EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

La curvatura de los rayos de luz en las cercanías de cuerpos masivos: una exposición para alumnos de cursos introductorios de Física

Jorge Pinochet
Facultad de Educación, Universidad Alberto Hurtado, Almirante Barroso 37, Santiago Centro, Santiago, Chile.

E-mail: japinochet@gmail.com

(Recibido el 7 de Mayo de 2014, aceptado el 29 de Noviembre de 2014)

Resumen

En este trabajo, destinado principalmente a profesores de física de cursos introductorios de pregrado, se presenta una derivación elemental de una fórmula para calcular la curvatura de los rayos de luz en las cercanías de los cuerpos masivos. Dicha fórmula se obtiene utilizando el principio de equivalencia y la ley de gravitación universal de Newton. Una vez obtenida esta fórmula, se la aplica al caso del Sol y se comparan los resultados con los obtenidos por Albert Einstein, constatando que la cifra es igual a la calculada por el físico alemán en 1911, pero que corresponde a la mitad del valor corregido por el propio Einstein en 1915. Las causas de esta discrepancia son puestas en contextos y analizadas brevemente. Para finalizar, se discuten las proyecciones educativas de este trabajo, y se efectúan algunas sugerencias generales para abordar el tema en asignaturas introductorias de física de pregrado.

Palabras clave: Relatividad general, principio de equivalencia, curvatura de los rayos de luz, cursos introductorios de física de pregrado.

Abstract

In this work, mainly for teachers of introductory physics undergraduate, elementary derivation of a formula is presented for calculating the curvature of the light rays in the vicinity of massive bodies. This formula is obtained using the equivalence principle and the Newton´s law of universal gravitation, and then applied to the case of the Sun and these results with those obtained by Albert Einstein are compared, noting that the figure is equal to that calculated by the German physicist in 1911, but that is half of the corrected by Einstein himself in 1915. Causes of these discrepancies are put into context and briefly analysed. Finally, educational screenings of this work are discussed, and some general suggestions are made to address the issue in introductory undergraduate physics courses.

Keywords: General relativity, the equivalence principle, curvature of the light rays, introductory undergraduate physics courses.

PACS: 01.55+b, 95.30.Sf, 04.80.Cc, 01.30.lb. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La curvatura de los rayos de luz en las cercanías del Sol fue una de las predicciones más importantes efectuadas por Albert Einstein para corroborar su teoría general de la relatividad, publicada en 1915 [1, 2]. Algunos años más tarde, en 1919, una expedición astronómica dirigida por Arthur Edington permitió verificar aquella predicción, convirtiéndola en un hito en la historia de la física, y transformando a Einstein en una celebridad mundial [2].

Dada su importancia, no es de extrañar que sean muchos los libros divulgativos que abordan esta temática, y que intentan hacerla accesible al público no especialista, *e.g.* [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. También existen innumerables textos universitarios de física general que abordan esta materia en los acápites sobre física moderna y/o teoría de la relatividad general, *e.g.* [9, 10, 11, 12, 13, 14], aunque el nivel de profundidad no va mucho más allá del que se encuentra en los libros de divulgación científica. La curvatura de los rayos de luz también es examinada en diversos textos de física más avanzados, *e.g.* [15, 16, 17, 18, 19, 20], aunque en este caso solo es accesible para un reducido número de estudiantes de postgrado en física o de cursos terminales de pregrado en la especialidad. Por lo tanto, la literatura disponible no permite cubrir los requerimientos del profesorado que imparte cursos introductorios de física general o de física moderna para estudiantes de pregrado de carreras científicas.

