 al O_2 y el 3 al Fe_2O_3 . Como el hierro y el oxígeno son reactivos, sus coeficientes estequiométricos deben tener signo negativo, es decir, $v_1 = -4$ y $v_2 = -3$. Por otro lado, el óxido de hierro III es un producto, por lo cual su coeficiente estequiométrico debe ser positivo, $v_3 = +2$. Es importante recordar que para escribir la ecuación química descrita por la ecuación (4), se deben escribir los valores absolutos de los coeficientes estequiométricos.

IV. LA VELOCIDAD DE REACCIÓN

En el contexto de la Cinética Química, las palabras *rapidez* y *velocidad* tienen el mismo significado, por lo cual es válido decir *velocidad de reacción* o *rapidez de reacción*, [6]. Esta variable se define por medio de la derivada de la concentración de una especie química con respecto al tiempo, dividida entre el coeficiente estequiométrico de la misma, [6]:

$$r \equiv \frac{1}{v_k} \frac{da_k}{dt}, \quad (5)$$

donde a_k es la concentración de la k -ésima especie química, t es el tiempo, v_k es el k -ésimo coeficiente estequiométrico y r es la velocidad de reacción. En términos generales, la velocidad de reacción se puede calcular tomando como base cualquier especie química que nosotros elijamos y siempre se obtendrá la misma velocidad. Es importante recordar que las especies químicas que actúan como reactivos tienen coeficientes estequiométricos negativos (desaparecen), mientras que las especies que se comportan como productos tienen coeficientes estequiométricos positivos (aparecen). Por lo anterior, la ecuación (5) siempre será una función positiva, sin importar si se obtiene tomando como referencia a un reactivo o a un producto.

Por simplicidad, consideraremos reacciones químicas cuyos coeficientes estequiométricos son unitarios, y que tienen la siguiente ecuación química:



donde la especie química A es un reactivo cuyo coeficiente estequiométrico es $v_A = -1$. Por otro lado, la especie química B actúa como producto con coeficiente estequiométrico $v_B = +1$. Entonces, la velocidad de reacción respecto al reactivo A es:

$$r = -\frac{da}{dt}. \quad (7)$$

Si por el contrario, pensamos tomar como referencia al producto B, la velocidad de reacción queda como:

$$r = +\frac{db}{dt}, \quad (8)$$

donde r es la velocidad de reacción, a es la concentración de la especie A y b es la concentración de la especie B. En este caso, ambas concentraciones se consideran funciones del tiempo t , es decir, $a = a(t)$ y $b = b(t)$. Las concentraciones a y b tienen unidades de mol dm^{-3} y la velocidad de reacción r tiene unidades de $\text{mol dm}^{-3} \text{s}^{-1}$.

Es importante señalar que las reacciones químicas son provocadas por las especies químicas que se comportan como reactivos, por lo tanto, la velocidad de reacción es una función que depende de las concentraciones de los reactivos. En el caso de la ecuación (6) estamos considerando que sólo existe un reactivo, que es la especie química A. Por lo anterior, la velocidad de reacción sólo es función de la concentración de la especie química A, lo que nos permite clasificar la reacción de tres formas diferentes: *reacción de orden cero*, *reacción de primer orden* y *reacción de segundo orden*.

Reacción de orden cero: Según [6], la velocidad de reacción es proporcional a una constante k llamada la *constante de reacción* o *constante de velocidad*, teniendo como ecuación:

$$-\frac{da}{dt} = k. \quad (9)$$

La solución es muy sencilla y se puede obtener por integración directa, evaluando la integral desde una concentración inicial $a = a_0$ en el tiempo $t = 0$ hasta una concentración $a(t)$ en cualquier tiempo t :

$$\int_{a_0}^{a(t)} da = -k \int_0^t dt, \quad (10)$$

$$a(t) = a_0 - kt. \quad (11)$$

La ecuación (11) nos indica que la relación entre la concentración de la especie química A y el tiempo es una línea recta con pendiente negativa. El valor absoluto de la pendiente corresponde con la constante de reacción.

Reacción de primer orden: Aquí, la velocidad de reacción es proporcional al producto de la constante de reacción k y

la concentración de la especie química $a(t)$, por lo que la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno es, [6]:

$$-\frac{da}{dt} = ka. \quad (12)$$

Si deseamos integrar para obtener la solución tenemos:

$$\int_{a_0}^{a(t)} \frac{da}{a} = -k \int_0^t dt, \quad (13)$$

$$a(t) = a_0 e^{-kt}. \quad (14)$$

Podemos ver que la relación es una exponencial decreciente cuya constante de tiempo τ es el inverso de la constante de reacción $\tau = 1/k$, por lo que una forma útil para la ecuación (14) es:

$$a(t) = a_0 e^{-t/\tau}. \quad (15)$$

Reacción de segundo orden: Finalmente, la velocidad de reacción puede ser proporcional al cuadrado de la concentración, por lo que tenemos, [6]:

$$\frac{da}{dt} = -ka^2. \quad (16)$$

Análogamente, podemos integrar la ecuación (16) para encontrar una relación funcional entre el tiempo y la concentración, lo que nos lleva a las expresiones:

$$\int_{a_0}^{a(t)} a^{-2} da = -k \int_0^t dt, \quad (17)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{a_0 kt + 1}. \quad (18)$$

Es importante hacer notar que la constante de reacción tiene diferentes unidades que dependen del orden de la reacción. Por lo anterior, en la tabla II se presenta una relación entre el orden de reacción, las constantes de reacción y sus respectivas unidades.

TABLA II. Dependencia entre el orden de reacción y las unidades de la constante de velocidad, [6].

Orden de reacción	Unidades de k
0	$\text{mol dm}^{-3} \text{s}^{-1}$
1	s^{-1}
2	$\text{dm}^3 \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$

V. REACCIONES CONSECUTIVAS

Consideremos una reacción en la cual el compuesto A se convierte en el compuesto B, pero a su vez el compuesto B se convierte en un tercer compuesto C, y donde las concentraciones de dichos compuestos están denotadas por $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ respectivamente. El proceso completo puede verse como dos reacciones consecutivas, para lo cual necesitamos plantear dos ecuaciones de velocidad de

reacción. En este caso supondremos que ambas reacciones son de primer orden con constantes de velocidad k_1 y k_2 respectivamente, y que en el tiempo $t = 0$ únicamente existen moléculas del compuesto A con una concentración inicial a_0 . El mecanismo de la reacción química está descrito por:



Si analizamos el compuesto A, vemos que simplemente desaparece y se convierte en el compuesto B. Debido a que el compuesto A está desapareciendo (es un reactivo), necesitamos agregar un signo negativo para indicar esta condición, ya que $v_A = -1$:

$$\frac{da}{dt} = -k_1 a, \quad (21)$$

Pensando en el compuesto B, vemos que se comporta como producto y como reactivo, por lo tanto está apareciendo debido a la primera etapa, pero también está desapareciendo debido a la segunda etapa. Por lo anterior, la ecuación de velocidad para B tiene dos componentes, la primera de ellas es positiva y es proporcional a la concentración de la especie A, mientras que la segunda es negativa y proporcional a la concentración de la especie B, por lo tanto tenemos:

$$\frac{db}{dt} = k_1 a - k_2 b. \quad (22)$$

Finalmente, el compuesto C sólo se comporta como producto, por lo que su ecuación de velocidad sólo tiene una componente positiva que es proporcional a la concentración de la especie B:

$$\frac{dc}{dt} = k_2 b. \quad (23)$$

Si deseamos aplicar la transformada de Laplace al sistema integrado por las ecuaciones (21), (22) y (23), es necesario conocer las condiciones iniciales en $t = 0$. Como estamos considerando que al principio del proceso sólo existe una muestra del compuesto A puro, entonces las condiciones iniciales son $a_0 = a_0$, $b_0 = 0$ y $c_0 = 0$, lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$(s + k_1)A(s) = a_0, \quad (24)$$

$$-k_1 A(s) + (s + k_2)B(s) = 0, \quad (25)$$

$$-k_2 B(s) + sC(s) = 0, \quad (26)$$

el cual puede ser expresado en forma matricial, según lo indica la ecuación (27):

$$\begin{bmatrix} s+k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & s+k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \\ C(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Para resolver el anterior sistema de ecuaciones se puede utilizar cualquier método, pero en este caso utilizaremos el método de los determinantes, que puede ser consultado en el libro *Álgebra* del doctor Aurelio Baldor, [7]. Si realizamos los cálculos correspondientes, es posible obtener expresiones para los determinantes del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s+k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & s+k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & s \end{vmatrix} = s(s+k_1)(s+k_2), \quad (28)$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & s+k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & s \end{vmatrix} = a_0 s(s+k_2), \quad (29)$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} s+k_1 & a_0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = a_0 k_1 s, \quad (30)$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} s+k_1 & 0 & a_0 \\ -k_1 & s+k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{vmatrix} = a_0 k_1 k_2. \quad (31)$$

Lo que nos permite obtener las expresiones explícitas para las transformadas de Laplace de las concentraciones:

$$A(s) = \frac{a_0}{s+k_1}, \quad (32)$$

$$B(s) = \frac{a_0 k_1}{(s+k_1)(s+k_2)}, \quad (33)$$

$$C(s) = \frac{a_0 k_1 k_2}{s(s+k_1)(s+k_2)}. \quad (34)$$

Para poder invertir las transformadas de las ecuaciones (32), (33) y (34), es necesario utilizar el método de separación por fracciones parciales, que puede ser consultado en [3] y que nos lleva a:

$$A(s) = \frac{a_0}{s+k_1}, \quad (35)$$

$$B(s) = \frac{a_0 k_1}{k_2 - k_1} \left(\frac{1}{s+k_1} - \frac{1}{s+k_2} \right), \quad (36)$$

$$C(s) = \frac{a_0}{s} - \frac{a_0}{k_2 - k_1} \left(\frac{k_2}{s+k_1} - \frac{k_1}{s+k_2} \right). \quad (37)$$

Finalmente, podemos invertir las transformadas de Laplace para obtener las concentraciones como funciones del tiempo para cada una de las especies químicas involucradas:

$$a(t) = a_0 e^{-k_1 t}, \quad (38)$$

$$b(t) = \frac{a_0 k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), \quad (39)$$

$$c(t) = a_0 \left\{ 1 - \left(\frac{k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1} \right) \right\}. \quad (40)$$

Las soluciones anteriores son equivalentes a las reportadas por Logan, página 42, [6], sólo que en este caso hemos utilizado un método diferente para obtenerlas.

