

# Tratado epistemológico del Principio de Bernoulli para estudiantes de ingeniería



Rubén Sánchez-Sánchez<sup>1</sup>, César Mora<sup>1</sup>, Luis H. Barbosa<sup>2</sup>,  
Laura Istabhay Ensástiga-Alfaro<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Unidad Legaria. Calzada Legaria #694. Col. Irrigación. Del. Miguel Hidalgo. CP 11500, México, D. F.

<sup>2</sup>Grupo Física y Matemática, Depto. de Ciencias Naturales, Facultad de Ingeniería, Universidad Central, Cra. 5 No 21-38, Bogotá, Colombia.

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 27 de septiembre del 2013; aceptado el 18 de octubre de 2013)

## Resumen

El Principio de Bernoulli fue descubierto en el siglo XVIII por Daniel Bernoulli, científico y médico suizo nacido en Holanda. Su utilización en la vida cotidiana y en diversas aplicaciones industriales y médicas lo han hecho indispensable dentro de la formación académica de los estudiantes del Nivel Medio Superior y Superior. En este trabajo describimos brevemente algunos aspectos históricos que llevaron a Daniel Bernoulli a su descubrimiento. Sus antecedentes históricos y su correcta realización y exposición en el laboratorio o el salón de clases pueden ayudar a que este principio de la hidrodinámica clásica, sea un tema atractivo para estudiantes de las áreas de ingeniería y Ciencias exactas.

**Palabras clave:** Hidrodinámica, Principio de Bernoulli, historia de la Ciencia.

## Abstract

Daniel Bernoulli, a Swiss scientist and physician born in the Netherlands, discovered the Bernoulli Principle in the eighteenth century. Their use in everyday life and in various industrial and medical applications have become essential in the academic formation of students of Middle and Higher School Level. In this paper, we describe briefly the historical aspects that led to Daniel Bernoulli's discovery. Its historical background and its proper performance and exposure in the laboratory or classroom can help to make this principle of classical hydrodynamics, be a nice theme for students of the engineering and exact sciences.

**Keywords:** Hydrodynamics, Bernoulli's Principle, history of Science.

**PACS:** 01.40.-d, 01.40.E-, 01.65.+g

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

El Principio de Bernoulli [1], trata en su enunciado del equilibrio y la conservación de la energía en la dinámica clásica de los fluidos. Las tres cantidades de energía mecánica que aparecen en la formulación del principio son las siguientes:

- **Energía potencial gravitacional.** Esta es la energía que posee cierta sección del fluido debido a su altura con respecto a un nivel de referencia específico (generalmente el suelo) y está dada por el término  $\rho g h$  donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $h$  representaría la altura que ocupa esta sección del fluido con respecto al suelo.
- **Energía cinética.** Energía que lleva cierta porción o elemento de fluido debido a su velocidad. En la

ecuación de Bernoulli este término toma la forma siguiente, donde  $v$  es la velocidad del fluido

- **Energía de flujo  $\rho v^2/2$ .** Esta energía es la que tiene cierto elemento del fluido debido a su presión local. En la ecuación de Bernoulli esto se escribe simplemente con la letra  $P$ .

Para establecer el principio de Bernoulli son necesarios todos los elementos anteriores.

En sí el Principio de Bernoulli no es más que el establecimiento del *Principio Mecánico de la Conservación de la Energía para fluidos*, sean éstos gases o líquidos. Esto es, podemos enunciar el principio como sigue:

**Principio de Bernoulli.** La energía total de un sistema de fluidos permanece constante a lo largo de la trayectoria de su flujo. Si etiquetamos a dos elementos de fluido con los

números 1 y 2, tendremos entonces el enunciado matemático del Principio de Bernoulli

$$\rho gh_1 + P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \rho gh_2 + P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2. \quad (1)$$

## II. SOBRE EL PRINCIPIO DE BERNOULLI

Si se desprecia la viscosidad del fluido, donde se quiere demostrar el principio de Bernoulli [2, 3, 4], es fácil percatarse que es suficiente con invocar a la segunda ley de Newton (en su forma de ecuaciones diferenciales de Euler), para las moléculas que componen al fluido, y el Principio de Bernoulli se puede sustraer matemáticamente, por medio de ese principio mecánico fundamental. Se puede observar que existe una disminución en la presión del fluido asociado al incremento de la rapidez en las partículas que lo componen. Cuando existe una aceleración de las partículas, debe de haber asociada una fuerza, que produce dicha aceleración. Esto es, a partir de la segunda ley de Newton de movimiento, existe una fuerza en las partículas del fluido que produce una aceleración, como por ejemplo, cuando se hace disminuir la sección transversal de una tubería que transporta al fluido. El sentido común, diría que asociada a esa fuerza, debería de haber un incremento en la presión del fluido. Sin embargo, sorprendentemente el principio de Bernoulli predice exactamente el efecto contrario, es decir, al acelerarse las partículas de un fluido (por ejemplo, al disminuir el área de la sección transversal de una tubería donde se transporta el fluido), la presión del fluido *disminuye*, de acuerdo a la expresión matemática del Principio de Bernoulli.

A partir de principios de la dinámica newtoniana, podemos derivar el Principio de Bernoulli, y así mantener un aspecto, que parece lógicamente más conectado con la realidad física de la dinámica de las partículas que componen al fluido.