En el presente trabajo se propone un desarrollo matemático elemental destinado principalmente a profesores de asignaturas introductorias de física, que buscan una aproximación a la curvatura de los rayos de luz que resulte accesible pero la vez desafiante para estudiantes de pregrado de primeros años de carreras científicas. Aunque el desarrollo matemático presentado aquí no utiliza el formalismo de la teoría de la relatividad general, proporciona una aproximación más formal que la entregada habitualmente por los textos de física general universitaria o los textos introductorios de física moderna. El desarrollo matemático se divide en dos partes: en la primera se obtiene una expresión general de la curvatura de los rayos de luz en las cercanías de un cuerpo esférico masivo, y en la segunda se aplica dicha expresión al caso específico del Sol, encontrando una cifra que es idéntica a la determinada por Einstein en 1911, pero que corresponde a la mitad del valor calculado y corregido por el propio Einstein en 1915 [2]. Hay que señalar que la cifra de 1915 es la correcta, y corresponde al resultado que más tarde fue confirmado experimentalmente por la expedición dirigida por Edington.

Por consiguiente, la cifra calculada en este trabajo es aproximada, y no podría ser de otro modo, considerando que se trata de un desarrollo matemático elemental que está basado en la mecánica de Newton y en el principio de equivalencia.

Para alcanzar los objetivos propuestos, en el Capítulo II que sigue a continuación se examina el principio de equivalencia y su relación cualitativa con la curvatura de los rayos de luz en las proximidades de los cuerpos masivos.

Posteriormente, en el Capítulo III, se obtiene una fórmula general para determinar dicha curvatura, la que luego es aplicada a un rayo de luz que pasa por las cercanías del Sol.

La cifra obtenida en este último caso se compara con los valores encontrados por Einstein en 1911 y 1915, y se discuten brevemente las causas de la discrepancia entre ambas cifras. Finalmente, en el Capítulo VI se analizan las proyecciones educativas de este trabajo y se efectúan algunas sugerencias para el tratamiento del tema por parte de los profesores de física de cursos introductorios de pregrado.

II. EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA Y LA CURVATURA DE LOS RAYOS DE LUZ

A. El principio de equivalencia

El denominado *principio de equivalencia*, enunciado en 1911 por Albert Einstein y considerado por éste como el fundamento de su teoría de la relatividad general [1], establece que: "un campo gravitatorio homogéneo es completamente equivalente a un sistema de referencia uniformemente acelerado" [10, 11, 12].

Una manera alternativa de formular el principio de equivalencia es la siguiente:

…los experimentos realizados en un marco de referencia acelerado uniformemente con aceleración $\vec{a}$ respecto de un marco inercial, producen exactamente los mismos resultados experimentales que se obtendrían en un marco inercial sometido a la influencia de un campo gravitacional uniforme $-\vec{a}$.

Una de las consecuencias de este principio es que los rayos de luz responden a los campos gravitatorios, desviándose o curvándose en las cercanías de cuerpos masivos, tales como planetas o estrellas.

Un simple ejemplo permitirá comprender mejor el significado del principio de equivalencia. Imagínese una nave espacial que se desplaza con aceleración constante de magnitud $g = 9{,}81 m/s^2$, en una región del universo aislada de toda influencia gravitacional. La Figura 1 ilustra esta situación.

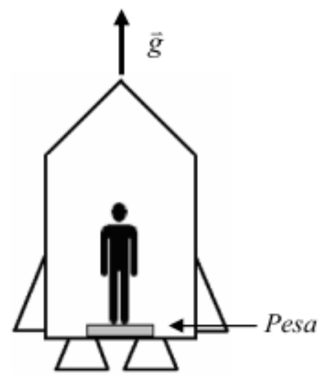

FIGURA 1. Un astronauta se encuentra de pie sobre una pesa en el interior de una nave especial que tiene una aceleración de magnitud $g = 9{,}81 m/s^2$. La nave se supone aislada de toda influencia gravitacional.

