

# Classificação de problemas em eletrostática: uma análise epistemológica rumo à construção de um campo conceitual para o conceito de campo eletrostático



**Glauco Cohen Pantoja<sup>1,2,3,4,5</sup>, Marco Antonio Moreira<sup>6</sup>**

<sup>1</sup>Universidade Federal do Oeste do Pará (UFOPA).

<sup>2</sup>Grupo de Aprendizagem Significativa, Interdisciplinaridade e Autoeficácia em Exatas (GAIA).

<sup>3</sup>Centro Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico (CPADC).

<sup>4</sup>Formação de Professores na Amazônia Paraense (FORMAZON).

<sup>5</sup>Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará (PPGE/UFOPA).

<sup>6</sup>Professor Emérito da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

**E-mail:** glaucopantoja@hotmail.com

(Recibido el 2019, aceptado el de diciembre de 2019)

## Resumo

Neste trabalho se apresenta e se discute uma possível forma de classificar problemas de eletrostática passíveis de serem propostos no Ensino Médio e no Ensino Superior (ciclo básico e ciclo profissional) a partir da teoria dos campos conceituais. A partir da classificação epistemológica dos elementos das situações (objetos, parâmetros e variáveis) e das operações de pensamento necessárias para resolvê-las, agrupam-se os problemas em grande quatro classes, a saber: descrição de interações eletrostáticas; representação simbólica do campo eletrostático; representação analógica do campo eletrostático; cálculo de campos eletrostáticos. Embora algumas tarefas envolvam a sobreposição de mais de uma classificação em função de conterem mais de uma variável ou de poderem ser divididos em tarefas menores, estas classes de situações se mostram associadas a distintas competências a serem dominadas pelos alunos ao longo do tempo e não podem ser confundidas umas com as outras. Implicações para a literatura de ensino de eletromagnetismo são discutidas.

**Palavras chave:** Campos conceituais, Campo elétrico, Situações-problema.

## Abstract

In this manuscript it is presented and discussed a possible form of classification of tasks on electrostatics, feasible of being proposed in middle and higher education (basic cycle and professional cycle), using the theory of conceptual fields. Departing from the epistemological classification of the situations' elements (objects, parameters and variables) and of thought operations needed to solve them, the problems are grouped in four greater classes, namely: description of electrostatic interactions; symbolic representation of the electrostatic field; analogical representation of the electrostatic field; calculation of electrostatic fields. Although some tasks may include the superposition of more than one classification, whether by containing more than one variable or by being divisible in minor tasks, these classes of situation are attached to different competencies to be mastered by the students throughout time and they can't be confounded among them. Implications for the literature on electromagnetism teaching are discussed.

**Keywords:** Conceptual fields, Electric field, Problem-situations.

**PACS:** 01.30.Os, 01.40.-d, 01.50.-i

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUÇÃO

Pesquisas em processos de aprendizagem do conceito de campo elétrico têm indicado grande dificuldade por parte dos alunos na representação analógica [1, 2] e na representação simbólica [3, 4, 5] desse conceito e na aquisição de outros correlatos a ele como, por exemplo, os de corrente elétrica e de diferença de potencial [6, 7], e de

força elétrica [8]. Ademais, Vergnaud [9] destaca ser comum a investigação da aprendizagem da forma predicativa do conhecimento, explícita e verbalizada, derivada de uma premissa epistemológica de os processos de aprendizagem e desenvolvimento poderem ser estruturados, de maneira completa, na interação entre um sujeito cognitivo e um objeto que resiste a ser assimilado.

Isto posto, entende-se que as pesquisas sobre representação conceitual têm desconsiderado um importante fato, qual seja, o aspecto referencial dos conceitos. Tanto o é que há centenas de pesquisas sobre concepções relativas a conceitos, mas quase nenhuma considera o fato de a representação se referir à realidade [10], isto é, que para ser útil e significativo o conceito deve se referir a uma classe de situações, e que uma situação não se resolve somente com um conceito [9]. O primeiro passo para levar em conta este importante elemento é analisar como estudantes o usam para dominar situações [11], porém antes de fazê-lo, deve-se caracterizar as situações de um determinado campo conceitual. Depreende-se, da problemática apresentada, a seguinte questão de pesquisa para a qual visamos dar uma resposta inicial: “que possíveis classes de situações podem caracterizar epistemologicamente o campo conceitual do conceito de campo eletrostático?” Por não haver ainda classificação epistemológica de situações para o campo conceitual da eletrostática, buscaremos fazê-la de maneira parecida com que fez Vergnaud para as estruturas multiplicativas e aditivas [12].

## II. REFERENCIAL TEÓRICO

A teoria dos campos conceituais é uma teoria desenvolvimentista complexa que considera tanto o aspecto referencial dos conceitos, pois eles são usados para estabelecimento de referência à realidade, com seu aspecto representacional, pois são passíveis de serem representados e de terem significados a si atribuídos [13]. Este sistema teórico considera a conceitualização, a referência ao real via representação, como central no estudo do desenvolvimento cognitivo [11]. Para levar em conta os dois aspectos supracitados, Vergnaud [13] reconstitui a noção de conceito para uma terna:

$$C = (S, I, R).$$

Onde é o conjunto de situações que torna o conceito útil e significativo, é o conjunto de invariantes operatórios que lhe dão significado e estruturam as formas de organização da atividade suscetíveis de serem empregadas nestas situações, é o conjunto de representações linguísticas e simbólicas permitindo representar as situações e os invariantes.

Para Vergnaud [12] uma situação é uma tarefa que pode ser dividida em uma sequência de sub-tarefas com metas específicas. É possível aproximá-la da noção de problema, ou seja, um questionamento esperando por uma resolução de uma contradição, de uma tensão cognitiva, algo aparentemente inconsistente, e não necessariamente estruturado. Por outro lado, é possível associá-la ao exercício, que pode ser entendido como uma questão admitindo solução estruturada como, por exemplo, quando se pergunta a um aluno qual a aceleração de um carro de uma tonelada, submetido a uma força resultante de 100 N, pois o estudante deverá apresentar a lei de Newton, introduzir a massa e a força resultante na relação colocada pela lei entre as duas e, enfim, calcular a aceleração.