Una forma muy útil para trabajar las ecuaciones anteriores es la forma normalizada, que puede ser obtenida al dividir las expresiones para $a(t)$, $b(t)$ y $c(t)$ entre el valor constante a_0 . Lo anterior nos arroja lo siguiente:

$$a^*(t) = e^{-k_1 t}, \quad (41)$$

$$b^*(t) = \frac{k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}), \quad (42)$$

$$c^*(t) = 1 - \left(\frac{k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}}{k_2 - k_1} \right). \quad (43)$$

Con las ecuaciones anteriores podemos realizar las gráficas correspondientes para conocer el comportamiento del sistema reactivo en cuestión. Para ello asignaremos arbitrariamente valores a las constantes de reacción k_1 y k_2 .

Las figuras 1 y 2 nos muestran dos comportamientos diferentes del sistema estudiado al fijar diferentes valores para las constantes k_1 y k_2 . La figura 1 fue obtenida utilizando $k_1 = 1 \text{ s}^{-1}$ y $k_2 = 5 \text{ s}^{-1}$, mientras que la figura 2 fue realizada intercambiando valores, es decir, $k_1 = 5 \text{ s}^{-1}$ y $k_2 = 1 \text{ s}^{-1}$.

En la figura 1 podemos observar que la concentración $b(t)$ es insignificante respecto a $a(t)$ y $c(t)$. De hecho, en todo momento, $b(t)$ es menor que $a(t)$ y sólo durante un pequeño lapso al inicio del proceso, $b(t)$ supera el valor de la concentración $c(t)$.

En cambio, la figura 2 nos muestra un comportamiento donde la concentración $b(t)$ crece rápidamente durante el inicio de la reacción química, mientras que $a(t)$ decrece rápidamente y $c(t)$ se comporta en forma muy parecida a como lo hace en la figura 1. Lo anterior permite un lapso notable de tiempo donde la concentración $b(t)$ supera a las concentraciones $a(t)$ y $c(t)$.

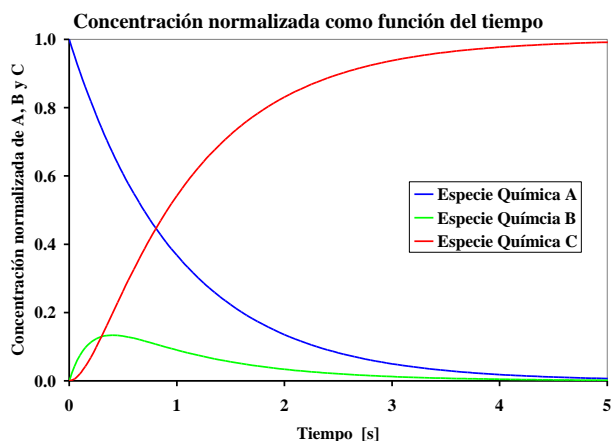


FIGURA 1. Gráfica de las concentraciones normalizadas de las especies químicas A, B y C como funciones del tiempo, considerando $k_1 = 1 \text{ s}^{-1}$ y $k_2 = 5 \text{ s}^{-1}$.

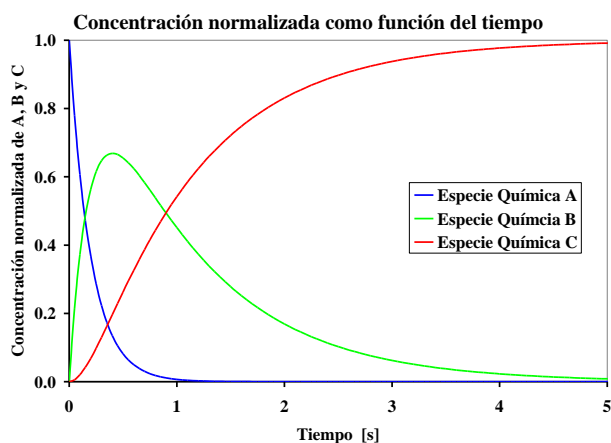


FIGURA 2. Gráfica de las concentraciones normalizadas de las especies químicas A, B y C como funciones del tiempo, considerando $k_1 = 5 \text{ s}^{-1}$ y $k_2 = 1 \text{ s}^{-1}$.

VI. REACCIONES OPUESTAS

Un tipo de reacciones químicas que actúan en direcciones opuestas son las reacciones de isomerización, en donde una especie química A se convierte en la especie química B y a su vez la especie B se convierte nuevamente en la especie A, tal y como lo indica la ecuación (44).



Este proceso se puede modelar pensando en dos reacciones consecutivas de primer orden:



Las moléculas de la especie A desaparecen debido a la propia concentración de la especie A, pero aparecen a causa de la concentración de la especie B. En forma semejante, la especie B desaparece debido a su propia concentración y aparece debido a la concentración de la especie A. Por lo que podemos establecer lo siguiente:

$$\frac{da}{dt} = -k_1 a + k_2 b, \quad (47)$$

$$\frac{db}{dt} = k_1 a - k_2 b. \quad (48)$$

Para resolver el sistema debemos considerar que inicialmente sólo hay moléculas de la especie A con concentración inicial a_0 . Aplicando la Transformada de Laplace, obtenemos las ecuaciones (49), (50) y (51):

$$(s + k_1)A(s) - k_2 B(s) = a_0, \quad (49)$$

$$-k_1 A(s) + (s + k_2)B(s) = 0, \quad (50)$$

$$\begin{bmatrix} s + k_1 & -k_2 \\ -k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A(s) \\ B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

De igual forma resolvemos el sistema utilizando el método de determinantes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s + k_1 & -k_2 \\ -k_1 & s + k_2 \end{vmatrix} = s(s + k_1 + k_2), \quad (52)$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_0 & -k_2 \\ 0 & s + k_2 \end{vmatrix} = a_0(s + k_2), \quad (53)$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} s + k_1 & a_0 \\ -k_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0 k_1. \quad (54)$$

Lo anterior nos permite encontrar expresiones explícitas para las transformadas de Laplace:

$$A(s) = \frac{a_0(s + k_2)}{s(s + k_1 + k_2)}, \quad (55)$$

$$B(s) = \frac{a_0 k_1}{s(s + k_1 + k_2)}, \quad (56)$$

Una vez más, es necesario realizar la separación en fracciones parciales para poder invertir las transformadas:

$$A(s) = \frac{a_0}{k_1 + k_2} \left(\frac{k_2}{s} + \frac{k_1}{s + k_1 + k_2} \right), \quad (57)$$

$$B(s) = \frac{a_0 k_1}{k_1 + k_2} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + k_1 + k_2} \right), \quad (58)$$

$$a(t) = \frac{a_0}{k_1 + k_2} [k_2 + k_1 e^{-(k_1 + k_2)t}], \quad (59)$$

$$b(t) = \frac{a_0 k_1}{k_1 + k_2} [1 - e^{-(k_1 + k_2)t}]. \quad (60)$$

Si deseamos simplificar el álgebra, podemos introducir variables auxiliares, como son las concentraciones de los compuestos en el estado de equilibrio. Cuando una reacción química ha llegado a su término, las concentraciones de las diferentes especies químicas ya no cambian debido a que han alcanzado las concentraciones de equilibrio. Esto ocurre cuando ha pasado un gran lapso de tiempo, es decir, si $t \rightarrow \infty$ entonces $a(t) \rightarrow a_\infty$ y además, $b(t) \rightarrow b_\infty$. Por ello definimos lo siguiente:

$$a_\infty \equiv \frac{a_0 k_2}{k_1 + k_2}, \quad (61)$$

$$b_\infty \equiv \frac{a_0 k_1}{k_1 + k_2}. \quad (62)$$

Como al inicio del proceso se tiene únicamente una cantidad pura del compuesto A y los coeficientes estequiométricos son unitarios, entonces si hacemos un análisis de conservación de materia podemos ver que la suma de $a(t)$ y $b(t)$ debe cumplir con:

$$a(t) + b(t) = a_0, \quad (63)$$

y en particular:

$$a_\infty + b_\infty = a_0. \quad (64)$$

Por lo tanto, podemos simplificar las expresiones (59) y (60) de la siguiente forma:

$$a(t) = a_\infty + b_\infty e^{-(k_1 + k_2)t}, \quad (65)$$

$$b(t) = b_\infty [1 - e^{-(k_1 + k_2)t}]. \quad (66)$$

Si se tiene una serie de datos experimentales de la reacción de isomerización entre las especies A y B, se puede hacer una transformación para hacer un ajuste por mínimos cuadrados o una regresión lineal.

Considerando que se tienen parejas de datos (t_k, a_k) , debemos buscar una transformación de la ecuación (65) para poder ajustarla a una recta, para lo cual debemos restar el valor de a_∞ a la función $a(t)$ (ecuación 67), posteriormente sacar logaritmo natural (ecuación 68) y hacer la comparación término a término contra la ecuación de una recta (ecuación 68 contra la ecuación 69).

$$a(t) - a_\infty = b_\infty e^{-(k_1 + k_2)t}, \quad (67)$$

$$\ln[a(t) - a_\infty] = -(k_1 + k_2)t + \ln b_\infty, \quad (68)$$

$$y = mx + y_0. \quad (69)$$

De esta forma, podemos ver que la pendiente m corresponde con $-(k_1 + k_2)$, la ordenada al origen y_0 corresponde con $\ln b_\infty$, la variable x corresponde con la variable t y la variable y corresponde con $\ln[a(t) - a_\infty]$.

Ahora que conocemos la teoría sobre las reacciones de isomerización, podemos resolver un problema si tenemos los datos experimentales del tiempo y de la concentración de la especie A. En este caso resolveremos el problema 3.6 que se encuentra en el capítulo 3, página 61, del libro titulado *Fundamentos de Cinética Química* escrito por Logan, [6].

Problema: “Los compuestos A y B son isómeros que pueden interconvertirse. Comenzando con una muestra de A puro, se encontraron los siguientes valores de su concentración en función del tiempo. Deduzca las constantes de velocidad de ambos procesos de isomerización, suponiendo que ambas reacciones son de primer orden o de pseudo-primer orden.”

Solución: Los datos provistos por [6] se encuentran en las primeras dos columnas de la tabla III. Debemos identificar el valor experimental de a_∞ , que en este caso es el último valor de la segunda columna, es decir, $a_\infty = 0.018 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}$. A continuación, en la columna 3 se debe escribir el valor obtenido de restar a_∞ a cada valor a de la columna 2. Posteriormente, se debe calcular el logaritmo natural de cada valor de la columna 3 y escribirlo en la columna 4. Finalmente se hace una regresión lineal o un ajuste por mínimos cuadrados utilizando la primera columna como la variable x y la cuarta columna como la variable y .