Así, consideremos a una partícula del fluido viajando a través de una de las líneas de flujo. Además, tomemos en cuenta, esta partícula con una aceleración *constante*  $a$ , a lo largo de su línea de trayectoria. Para un movimiento uniformemente acelerado tenemos a la siguiente ecuación de la dinámica galileana

$$2as = v^2. \quad (2)$$

Donde  $v$  es la velocidad de la partícula, y  $s$  la distancia recorrida por ella. Si consideramos que el entorno de esta partícula, son las demás partículas del fluido, que siguen líneas de flujo, y aquí solamente estamos analizando una sola línea de flujo, entonces podemos suponer que la diferencia de presiones del fluido sigue el principio de equivalencia, donde la demás líneas de flujo constituyen un marco de referencia para la partícula analizada. Si la densidad del fluido es  $\rho$ , entonces

$$\Delta P = \rho as = \rho(v^2/(2s))s = \rho v^2/2. \quad (3)$$

Es la diferencia de presiones, como si fueran incluidas en la diferencia de campo gravitacional, vista desde el punto de vista del Principio de Equivalencia.

Aunque la derivación corresponde a una suposición de una aceleración constante, donde la aceleración es comparada a la aceleración dentro de un campo constante de gravedad. Esta suposición no es absolutamente necesaria, tomando la forma diferencial de la expresión (3), tenemos

$$dP = \rho a ds. \quad (4)$$

Y entonces se puede tener, la expresión

$$dP = \rho a ds = \rho v dv, \quad (5)$$

de aquí

$$\int dP = \int \rho v dv, \quad (6)$$

que puede escribirse como

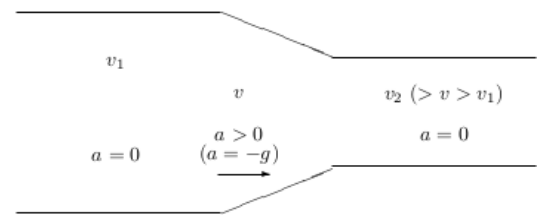
$$\Delta P = \Delta(\rho v^2/2). \quad (7)$$

Es fácil agregar otro término a la ecuación del Principio de Bernoulli, que representaría el efecto real del campo de gravedad, donde el primer término representa el cambio de presión debido a la aceleración sufrida por una partícula del fluido a la largo de la distancia  $s$  recorrida, el segundo cambio de presión es debido al campo de gravedad real. Así

$$\Delta P = \Delta(\rho gh) + \Delta(\rho as) = \Delta(\rho gh) + \Delta(\rho v^2/2). \quad (8)$$

En las siguientes secciones describiremos los aspectos históricos relevantes, que llevaron a Daniel Bernoulli al descubrimiento de este importante principio de la hidrodinámica que lleva su nombre.

Daniel Bernoulli descubrió este principio para el año de 1730, cuando contaba con treinta años de edad [5, 6]. Sin embargo, en su tiempo acontecería una tragedia, pues no fue reconocido por su trabajo como debería, aunque su esfuerzo sería reconocido años después.



**FIGURA 1.** El Principio de Bernoulli, visto como producido por un campo de gravedad  $g$ , que actúa en dirección contraria a la aceleración real del fluido  $a$  mostrada en el dibujo mediante una flecha. Si aplicamos el Principio de equivalencia en el análisis, es posible llegar a la expresión matemática del Principio de Bernoulli. Bernoulli derivó el mismo principio, utilizando el principio de la conservación de la energía, que en su tiempo se conocía como principio de la conservación de la *vis viva*. Principio en el que creían Leibnitz, Johann Bernoulli y otros pensadores del siglo XVIII.

### III. ANTECEDENTES

La historia de la familia Bernoulli comienza en 1622, cuando Jacob el viejo hugonote se trasladó a Basilea en Suiza, huyendo de la persecución que mantenían los católicos de Bélgica (el país donde vivía Jacob) a los hugonotes. Casi en todas partes se difundía la alta tolerancia religiosa que se respiraba en Basilea, de hecho el propio padre de los hugonotes, Juan Calvino, había emigrado ahí, desde su Francia Natal. Ya en Basilea, Jacob Bernoulli, se casó tres veces y tuvo un solo hijo, al que nombró Nikolaus, quien engendraría la dinastía de los Bernoulli tan dotada de talento.

Nikolaus, se habría de casar y tener a doce hijos, de los cuales le sobrevivirían cuatro de ellos que llegarían a la edad adulta. Dos de estos supervivientes se convertirían en matemáticos muy notables. Jakob en 1654, y Johann nacido en 1667, aunque su padre, en un principio no lo notara.

Desde un principio, las habilidades de Jakob le indicaban a su padre que él sería teólogo, y que las habilidades de Johann, trece años más joven que Jakob iba a ser comerciante.

Jakob, fingió obedecer las aspiraciones de su padre, y se fue a la Universidad para sacar un título en filosofía y una licenciatura en teología. Pero la verdaderas aspiraciones de Jakob, como más tarde se hizo evidente eran la física y las matemáticas. Estudiaba las estrellas en contra de la voluntad de su padre, como él mismo escribió en su diario personal.