Vergnaud [11] entende o conhecimento organizado e distribuído em campos conceituais, conjuntos de situações (tarefas), problemas, operações de pensamento, representações, conceitos, relacionados uns aos outros. O conhecimento científico seria, então, entendido como um corpo coerente estruturado em classes de situações que são, muitas vezes, ligadas umas às outras, mas passíveis de serem estudadas independentemente, tais como os campos conceituais da Termodinâmica e do Eletromagnetismo que estão certamente relacionados pelo conceito de Energia, mas podem ser estudados individualmente, afinal o efeito Joule caracteriza uma porção bem pequena de ambos. Na educação matemática há o caso dos campos conceituais das estruturas aditivas e das multiplicativas [12]: definitivamente há um fio condutor entre eles, mas eles podem certamente ser estudados de maneira separada.

A principal razão de construir um campo conceitual para abordar processos de ensino-aprendizagem fundamenta-se na necessidade de analisar a conceitualização de uma forma diferente, mais aprofundada. Vergnaud [14] percebeu que a conceitualização depende de conteúdo específico e, para lidar com isto, introduziu as ideias de conceito-em-ação, categorias pertinentes, e de teorema-em-ação, proposições consideradas como verdadeiras sobre o real. Estas duas entidades constituem para Vergnaud [11], a base conceitual, implícita ou explícita, sobre a qual repousa a conceitualização.

Construímos, ao longo do tempo, ações consolidadas endereçadas a certas classes de situações. Essas ações são competências organizadas de maneira invariante [10]. Isto não significa uma ação invariante, pois a ação depende dos *parâmetros* da situação, mas, antes, a organização dessa ação realizada da mesma maneira. Se você conta vacas ou crianças, o resultado vai depender da quantidade de vacas ou de crianças que você conta, mas em ambas as situações se relacionam números cardinais a quantidades, e se somadas para saber quantos seres (vacas ou crianças) serão contados. Pode ser um rebanho ou uma creche, os números e objetos são variáveis, mas a ação se organiza de maneira invariante, embora os elementos sejam bastante distintos.

Vergnaud [11] denomina *esquema* a esta organização invariante da ação frente a uma classe de situações e para ele, o *esquema* se adapta às *situações*. É daí que surge o desenvolvimento de competências complexas e para estudadas, devemos classificar situações.

Naturalmente, existem classes de problemas mais difíceis que outras, pois necessitam de operações de pensamento distintas em complexidade, mesmo que os procedimentos operacionais para a sua solução sejam os mesmos [12]. Para exemplificar isto, podemos pinçar um caso simple do trabalho de Vergnaud sobre estruturas aditivas. A seguir são apresentados dois tipos de problemas diferentes, cuja solução (cálculo numérico) exige operar com uma soma. Crianças de oito anos conseguem resolver o primeiro, enquanto somente conseguem resolver o segundo corretamente, em média, aos dez anos. O primeiro problema ( $P_1$ ) pode ser enunciado da seguinte maneira: “há 4 garotos e sete garotas numa mesa. Quantas crianças estão

juntas?"; o segundo ( $P_2$ ) tem a seguinte forma: "João gastou 4 reais, agora ele tem 7 reais. Quanto ele tinha antes de gastar o dinheiro?". Para resolver os dois problemas é necessário realizar uma adição de 4 e 7, o que resulta em 11. No entanto, as duas situações envolvem operações de pensamento distintas (cálculo operacional): na primeira, é necessário realizar a composição de duas medidas (4 e 7) para saber a medida resultante (11); na segunda, é preciso estabelecer uma relação de medida ( $x$ ), transformação ( $-4$ ) e medida (7), além de notar que para calcular a medida inicial, deve-se inverter a transformação representada por um número negativo, um fator complicador. Notadamente, o segundo problema é psicologicamente muito mais difícil que o primeiro para crianças de determinada idade [12]. Para iniciar investigações orientadas neste sentido, no ensino de Física, propomos neste trabalho, uma versão inicial do campo conceitual do eletromagnetismo. Na sequência explicitamos como procedemos.

### III. METODOLOGIA

Começamos, então, considerando os conceitos a seguir como os principais estruturando o campo conceitual da eletrostática, quais sejam: campo elétrico, potencial elétrico, carga elétrica, força elétrica, energia potencial elétrica e corrente elétrica, como os mais centrais; fluxo de campo elétrico e circulação de campo elétrico; diferença de energia potencial elétrica; diferença de potencial elétrico; espaço; posição; distância; densidade de carga elétrica; volume; superfície; comprimento; capacitância; resistência elétrica; condutores; isolantes; deslocamento elétrico; polarização, e vácuo. Como nenhuma situação pode ser resolvida com somente um conceito [12], toda situação em eletrostática envolve pelo menos dois dos conceitos propostos nesta lista. Ademais, existem múltiplas formas de representá-los, a saber, matematicamente (algebricamente e geometricamente) e linguisticamente (linguagem natural, linguagem simbólica, linguagem pictórica; gestos).

Para a análise epistemológica das situações, é necessário organizar as operações de pensamento, representações e invariantes operatórios necessários para a solução das situações e descrever como esses elementos se referem às últimas. Tudo isto é feito de maneira a descrever este processo em termos da linguagem usada no campo epistemológico de conhecimento em questão, no caso a Física. A definição de situação de Vergnaud [12] como tarefa acaba, no entanto, por ser excessivamente geral e acaba não deixando muito claro o procedimento adotado para realizar a classificação. Neste sentido, propomos classificar situações, de maneira coerente com a teoria dos campos conceituais, apresentando três construtos passíveis de serem mapeados nelas: as *variáveis*, os *parâmetros* e os *objetos*.