Dentro de la nave se encuentra un astronauta parado sobre una pesa. ¿Qué valor registrará la pesa? Puesto que la única fuerza que está actuando sobre el astronauta es la normal $\vec{N}$ ejercida por la pesa en el mismo sentido que la aceleración de gravedad $\vec{g}$, de la segunda ley del movimiento de Newton se deduce directamente que $\vec{N} = m\vec{g}$. Por lo tanto, la pesa registra el mismo valor que se obtendría si la nave espacial estuviera en reposo sobre la superficie de la Tierra. Más aun, el astronauta no podría realizar ningún experimento en el interior de la nave que le permitiera distinguir entre estar sometido a una aceleración $\vec{g}$ en una región del universo donde no existen fuerzas gravitacionales, o estar en reposo sobre la superficie terrestre, donde la aceleración de la gravedad es $-\vec{g}$ [13, 14].

B. La curvatura de la luz y el principio de equivalencia

A partir del principio de equivalencia, Einstein predijo que un rayo de luz sometido a un campo gravitacional experimentaría una curvatura o desviación en su trayectoria [1, 2].

Para ver en forma cualitativa cómo se puede arribar a esta conclusión, imagínese que en la misma nave espacial de la sección anterior, un fotón entra por una ventana situada en la pared lateral izquierda, recorriendo una distancia horizontal x hasta llegar al otro extremo. Las Figuras 2 y 3 muestran este fotón (dibujado como un punto de color rojo) en cinco instantes de tiempo equidistantes, mientras la nave espacial se mueve hacia arriba con aceleración constante de magnitud a.

En la Figura 2 se muestra el punto de vista de un observador externo a la nave espacial situado en el mismo sistema de referencia desde donde es emitido el fotón. Como puede apreciarse, para este observador el fotón sigue un camino recto. En la Figura 3 se muestra la perspectiva de un observador situado en el interior de la nave, para el cual el fotón sigue una trayectoria curva. Se aprecia que el efecto de la aceleración de la nave, desde la perspectiva del observador situado en su interior, consiste en una desviación del fotón, el cual ingresa a la nave por el costado superior izquierdo, y termina en el extremo inferior derecho, recorriendo una distancia horizontal x y desviándose una distancia vertical y.

Si se piensa en términos de un haz de fotones, lo que equivale a suponer un rayo de luz, la conclusión es la misma.

Todo acontece como si el rayo de luz hubiese experimentado una curvatura.

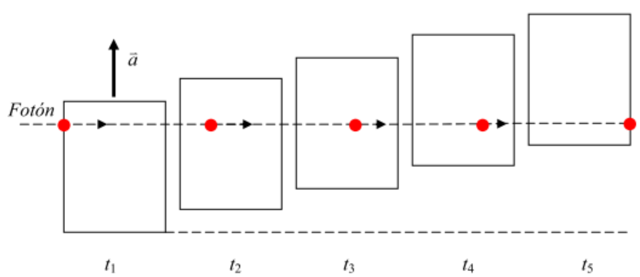

FIGURA 2. Trayectoria del fotón vista desde el exterior al marco de referencia acelerado, en cinco instantes de tiempo.

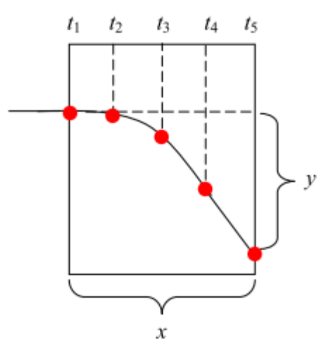

FIGURA 3. Trayectoria completa del fotón vista desde el interior del marco de referencia acelerado, en cinco instantes de tiempo.

Por lo tanto, en virtud del principio de equivalencia se concluye que lo que le sucede al rayo de luz en un marco de referencia con aceleración constante a, también le ocurrirá en un campo gravitatorio uniforme $-a$. En otras palabras, en presencia de un campo gravitatorio uniforme como el generado por un planeta o una estrella como el Sol, los rayos de luz sufren una curvatura o desviación de su trayectoria.