TABLA III. Datos del problema 3.6, capítulo 3 de Logan, [6].

Tiempo t (min)	Conc. $a(t)$ (mol dm^{-3})	$a(t) - a_\infty$ (mol dm^{-3})	$\ln[a(t) - a_\infty]$
0.0	0.100	0.082	-2.501036
1.5	0.080	0.062	-2.780621
3.0	0.065	0.047	-3.057608
5.0	0.050	0.032	-3.442019
8.0	0.037	0.019	-3.963316
11.0	0.029	0.011	-4.509860
∞	0.018	0.000	---

Hecho lo anterior, la ecuación ajustada tiene toda la información necesaria del sistema reactivo. La ecuación (70) nos indica el valor de la pendiente m y la ecuación (71) nos dice el valor de la ordenada al origen y_0 .

$$m = -0.18235987, \quad (70)$$

$$y_0 = -2.50953397. \quad (71)$$

Ahora podemos obtener un sistema de ecuaciones dado por las ecuaciones (68), (69), (70) y (71), que nos permite conocer los parámetros de la reacción de isomerización:

$$k_1 + k_2 = 0.18235989, \quad (72)$$

$$\ln b_\infty = -2.50953397, \quad (73)$$

Resolviendo las ecuaciones (72) y (73) junto con las ecuaciones (61), (62) y (64) podemos obtener los valores estimados estadísticamente para a_∞ , b_∞ , k_1 y k_2 :

$$a_\infty = 0.018693874 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}, \quad (74)$$

$$b_\infty = 0.081306126 \text{ mol} \cdot \text{dm}^{-3}. \quad (75)$$

$$k_1 = 0.148269762 \text{ min}^{-1}, \quad (76)$$

$$k_2 = 0.034090128 \text{ min}^{-1}. \quad (77)$$

Una vez conocidos los valores de los parámetros, ya estamos en posibilidad de obtener las gráficas correspondientes. En la figura 3, los rombos rojos nos muestran los datos experimentales transformados. Y la recta en color verde corresponde con la ecuación resultante del ajuste por mínimos cuadrados, de donde se obtienen los valores de la pendiente m y la ordenada al origen y_0 . El coeficiente de correlación nos indica un ajuste muy bueno ya que $R^2=0.99980226$, lo que puede observarse claramente en la figura 3 y en la figura 4.

Por otro lado, los rombos negros de la figura 4 nos muestran los datos experimentales originales. Las curvas roja y azul son las gráficas de las ecuaciones para $a(t)$ y $b(t)$ respectivamente, las cuales fueron obtenidas al sustituir las ecuaciones (74), (75), (76) y (77) en las ecuaciones (65) y (66).

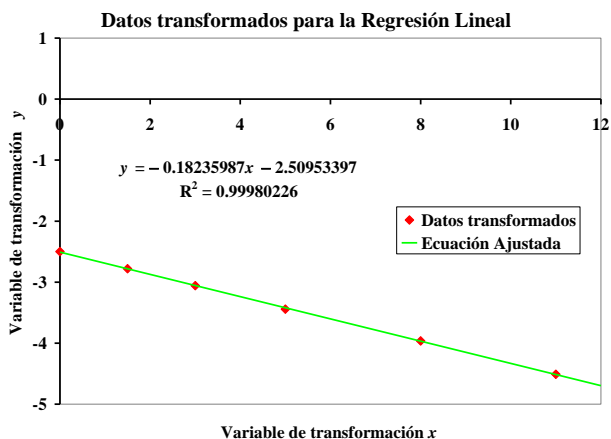


FIGURA 3. Los rombos rojos son los datos experimentales transformados y la línea recta en color verde es la gráfica de la ecuación obtenida mediante la regresión lineal. El coeficiente de correlación R^2 resultó ser muy cercano a la unidad lo que nos indica un ajuste muy bueno.

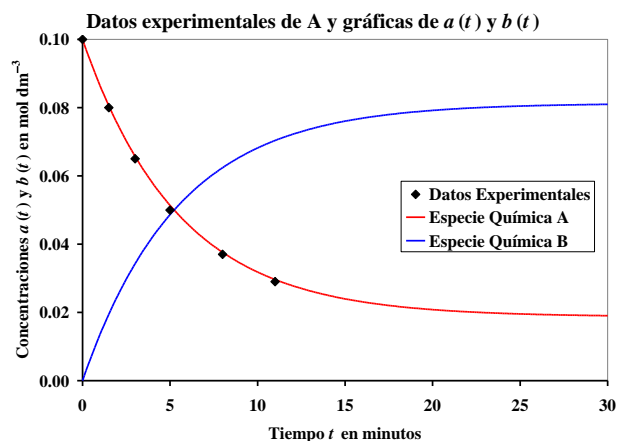


FIGURA 4. Los rombos negros son los datos experimentales de la especie química A. La curva decreciente en color rojo es la función $a(t)$ dada por la ecuación (65) y la curva creciente en color azul es la función $b(t)$ dada por la ecuación (66).

Por lo pronto, hemos concluido con nuestro contacto con las ecuaciones diferenciales de la Cinética Química. Dentro de esta disciplina existen muchos problemas, pero sólo es interesante abordar sistemas reactivos de primer orden, ya que los sistemas de orden cero tienen ecuaciones diferenciales muy sencillas que se resuelven por integración casi inmediata y no vale la pena resolverlos por la técnica de la Transformada de Laplace.

Por otro lado, los sistemas reactivos de segundo orden presentan Ecuaciones Diferenciales NO Lineales, esto se debe a que la función que se desea encontrar se encuentra elevada a la segunda potencia. Por lo anterior, NO podemos obtener la transformada de Laplace para el lado derecho de la ecuación (16).

Las Ecuaciones Diferenciales NO Lineales nos impiden utilizar la transformada de Laplace como método de solución. Por esta razón debe buscarse una forma de convertir el sistema NO Lineal en un sistema Lineal, lo cual NO siempre es posible.

VII. ¿QUÉ ES UN CIRCUITO ELÉCTRICO?

Un circuito eléctrico está constituido por diferentes elementos conectados entre sí, formando uno o más lazos cerrados. Su objetivo es movilizar cargas eléctricas a través de sus elementos para almacenar y/o disipar energía.

Para entender mejor este tema, debemos recordar algunos conceptos básicos sobre circuitos eléctricos.

Carga eléctrica: No hay una forma clara para definir este concepto, sólo podemos decir que es una propiedad intrínseca de la materia. Sin embargo, podemos hablar sobre sus características. Sabemos que existen dos tipos de cargas, a las cuales llamamos **cargas positivas** y **cargas negativas**. También sabemos que se presentan fuerzas de atracción y/o repulsión entre ellas, siendo fuerzas

atractivas cuando las cargas eléctricas tienen signos diferentes y repulsivas cuando tienen signos iguales. La carga eléctrica es la responsable de generar y producir todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. Se representa por la letra q minúscula y en general puede ser considerada como una función del tiempo, es decir, $q = q(t)$, [8, 9, 10].

Corriente Eléctrica: La finalidad de un circuito eléctrico es mover cargas eléctricas a través de los elementos que lo componen. La forma de medir este movimiento es pensando en la cantidad de carga eléctrica que ha pasado a través de un elemento en un intervalo de tiempo dado. La corriente eléctrica se representa por la letra i minúscula y en general es una función del tiempo por lo que podemos escribir $i = i(t)$. La definición matemática está dada por la siguiente ecuación, [8, 9, 10]:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}. \quad (78)$$

Una relación importante entre la corriente eléctrica i y la carga eléctrica q se obtiene al integrar la ecuación anterior:

$$\int_{q_0}^{q(t)} dq = \int_0^t i(t) dt, \quad (79)$$

$$q(t) - q_0 = \int_0^t i(t) dt, \quad (80)$$

$$q(t) = q_0 + \int_0^t i(t) dt. \quad (81)$$

Diferencia de Potencial Eléctrico: Cuando una carga eléctrica se encuentra en presencia de otras cargas eléctricas, aparecen fuerzas de interacción entre ellas. Si deseamos mover una de dichas cargas desde una posición inicial hasta una posición final, es necesario suministrar y/o extraer energía a la carga eléctrica en cuestión para poder realizar el movimiento deseado. Dicha energía depende de las interacciones que se establecen entre las cargas eléctricas que forman el sistema y la carga eléctrica que se desea movilizar. En forma natural, las cargas positivas se mueven desde un potencial eléctrico mayor hacia uno menor y las cargas negativas se mueven en sentido contrario, es decir, desde un potencial eléctrico menor hacia un potencial eléctrico mayor. Sugerimos al lector revisar el artículo: “*El potencial redox y la espontaneidad de las reacciones electroquímicas*”, [11], en el cual se presenta una analogía muy ilustrativa entre el movimiento de cargas eléctricas producido por una diferencia de potencial eléctrico y el movimiento de objetos con masa producido por una diferencia de potencial gravitacional.

Fuente de Voltaje: Este elemento es el responsable de suministrar energía eléctrica al circuito por medio de la generación de una diferencia de potencial eléctrico entre sus terminales. Denotaremos por v_F al valor de dicha diferencia de potencial eléctrico, que en general es una función del tiempo, $v_F = v_F(t)$, [8, 9, 10].