*Variáveis* são elementos desconhecidos que precisam ser descobertos ou inferidos no problema. O objetivo de resolvê-lo é simplesmente declarar algo sobre elas, ou seja, são todos aqueles construtos sobre os quais devemos dar

uma resposta explícita sobre ela. Os *objetos* são elementos que possuem uma relação de mapeamento com a realidade.

Desta forma, são todas entidades que estão relacionadas no problema. Os *parâmetros*<sup>1</sup>, por sua vez, são informações disponíveis para o sujeito ou supostas por ele procurar pelas *variáveis* e para caracterizar os *objetos*. Em outras palavras, estabelecem as relações entre *objetos* e permitem a realização de inferência sobre as *variáveis*. Como exemplo da classificação, poderíamos colocar o seguinte problema retirado da obra de Halliday, Resnick e Krane [15].

"Dois discos circulares de raio  $R=5,0\text{cm}$  estão separados por  $d=6,0\text{cm}$  ao longo de uma vertical comum. Os discos têm quantidades iguais de cargas elétricas, porém de sinais opostos e distribuídas uniformemente sobre suas superfícies. Quantas cargas devem ser colocadas em cada disco para manter suspensa uma minúscula gota de óleo de  $4,0 \cdot 10^{-15}\text{kg}$  e carga  $-e$  em um ponto ao longo do eixo dos discos e a meio caminho entre estes?" [15].

Os *objetos*, neste caso podem ser rapidamente identificados como os discos circulares ( $D_1$  e  $D_2$ ) e a gota ( $G$ ), pois são eles que se referem ao real e se relacionam através dos seguintes parâmetros: raio ( $R_D=5,0\text{ cm}$ ); distância entre discos ( $d_D=6,0\text{ cm}$ ); sinal da carga do disco ( $\text{sign}(q_D)$  – opostos) densidade superficial de carga do disco ( $\sigma=\text{cte}$ ); massa da gota ( $m_G=4,0 \cdot 10^{-15}\text{kg}$ ); carga da gota ( $q_G=-1,602 \cdot 10^{-19}\text{C}$ ); distância entre a gota e um dos discos ( $d_{GD}=0,5d_D$ ). A variável de interesse é a quantidade de carga elétrica presente nos discos para satisfazer a estas condições, isto é, a pergunta que versa sobre o objeto de interesse sobre o qual se deseja saber algo é sobre ela. Embora não seja mencionada no problema, a forma geométrica da gota é uma variável tácita, pois se a pressupõe pontual sem que se o diga.

As operações de pensamento para resolver este problema passam por: 1) *identificar os portadores de carga elétrica*; 2) *identificar as interações ocorrendo entre objetos e apontar as interações elétricas*; 3) *aplicar a lei de interação elétrica*; 4) *descrever a dinâmica das cargas elétricas*. Neste problema, relativamente complexo para um aluno cursando eletromagnetismo em nível de Física Geral, há diversas considerações a serem feitas em termos dos *objetos*, *parâmetros* e *variáveis* que exigem a mobilização de diversos *teoremas-em-ação* e *conceitos-em-ação*, seja de maneira sistemática (esquemas) ou de forma contingente (modo de conceitualização).

A identificação dos portadores de carga exige referência às cargas do disco (*variáveis* do problema) através de proposições do tipo *discos possuem mesma carga elétrica* e *cargas elétricas dos discos têm sinais opostos*, além de necessitar da identificação da carga da gota através de afirmações como *a gota possui carga elétrica  $q_g = -e$* .

Após a identificação dos portadores de carga, é fundamental apontar a natureza das interações, o que se faz

<sup>1</sup> Como esta classificação tenciona não englobar somente os exercícios (problemas ditos fechados), mas também os abertos, escolheu-se a expressão *parâmetros*, mas inclusiva que dados, pois esta soa mais abrangente que a primeira, remetente às informações entre objetos que quando manipuladas adequadamente levam a uma única solução (correta) do problema.

através de teoremas-em-ação prototípicos tais como *a gota sobre ação da força gravitacional da Terra por ter massa, a gota e os discos interagem eletricamente e a força resultante é a soma das forças gravitacional e elétrica*. A terceira etapa inclui o uso da lei de interação e a referência aos *parâmetros* e *objetos* surge aqui através de proposições tais como *as forças elétricas entre cargas podem ser adicionadas vetorialmente para encontrar-se a força elétrica resultante, a força elétrica entre cargas elétricas é determinada pela lei de Lorentz (de Coulomb), a densidade de carga elétrica do disco é constante, pois a distribuição de cargas elétricas é uniforme, a força elétrica entre a gota e um elemento infinitesimal de carga elétrica é dada pela lei de interação, pela simetria das componentes ao longo do plano xy das forças elétricas entre portadores de carga infinitesimal, dispostos em um disco, e a gota, a componente z é a relevante para o cômputo da força*, o que nos leva à expressão para a força elétrica entre um disco e a gota:

$$F_E = \frac{2q_g q_D}{4\pi\epsilon_0 R_D^2} \left( 1 - \frac{d_{GD}}{(d_{GD}^2 + R_D^2)^{1/2}} \right).$$

A última etapa, consiste em descrever a situação em repouso através de teoremas-em-ação do tipo *a força resultante no sistema Terra-discos-gota é nula, a força resultante no sistema Terra-discos-gota é igual à soma das Forças Elétricas (em sentidos opostos) com a Força Gravitacional*. Esta última permite chegar na solução literal ao problema dada por:

$$q_D = \frac{\pi\epsilon_0 R_D^2 m_G g}{q_G \left( 1 - d_{GD} \frac{1}{(d_{GD}^2 + R_D^2)^{1/2}} \right)}.$$

A classificação das situações foi feita, então, com base na leitura das situações e na caracterização da relação entre *variáveis*, *parâmetros* e *objetos* presentes nas situações com as *operações de pensamento*, *significados* e *representações* necessários para resolvê-las.