Una forma de interpretar este resultado consiste en asignar una curvatura al espacio en las proximidades de un campo gravitacional, pues si se considera que el camino seguido por los rayos de luz define las distancias más cortas entre dos puntos cualesquiera A y B, y si la luz resulta curvada al recorrer el trayecto entre A y B, entonces se concluye que el propio espacio entre A y B es curvo. Para ser más precisos, en la jerga de la teoría de la relatividad general se dice que el espacio-tiempo entre A y B es curvo. En la siguiente sección se retomará este punto cuando se derive la fórmula general para determinar la desviación de los rayos de luz en las proximidades del Sol.

III. DERIVACIÓN DE LA CURVATURA DE LOS RAYOS LUZ: EL CASO DEL SOL

Aunque la derivación de la fórmula para la curvatura de los rayos de luz presentada en esta sección se basa en el caso del Sol, puede aplicarse a cualquier cuerpo esférico cuya masa esté distribuida de manera uniforme.

La predicción efectuada por Einstein sobre la desviación de los rayos de luz incluía una sugerencia para contrastar experimentalmente dicha desviación. El principio del experimento es sencillo, aunque su puesta en práctica fue todo un desafío para los astrónomos de aquella época. Como es sabido, durante un eclipse total de Sol, la Luna cubre completamente el disco solar, de modo que es posible observar las estrellas localizadas a su alrededor. Con un telescopio y una cámara fotográfica, los astrónomos tomarían fotos del Sol oscurecido y de las estrellas situadas en las proximidades del disco solar. Este último punto es importante porque solo los rayos de luz que pasen a muy corta distancia del Sol experimentarán una curvatura lo suficientemente grande para ser mensurable. A continuación, las placas fotográficas serían comparadas con otras de la misma región del cielo, obtenidas medio año antes o medio año después del eclipse. En estas segundas fotos, el Sol se encontraría lejos de las estrellas objeto del experimento, y por consiguiente su campo gravitacional no afectaría a luz de éstas. La Figura 4 ilustra la idea básica del experimento, considerando una sola estrella cuyos rayos de luz (dibujados en color rojo) pasan por las proximidades del disco solar hasta llegar a un observador situado en la Tierra.

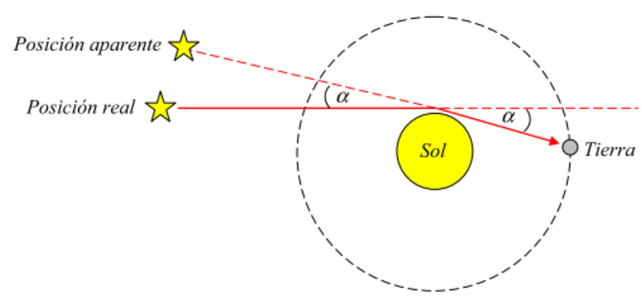

FIGURA 4. Posición aparente y real de una estrella cuyos rayos de luz pasan por las cercanías del Sol, siendo desviados un ángulo α visto desde la Tierra, debido al campo gravitacional del Sol.

Se aprecia que, como resultado de la curvatura de los rayos de luz provenientes de la estrella, esta presenta una posición aparente que difiere en un ángulo α de su posición real. En su artículo de 1911, Einstein predijo una desviación de aproximadamente 0,87 segundos de arco [1, 2]. Por supuesto, los cálculos efectuados por el físico alemán tenían en cuenta que la desviación resulta cada vez más débil conforme los rayos de luz aumentan su distancia con respecto al Sol. Sólo los rayos que pasan directamente junto al Sol pueden sufrir la desviación prevista de 0,87 segundos.

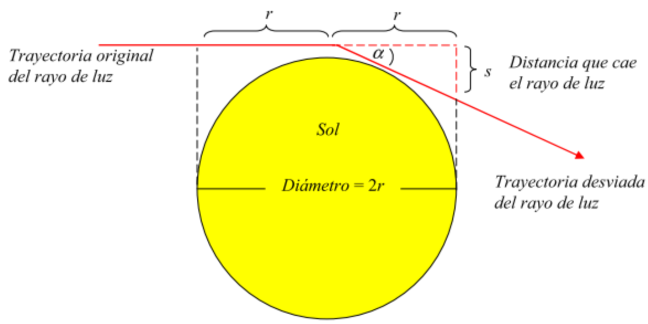

FIGURA 5. Desviación de un rayo de luz que pasa por las cercanías del Sol, de diámetro $2r$. El rayo de luz recorre una distancia $2r$ durante la cual cae una distancia s, desviándose un ángulo α de su trayectoria rectilínea original.