Resistencia Eléctrica: Es la oposición que presentan todos los materiales al paso de una corriente eléctrica. Según el material, la resistencia eléctrica puede ser pequeña, moderada o alta. Los alambres conductores con los que se fabrican los circuitos eléctricos presentan una resistencia eléctrica muy pequeña que puede considerarse como nula, pero en algunos casos es necesario agregar algún elemento que tenga una resistencia eléctrica mucho más alta y que no pueda despreciarse. Éste elemento es el elemento resistivo y su principal característica es precisamente el valor de su **resistencia eléctrica**, la cual se denota por R y para efectos de este artículo siempre consideraremos que tiene un valor constante. Cuando se aplica una diferencia de potencial eléctrico a través de una resistencia eléctrica R , se observa una corriente eléctrica i que pasa a través de dicha resistencia. Denotaremos por v_R a la diferencia de potencial eléctrico aplicado en los extremos de la resistencia y que en general también es una función del tiempo, $v_R = v_R(t)$. Esta diferencia de potencial eléctrico obedece la ley de OHM, [8, 9, 10]:

$$v_R(t) = R \cdot i(t). \quad (82)$$

Capacitor o Condensador: Es un elemento formado por dos placas de material conductor separadas por un material aislante o dieléctrico. La pequeña separación entre las placas permite almacenar energía electrostática al establecer en la primera de ellas una carga $+q$ y en la segunda una carga $-q$. Es importante observar que la carga neta dentro del capacitor es **cerro**, pero se acostumbra decir que “*el capacitor almacena una carga eléctrica q* ”. Este hecho se utiliza para analizar un circuito eléctrico considerando la carga almacenada en una sola de las placas y que en general es una función del tiempo, por lo cual $q = q(t)$. La geometría y el tamaño del capacitor le permite tener una cierta capacidad para almacenar cargas de signos opuestos en sus placas, a la cual se le llama **capacitancia** y se denota por la letra C . Debido a que las placas almacenan cargas de igual magnitud pero de signo contrario, se establece una diferencia de potencial eléctrico entre dichas placas, que denotaremos por v_C y que también es una función del tiempo, $v_C = v_C(t)$. Si se conoce la carga q y la capacitancia C para un determinado capacitor, entonces la diferencia de potencial eléctrico entre sus placas se calcula como sigue, [8, 9, 10]:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C}. \quad (83)$$

El voltaje $v_C(t)$ puede ser expresado de manera alternativa si sustituimos la ecuación (81) en la (83):

$$v_C(t) = \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt. \quad (84)$$

Inductor: Este es un elemento que tiene la capacidad de almacenar energía magnética. Está formado por un alambre conductor enrollado alrededor de un núcleo.

Dicho núcleo puede ser de aire o de hierro. La capacidad del inductor para almacenar energía magnética se llama **inductancia**, se denota por la letra L y se considera como una constante.

Cuando circula una corriente eléctrica por un alambre conductor se genera un campo magnético, que por lo general es muy débil. Sin embargo, si la corriente pasa por un inductor, el arreglo geométrico de éste elemento permite concentrar el campo magnético y almacenar energía magnética en su núcleo.

El paso de la corriente eléctrica a través del inductor también genera una diferencia de potencial eléctrico entre los extremos del mismo, la cual es una función del tiempo y se denota por $v_L = v_L(t)$. Dicha diferencia de potencial se puede calcular utilizando la siguiente expresión, [8, 9, 10]:

$$v_L(t) = L \frac{di}{dt}. \quad (85)$$

En las siguientes secciones analizaremos y resolveremos algunos problemas de circuitos eléctricos utilizando la técnica de la transformada de Laplace.

VIII. CIRCUITO INDUCTIVO-CAPACITIVO

En este caso analizaremos el circuito formado por un capacitor y un inductor. En el tiempo $t = 0$ el capacitor tiene una carga $q = q_0$, y también en $t = 0$, la corriente a través del circuito es $i = i_0$. Este circuito es un oscilador muy sencillo, en el cual la energía se transfiere alternativamente entre el capacitor y el inductor. La solución de este circuito eléctrico se puede consultar en el libro de Resnick *et al.* [8], páginas 830-833.

El circuito eléctrico está formado por un capacitor C y un inductor L conectados por sus extremos formando un circuito cerrado de dos elementos. La Ley de Voltajes de Kirchoff nos indica que la suma algebraica de voltajes alrededor de un lazo cerrado debe ser cero, por ello la relación entre $v_L(t)$ y $v_C(t)$ está dada por:

$$v_L(t) + v_C(t) = 0. \quad (86)$$

Si sustituimos las ecuaciones (83) y (85) para las respectivas diferencias de potenciales en el capacitor y en el inductor, obtenemos una ecuación diferencial que tiene dos funciones incógnitas, que son $q(t)$ e $i(t)$:

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (87)$$

Para resolver la ecuación anterior debemos expresarla en términos de una sola variable. Como primer caso resolveremos la ecuación en términos de la carga $q(t)$, sustituyendo la ecuación (78) en la ecuación (87):

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0. \quad (88)$$

Observemos que la derivada de la carga dq/dt evaluada en el tiempo $t = 0$ corresponde con la corriente i evaluada en $t = 0$, es decir, $q'(0) = i_0$. Sabiendo lo anterior, podemos utilizar la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial:

$$L[s^2Q(s) - sq_0 - i_0] + \frac{Q(s)}{C} = 0. \quad (89)$$

Haciendo álgebra, podemos obtener una expresión explícita para la transformada de Laplace $Q(s)$ y su respectiva inversa $q(t)$, las cuales quedan como:

$$Q(s) = q_0 \left(\frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right) + i_0 \left(\frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right), \quad (90)$$

$$q(t) = q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + i_0 \sqrt{LC} \text{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \quad (91)$$

La ecuación (91) nos arroja el resultado de la carga eléctrica en el capacitor como función del tiempo. Como podemos observar, $q(t)$ es una función formada por un seno y un coseno, y que además depende de la carga inicial en el capacitor y de la corriente inicial en el circuito.

Como segundo caso resolveremos la ecuación (87) en términos de la corriente $i(t)$, por lo que es necesario sustituir la ecuación (81) en la ecuación (87):

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q_0}{C} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = 0. \quad (92)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace y realizamos algunos pasos algebraicos podemos obtener una expresión para la transformada $I(s)$, la cual también es fácil y rápidamente invertible:

$$L[sI(s) - i_0] + \frac{q_0}{Cs} + \frac{I(s)}{Cs} = 0, \quad (93)$$

$$I(s) = i_0 \left(\frac{s}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right) - \frac{q_0}{LC} \left(\frac{1}{s^2 + \frac{1}{LC}} \right), \quad (94)$$

$$i(t) = i_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) - \frac{q_0}{\sqrt{LC}} \text{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \quad (95)$$

Al obtener las ecuaciones anteriores, hemos resuelto el problema de la manera más general posible. Pero si deseamos hacer un análisis semejante al de Resnick, *et al.* [8], entonces necesitamos considerar las mismas condiciones iniciales, para lo cual hay que suponer un capacitor con carga $q = q_0$ en el tiempo $t = 0$. Además,

debemos suponer que no existe corriente eléctrica en el inicio del proceso, es decir, $i_0 = 0$. Por otro lado, también es necesario definir la frecuencia angular característica de nuestro fenómeno como $\omega \equiv (LC)^{-1/2}$, lo que transforma a las ecuaciones (91) y (95) en las ecuaciones (96) y (97):

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t), \quad (96)$$

$$i(t) = -q_0 \omega \text{sen}(\omega t). \quad (97)$$

Las ecuaciones anteriores, junto con las ecuaciones (83) y (85) nos permiten calcular los voltajes en el capacitor y en el inductor como funciones del tiempo.

$$v_C(t) = \frac{q_0}{C} \cos(\omega t), \quad (98)$$

$$v_L(t) = -q_0 \omega^2 L \cos(\omega t). \quad (99)$$

Finalmente, si deseamos presentar las ecuaciones de la carga y la corriente en una sola gráfica es necesario expresarlas como variables normalizadas. Si dividimos la ecuación (96) entre q_0 y la ecuación (97) entre $q_0 \omega$ tenemos:

$$q^*(t) = \cos(\omega t), \quad (100)$$

$$i^*(t) = -\text{sen}(\omega t). \quad (101)$$

En la figura 5 se presentan las gráficas de las ecuaciones (100) y (101). Por otro lado, la figura 6 nos muestra físicamente el comportamiento de un circuito inductivo-capacitivo sin resistencia, mejor conocido como circuito LC . Es necesario mencionar que el periodo de oscilación de este sistema es $\tau = 2\pi(LC)^{1/2}$.

Analizando la figura 5, podemos ver que la curva de la carga eléctrica en el capacitor está atrasada respecto a la curva de la corriente eléctrica en el inductor. Se observa que el tiempo de atraso corresponde con la cuarta parte del periodo de oscilación. Precisamente, hay cuatro instantes durante el ciclo de oscilación en los cuales el total de la energía se encuentra almacenada ya sea en el capacitor o en el inductor. Si prestamos atención a la figura 6, podemos observar que inicialmente la totalidad de la energía se encuentra en el capacitor, (ver inciso a). Posteriormente, cuando ha transcurrido una cuarta parte del periodo de oscilación, toda la energía del sistema se ha almacenado en el inductor, (ver inciso c). Cuando se alcanza exactamente la mitad del periodo, la totalidad de la energía ha regresado al capacitor, aunque ahora la polarización de las placas es contraria respecto al inicio del proceso, (ver incisos a y e). En el instante correspondiente a las tres cuartas partes del ciclo de oscilación, nuevamente toda la energía se encuentra almacenada en el inductor, aunque la corriente y el campo tienen polarización contraria a la que se observa en el primer cuarto del ciclo, (ver incisos c y g). Finalmente, al completarse el periodo

de oscilación, la totalidad de la energía regresa al capacitor con la misma polarización que en el estado inicial.

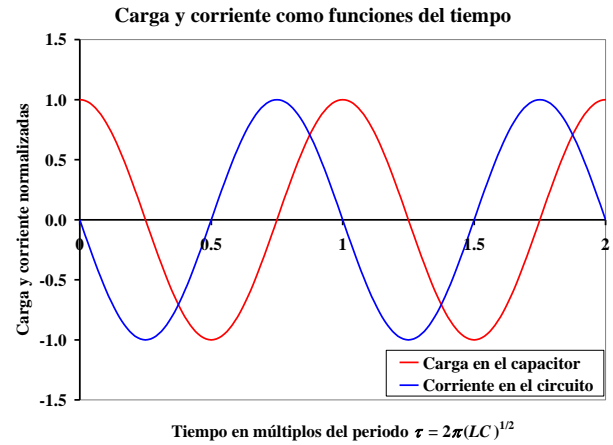


FIGURA 5. En color rojo se presenta la gráfica de la carga normalizada (ecuación 100), mientras que en color azul se presenta la gráfica de la corriente normalizada (ecuación 101).