#### IV. RESULTADOS

Após análise empregada conforme descrito na metodologia, as situações puderam ser enquadradas em quatro grandes classes apresentadas a seguir: *descrição de interações elétricas* (denotada por  $\Gamma$ ), que inclui situações nas quais a conceitualização deve estar voltada à descrição da interação entre objetos dotados de carga elétrica através dos conceitos de força elétrica (campo elétrico), energia potencial elétrica (e potencial elétrico); *representação simbólica do campo elétrico* (denotada por  $\mathbf{B}$ ), composta por situações nas quais é necessário usar relações conceituais e representações abstratas para representar o campo elétrico (potencial elétrico) de maneira simbólica; *representação*

*análogica do campo elétrico* (denotada por  $\mathbf{A}$ ): inclui situações nas quais é necessário usar relações conceituais representadas em termos de imagens ou diagramas para representar o campo elétrico (potencial elétrico) de maneira pictórica; *cálculo do campo elétrico* (denotada por  $\Delta$ ): composta por situações nas quais deve-se calcular o vetor campo elétrico (diferenças de potencial escalares) a partir de uma distribuição de carga elétrica, dada ou não. A seguir a classificação é detalhada e exemplificada com problemas tradicionalmente apresentados por livros-texto.

##### A. Descrição de interações elétricas ( $\Gamma$ )

Este tipo de problema é organizado de modo que as operações de pensamento necessárias envolvam a ação de descrição da interação entre dois ou mais objetos dotados de carga elétrica, dois a dois. Ademais, é importante descrever a dinâmica de um ou mais objetos de prova.

Referir-se às interações elétricas é uma ação complexa que requer, no mínimo, quatro ações: *identificar os portadores de carga elétrica interagentes; identificar a interação ocorrendo entre objetos como tendo natureza elétrica; aplicar a lei de interação* (lei de Lorentz ou de Coulomb); *descrever a dinâmica dos objetos interagentes* [16].

Todas estas operações de pensamento são importantes na construção da conceitualização em eletrostática. Com respeito ao conceito de campo elétrico, central neste campo conceitual, a terceira etapa é valiosíssima, pois pode mostrar ao professor como os estudantes referem-se ontologicamente a ele, se como ferramenta matemática, como entidade física real e imaterial, como fluido, como mero suporte para a interação eletromagnética, entre outras formas de conceitualização. Apresentamos exemplos abaixo, ao mesmo tempo que discutimos como cada classe de situações pertencentes a esta dimensão do campo conceitual pode ser diferente nas operações de pensamento empregadas, levando-se em conta os distintos *objetos*, *parâmetros* e *variáveis* em questão. Entendemos existirem pelo menos cinco tipos de problemas distintos no que tange à descrição de interações elétricas, a saber: *interação entre duas cargas elétricas puntiformes* ( $\Gamma^A$ ); *interação entre várias cargas elétricas puntiformes e uma carga elétrica de prova, também puntiforme* ( $\Gamma^B$ ); *interação entre distribuições de carga elétrica contínuas e conhecidas com uma (ou mais) carga (s) elétrica (s) de prova puntiforme (s)* ( $\Gamma^C$ ); *interação entre distribuições contínuas desconhecidas de cargas elétricas com uma (ou mais) carga (s) elétrica (s) puntiforme (s)* ( $\Gamma^D$ ); *interação entre duas distribuições contínuas de carga elétrica conhecidas* ( $\Gamma^E$ ).

A classe de situações  $\Gamma^A$ , a epistemologicamente mais simples e improvável de simular qualquer problema mais “realista”<sup>2</sup>, envolve como objetos dois portadores pontuais

<sup>2</sup> A teoria “não ‘retrata’, pois, a realidade, nem se refere imediatamente a ela. A teoria trata, por assim dizer, do ‘objeto-modelo’ que constitui uma <http://www.lajpe.org>

de cargas elétricas. Existem diversas incógnitas e variáveis que podem ser solicitadas: a força elétrica, o valor de distância entre as cargas elétricas, ou a quantidade de carga elétrica. Quando o problema é fechado, uma dessas é desconhecida (incógnita) e as outras conhecidas (variáveis).

Quando o problema é aberto, às vezes pode-se solicitar ao estudante que estime algo que seja uma variável necessária ao problema.

“Qual a relação entre a força elétrica e a força gravitacional exercidas por um próton sobre um elétron em um átomo de hidrogênio?” (Adaptado de Tipler & Mosca [17])

Nesta questão, a *variável*, aquilo que precisa ser resolvido, é a razão entre a força elétrica e a força gravitacional. Os *objetos* são um próton e um elétron. Os *parâmetros* não estão explicitados, mas incluem a constante eletrostática, a constante de gravitação universal, as cargas elétricas do elétron e do próton, bem como suas massas, além da distância entre eles (é a mesma nos dois casos). Já as operações de pensamento necessárias para resolver a situação são: *identificar portadores cargas elétricas interagentes*: no caso, o próton e o elétron; *identificar as interações entre objetos como sendo de natureza elétrica*: neste caso, é preciso calcular o valor da força gravitacional e da força elétrica entre estas duas partículas pontuais; *aplicar a lei de interação*: usar a lei de Coulomb e a lei de Newton da gravitação com todos os parâmetros do problema; *descrever a dinâmica dos objetos interagentes*: neste caso, o movimento será acelerado, no entanto, quer-se saber o quanto uma força é maior que a outra, o que implica em diferenças de acelerações, ou seja, nos informa indiretamente sobre a mudança.

Na classe de situações  $\Gamma^B$ , temos um fator complicador. Deve-se, necessariamente, usar o princípio da superposição, portanto dificuldades ontológicas relativas à sobreposição das forças e campos elétricos podem surgir. Uma delas é a de o campo elétrico, responsável pela interação, “distorcer” outros campos elétricos, decorrente da concepção alternativa de campo elétrico como fluido [19], outra bastante comum são as próprias dificuldades operacionais decorrentes da operação com vetores, tais como a projeção das componentes de um vetor sobre um determinado eixo, a execução de soma vetorial, cômputo do fluxo e da circulação [20]. A referência começa a tornar-se mais complicada, pois agora já não são somente duas cargas elétricas em jogo, logo alguns problemas naturais podem ser os de que se peça o valor de carga elétrica para a de um objeto adicional colocado em uma configuração já conhecida ou mesmo a de se determinar a força elétrica resultante em uma carga elétrica de prova.