La derivación aproximada de la curvatura de los rayos de luz en las cercanías del Sol está basada en la Figura 5, donde se ha supuesto que la acción de la gravedad solar afecta al rayo durante una distancia del orden del diámetro solar, que vale $2r$. Al recorrer dicho diámetro, el rayo de luz cae (se desvía) una distancia vertical s que corresponde a un ángulo α, que en la práctica es sumamente pequeño. El objetivo de los cálculos que siguen a continuación será encontrar una expresión matemática general que permita determinar el valor de α para cualquier cuerpo masivo esférico cuya masa se distribuya uniformemente. De acuerdo con la Figura 5, aplicando la mecánica clásica, la ley de gravitación universal y el principio de equivalencia discutido en el capítulo anterior, la distancia s que cae el rayo de luz al recorrer la distancia $2r$ será:

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Gm}{r^2}\right)\times t^2.. \tag{1}$$

En (1), m es la masa del Sol, G la constante de gravitación universal, g la aceleración de la gravedad o campo gravitacional, y t es el tiempo que le toma al rayo de luz recorrer la distancia $2r$. Nótese que al introducir la fórmula (1), la lógica es la misma que la utilizada en el ejemplo de la nave espacial de la sección anterior. En consecuencia, se está pensando en un rayo de luz que recorre la distancia $2r$ en forma análoga al fotón que cubrió la distancia x en el interior de la nave. La distancia s que se desvía el rayo de luz en las cercanías del Sol es equivalente a la distancia y que cae el fotón dentro de la nave espacial.

Por otra parte, de acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton se tiene que:

$$g=\frac{Gm}{r^2}. \tag{2}$$

Considerando que la luz se mueve con una rapidez constante c, el tiempo t que le toma a un rayo de luz recorrer la distancia $2r$ viene dada por:

$$t=\frac{2r}{c}. \tag{3}$$

Introduciendo (3) en (1) resulta:

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\left(\frac{Gm}{r^2}\right)\times\left(\frac{2r}{c}\right)^2. \tag{4}$$

Por lo tanto:

$$s=\frac{2Gm}{c^2}. \tag{5}$$

De acuerdo con la Figura 5, el ángulo de desviación expresado en radianes vendrá dado por:

$$\alpha=\frac{s}{r}=\frac{2Gm/c^2}{r}. \tag{6}$$

Finalmente, la expresión general para la desviación de un rayo de luz en las cercanías de un cuerpo esférico masivo cuya masa se distribuya uniformemente será:

$$\alpha=\frac{2Gm}{rc^2}. \tag{7}$$

Como interesa comparar la cifra entregada por esta expresión con las predicciones efectuadas por Einstein para el caso del Sol, introduciendo en (7) los valores para G, m y c que se encuentran tabulados en la mayoría de los textos de física general [9, 10, 11, 12, 13] resulta:

$$\alpha=\frac{2(6{,}67\times10^{-11}Nm^2/kg^2)(1{,}99\times10^{30}kg)}{(6{,}95\times10^8m)(3\times10^8m/s)^2}=4{,}244\times10^{-6}rad. \tag{8}$$

Por otra parte, como 1 rad = 360°/2π se tiene que:

$$\alpha=4{,}244\times10^{6}\times\frac{360°}{2\pi}=(2{,}43\times10^{-4})°. \tag{9}$$

Un grado contiene 60 minutos (60') y un minuto contiene 60 segundos (60"), de modo que un grado contiene 3.600".