Johann por su parte, se portó obedientemente con su padre, en un principio y fue aprendiz en el próspero negocio familiar de especias y medicina. Pero se desempeñó tan mal, que su padre tuvo que reconsiderar cual era el verdadero futuro de su hijo.

Nikolaus, creyendo de la voluntad divina, pensó que la voluntad de Dios era que su hijo se convirtiera en médico. Obedeciendo de nuevo, Johann ingresó en la Universidad de Basilea y obtuvo un título de médico.

Sin embargo, la verdadera pasión de Johann, al igual que su hermano Jakob eran las matemáticas, así que conspiró contra su padre, reuniéndose con su hermano para aprender matemáticas. Su conversión clandestina a matemático, se produjo cuando el matemático alemán Gottfried Wilhelm Leibnitz publicó en 1684 un escrito muy notable donde se anunciaba su descubrimiento acerca del cálculo.

Los hermanos Bernoulli, trataron de desentrañar los misterios del escrito sin mucho éxito, y después le escribieron al autor por ayuda, sin recibir respuesta.

Así empezaron los hermanos Bernoulli, con sus curiosidades en el mundo mágico de las matemáticas del cálculo. Hasta que un día, Jakob pudo desentrañar los misterios del escrito: Todo se basaba en una cantidad muy pequeña llamada un infinitesimal.

Después de cierto tiempo, recibieron respuesta del autor del escrito, y desde entonces tendría una correspondencia estrecha y personal con él. Johann se convirtió en defensor de las ideas de Leibnitz.

Pasaron tres años y los Principia de Newton fueron publicados en 1687, junto con sus ideas del cálculo. Este sería el comienzo de una serie de rivalidades entre Newton y Leibnitz como auténticos descubridores del cálculo.

En 1695, Johann pidió un puesto de profesor en la Universidad de Basilea, sin embargo, y debido a la creciente rivalidad que había tenido con su hermano, Jakob negoció con los miembros del jurado que dicha solicitud fuera denegada. Desde entonces la rivalidad se acentuó entre ambos hermanos, hasta que en 1699, el editor de la revista, puso fin a la pelea. Jakob y Johann se desarrollaron en forma separada, tanto en ideas como geográficamente. Jakob de cuarenta y cinco años de edad se había convertido en hombre de familia con esposa y dos hijos. En cuanto a Johann de treinta y dos años de edad tenía a su esposa y también tenía a dos hijos, pero pronto, su esposa embarazada daría a luz a un tercer hijo. Cuando el 29 de enero del nuevo año (1700), la mujer de Johann tuvo a su tercer hijo, le llamaron Daniel.

Después de cinco años y luego de que su hermano muriera, Johann regresó a Basilea para estar cerca de su suegro. Ocupó una plaza en Basilea casi de inmediato y sin resistencia u objeción alguna.

Johann dispuso en Basilea que su hijo Daniel se casara con la hija de un comerciante rico. Pero, Daniel resultó ser menos obediente que su padre y no pensaba en la obligación de casarse con aquella mujer. Pues eso lo decidiría en su momento. Además tampoco obedeció a su papá y convenció a su hermano Nikolaus II para que le enseñara matemáticas. Todo pareciera una especie de maldición familiar, donde los hijos desafiaban los deseos de sus padres y se convertían a sus espaldas en matemáticos.

Cuando descubrió el cálculo, y también le sorprendió saber que Isaac Newton, aquél inglés que su padre despreciaba tanto, había descubierto las sencillas leyes del movimiento de los cuerpos sólidos, o al menos, las principales, sin contar el principio de conservación del momento angular.

Los logros de Newton, aumentaron su interés por las matemáticas y la física, al punto que deseaba convertirse en el futuro en un nuevo Newton. Johann en su campaña contra el inglés necesitó la ayuda y el apoyo del primo de Daniel: Nikolaus I, y de su hermano Nikolaus II. Cuando el propio Daniel fue llamado por su padre, le puso muchos pretextos y fue evidente que al joven de trece años de edad, no le interesaba esa batalla que su padre sostenía con Newton.

### IV. EL ALUMNO DE PAPÁ

Daniel puso después en claro, que no quería llevar a cabo los planes de su padre de convertirse en comerciante, de casarse con la muchacha que le habían elegido, y de no continuar con la discusión con Newton. Pero también le comunicó a su padre el amor que tenía por los números.

Posteriormente, Daniel habría de acceder a los deseos de su padre y estudiaría negocios. Cuando hubo terminado sus estudios, el padre le pidió que estudiara medicina, a lo

Rubén Sánchez-Sánchez et al.

que Daniel también accedió, pero con la condición de que su padre le enseñara matemáticas de forma privada.

Finalmente Daniel se doctoró en anatomía y botánica en 1721. Estudió medicina en Basel, Heidelberg y Estrasburgo.