“A carga  $q_1=25nC$  está na origem, a carga  $q_2=-15nC$  está sobre o eixo  $x$  em  $x=2m$  e a carga  $q_0=20nC$  está posicionada em um ponto com as coordenadas  $x=2m$  e  $y=2m$ . Qual o módulo, a direção e o sentido da força elétrica resultante sobre  $q_0$ ?” (Adaptado de Tipler & Mosca [17]).”

Nesta situação, os *objetos* são os três portadores de carga elétrica (0, 1 e 2), os *parâmetros* são os valores das

cargas 0, 1 e 2, a constante eletrostática, as posições dos portadores de carga, enquanto a *variável* é a força elétrica resultante (em forma vetorial). Como se pode ver, há complicações em relação à primeira classe de problemas, tais como o uso o princípio de superposição e, por esta razão, entendemos serem estas duas classes de problemas distintas em essência, em virtude de necessitarem de distintas operações de pensamento para serem resolvidas.

Para resolver esta situação, são necessárias as seguintes operações de pensamento: *identificar portadores cargas elétricas interagentes*: no caso, os portadores de carga elétrica 0, 1 e 2; *identificar as interações entre objetos como sendo de natureza elétrica*: neste caso, é preciso calcular o valor da força elétrica resultante sobre ; *aplicar a lei de interação*: usar a lei de Coulomb e o princípio da superposição com todos os parâmetros do problema – inclusive de forma vetorial; *descrever a dinâmica dos objetos interagentes*: neste caso, envolve determinar o valor força elétrica sobre o portador de carga na posição em que está.

Na classe de situações  $\Gamma^C$ , temos mais dificuldades epistemológicas; não é à toa que são abordadas somente em nível superior. Além de ter-se que aplicar matematicamente a operação de integração, é necessário entender, conceitualmente, que a carga elétrica não poderia estar distribuída, em sentido estrito, de maneira contínua, visto que ela é sempre um múltiplo inteiro de um valor fundamental. Em geral, os livros de eletromagnetismo básico em nível superior discutem isto superficialmente e enfatizam o cálculo integral da força elétrica, do campo elétrico e do potencial elétrico para problemas clássicos, tais como os envolvendo um anel e um disco.

“Considere um simples, porém surpreendente e preciso modelo para a molécula de hidrogênio: duas cargas puntiformes positivas, cada uma com carga  $+e$ , são colocadas no interior de uma esfera de raio  $R$ , que tem densidade de carga uniforme e carga total  $-2e$ . As duas cargas puntiformes são posicionadas simetricamente, ao longo do eixo  $x$ , a uma distância da origem, para qual distância  $a$ , a força elétrica resultante em ambas as cargas é nula?” (Adaptado de Tipler & Mosca [17]).

Neste caso, temos como *objetos* dois portadores puntiformes de carga elétrica e mais uma esfera cuja carga elétrica é distribuída continuamente. Os *parâmetros* são: o valor nulo da força elétrica resultante; o valor constante da densidade de carga elétrica da esfera; a carga elétrica da esfera; o raio da esfera; as cargas elétricas das partículas e a simetria da colocação das cargas em relação à origem. Como *variável*, tem-se a distância que deixa o sistema em equilíbrio. Repare que descrever a dinâmica dos objetos interagentes não necessariamente implica em determinar posição e velocidade, pode-se dar a aceleração resultante e pedir-se, como neste caso, o cálculo de uma distância, por exemplo, que conduza a esta condição. Ademais, as operações de pensamento essenciais para resolver este problema envolvem: *identificar portadores cargas elétricas interagentes*, no caso, os portadores de carga elétrica puntiformes positivos e o portador de carga elétrica esférico com carga uniformemente distribuída sobre ele; *identificar as interações entre objetos como sendo de natureza*

representação convencional (embora não-arbitrária) e aproximada da realidade” [18]. Aqui estamos falando de usar um modelo teórico para estabelecer referência mediata, e não imediata, à realidade.

Glauco Pantoja, Marco Antonio Moreira

elétrica, nesse caso, é preciso calcular o valor da força elétrica resultante sobre uma das cargas devida à distribuição esféricamente simétrica e à outra partícula pontual; *aplicar a lei de interação*, isto é. usar a lei de Coulomb e o princípio da superposição, uma vez para calcular a força elétrica resultante devida a todos os elementos de carga da esfera, e outra para agregar a contribuição da força elétrica, de forma a incluir todos os parâmetros do problema; *descrever a dinâmica dos objetos interagentes*, ou seja, determinar o valor de distância para qual o sistema estará em equilíbrio<sup>3</sup>.

Neste tipo de problema, o conceito de densidade de carga elétrica torna-se crucial e, muitas vezes, em função de os exercícios de livro-texto serem fundados em situações nas quais a carga elétrica está uniformemente distribuída pelos objetos, pouco se discute do ponto de vista conceitual. Ademais, a afirmação geralmente apresentada pelos livros didáticos de que a lei de Gauss serve para o cálculo simples de problemas de alto grau de simetria pode implicar em uma interpretação operacionalista [18] por parte dos alunos que, muitas vezes, já carregam visão de Ciência compatível com esta, e portanto, muitos creem que a lei de Coulomb<sup>4</sup> é uma lei fundamental do eletromagnetismo quando ela pode ser entendida, na verdade, como uma possível solução da equação de Poisson para o caso de uma carga elétrica pontual.