Por consiguiente, el valor anterior expresado en segundos de arco será:

$$\alpha = 4{,}244 \times 10^{6} \times 3.600'' = 0{,}87''. \tag{10}$$

Esta cifra coincide con el primer resultado que obtuvo Einstein en 1911 utilizando el principio de equivalencia [1, 2]. Sin embargo, el valor calculado y corregido por Einstein en 1915 utilizando el formalismo matemático de la relatividad general, y que más tarde fue confirmado por la expedición liderada por Eddington en 1919, es el doble del obtenido en 1911 [2], es decir:

$$\alpha = 2 \times \frac{2Gm}{rc^{2}} = \frac{4Gm}{rc^{2}} = 1{,}75''. \tag{11}$$

En su libro: *¿Tenía razón Einstein*?, Will analiza las causas de la discrepancia entre (10) y (11) [2]. Como señala este autor, los cálculos efectuados en 1911, siendo formalmente correctos, no pueden coincidir con la cifra de 1915 porque no toman en cuenta un hecho que solo puede ser analizado en el marco de la teoría de la relatividad general: el grado exacto de la curvatura del espacio-tiempo. En efecto, como se ha señalado en la sección anterior, el principio de equivalencia predice que el espacio-tiempo es curvo, pero no permite establecer con precisión la cuantía de dicha curvatura.

Al utilizar el formalismo matemático de la relatividad general, que en 1911 aun no había sido elaborado adecuadamente por Einstein, se concluye que la curvatura del espacio-tiempo es el doble de la que resulta de aplicar directamente el principio de equivalencia. Como señala Will, toda teoría de la gravitación que sea compatible con el principio de equivalencia, tal como la teoría de Newton empleada aquí, predice los primeros 0,87 segundos de arco de la curvatura. Los 0,87 segundos restantes resultan de aplicar el formalismo de la relatividad general [2].

IV. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Como se ha mencionado en la introducción, la curvatura de los rayos de luz en las cercanías de los cuerpos masivos constituye un tópico de física moderna que suele abordarse en la mayoría de los textos introductorios de física universitaria [9, 10, 11, 12, 13, 14], así como en diversos textos más avanzados de física [15, 16, 17, 18, 19, 20]. Sin embargo, en el primer caso el tratamiento del tema suele ser superficial y de carácter divulgativo, mientras que en el segundo solo resulta accesible a un reducido número de estudiantes de postgrado en física o de cursos terminales de la especialidad. La derivación que se ha presentado aquí, aun cuando es una aproximación basada en la mecánica clásica, permite un primer acercamiento formal que tiene la ventaja ser accesible a cualquier estudiante de carreras científicas de pregrado que curse asignaturas introductorias de física.

Por tratarse de una aproximación formal, pero al mismo tiempo sencilla, la derivación presentada aquí puede resultar motivadora y atractiva para estudiantes que han comenzado sus estudios universitarios, y que por lo mismo buscan un acercamiento a la física que resulte más profundo y desafiante. Por otra parte, la mentada derivación es apropiada para desarrollar una introducción elemental a la teoría de la relatividad general y al principio de equivalencia.

Esto es de especial interés cuando se está frente a alumnos de pregrado de carreras científicas que no buscan formar especialistas en física, y que por lo tanto tienen escasas oportunidades para analizar tópicos de física moderna.

Un aspecto que vale la pena considerar al momento de abordar el fenómeno de la curvatura de los rayos de luz, es el contexto histórico que rodea a este tema. Pocos acontecimientos en la historia de la ciencia tienen un contexto histórico tan interesante y rico en anécdotas científicas y extra científicas. En efecto, la primera predicción efectuada por Einstein de 1911, la imposibilidad de confirmarla experimentalmente en aquel entonces, la corrección efectuada por el propio Einstein en 1915, la posterior verificación por parte de la expedición liderada por Eddington, así como el revuelo que provocó dicha verificación a nivel mundial, especialmente considerando los acontecimientos bélicos de aquella época, son temáticas que sin lugar a dudas vale la pena discutir en clase, en paralelo con los aspectos más formales.