Johann le mostró a Daniel lo que después se convertiría en su hallazgo más conocido, el tema era sobre la energía mecánica aunque en aquel tiempo no se le conocía así. En lugar de ello e imitando a Leibnitz, Johann llamaba a esa cualidad *vis viva* (fuerza viva, en latín), pues parecía que la poseían todos los cuerpos que estaban *animados*, por el movimiento. Leibnitz había notado que la *vis viva* dependía de sólo dos parámetros del objeto, dependía de su masa y de su velocidad, y la había expresado como

$$VIS VIVA = mv^2. \quad (9)$$

Describió el experimento de arrojar una pelota hacia arriba con cierta velocidad inicial  $v$ . Conforme la pelota subía se agotaba su *vis viva*, hasta alcanzar una altura máxima donde se detenía, como si hubiera gastado su combustible. A partir de entonces, la pelota inicia su descenso hacia abajo ganando cada vez más velocidad y aumentando su *vis viva*, hasta el punto en que fue lanzada, donde recobraba toda su *vis viva*. De manera, que cuando la pelota regresaba a su punto inicial de partida, las cosas se restauraban a su estado inicial.

Si analizamos ahora el movimiento con más cuidado se puede observar que a medida que la pelota va ganando altura, su *vis viva* decrece, en su trayecto de ascenso. Mientras, durante su trayecto de descenso, su altura disminuye y aumenta su *vis viva*. De manera que la altura y su *vis viva* se compensan mutuamente, durante todo el movimiento, cumpliéndose la siguiente ecuación

$$ALTURA + VIS VIVA = CONSTANTE. \quad (10)$$

Esta era entonces la ley de la conservación de la *vis viva*, en la que Leibnitz, Johann y otros creían firmemente. A finales del siglo siguiente, esta ley se denominaría *ley de la conservación de la energía* [8].

## V. PROSIGUE LA HISTORIA

En 1716 Daniel obtuvo su título de Bachiller y comenzó en seguida con su formación médica. Giovanni Alfonso Borelli, llegó a decir después de hacer cálculos, que los hombres no podrían desarrollar la suficiente *vis viva* para volar como los pájaros, los cuales con sus músculos si lograban volar [8]. Daniel, se enteró de este trabajo y también del trabajo del médico británico William Harvey, sobre el papel del corazón en el cuerpo humano como bomba de sangre, y de los vasos sanguíneos como tuberías de abastecimiento de sangre. Encontró en esos autores la huella de su interés por los fluidos y la matemática. Además las leyes de la dinámica de los fluidos no habían sido desentrañadas en ese momento. Sin embargo, sin notarlo, no sabía que su padre estaba analizando un trabajo de

Newton sobre el comportamiento de un chorro de agua que sale del agujero practicado en el fondo de un vaso.

En 1721 al terminar sus estudios de medicina, el joven de veintinueve años de edad quedaría enfrascado en sus pensamientos sobre la mecánica de fluidos. Solicitó un puesto de docencia en la Universidad de Basilea, y al igual que le pasó a su progenitor, el puesto le fue negado. Aunque había participado para concurso de dos puestos en la universidad, uno en anatomía y botánica y otro en lógica.

Dieciséis siglos atrás de Daniel, Arquímedes había descubierto la ley de la hidrostática del desplazamiento de agua por un cuerpo sumergido en él. Esto le costó la vida al orfebre del rey, quien había mezclado otros metales junto con oro para hacer la corona real, pues había declarado que él había usado sólo oro en su manufactura. Dos siglos antes que Daniel, otro hombre visionario, había descubierto la ley de continuidad de los fluidos. Leonardo da Vinci, en Italia, notó que durante el flujo de un líquido, la velocidad de él se incrementaba al estrecharse el conducto por donde pasaba. Las ideas renacentistas de Italia acabaron en 1642, cuando Galileo murió. Y el avance de nuevas ideas científicas buscó otros terrenos como Alemania, Inglaterra, y la familia de hugonotes de Suiza.

En 1723, Daniel dejó Basilea para olvidar su fracaso en el intento de ser académico de la Universidad de Basilea. Luego marchó a Padua para ejercer la profesión de médico, pero él mismo cayó enfermo con fiebres altísimas. Mantuvo correspondencia con su amigo Christian Goldbach, y estuvo trabajando con sus fluidos.

Participó luego en un concurso organizado por la Academia de Ciencias Francesa. El reto era construir un reloj de arena o de agua que produjera un reguero de arena o agua uniforme, aún a pesar de estar sobre un barco. Este problema era esencial para calcular la longitud de un barco en base al tiempo transcurrido y así los marinos podrían calcular la distancia al este o al oeste del puerto de partida.

Sorpresivamente su diseño ganó, el premio. Esto aunado a que escribió un libro basado en las cartas que le enviaba su padre y que título *Algunos ejercicios matemáticos*. Hicieron que Daniel fuera reconocido por su trabajo científico.

## VI. VIAJE A SAN PETERSBURGO

En 1725 Daniel decidió regresar a Basilea, no sospechaba que el libro había hecho mucho eco en Basilea. La gente decía que lo había escrito un prodigio matemático. Otra de las sorpresas que recibió, es que le esperaba una carta de Catalina I, emperatriz de Rusia. En la carta de Catalina se mostraba una profunda admiración por los talentos del joven Daniel y lo invitaba a ser parte de la Academia Imperial de las Ciencias de San Petersburgo.

Cansado de estar viajando, Daniel iba a rechazar cortésmente la invitación de Catalina. Pero su hermano Nikolaus II, aceptó de inmediato acompañarlo de forma desinteresada a San Petersburgo si Daniel aceptaba la oferta. Después Daniel escribía que aceptaría el puesto si le

mantenían otro puesto para su hermano en la misma academia.