Na classe de situações  $\Gamma^D$ , geralmente trabalhada no ciclo profissional de um curso de Bacharelado em Física, temos o caso de interação entre distribuições contínuas de carga elétrica não conhecidas a priori (problemas de valor de contorno) e objetos puntiformes dotados de carga elétrica. A dificuldade é flagrantemente epistemológica – não há nada de muito novo do ponto de vista ontológico – e está na compreensão, tanto conceitual como matemática, da equação de Laplace e do método das imagens eletrostáticas, métodos cuja relação de um com outro é pouco explorada, mesmo em livros-textos com fama consolidada [21]. Pode ser difícil entender porque usar esta e não a de Poisson para resolver determinados problemas, já que a última valeria, inclusive para as regiões nas quais a densidade de carga elétrica resultaria nula. Do ponto de vista matemático, trata-se de uma equação diferencial que, em problemas de simetria esférica e polar envolvem funções especiais como, por exemplo, os harmônicos zonais e os harmônicos cilíndricos.

“Uma carga elétrica pontual é colocada à distância de uma superfície condutora plana, infinita e com potencial  $V=0$ . Qual a

<sup>3</sup> Pelo teorema de Earnshaw, este equilíbrio pode não ser estável.

<sup>4</sup> Diversas referências (e.g Assis [22]) vêm destacando o papel importante na História da Ciência desenvolvido pela Eletrodinâmica de Weber, que tem sido, deliberadamente ou não, negligenciada pelos livros didáticos. Nessa, a lei de Força envolve um termo de velocidades (equivalente à Força Magnética) e um termo de aceleração (responsável por fenômenos que a teoria de campo trataria como emissão de radiação). Pode-se ver, pela própria eletrodinâmica de Weber, que a lei de Coulomb, o primeiro termo da expressão geral da força eletromagnética, está longe de ser uma lei fundamental, mesmo para a escola da ação à distância.

força elétrica exercida pelo plano sobre a carga pontual?” (Adaptado de Barcelos [23]).

Nesta situação, tem-se como *objetos* um condutor e um portador pontual de carga elétrica. Como *parâmetros*, muitos deles implícitos, temos: tipo de material (condutor); forma geométrica do condutor (placa infinita); valor do potencial sobre a placa (condição de contorno – aterramento); valor do potencial no infinito (nulo); distância da carga à placa; distâncias de pontos no espaço à carga; distâncias de pontos no espaço à origem da placa. Como *variável*, requer-se saber a força elétrica exercida pelo plano sobre a placa. Para resolver esta situação, é necessário desenvolver as seguintes operações de pensamento<sup>5</sup>: *identificar portadores cargas elétricas interagentes*: o plano descarregado e aterrado, e o portador pontual de carga elétrica; *identificar as interações entre objetos como sendo de natureza elétrica*: neste caso, é preciso a força elétrica entre o plano e a carga elétrica; *aplicar a lei de interação*: usar o método das imagens para calcular o potencial; determinar o campo elétrico e, em seguida, a força elétrica sobre a carga pontual usando a força de Lorentz; *descrever a dinâmica dos objetos interagentes*: neste caso, o movimento será acelerado, descobre-se o valor da força elétrica e, pois, da aceleração em cada ponto do espaço. Passemos, então, à discussão de outra grande classe de situações, a de representação simbólica do campo eletromagnético.

## B. Representação simbólica do campo elétrico (B)

Este tipo de problema é organizado de modo a ser necessário referir-se ao campo elétrico gerado por um ou mais objetos, corpusculares ou na forma de distribuições contínuas de portadores de cargas elétricas, usando equações de campo elétrico sem necessariamente executar cálculos operacionais deste. Neste tipo de situações, busca-se representar o campo elétrico guardando semelhança funcional, abstrata e de simbolismo [24] com a forma do campo elétrico no espaço, portanto, as representações através da lei de Gauss e da lei de circulação ou outros tipos de relação entre variáveis [16]. Uma das diferenças cruciais entre a representação simbólica e a analógica é o uso ativo dos conceitos de fluxo e de circulação fazendo referência as fontes, ao princípio da superposição e à configuração dos campos vetoriais no espaço.

O domínio destas situações exige dos alunos *estabelecimento de referência às fontes de campo elétrico*. Em seguida, devem *estabelecer referência a pontos do espaço*. Posteriormente, volta-se ao mapeamento do significado das equações de campo (lei de Gauss e lei de circulação). Em sequência, deve ocorrer *a associação de vetores a pontos do espaço respeitando o passo  $c$* , e por último a *construção da representação simbólica*. Identificamos pelo menos quatro tipos de situações epistemologicamente distintas envolvendo a *representação simbólica do campo elétrico*, quais sejam: *representação*

<sup>5</sup> Classicamente se a resolve pelo método das imagens, mas pode-se encontrar o mesmo resultado usando-se o teorema de Green.

simbólica do campo elétrico de uma fonte puntual de carga elétrica ( $\mathbf{B}^A$ ); representação simbólica do campo elétrico devido a múltiplas fontes de carga elétrica pontuais ( $\mathbf{B}^B$ ); representação simbólica de campos elétricos devidos a distribuições contínuas conhecidas a priori de cargas elétricas ( $\mathbf{B}^C$ ); representação simbólica de campos elétricos devidos a distribuições contínuas conhecidas a posteriori, de cargas elétricas ( $\mathbf{B}^D$ ).

A primeira classe de situações, codificada por, engloba a construção, a partir das equações de campo elétrico, da representação simbólica do campo elétrico ou do potencial elétrico a partir de uma carga elétrica puntual, portanto fica claro que se pode variar somente parâmetros como valor de carga elétrica e distância ao ponto onde se estima a “forma” simbólica do potencial.

“Uma carga puntual está localizada no centro de uma superfície esférica gaussiana  $\Phi_E$ , será alterado a) se a superfície é substituída por um cubo de mesmo volume; b) se a esfera é substituída por um cubo com um décimo do seu volume; c) se a carga é deslocada para fora do centro da esfera original, permanecendo ainda em seu interior; d) se a carga é movida para fora da esfera original?” (Adaptado de Halliday et al. [15]).