IX. CIRCUITO RESISTIVO-CAPACITIVO

Este ejemplo es de gran importancia dentro de la teoría de circuitos eléctricos, ya que nos permite diseñar un experimento de laboratorio apropiado para medir la constante de tiempo de un circuito RC utilizando una fuente de voltaje que suministre una función cuadrada. En este caso, el voltaje de la fuente tiene una amplitud $v_0/2$, un periodo 2τ y está representado por una serie de funciones escalón como se puede observar en la siguiente ecuación:

$$v_F(t) = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_{k\tau}. \quad (102)$$

Siguiendo la Ley de Voltajes de Kirchoff podemos construir o plantear la ecuación diferencial que gobierna al circuito RC conectado en serie, sabiendo que la suma del voltaje en la resistencia con el voltaje en el capacitor debe ser igual al voltaje de la fuente:

$$v_R(t) + v_C(t) = v_F(t). \quad (103)$$

Sustituyendo las ecuaciones (78), (82), (83) y (102) en la ecuación (103) obtenemos:

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_{k\tau}, \quad (104)$$

donde q es la carga eléctrica en el capacitor, R es la resistencia, C es la capacitancia, τ es el semiperiodo de la función cuadrada en el voltaje de alimentación y v_0 es el doble de la amplitud del voltaje de alimentación. Al igual que antes, esta ecuación diferencial se puede resolver en términos de la variable $q(t)$ o de la variable $i(t)$.

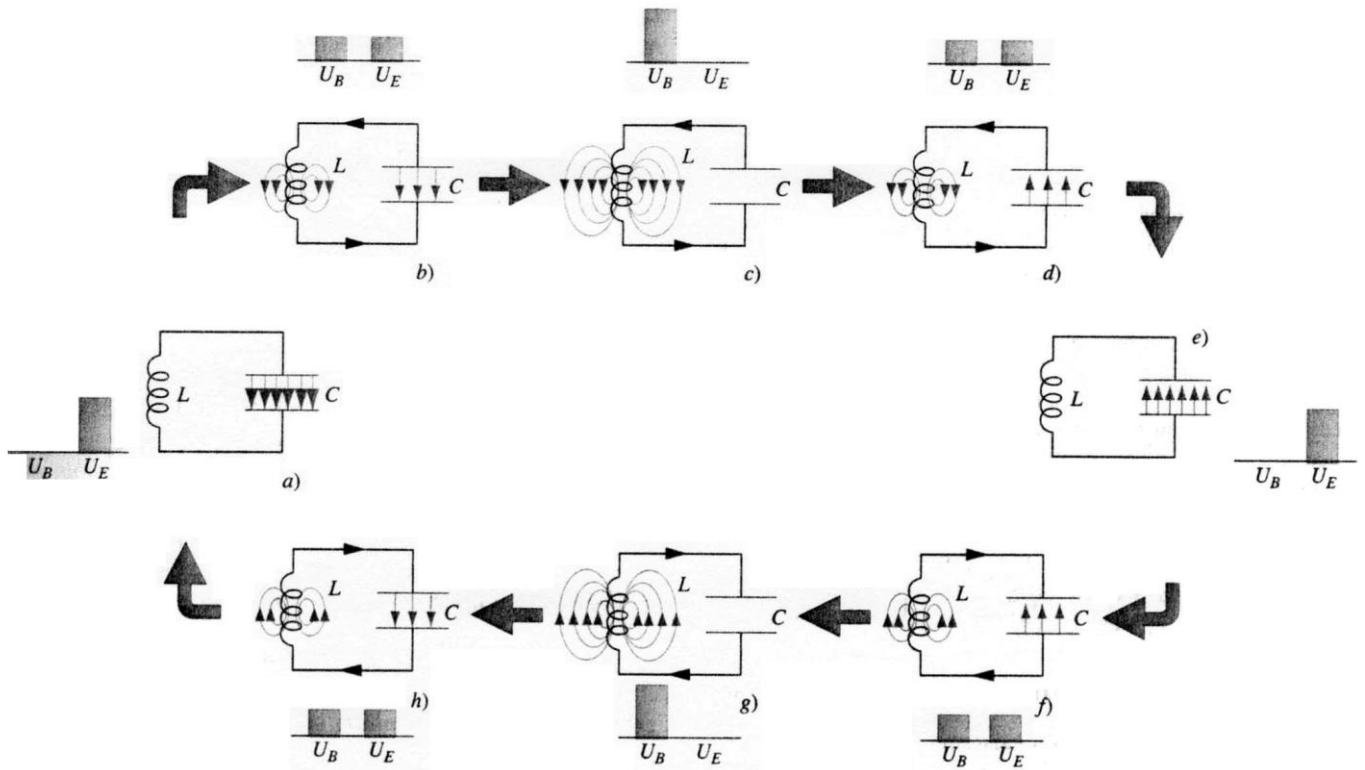


FIGURA 6. Aquí se muestra el proceso que ocurre en un circuito LC sin resistencia. Se presentan ocho etapas en las cuales se observa la variación de energía eléctrica y magnética entre los elementos del circuito. Las gráficas de barras representan la energía almacenada, donde la energía eléctrica del capacitor se representa por U_E y la energía magnética del inductor se representa por U_B . Esta imagen ha sido extraída de Resnick, *et al.* [8], página 831.

Como **primer caso**, resolveremos la ecuación en términos de la función $q(t)$, por lo cual aplicaremos la transformada de Laplace a la ecuación (104) y despejaremos la función $Q(s)$:

$$R[sQ(s) - q_0] + \frac{Q(s)}{C} = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\tau}}{s}, \quad (105)$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Q(s) = q_0 + \frac{v_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\tau}}{s}, \quad (106)$$

$$Q(s) = \frac{q_0}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{v_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\tau}}{s(s + \frac{1}{RC})}. \quad (107)$$

Para poder resolver la ecuación anterior es necesario separar en fracciones parciales el término que se encuentra dentro de la sumatoria, obteniéndose:

$$Q(s) = \frac{q_0}{s + \frac{1}{RC}} + v_0 C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{e^{-k\tau}}{s} - \frac{e^{-k\tau}}{s + \frac{1}{RC}} \right). \quad (108)$$

Ahora podemos invertir la ecuación (108) para obtener la carga eléctrica $q(t)$ como función del tiempo:

$$q(t) = q_0 e^{-t/RC} + v_0 C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - e^{-(t-k\tau)/RC}] u_{k\tau}. \quad (109)$$

Como **segundo caso**, resolveremos la ecuación (104) en términos de la corriente eléctrica $i(t)$, para lo cual es necesario sustituir las ecuaciones (78) y (81) en la ecuación (104):

$$Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + \frac{q_0}{C} = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_{k\tau}. \quad (110)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace y desarrollamos algunos pasos algebraicos tenemos:

$$I(s) + \frac{I(s)}{RCs} + \frac{q_0}{RCs} = \frac{v_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-k\tau}}{s}, \quad (111)$$

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)I(s) = -\frac{q_0}{RC} + \frac{v_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-k\tau}, \quad (112)$$

$$I(s) = -\frac{q_0}{RC} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right) + \frac{v_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{e^{-k\tau}}{s + \frac{1}{RC}} \right). \quad (113)$$

Finalmente, invirtiendo la ecuación (113) tenemos una expresión para la corriente $i(t)$:

$$i(t) = -\frac{q_0}{RC} e^{-t/RC} + \frac{V_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(t-k\tau)/RC} u_{k\tau}. \quad (114)$$

Considerando que el capacitor está completamente descargado en $t = 0$, entonces $q(t)$ e $i(t)$ quedan como:

$$q(t) = v_0 C \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - e^{-(t-k\tau)/RC}] u_{k\tau}, \quad (115)$$

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(t-k\tau)/RC} u_{k\tau}. \quad (116)$$

Nos interesa el voltaje en el capacitor y el voltaje en la resistencia, por lo cual podemos sustituir las ecuaciones (115) y (116) en las ecuaciones (82) y (83), obteniéndose:

$$v_C(t) = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - e^{-(t-k\tau)/RC}] u_{k\tau}, \quad (117)$$

$$v_R(t) = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-(t-k\tau)/RC} u_{k\tau}. \quad (118)$$

Podemos ver rápidamente que si sumamos la solución para el voltaje en el capacitor con la solución para el voltaje en la resistencia obtenemos el voltaje en la fuente, lo que es consistente con la ley de Voltajes de Kirchoff.

$$v_R(t) + v_C(t) = v_F(t) = v_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_{k\tau}. \quad (119)$$

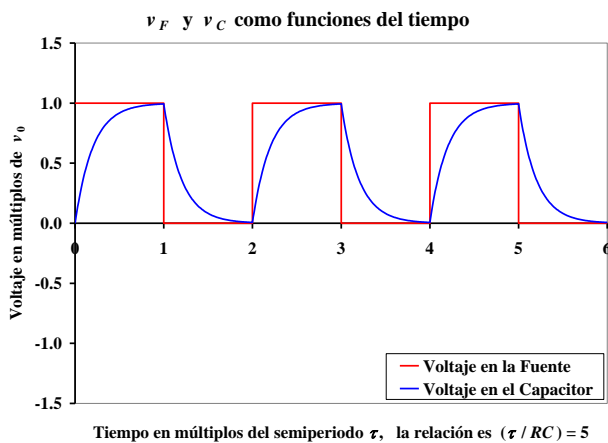


FIGURA 7. La función cuadrada en color rojo representa el voltaje en la fuente $v_F(t)$, mientras que la curva azul corresponde con el voltaje en el capacitor $v_C(t)$.

La figura 7 presenta el voltaje de alimentación de la fuente dado por la ecuación (102) junto con el voltaje en el capacitor dado por la ecuación (117), mientras que la figura 8 nos muestra nuevamente el voltaje de la fuente de alimentación dado por la ecuación (102) junto con el voltaje en la resistencia dado por la ecuación (118). Para realizar ambas gráficas se utilizó una relación $\tau / RC = 5$, lo que permite al capacitor cargarse y descargarse casi por

completo durante un semiperiodo de la función cuadrada en el voltaje de alimentación.

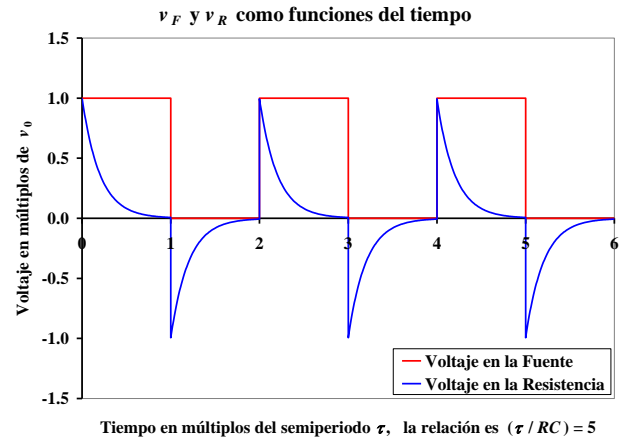


FIGURA 8. La función cuadrada en color rojo representa el voltaje en la fuente $v_F(t)$, mientras que la curva azul corresponde con el voltaje en la resistencia $v_R(t)$.