Así fue como Daniel se trasladó a San Petersburgo como profesor de una respetada academia rusa. En 1725 ambos hermanos se trasladaban a la ciudad. Después de dos meses de un viaje que fue el más largo de sus vidas llegaba a la ciudad, pero se arrepintieron de haber llegado ahí. El pueblo de San Petersburgo era amable y cordial, pero no así su clima, que era en extremo frío y helado.

Nikolaus II cayó enfermo por una afección respiratoria muy insistente, que le duró toda la primavera de ese año, se extendió por el verano, y finalmente en otoño el 26 de julio de 1926 sucumbió bajo la tuberculosis.

Después de dicho acontecimiento, Daniel empezó a presionar a la reina para que Leonard Euler (prestigioso alumno de su padre Johann), pudiera conseguir una plaza en San Petersburgo. Ya había solicitado el ingreso de Euler en la Academia, junto con su hermano, pero a raíz de la muerte de éste y de que Euler había concluido sus estudios, presionó más a la reina.

De hecho, un año después en 1727, ocurrió el deceso de Newton, para Daniel era una gran pérdida para la humanidad, debido a sus grandes aportes. Además de que constituía para él un ejemplo a seguir. A kilómetros de ahí en Basilea, su padre al principio se alegró de la muerte del inglés que había sido su rival, lo cual significaba que él, era El mejor científico en su tiempo. Pero, por otro lado, se preocupó porque le recordó su propia mortandad, y que él no duraría para siempre.

## VII. MEDICIÓN DE LA PRESIÓN ARTERIAL

Por aquel entonces y debido a que la ciencia médica todavía estaba en pañales, se trataban todo tipo de enfermedades, practicando sangrías en los pacientes. Esto es, se dejaba que la sangre brotara del paciente por una incisión practicada en su cuerpo. Como se había descubierto que en los prisioneros, su sangre parecía estar con un exceso de presión mientras estaban vivos, los científicos de la época pensaban que la razón de toda enfermedad era ese aparente exceso de presión en sus venas y arterias. Así con un fundamento muy pobre, lo médicos practicaban sangrías en enfermos con hinchazón y aún para curar todo tipo de enfermedades.

Para poder practicar sangrías a pacientes no condenados, era preciso medir cosas de su flujo sanguíneo, como su presión y la velocidad del fluido. Pero en aquella, época no se conocía la forma de medir tan siquiera una sola característica del torrente sanguíneo.

Después de la llegada de Leonard Euler a San Petersburgo, Daniel Bernoulli se afanaba en la forma de medir la presión de un líquido que pasara por una tubería. Cincuenta años antes a esto, el francés Edme Mariotte, había logrado medir la presión del agua no cuando estaba en circulación en la tubería, sino cuando esta salía a chorros por un agujero practicada en la tubería. Lo consiguió al hacer que el chorro de agua chocara contra un pequeño balancín de madera. En el otro extremo del balancín

Mariotte colocó unos plomos, en función del peso que hacía falta para nivelar el empuje del agua, Mariotte había sido capaz de estimar su fuerza y a partir de ahí su presión. Dividiendo la fuerza sobre la superficie del balancín donde incidía el agua.

Tal método, por desgracia no era de practicidad en medicina, pues en dado caso el paciente se desangraría con rapidez usando el método y tendría severas probabilidades de muerte por desangramiento. Porque, entonces debería haber un método alternativo donde no se interrumpiera el flujo del torrente sanguíneo por la arteria y no dejándolo por tanto, escapar.

En 1729, Bernoulli que estaba trabajando en esa idea de la medición de la presión sanguínea, recordó una cita leída en el libro de Harvey. *Cuando se pincha o se secciona una arteria, se verá como la sangre brota con violencia: Durante el latido completo se ve el chorro de sangre proyectado primero a mayor distancia, luego a menor, dándose el caso del chorro más largo cuando el corazón se contrae* [8]. Bernoulli, luego razonó que de conectar un tubo delgado en una pequeña incisión, la presión sanguínea mayor debería de corresponder a una mayor altura en la columna de sangre de un tubo conectado al torrente. Conforme el corazón se relajaba o se contraía, la columna de sangre descendía o se elevaba que correspondía a las presiones que los médicos conocían técnicamente como presión sistólica y diastólica.

Entonces al conectar un pequeño tubo capilar a una pequeña incisión para que salga sensiblemente el líquido de la tubería, y ascienda por el tubo capilar, la altura medía la presión del agua. Sin que se derramara mucha agua o la tubería perdiera mucha agua durante la prueba. Desde luego que el experimento, lo llevó a cabo primeramente Bernoulli sobre una tubería de agua. Pero pronto se volvió una práctica común en medicina medir la presión del paciente empleando este método de Bernoulli.

Al conectar el tubo capilar a la pequeña incisión de una arteria, una pequeña cantidad de sangre subía por el tubo capilar casi sin derramarse. La altura a la que ascendía la sangre proporciona una medida de la presión de la arteria. No sería sino hasta 1896 cuando un médico llamado Scipione Riva-Rocci, inventaría el esfigmomanómetro o tensiómetro, con ese tubito de hule que es inofensivo y mide la presión del paciente de forma más cómoda.