Nesta situação temos como *objeto* um portador puntual de carga elétrica; como *parâmetros* temos o formato da superfície gaussiana; a carga elétrica do objeto; a quantidade de carga elétrica na superfície gaussiana; a posição da carga elétrica com respeito à superfície gaussiana. Como *variável*, temos o fluxo elétrico. As operações de pensamento necessárias para resolver esta operação de pensamento são: *identificar as fontes de campo elétrico*, ou seja, o portador de carga elétrica é uma carga puntual (objeto); *enumerar pontos relevantes no espaço*, neste problema, os quatro enunciados referem-se a diferentes superfícies gaussianas, de distintos formatos, que englobam pontos do espaço, em diferentes posições em relação à carga elétrica; *associação de vetores a ponto do espaço*, i. e., usar o significado do campo elétrico como um campo vetorial associando pontos do espaço ao próprio campo para estabelecer a relação qualitativa e simbólica entre a carga puntual e os pontos no interior da gaussiana; *mapeamento do significado das equações de campo*, ou seja, a relação do campo elétrico nos pontos do espaço e a projeção destes vetores sobre a superfície gaussiana com a equação de fluxo elétrico (lei de Gauss); *construção da representação simbólica*, o que significa descrever o fluxo elétrico (variável) através da gaussiana, relacionando-o à carga elétrica (parâmetro) envolta pela gaussiana (parâmetro).

Na segunda classe de problemas, codificada como  $\mathbf{B}^B$ , temos como variar o número de cargas elétricas na situação, o que exige o uso do princípio da superposição para distribuições discretas de carga elétrica. É possível que surjam dificuldades na aplicação das equações de campo elétrico, pois a lei de Gauss e a lei de circulação já carregam consigo o princípio da superposição. Muito cuidado deve ser tomado para que os alunos não confundam o campo elétrico resultante no espaço devido a todas as cargas elétricas do problema, o seu fluxo através de uma

superfície gaussiana e a carga elétrica no interior da gaussiana [25]. Orientações devem ser feitas no sentido de discutir que o fluxo é uma operação matemática de um vetor tomado como fisicamente real, embora imaterial.

“Considere a superfície gaussiana que envolve parte da distribuição de cargas na figura 1, qual das cargas contribui para o Campo Elétrico no ponto P?” [15].

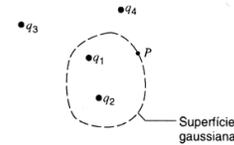


Figura 1: Retirado de Halliday et al. [15]

Neste caso, temos uma distribuição discreta de cargas elétricas formadas pelos portadores pontuais 1, 2, 3 e 4, os *objetos*. Como *parâmetros* temos: a forma da superfície gaussiana; o valor de carga elétrica dos objetos; a quantidade de cargas elétricas englobadas pela superfície gaussiana; o ponto P, do espaço; os campos elétricos produzidos por cada uma das cargas elétricas. A *variável* é a quantidade de cargas que contribuem para o ponto P. As operações de pensamento necessárias para resolver esta operação de pensamento são: *identificar as fontes de campo elétrico* – na situação em questão, as cargas  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_4$  (objetos); *enumerar pontos relevantes no espaço* – estabelecer referência aos pontos no interior e no exterior da gaussiana, bem como ao ponto; *associação de vetores a ponto do espaço* – associar os vetores devidos a todas as cargas elétricas no ponto; *mapeamento do significado das equações de campo* – indicar a diferença entre campo elétrico e fluxo elétrico – embora o fluxo elétrico devido aos campos elétricos de cargas externas à gaussiana seja nulo, em função de a soma das projeções dos vetores campo elétrico ser nula, em virtude de o portador de carga estar na posição supracitada, os campos elétricos não são nulos e se relacionam às cargas – o fluxo do campo elétrico já leva consigo o princípio da superposição; *construção da representação simbólica* – descrever, após o mapeamento, do significado das equações de campo quais cargas elétricas contribuem para o campo elétrico no ponto (todas).

Na classe de situações codificada como  $\mathbf{B}^C$ , é necessária a aplicação de um deslocamento epistemológico, a saber, o uso do princípio da superposição para distribuições contínuas de cargas elétricas – como este tipo de situações não envolve cálculo direto de campos elétricos ou de potenciais, não há a complicação de necessitar saber operar com integrais. As mesmas observações feitas com respeito a problemas da classe anterior, devem ser transpostas para esta.

“Considere uma folha infinita, com densidade superficial de carga:  $\sigma$ . O Campo Elétrico obtido pela lei de Gauss é produzido por todos os elementos de carga elétrica na folha ou somente pelas cargas envoltas pela superfície gaussiana?” (Traduzido de Guisasola et al. [25]).

Este problema traz como *objeto* um plano eletricamente carregado. Como *parâmetros*, temos: a densidade de carga

Glauco Pantoja, Marco Antonio Moreira

elétrica; o campo elétrico produzido por ele; o fluxo elétrico associado ao campo; pontos do espaço. Como *variável*, temos a quantidade de carga que produz o campo elétrico. Este problema não envolve cálculos, mas relações conceituais abstratas entre fluxo elétrico, campo elétrico e superfície gaussiana. Algum problema análogo poderia ser trazido para a lei de circulação<sup>6</sup>, porém preferimos apresentar os problemas todos relacionados ao fluxo elétrico como forma de comparação entre as classes de situação. As operações de pensamento fundamentais para resolver esta operação de pensamento são: *identificar as fontes de campo elétrico* – a folha infinita de cargas elétricas é a fonte de campo elétrico (objeto); *enumerar pontos relevantes no espaço* – deve-se elaborar uma superfície gaussiana (parâmetro não mencionado) e enumerar as regiões do espaço mais relevantes; *associação de vetores a ponto do espaço* – associar aos pontos do espaço, sobre a gaussiana suposta (segundo a simetria do problema), os vetores campo elétrico; *mapeamento do significado das equações de campo* – distinguir entre campo elétrico e fluxo elétrico, evocando o princípio da superposição; *construção da representação simbólica* – inferir que o campo elétrico é devido a todas as cargas elétricas enquanto o fluxo é devido às cargas elétricas no interior da gaussiana.