Como se discutió en la sección anterior, al tratarse de una derivación elemental, que no recurre al formalismo matemático de la relatividad general, los resultados obtenidos no coinciden con la predicción exacta. Sin embargo, esta discrepancia representa una oportunidad para que profesores y alumnos analicen y discutan las limitaciones de la mecánica de Newton como modelo para explicar y analizar fenómenos físicos y astronómicos. Como primera aproximación, el docente interesado puede guiarse por la discusión de la sección anterior para examinar en clase las causas de la discrepancia entre las distintas cifras. Desde luego, también es interesante discutir el hecho que el principio de equivalencia por sí solo es insuficiente para proporcionar una descripción correcta de la curvatura del espacio-tiempo en general, y de los rayos de luz en las cercanías de los cuerpos masivos en particular.

En suma, es de esperar que el presente trabajo constituya un aporte a la labor realizada por los docentes de pregrado que imparten cursos introductorios de física, y también para algunos docentes de educación secundaria, ya que la derivación desarrollada aquí tiene un nivel matemático que debiera ser accesible para estudiantes que cursen sus últimos años de educación secundaria, o al menos para aquellos estudiantes más aventajados en física y matemáticas.

También cabe esperar que la derivación elemental de la curvatura de los rayos de luz sea un aliciente para que los docentes desarrollen en clase con mayor profundidad esta temática, cuyo interés científico e histórico es innegable.

AGRADECIMIENTOS

De manera especial se agradece a Daniela Balieiro por sus valiosos aportes y sugerencias durante la elaboración de este artículo.

REFERENCIAS

[1] Hawking, S., *A hombros de gigantes,* (Crítica, Barcelona, 2003).
[2] Will, C. M., ¿*Tenía razón Einstein*? (Gedisa, Barcelona, 2005).
[3] Krauss, L. M., *Miedo a la Física,* (Andrés Bello, Santiago, 1996).
[4] Barnett, L., *El universo y el doctor Einstein,* (Fondo de Cultura Económica, México, 1986).
[5] Einstein, A. & Infeld, L., *La evolución de la Física*, (Salvat, Barcelona, 1986).
[6] Hacyan S., *Física para principiantes,* (Fondo de Cultura Económica, México, 2002).
[7]. Magueijo, J., *Más rápido que la velocidad de la luz,* (Fondo de Cultura Económica, México, 2007).
[8] Hawking, S., *Historia del tiempo,* (Crítica, Barcelona, 1996).
[9] Jones, E. & Childers, R., *Física contemporánea,* (McGraw-Hill, México, 2001).
[10] Serway, R. A. & Beichner, R. J., *Física para ciencias e ingeniería,* (McGraw-Hill, México, 2001).
[11] Tipler, P. A., *Física para la ciencia y la tecnología,* (Reverté, Barcelona, 1999).
[12] Krane, K., *Física moderna,* (Limusa, México, 1991).
[13] Resnick, R., *Introducción a la teoría especial de la relatividad,* (Limusa, México, 1995).
[14] Serway, R. A., Vuille, C. & Faughn, J. S., *Fundamentos de Física. Vol. 2,* (Cengage Learning, México, 2009).
[15]. Taylor, E. F. & Wheeler, J. A., *Exploring black holes: introduction to general relativity,* (Addison Wesley, San Francisco, 2000).
[16]. Gron, O. & Hervik, S., *Einstein's general theory of relativity,* (Springer, New York, 2007).
[17]. Hartle, J. B., *Gravity: an introduction to Einstein's general relativity,* (Addison-Wesley, San Francisco 2003).
[18]. Hughston, L. P. & Tod, K. P., *Introduction to general relativity,* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
[19]. Ludyk, G., *Einstein in matrix form,* (Springer, Berlin, 2013).
[20] Schutz, B. F., *A first course in general relativity,* 2nd Edition (Cambridge University Press, Cambridge, 2009).