## VIII. EL PRINCIPIO DE BERNOULLI

Bernoulli pudo constatar la ley de continuidad de Leonardo da Vinci de hace dos siglos, y constató que el fluido en un lugar más estrecho de la tubería aumentaba su velocidad, mientras que en tramos más anchos de la misma tubería el fluido viajaba a una velocidad más lenta. Sin embargo, lo que después observó, no lo habían descubierto antes, pues era una nueva característica que Bernoulli observó. El líquido que se movía en una sección de la tubería ancha, se movía con mucha lentitud y tenía mayor presión. El líquido que se movía rápidamente en una sección de la tubería estrecha, tenía menor presión que en el primer caso. Así

que parecía existir una compensación entre la velocidad del fluido y la presión, entre más presión el fluido se movía más lentamente, y entre menor presión el fluido se movía más rápidamente. En seguida Bernoulli se acordó del principio de conservación de la *vis viva* de Leibnitz. Lo que sucedió a continuación fue que Bernoulli recordó la ecuación (9) sobre la definición de la *vis viva*.

Resultaba increíble que el problema de la dinámica de los fluidos se redujera a un problema que se supone era válida para cuerpos sólidos.

Bernoulli tuvo que guiarse por el cálculo de Leibnitz, para reducir al líquido en partes infinitesimales, dividió el líquido en pequeñas secciones rectas de espesor infinitesimal que fluían a través de conductos cilíndricos. Las secciones rectas se portaban como un desfile de discos sólidos, pegados unos a los otros mientras se iban empujando alrededor de la tubería. Bernoulli pensó que aunque los sólidos y los líquidos se comportaban diferentemente a escala macroscópica. A la escala matemática infinitesimal se portaban de manera idéntica.

Bernoulli utilizó las leyes del movimiento newtoniano para sólidos para describir el comportamiento de las lonchas hipotéticamente sólidas, para calcular los empujes y rozones entre las secciones rectas. Finalmente para calcular el efecto neto, Bernoulli utilizó el cálculo integral de Leibnitz para sumar el efecto neto de todas las lonchas en el movimiento del fluido.

Bernoulli estuvo muy contento cuando los cálculos lo llevaron a la versión para fluidos de la *vis viva*, de Leibnitz. Los cálculos lo llevaron a una pequeña sustitución. En lugar de la masa  $m$  del cuerpo sólido aparecía la densidad del fluido representada por la letra griega rho.

$$VIS VIVA = \rho v^2. \quad (11)$$

De esta forma, una cantidad dada de miel que viaja por una tubería, debido a su gran densidad debe de tener una enorme *vis viva*, por su desplazamiento a una velocidad dada. En cambio, una cucharada de alcohol, debido a su baja densidad debería de tener una *vis viva*, menor si se desplaza a la misma velocidad que la miel, en otra tubería.

En la ecuación de la conservación de la *vis viva*, para sólidos de Leibnitz la altura se compensaba con la *vis viva*, pero en el caso de los fluidos la misma se compensaba, de acuerdo con las observaciones de Bernoulli, con la presión del fluido.

De acuerdo con esto, la ley de conservación de la *vis viva* para fluidos, según Bernoulli tiene la forma.

$$VIS VIVA + PRESIÓN = CONSTANTE. \quad (12)$$

Utilizando el símbolo  $P$  para la presión, la versión de Bernoulli de la ley de conservación de la *vis viva* tenía la forma siguiente.

$$\rho v^2 + P = CONSTANTE. \quad (13)$$

El razonamiento de Bernoulli se aplicaba bastante bien al caso de la presión sanguínea, en el cuerpo humano. Cuando

el corazón bombea la sangre, el diámetro de la arteria crece, disminuyendo la velocidad de la sangre (de acuerdo a la ley de continuidad de Leonardo da Vinci), de manera que su *vis viva* desciende, por otro lado, la compensación viene por un aumento en la presión de la sangre. Al revés cuando el corazón se relaja, la arteria momentáneamente se contrae y la sangre se apresura a fluir por la arteria aumentando su *vis viva*, con una consiguiente disminución en la presión arterial.

Un siglo después del descubrimiento de Bernoulli, un médico alemán Gustave Gaspard Coriolis, añadiría un factor adicional de un medio, a la expresión de la *vis viva* de Bernoulli, lo hizo al resolver un problema que tenía que ver con la rotación de la Tierra, y porque a sus cálculos le convenía. Sin embargo, la versión de Coriolis tuvo mucho éxito y se difundió rápidamente.

$$\rho (1/2)v^2 + P = CONSTANTE. \quad (14)$$

Bernoulli un joven de treinta años de edad, había dado a su época un conocimiento invaluable sobre la dinámica de los fluidos. Antes de 1730, tal regla tan sencilla y cierta era todavía desconocida por el mundo [8].

El mismo principio se aplica a la dinámica del vuelo de los aviones: Las alas del avión están diseñadas de tal manera que su lado inferior es recto y su lado superior tiene una curva, cuando el avión se encuentra en vuelo, éste no cae debido a que la presión del aire en la parte de debajo de las alas es mayor, y el aire circula con menos *vis viva*. En cambio, la parte superior del ala del avión tiene menor presión y el aire tiene que viajar con mayor rapidez, es decir tiene más *vis viva*. El efecto neto es que el avión sufre un abrazo de presión, y la aplicación de una fuerza hacia arriba, que es lo que mantiene al avión en vuelo sin que se caiga. Este es el principio, que un joven ruso llamado Zhukovski de cuarenta y dos años habría de descubrir después, alrededor de 1891 [8], cuando se construían túneles de viento para examinar la dinámica del vuelo de los aviones, justificando teóricamente el principio de la aerodinámica de los aviones.