X. TRANSFERENCIA DE CALOR

Otra aplicación de la Transformada de la Laplace, es la solución de algunos problemas de Transferencia de Calor en estado transitorio y en estado estacionario. Dichos problemas se resuelven generalmente en los libros de Transferencia de Calor utilizando métodos distintos a la Transformada de Laplace.

Para poder abordar este tema, es importante recordar los conceptos básicos y las leyes que gobiernan el fenómeno de la Transferencia de Calor.

Temperatura: Es una medida indirecta de la energía cinética promedio de las moléculas de una sustancia. Se denota por T y generalmente es una función de la posición (x, y, z) y del tiempo t , por lo cual $T = T(x, y, z, t)$.

Capacidad calorífica: Es una propiedad de la materia, que nos indica la cantidad de energía en forma de calor que se debe suministrar a un kilogramo de algún material para elevar su temperatura en un grado Celsius. Se denota por la letra c minúscula y se considera como un valor constante.

Calor: Es la energía en tránsito debido a una diferencia de temperaturas, [12]. El calor se transmite desde una zona de alta temperatura hacia una zona de baja temperatura. Se denota por la letra Q mayúscula y en general es una función del tiempo, por lo que se puede escribir $Q = Q(t)$. Si consideramos una sustancia con masa m , capacidad calorífica c y que ha cambiado su temperatura desde un valor inicial T_0 hasta un valor final T , entonces el calor que ha absorbido (Q es positivo) o perdido (Q es negativo) está dado por:

$$Q = mc(T - T_0). \quad (120)$$

Potencia transferida en forma de calor: En el contexto de la Transferencia de Calor, es la cantidad de calor transferido en la unidad de tiempo hacia el exterior de un objeto. Se calcula como el negativo de la derivada de Q . Si la potencia transferida está saliendo del objeto se considera positiva, en caso contrario se considera negativa. Se denota por la letra q minúscula y se considera como una función del tiempo $q = q(t)$.

$$q = -\frac{dQ}{dt}. \quad (121)$$

Conducción: Es el mecanismo de transferencia de calor debido a la interacción directa entre moléculas. Este fenómeno es más notorio en los sólidos, aunque también ocurre en los fluidos. Las moléculas de un sólido poseen energía cinética de vibración, la cual aumenta al aumentar la temperatura. Las moléculas con mayor temperatura (mayor energía) transfieren su energía a las moléculas de menor temperatura (menor energía) mediante el contacto directo entre ellas. La ley física que gobierna este fenómeno es la **Ley de Conducción de Fourier**, la cual presentamos en forma unidimensional en la ecuación (122), donde k es la conductividad térmica del material sólido, x es la posición, A_k es el área de sección transversal que es perpendicular al flujo de calor, y q_k es la potencia transferida por conducción en la dirección x , [12, 13]:

$$q_k = -kA_k \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (122)$$

En este caso, la potencia transferida en forma de calor se considera positiva si el calor se mueve en el sentido positivo de la coordenada x y se considera negativa si se mueve en el sentido opuesto.

Convección: Es el mecanismo de transferencia de calor en los fluidos, que ocurre como consecuencia del movimiento de los mismos, ya sea por difusión de moléculas individuales o por el transporte de grandes grupos de moléculas. Las moléculas de un fluido son libres de moverse en todas direcciones. Cuando dichas moléculas se ponen en contacto con un sólido a alta temperatura reciben calor por conducción y adquieren una gran energía cinética, lo que las hace moverse alejándose de la fuente de calor. En consecuencia, las moléculas **frías** se mueven para ocupar el lugar que han dejado las moléculas **calientes**. El resultado neto es que las moléculas calientes se alejan de la fuente de calor y las frías se mueven hacia dicha fuente, formándose una corriente de convección. La **Ley de Enfriamiento de Newton** describe la transferencia de calor entre un sólido y un fluido, y está dada por la ecuación (123), donde h es el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección, T es la temperatura del sólido, T_∞ es la temperatura del fluido y A_h es el área de contacto o de transferencia entre el sólido y el fluido, [12, 13]:

$$q_h = hA_h(T - T_\infty). \quad (123)$$

Consideramos que la potencia transferida por convección q_h es positiva cuando el calor se mueve del sólido hacia el fluido y negativa cuando va desde el fluido hacia el sólido.

Radiación: Es el mecanismo de transferencia de calor a través del vacío, por medio de ondas electromagnéticas. El calor proveniente del Sol llega a la Tierra en forma de radiación electromagnética atravesando millones de kilómetros de espacio vacío. Los objetos emiten energía por el simple hecho de tener una temperatura diferente del cero absoluto. Mientras más caliente está un objeto, emite más calor en forma de radiación electromagnética. La **Ley de Radiación de Stefan-Boltzmann** es la responsable de describir este fenómeno y está dada por la ecuación (124), donde q_σ es la potencia transferida por radiación, T es la temperatura absoluta del objeto, A_σ es la superficie de radiación del objeto, ϵ es el coeficiente de emisividad del objeto y σ es la constante de Stefan-Boltzmann, [12, 13]:

$$q_\sigma = \epsilon A_\sigma T^4. \quad (124)$$

XI. ENFRIAMIENTO SÚBITO

En esta sección analizaremos la variación de temperatura como función del tiempo para un objeto sólido que es súbitamente sumergido en un fluido cuya temperatura es menor a la temperatura inicial de dicho objeto.

Para ello, debemos hacer algunas suposiciones pertinentes, tales como pensar que la velocidad de transferencia de calor en el interior del objeto es muy alta comparada con la velocidad de transferencia de calor entre el objeto y el fluido. Por lo anterior, se puede considerar que la temperatura del objeto es uniforme dentro del mismo, es decir, en un instante dado el objeto sólido tiene la misma temperatura en todo su interior. Para saber si el problema cumple con esta condición, es necesario hacer el cálculo del número de Biot, y si se obtiene un valor menor a 0.1, entonces estamos ante un problema en el cual la temperatura del sólido se puede considerar uniforme durante el proceso de enfriamiento, [13].

La ecuación diferencial que rige este fenómeno se obtiene al sustituir las ecuaciones (120), (121) y (123):

$$hA_h(T - T_\infty) = -mc \frac{dT}{dt}. \quad (125)$$

Si definimos $\theta \equiv T - T_\infty$ y $\alpha \equiv hA_h/mc$ entonces podemos convertir la ecuación (125) en la ecuación (128):

$$\frac{dT}{dt} + \frac{hA_h}{mc}(T - T_\infty) = 0, \quad (126)$$

$$\frac{dT}{dt} + \alpha(T - T_\infty) = 0, \quad (127)$$

$$\frac{d\theta}{dt} + \alpha\theta = 0. \quad (128)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación anterior y desarrollando algebraicamente tenemos:

$$s\Theta(s) - \theta_0 + \alpha \Theta(s) = 0, \quad (129)$$

$$(s + \alpha)\Theta(s) = \theta_0, \quad (130)$$

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0}{s + \alpha}. \quad (131)$$

De la definición de θ concluimos que $\theta_0 = T_0 - T_\infty$. Además, si invertimos la ecuación (131) podemos obtener una solución para la temperatura del objeto sólido como función del tiempo:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\alpha t}, \quad (132)$$

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-\alpha t}. \quad (133)$$

Ahora resolveremos el problema presentado por [13], página 120, que dice lo siguiente:

Problema: “Una esfera de aluminio de 3 cm de diámetro se encuentra inicialmente a una temperatura de 200 °C y de repente se expone al aire a una temperatura de 100 °C. Si el coeficiente promedio de transferencia de calor es de 20 W/m²C°, calcule el tiempo necesario para que el interior de la esfera alcance una temperatura de 150 °C. Supóngase las propiedades del aluminio siguientes: $k = 210$ W/mC°, $c = 0.895$ kJ/kgC° y $\rho = 2720$ kg/m³”.

Primero se debe calcular el número de Biot y ver si el sistema puede ser descrito por la ecuación (126). Para una esfera de radio R , conductividad k y coeficiente promedio de transferencia de calor h , el número de Biot Bi está dado por, [13]:

$$Bi = \frac{hR}{k}. \quad (134)$$

Si sustituimos datos y realizamos el cálculo correspondiente tenemos:

$$Bi = 1.428571429 \times 10^{-3}. \quad (135)$$

El número de Biot es mucho menor que 0.1, por lo tanto, el sistema puede ser descrito bastante bien por la ecuación (126). Ahora calcularemos α según su definición:

$$\alpha = \frac{hA_h}{mc} = \frac{hA_h}{\rho c V} = \frac{h(4\pi R^2)}{\rho c (\frac{4}{3}\pi R^3)} = \frac{3h}{\rho c R}, \quad (136)$$

$$\alpha = \frac{3(20 \frac{W}{m^2 C^\circ})}{(2720 \frac{kg}{m^3})(895 \frac{J}{kg C^\circ})(0.015 m)}, \quad (137)$$

$$\alpha = 1.643115347 \times 10^{-3} s^{-1}. \quad (138)$$

Finalmente, sólo es necesario despejar t de la ecuación (133) y hacer el cálculo numérico para obtener el tiempo que transcurre desde que la esfera es sumergida teniendo una temperatura inicial $T_0 = 200$ °C, hasta que alcanza la temperatura $T = 150$ °C:

$$t = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right), \quad (139)$$

$$t = 421.8493741 s \approx 7 \text{ min}. \quad (140)$$

La figura 9 presenta la gráfica de la solución a nuestra ecuación diferencial tomando en cuenta las condiciones del problema que acabamos de resolver. La temperatura de la esfera de aluminio está descrita por una función exponencial que inicia en $T_0 = 200$ °C y que va descendiendo asintóticamente hacia el valor de la temperatura del fluido que rodea a la esfera, $T_\infty = 100$ °C.