## IX. REGRESO A CASA

Era el año de 1730 cuando Daniel Bernoulli hizo el descubrimiento que lleva su nombre sobre la dinámica de los fluidos. En ese mismo año su padre había ganado el premio de la Real Academia de Ciencias. Cuando Daniel supo de la noticia, se dio valor para tratar de regresar a casa a Basilea. Por eso, durante dos años estuvo esmerándose en ganar un puesto en la Universidad de Basilea, aunque desafortunadamente seguía perdiendo los concursos. Sin embargo, en 1732, cuando el joven estaba a punto de claudicar en sus intentos, logró ganar. Durante esos años y antes de regresar a casa, Daniel estuvo escribiendo sobre su trabajo y sobre la ley de la hidrodinámica que ya había descubierto, dando parte de ello a su queridísimo colega Leonard Euler [8].

En los años siguientes Daniel preparó todo para que Euler lo sucediera como profesor de matemáticas de la Universidad. Pero Catalina, a pesar de haber aceptado eso, nombró a Daniel como miembro vitalicio de la Real Academia de San Petersburgo. Además no consentía que Daniel dejara la Academia.

Después Daniel viajó de país en país hasta que llegó a Basilea, para entonces su nombre ya era reconocido por los países por los que pasaba. Fue recibido como un héroe por amigos hasta de su padre anciano, recibió un saludo cordial y una invitación para que se aposentara en la casa.

Fue en 1734 cuando las cosas parecían que iban muy bien, cuando tanto el padre como el hijo ganaron el premio de la Real Academia francesa, lo cual suscitó grandes enemistades entre el padre y el hijo, que no era lo suficientemente maduro como para esconder su arrogancia a su padre.

Luego de la disputa, entre los Bernoulli, Daniel se retiró a vivir en un piso propio y se sumergió en el trabajo. Había dispuesto que el manuscrito fuera impreso en Estrasburgo en Francia, donde hace tres siglos se había inventado los tipos móviles de la imprenta. Por eso se tardó más de tres años en terminar de imprimir su obra. No fue sino hasta 1738 cuando Daniel pudo tener entre sus manos el fruto de su obra en forma impresa. Al abrir la tapa se leía *Hidrodinámica* [6], por Daniel Bernoulli hijo de Johann. Así que de alguna forma Daniel quiso reconocer con ese humilde título, los esfuerzos de su padre, por enseñarle los misterios del cálculo infinitesimal, algo que él mismo utilizó en la derivación de su principio.

Las cosas empezaron a salir mal, cuando Daniel envió varias copias del nuevo libro a su viejo amigo Euler en Rusia. Después de casi diez meses de no saber nada Bernoulli empezó a escribirle a Euler. Leonard respondió que no había contestado sencillamente porque no había llegado ninguno de los ejemplares que Daniel le había enviado. Daniel atónito ante la respuesta de Euler, lo empezó a acosar durante todo el año siguiente aunque en vano. Fue en 1740 cuando finalmente Daniel obtuvo una respuesta a sus reclamos de Euler.

Según Euler más de un año después de la publicación del libro de Daniel, él había recibido de Johann un manuscrito que contenía investigaciones supuestamente originales de Johann sobre los fluidos en movimiento. El anciano había propuesto que se le llamara *Hidráulica* [7] a su manuscrito. Según Euler la existencia de dicho manuscrito parcial le había tomado por sorpresa, pues él no sabía que el anciano estuviera trabajando en semejante idea. Después aguardó a que se le enviara la segunda parte del mismo. Hacía finales de 1740 la segunda parte le llegó y la leyó con ansiedad, junto con el libro del joven Daniel, que entonces se encontraba en Basilea. Escribió reseñas de ambos escritos tratando de no dejarse llevar por la lealtad que les tenía a ambos hombres y tratando de no ofender al joven Bernoulli.

Esta respuesta inesperada dejó a Daniel en un estado de completa decepción. Tres años después en 1743 se publicaría el libro de su padre, al que llamó *Hidráulica* [7]. Pero el viejo, había dado órdenes al editor de que el escrito

fuera publicado con la página de año de impresión el de 1732, para que aparentara que su escrito había sido publicado antes que la obra de su hijo Daniel. Más aún cuando se abrió el libro había escrito un reconocimiento total de parte de Euler de la autenticidad del trabajo de Johann, junto con varios elogios suyos.

Daniel Bernoulli nunca pudo demostrarlo, pero sospechó siempre que su padre le había plagiado su trabajo, y que Euler siempre había jugado a dos bandos, retrasando su respuesta intencionadamente, para darle el reconocimiento a Johann.

De esta manera, parecía que Euler había dado su agradecimiento a su mentor, por haberle enseñado durante tantas horas el cálculo, y también se sellaba la venganza de Johann hacia su hijo que siempre le había pasado por encima de él y lo había humillado en tantas ocasiones.