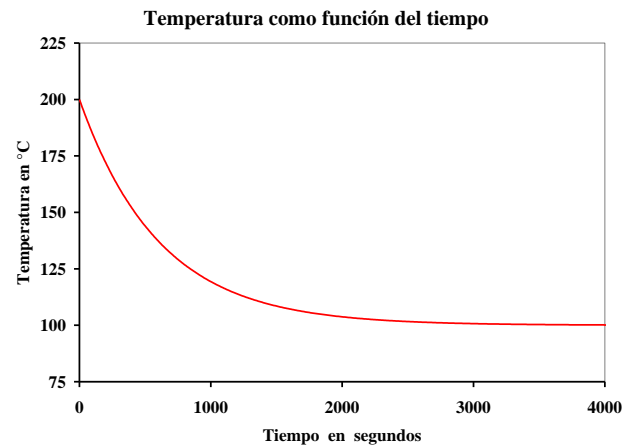


FIGURA 9. Aquí se muestra la temperatura de la esfera de aluminio como función del tiempo. La curva roja corresponde con la ecuación (133), considerando $T_0 = 200$ °C, $T_\infty = 100$ °C y $\alpha = 1.643115347 \times 10^{-3} s^{-1}$.

XII. ALETAS

Cuando se desea aumentar la cantidad de calor disipado por unidad de tiempo, se puede añadir una aleta al objeto que se desea enfriar, lo que provocará un aumento de la superficie efectiva de transferencia de calor.

En general, una aleta es una barra o placa de metal que se añade o se conecta por uno de sus extremos a la superficie que se desea enfriar. El calor se transmite por conducción en el interior de la aleta en la dirección longitudinal, pero en forma transversal, el calor se disipa por convección hacia el fluido que rodea a la aleta. La figura 10 nos muestra el diagrama más general para una aleta típica.

Las propiedades físicas y geométricas que debemos considerar en una aleta son la longitud L , el área de sección transversal A_k , el perímetro P que encierra dicha área transversal, el coeficiente promedio de transferencia de

calor por convección h , la conductividad térmica k , la capacidad calorífica c y la densidad ρ . En el caso más general, A_k puede ser variable a lo largo de la aleta (ver figura 10), pero en este artículo consideraremos el caso especial cuando A_k es constante, (ver figura 11).

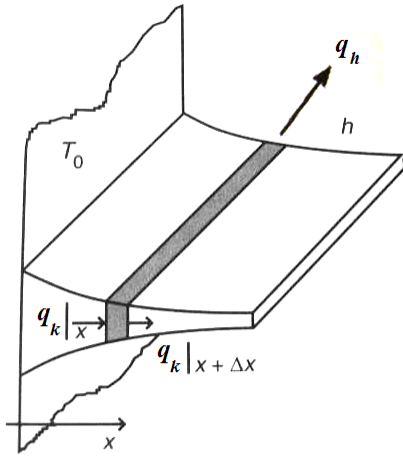


FIGURA 10. Se muestra la imagen de una aleta con área de sección transversal variable. Esta figura fue extraída y modificada de Marique Valadéz, [13], página 56.

A continuación presentaremos un desarrollo semejante a los realizados por [12, 13]. Para lo cual es necesario considerar que la transferencia de calor en el interior de la aleta metálica es gobernada por la conducción, mientras que la transferencia de calor desde la superficie de la aleta hacia el fluido se rige por la convección.

Analizando la conducción, si consideramos una posición x dada y un pequeño desplazamiento hasta alcanzar el valor $x + \Delta x$, podemos observar que se genera una cinta de espesor Δx que rodea a la aleta, cuya superficie permite la transferencia de calor por convección, (ver figura 10). La pequeña superficie de la cinta se puede calcular como el producto del desplazamiento Δx por el perímetro P . Con lo anterior podemos utilizar la ecuación (123), para calcular el calor disipado por convección:

$$q_h = h(T - T_\infty)P\Delta x. \quad (141)$$

Si deseamos hacer un balance de energía en estado estacionario para una sección de volumen de la aleta limitada por las coordenadas x y $x + \Delta x$, entonces debemos pensar que calor que entra en la sección de volumen es igual al calor que sale de la misma. Lo anterior equivale a decir que el calor entra por conducción en la coordenada x , sale por convección a través de la cinta con superficie $P\Delta x$ y también sale por conducción en la coordenada $x + \Delta x$:

$$[q_k]_x = q_h + [q_k]_{x+\Delta x}. \quad (142)$$

Para encontrar la ecuación diferencial que describe este fenómeno, debemos realizar varios pasos. Primero debemos considerar que la temperatura de la aleta sólo es función de la posición, por lo cual $T = T(x)$. Luego, pasamos todos los términos de la ecuación (142) a un solo lado e igualamos a cero. Posteriormente dividimos entre Δx , sustituimos las

ecuaciones (122) y (141) y tomamos el límite cuando el desplazamiento Δx tiende a 0. Los pasos anteriores nos arrojan la ecuación diferencial buscada, [12, 13]:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{q_h}{\Delta x} + \frac{[q_k]_{x+\Delta x} - [q_k]_x}{\Delta x} \right\} = 0, \quad (143)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \left(\frac{hP}{kA_k} \right) (T - T_\infty) = 0. \quad (144)$$

Al definir $\theta \equiv T - T_\infty$ y $m^2 \equiv hP/kA_k$, se puede convertir la ecuación (144) en la ecuación (146):

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 (T - T_\infty) = 0, \quad (145)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0. \quad (146)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace y si realizamos algunos pasos algebraicos se puede encontrar una expresión explícita para $\Theta(s)$:

$$s^2 \Theta(s) - s\theta_0 - \theta_0' - m^2 \Theta(s) = 0, \quad (147)$$

$$(s^2 - m^2) \Theta(s) = \theta_0 s + \theta_0', \quad (148)$$

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0 s + \theta_0'}{s^2 - m^2}. \quad (149)$$

La ecuación anterior se puede invertir de dos formas distintas, la primera de ellas es considerando funciones hiperbólicas, y la segunda es separando en fracciones parciales para obtener funciones exponenciales. Si consideramos el primer caso tenemos:

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0 s}{s^2 - m^2} + \frac{\theta_0'}{s^2 - m^2}, \quad (150)$$

$$\theta(x) = \theta_0 \cosh(mx) + \frac{\theta_0'}{m} \sinh(mx). \quad (151)$$

Si deseamos considerar la segunda opción haciendo la separación en fracciones parciales tenemos:

$$\Theta(s) = \frac{\theta_0 s + \theta_0'}{(s + m)(s - m)}, \quad (152)$$

$$\Theta(s) = \frac{C_1}{s + m} + \frac{C_2}{s - m}, \quad (153)$$

$$\theta(x) = C_1 e^{-mx} + C_2 e^{mx}. \quad (154)$$

Donde las constantes C_1 y C_2 están dadas por:

$$C_1 = \frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0'}{2m}, \quad (155)$$

$$C_2 = \frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0'}{2m}. \quad (156)$$

Por lo anterior, la ecuación (154) se transforma en:

$$\theta(x) = \left(\frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0'}{2m} \right) e^{-mx} + \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0'}{2m} \right) e^{mx}. \quad (157)$$

En las ecuaciones (151) y (157), θ_0 y θ_0' son constantes que dependen de las condiciones de frontera o de las condiciones físicas del sistema estudiado. Según [12], existen cuatro posibles escenarios para las condiciones de frontera, lo que nos conduce a cuatro diferentes expresiones para la temperatura como función de la posición. En este artículo sólo resolveremos dos de los cuatro casos posibles.

El **primer caso** y el más sencillo consiste en considerar que la aleta tiene una longitud infinita. Mientras estemos más lejos de la fuente de calor, la temperatura de la aleta se aproximará asintóticamente a la temperatura del fluido. Por esta razón, la derivada de la temperatura respecto a la posición se anula cuando $x \rightarrow \infty$, lo cual también es cierto para $\theta'(x)$, es decir, $\theta'(x) = 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Si calculamos la derivada de $\theta(x)$ a partir de la ecuación (157) e imponemos esta condición de frontera, tenemos:

$$\theta'(x) = -m \left(\frac{\theta_0}{2} - \frac{\theta_0'}{2m} \right) e^{-mx} + m \left(\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0'}{2m} \right) e^{mx}, \quad (158)$$

$$\frac{\theta_0}{2} + \frac{\theta_0'}{2m} = 0, \quad (159)$$

$$\theta_0' = -m\theta_0. \quad (160)$$

Por lo tanto, la solución en las formas $\theta(x)$ y $T(x)$ está dada por las ecuaciones (161) y (162) respectivamente, [12]:

$$\theta(x) = \theta_0 e^{-mx}, \quad (161)$$

$$T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-mx}. \quad (162)$$

El **segundo caso** implica considerar que la aleta tiene longitud finita L , pero el extremo final de la misma se encuentra aislado. Por lo tanto, no existe transferencia de calor por conducción ni por convección en $x = L$, lo que implica que $[q_k]_{x=L} = 0$. Entonces, $T'(x)$ y $\theta'(x)$ deben anularse en $x = L$. Si calculamos $\theta'(x)$ a partir de la ecuación (151) e imponemos dichas condiciones de frontera obtenemos, [12, 13]:

$$\theta'(x) = m\theta_0 \sinh(mx) + \theta_0' \cosh(mx), \quad (163)$$

$$\theta_0' = -m\theta_0 \tanh(mL), \quad (164)$$

$$\theta(x) = \theta_0 [\cosh(mx) - \tanh(mL) \sinh(mx)]. \quad (165)$$

La última expresión se puede modificar para llegar a:

$$\theta(x) = \frac{\theta_0 \cosh(mL - mx)}{\cosh(mL)}. \quad (166)$$

Si se desea alcanzar una expresión para $T(x)$, entonces se debe sustituir las definiciones $\theta \equiv T - T_\infty$ y $\theta_0 \equiv T_0 - T_\infty$ en la ecuación (166):

$$T(x) = T_\infty + \frac{(T_0 - T_\infty) \cosh(mL - mx)}{\cosh(mL)}. \quad (167)$$

Ahora resolveremos un problema considerando las soluciones dadas por las ecuaciones (162) y (167).

Problema: Considere una aleta de aluminio en forma de barra cilíndrica con diámetro $D = 5$ cm. La barra se conecta a una fuente de calor a $T_0 = 150$ °C, con el objetivo de disipar el calor proveniente de dicha fuente, (ver figura 11). El aire ambiental se encuentra a $T_\infty = 25$ °C y presenta un coeficiente promedio de transferencia de calor por convección $h = 100$ W/m²C°. La conductividad del aluminio es $k = 210$ W/mC°. Encuentre el parámetro m y construya la gráfica de la temperatura de la barra como función de la coordenada x .

Primero resuelva el problema considerando que la barra tiene una longitud infinita, $L = \infty$. Posteriormente, considere que la barra tiene una longitud $L = 25$ cm y que no puede transferir calor en su extremo final debido a que está aislada en ese punto.

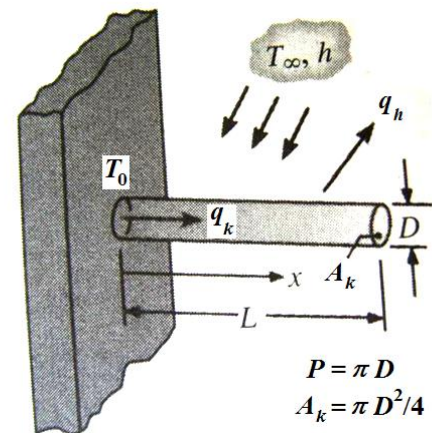


FIGURA 11. Se muestra la imagen de una aleta en forma de barra cilíndrica con área de sección transversal constante. Esta figura fue modificada de Icropera y DeWitt, [12], página 115.

El parámetro m tiene el mismo valor en ambos casos y se puede calcular a partir de la definición de m^2 :

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_k}} = \sqrt{\frac{4h}{kD}}, \quad (168)$$

$$m = 6.17213399848 \text{ m}^{-1}. \quad (169)$$

Una vez que se tiene el valor de m , entonces se pueden realizar las gráficas correspondientes. La figura 12 nos

muestra en color rojo la gráfica de la ecuación (162) y en color azul la gráfica de la ecuación (167). Debemos hacer notar que el dominio de cada ecuación es diferente. En el caso de la ecuación (162) los valores de x corren desde 0 m hasta ∞ m, mientras que para la ecuación (167), los valores de x sólo tienen sentido entre 0 m y 0.25 m. Vemos que la aleta infinita prácticamente alcanza la temperatura del aire ambiente al llegar a la posición $x = 0.5$ m. En cambio, debido a su tamaño finito, la aleta de 0.25 m tiene una temperatura aproximada de 75 °C en su extremo.

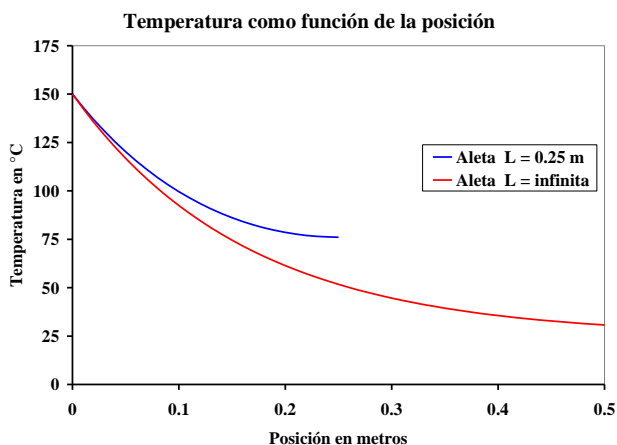


FIGURA 12. La curva roja inferior representa la temperatura de una aleta de longitud infinita, la cual está dada por la ecuación (162). La curva azul superior representa la temperatura de una aleta de longitud finita $L = 0.25$ m, la cual está dada por la ecuación (167). Los parámetros utilizados para hacer las gráficas fueron: $T_0 = 150$ °C, $T_\infty = 25$ °C y $m = 6.1721339984$ m⁻¹.

XIII. CONCLUSIONES

Aquí hemos presentado algunos problemas de importancia en distintas ramas de la ingeniería. Estos problemas pueden ayudar al alumno a entender la utilidad de las ecuaciones diferenciales en problemas concretos. Desafortunadamente, los cursos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) tienen como objetivo conocer la teoría matemática, y en la mayoría de las veces los programas son muy extensos, por lo que no hay tiempo suficiente para presentar y profundizar en los problemas de aplicación a la ingeniería. Sin embargo, sugerimos al profesor dedicar de dos a cuatro sesiones específicamente enfocadas en la resolución de problemas de aplicación a la ingeniería.

Cuando se presentan esta clase de problemas se influye positivamente en la formación del alumno y se puede romper con la rutina. En muchas ocasiones los profesores se enfocan más en la resolución de múltiples ejercicios de EDO's, pero debido a la falta de tiempo, pocas veces se hace énfasis en la realización de las gráficas correspondientes a las soluciones obtenidas. En otras ocasiones, los profesores hacen algunas gráficas en el pizarrón o solicitan al alumno hacerlas como ejercicios de tarea, sin embargo, las gráficas por sí solas no tienen significado para el alumno. Por lo tanto, es necesario

explicar los problemas y las gráficas dentro de un contexto físico en el cual adquieran valor y sentido para nuestros alumnos.

Cuando resolvemos un problema de ingeniería, la solución de una EDO tiene un significado físico, y al realizar la gráfica correspondiente, el alumno puede entender e imaginarse el comportamiento del fenómeno. Hemos realizado este artículo deseando que la información contenida en el mismo sea de utilidad para el profesor al preparar algunas clases que incluyan aplicaciones dentro de un curso de EDO's. Sin embargo, también puede utilizarse para algunas clases dentro de cursos de Cinética Química, Transferencia de Calor, y por supuesto Circuitos Eléctricos.

Las materias de Cinética Química y Transferencia de calor, por lo general son cursadas por los alumnos algún tiempo después de haber acreditado la materia de EDO's, y en muchos casos, los alumnos ya no recuerdan como derivar, como integrar y como resolver EDO's. Por esta razón, la técnica de la Transformada de Laplace permite al alumno resolver EDO's sin la necesidad de recurrir a complicadas técnicas de integración, sólo es necesario recordar los procedimientos algebraicos y tener al alcance las tablas de transformación.

Si el profesor desea buscar problemas sobre el tema de Cinética Química recomendamos revisar con mayor profundidad el libro de Logan [6], y si desea problemas con un mayor grado de dificultad, podemos recomendar libros sobre ingeniería de las reacciones químicas de autores tales como Levenspiel [14] y/o Smith [15]. Para el caso de Transferencia de Calor, recomendamos revisar el libro de Bird, *et al.* [16], libro que además presenta los temas de transferencia de momento y transferencia de materia. Este último libro es de un grado de dificultad muy elevado, por lo cual se sugiere leer con detenimiento. Además como ya se dijo antes, estos libros [6, 14, 15, 16] presentan EDO's resueltas mediante técnicas diferentes a la transformada de Laplace. Por ello, se necesita que el profesor dedique algún tiempo para analizar los problemas, resolverlos mediante dicha técnica y posteriormente presentarlos a los alumnos.

Para finalizar este escrito, sugerimos al profesor vigilar los siguientes puntos durante la exposición de los problemas:

a) Sólidas Bases de Álgebra: La mayoría de los problemas que tienen los alumnos en cualquier materia del área de ingeniería es por deficiencias en Álgebra.

b) Conocimiento de la Transformada de Laplace: El profesor de EDO's debe asegurarse que los alumnos tengan el mejor conocimiento posible sobre la transformada de Laplace y sus propiedades antes de presentar estos problemas de aplicación. En el caso de los profesores de otras materias, es necesario que dediquen una o dos sesiones al inicio del curso para recordar el método de Transformada de Laplace y posteriormente presentar y resolver los problemas.

c) Física detrás del problema: Es necesario que el profesor introduzca y/o recuerde a los alumnos los principales conceptos físicos sobre el tema de aplicación antes de presentar el problema.

d) Variables involucradas: También es muy importante explicar claramente tanto el significado físico, como el significado matemático de cada variable. Cuando hacemos análisis puramente matemáticos las variables involucradas no tienen significado físico y por ello tampoco tienen unidades. Por esta razón hay que cuidar el análisis de dimensiones y el significado de cada parte de la ecuación diferencial.

e) Gráficas de la solución: Recordemos que “una imagen vale más que mil palabras”, por ello debemos dar especial importancia a la construcción y al análisis de las gráficas correspondientes a las soluciones de las EDO's.

XIV. REFERENCIAS

[1] Katsuhiko O., *Ingeniería de Control Moderna*, 4ª ed. (Pearson Educación - Prentice Hall, Madrid, 2003), pp. 9-50, 85-103, 152-191.
[2] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 5ª ed. (Limusa - Wiley, México, 2010), pp. 307-354.
[3] Edwards, C. H., Penney, D. E., *Ecuaciones Diferenciales*, 4ª ed. (Pearson Educación - Prentice Hall, México, 2001), pp. 445-511.
[4] Zill, D. G., Cullen, M. R., *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1: Ecuaciones Diferenciales*, 3ª ed. (McGraw Hill, México, 2008), pp. 193-238.
[5] Spiegel, M. R., Liu, J., Abellanas Rapún, L., *Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada*, 2ª ed. (McGraw-Hill, Madrid, 2005), pp. 311-322.

[6] Logan, S. R., *Fundamentos de Cinética Química* (Addison Wesley, Madrid, 2000), pp. 3-9, 41-43, 54-56.
[7] Baldor, A., *Álgebra*, 2ª ed. (Grupo Editorial Patria, México, 2007), pp. 340-348.
[8] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. S., *Física*, Vol. 2, 5ª ed. (CECSA, México, 2004), pp. 567-571, 635-652, 661-672, 679-690, 701-716, 823-835.
[9] Boylestad, R. L., *Introducción al Análisis de Circuitos Eléctricos*, 10ª ed., (Pearson Educación - Prentice Hall, México, 2004), pp. 31-46, 97-102, 129-135, 375-410, 473-499.
[10] Cogdell, J. R., *Fundamentos de Circuitos Eléctricos*, (Pearson-Prentice Hall, México, 2000), pp. 4-40, 116-150.
[11] Albarrán-Zavala, E., *El potencial redox y la espontaneidad de las reacciones electroquímicas*, Lat. Am. J. Phys. Educ., **2**, 336-345 (2008), disponible en la dirección web: <<http://www.journal.lapen.org.mx>>, última consulta en Marzo 2, 2013.
[12] Incropera, F. P., De Witt, D. P., *Fundamentos de Transferencia de Calor*, 4ª ed. (Prentice Hall, México, 1999), pp. 2-12, 110-120, 212-218.
[13] Manrique Valadéz, J. A., *Transferencia de Calor*, 2ª ed. (Alfaomega - Oxford University Press, México, 2002), pp. 2-15, 54-60, 115-121.
[14] Levenspiel, O., *Ingeniería de las Reacciones Químicas*, (Reverté, México, 1997).
[15] Smith, J. M., *Ingeniería de la Cinética Química*, (CECSA, México, 1993).
[16] Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N., *Fenómenos de Transporte*, (Reverté, México, 1997).