Daniel nunca perdonaría a su padre tal robo de ideas, y tampoco el hecho de que él había echado por tierra sus sueños adolescentes de convertirse en el nuevo Newton de su época. Durante los siguientes años de su vida ya no perdería su tiempo en las matemáticas y si acaso escribía una ecuación sería, por ejemplo, en una pizarra, donde después sería borrada y olvidada.

Tal fue el desenlace de la tragedia de Daniel Bernoulli, a quien no se le reconocería en su tiempo, como el primero que descubrió el principio que lleva su apellido. Sin embargo, con el tiempo, se habría de descubrir la verdad sobre su hallazgo y la autenticidad de su trabajo en la hidrodinámica de los fluidos.

Daniel habría de ganar otros ocho premios de la Real Academia de Ciencias Francesa. En total habría de obtener diez, número de premios tan sólo superado por Leonard Euler que habría de sacar 12 premios. En cuanto a Johann no habría de ganar más premios, y seguiría menospreciando a su hijo, habría de morir en el año de 1748, casi ciego, asmático y aquejado de gota, dentro de la creencia de que el destino le había arrebatado su merecida recompensa.

Daniel murió a los 82 años de edad, en paz, mientras dormía. En cuanto Euler, ya se había quedado totalmente ciego, y necesitó de un centenar de páginas para tan sólo enlistar todos sus trabajos. Con el tiempo, sin embargo, se le daría el crédito justo a Daniel por su trabajo intelectual en los fluidos.

Así parece que el destino forjó la suerte de Daniel Bernoulli como el auténtico descubridor del principio hidrodinámico que lleva su nombre y que es utilizado hoy en día por muchos inventos humanos, desde atomizadores, aplicaciones en la mecánica de fluidos, hasta en el vuelo de los aviones.

## X. CONCLUSIONES

El principio de Bernoulli siendo un principio físico es útil en el estudio de la dinámica de fluidos, y encuentra diversas aplicaciones, tanto en las áreas médicas, como en las industriales y también dentro de los principios de la aerodinámica de los aviones. Un estudio del principio, y como fue descubierto por Daniel Bernoulli, nos puede

ayudar para que en una clase de física, los detalles sean aprendidos de forma amena por parte de los estudiantes.

La forma en como Daniel Bernoulli hizo su descubrimiento acerca de la dinámica de los fluidos sin viscosidad, es muy importante tanto desde el punto de vista didáctico como científico, pues lo hizo a través del actualmente llamado *principio de la conservación de la energía*.

Actualmente el principio de conservación de la energía es sumamente importante como tema de estudio, en el área de la física y la ingeniería. Así que conocer que desde el punto de vista epistemológico, tubo que ver en el descubrimiento del Principio de Bernoulli, ayuda al estudiante, a fijar mejor aún el conocimiento, fortaleciendo de esta manera no sólo su asimilación, sino también, la propia creatividad del estudiante, al fortalecer el importante punto técnico y académico de cómo los principios físicos, no sólo colaboran a entender el mundo mejor; sino también colabora en la manera en como estos dos principios están íntimamente relacionados, desde la perspectiva científica.

El estudiante que cursa física puede asimismo, apreciar en cómo los factores socioeconómicos e históricos afectan el avance de la ciencia, y en este caso particular, cómo afectaron éstos a la formulación de la ecuación de Bernoulli, que gobierna su dinámica, junto con el principio de continuidad, que descubrió Leonardo Da Vinci.

Es bueno, tratar de hacer algunos experimentos sencillos así como los hizo Bernoulli en su tiempo, para comprender el fenómeno en forma mejor. Si en las escuelas donde se aprende este principio, se cuenta con material suficiente, sería un apoyo adicional a la enseñanza, el incorporar tales prácticas, y complementarlas con un tratado epistemológico del mismo, como se hizo en este trabajo.

## XI. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen su apoyo al CONACyT y a la COFAA del IPN, así como a la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN por el apoyo otorgado mediante el proyecto SIP 20131706 “Desarrollo epistemológico de la ecuación de Bernoulli para estudiantes de ingeniería”.

## REFERENCIAS

- [1] Página web <<http://Bernoullifisicatec.blogspot.mx>> consultado el 7 de junio de 2013.
- [2] Bauman, R. P., *An alternative derivation of Bernoulli principle*. Am. J. Phys. **68**, 288-289 (2000).
- [3] Bauman, R. P., *Modern Thermodynamics with Statistical Mechanics*, (Macmillan, New York, 1992), pp. 144-154.
- [4] Bauman, R. P., Schwaneberg, R., *Interpretation of Bernoulli's equation*, Phys. Teach. **32**, 478-488 (1994).
- [5] Guillen, M., *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo: el poder y la oculta belleza de las matemáticas*. (DeBolsillo, Barcelona, 2004).
- [6] Bernoulli, D., *Hydrodynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*, (Argentorati, Basilea, 1738).
- [7] Bernoulli, J., *Hydraulics*, 1743, (Dover Publications, York, N. Y., 1968), S.343-456.
- [8] Truesdell, C., *Ensayos de historia de la Mecánica*, (Tecnos, Madrid, 1975), p. 107.
- [9] Barbosa, L. H., Mora, C., *Montajes de ExD para incorporar la ley de presión hidrodinámica de Bernoulli en ambientes escolares de Ingeniería*, Lat. Am. Phys. Educ. **7**, 399-406 (2013).