Por último, um tipo de situação, que se enquadra em nível profissional de cursos de Física, é a representação simbólica do campo elétrico e do potencial para distribuições de carga elétrica não conhecidas *a priori*, codificada por  $\mathbf{B}^D$ , e envolve operações de pensamento que lidam com a ideia de densidade de carga de forma mais contundente que as outras anteriores. Problemas com condutores são, muitas vezes, de difícil compreensão para os estudantes não necessariamente em função de os alunos desconhecerem princípios físicos associados a eles, mas pela dificuldade intrínseca de terem que construir um modelo no qual um condutor descarregado está em uma região de campo elétrico. Diga-se de passagem, esta é uma situação bastante frequente em livros didáticos e com a qual os alunos não costumam lidar muito bem, tanto em função de vieses cognitivos associados à dificuldade em lidar com causalidade múltipla [26] como em função de não terem acesso a modos pelos quais seria possível demonstrar quantitativamente a variação da densidade de carga elétrica imposta por campos elétricos externos. O exemplo apresentado a seguir discute com maior profundidade a questão apresentada aqui.

“Viu-se que, no interior de um condutor oco, está-se blindado dos campos de cargas externas. Fora de um condutor oco que contém cargas internas, está-se blindado dos campos gerados por estas cargas? Explique por que sim ou porque não.” [15].

Esta questão versa sobre blindagem eletrostática e envolve aspectos multifatoriais relativos à lei de Gauss [26]. Como *objeto*, tem-se um condutor oco, supostamente descarregado, mas de distribuição de cargas elétricas

desconhecida. Os *parâmetros* são: forma geométrica do condutor (oco); portadores de carga elétrica em pontos do espaço (não se determina quantas); pontos do espaço (não determinados); introdução de cargas internas ao condutor; campos elétricos devidos às cargas elétricas do problema. A *variável* em questão é o valor do campo elétrico resultante no espaço exterior ao condutor devido à introdução de cargas internas. As operações de pensamento necessárias para resolver esta situação são: *identificar as fontes de campo elétrico* – cargas elétricas externas (não necessariamente exteriores); *enumerar pontos relevantes no espaço* – identificar os pontos interiores (quando a carga está fora) e exteriores ao condutor (quando a carga elétrica está no interior); *associação de vetores a ponto do espaço* – associar o campo elétrico a pontos do espaço nas duas situações, com auxílio heurístico do conteúdo conceitual da lei de Gauss; *mapeamento do significado das equações de campo* – a partir da lei de Gauss e de circulação, analisar a redistribuição de carga elétrica no condutor, devida à presença de carga elétrica no seu interior; *construção da representação simbólica* – chegar à conclusão de que a casca não blindada os campos interiores, somente os exteriores. A seguir discutiremos a próxima grande classe de situações, a que necessita da representação analógica do campo elétrico ou do potencial elétrico.

### C. Representação analógica do campo elétrico ( $A$ )

Este tipo de problema é organizado de modo a ser necessário referir-se ao campo elétrico gerado por um ou mais objetos, corpusculares ou na forma de distribuições contínuas de portadores de cargas elétricas, usando representações que guardem semelhança estrutural, visual e pictórica com a “forma” assumida pelo campo elétrico no espaço, isto é, diagramas de flechas ou de linhas de campo [16]. Pode ser possível que haja a coordenação de uma ação de representar analogicamente e simbolicamente o campo elétrico ou mesmo entre representar analogicamente o campo elétrico e descrever interações elétricas.

Estas situações requerem, no mínimo, quatro ações, quais sejam: *identificar as fontes de campo elétrico*, isto é, as cargas elétricas de seus portadores; *identificar pontos do espaço*; *associar vetores campo elétrico* (ou escalares no caso do potencial escalar elétrico) *a pontos no espaço*; *estabelecimento da representação do campo elétrico*. Tal associação entre campo elétrico e pontos no espaço é feita de maneira a respeitar algum tipo de lei física ou informação sobre o campo elétrico. Identificamos pelo menos quatro tipos de situações epistemologicamente distintas envolvendo a representação analógica do campo elétrico, quais sejam: *representação analógica do campo elétrico de uma fonte puntual de carga elétrica* ( $A^A$ ); *representação analógica do campo elétrico devido a múltiplas fontes de carga elétrica pontuais* ( $A^B$ ); *representação analógica de campos elétricos devidos a distribuições contínuas conhecidas a priori de cargas elétricas* ( $A^C$ ); *representação analógica de campos*

<sup>6</sup> Forma eletrostática da lei de Faraday.

elétricos devidos a distribuições contínuas conhecidas a posteriori, de cargas elétricas ( $A^D$ ).

A primeira classe de situações, codificada por  $A^A$ , engloba a construção, a partir das distribuições de carga elétrica, da representação analógica do campo elétrico ou do potencial elétrico a partir de uma carga elétrica puntual, portanto fica claro que se pode variar somente parâmetros como valor de carga elétrica e distância ao ponto onde se estima a “forma” analógica do potencial. Representações diagramáticas de linhas de campo, setas de campo ou superfícies equipotenciais são relativamente simples e devem levar em conta conhecimento presente nas equações de campo da eletrostática, tais como o caráter não-rotacional do campo elétrico (equação de circulação), o caráter monopolar deste campo (lei de fluxo) e a relação de perpendicularidade entre campo elétrico e superfícies equipotenciais (equação de circulação).

“Esboce as linhas do campo elétrico devido a uma carga elétrica  $q$  e compare com o esboço das linhas do campo elétrico devido a uma carga elétrica  $2q$ .”

Nesta situação, apresenta-se como *objetos* dois portadores de carga elétrica. Como *parâmetros*, tem-se: os valores das cargas elétricas ( $q$  e  $2q$ ); o valor de campo elétrico; o fluxo elétrico e a circulação elétrica; os pontos do espaço. Como *variável*, tem-se as linhas de campo elétrico que se ligam à forma estrutural pictórica deste campo e, em particular, essa informação servirá à comparação entre os campos elétricos devidos a duas cargas elétricas pontuais distintas. Para resolver esta situação, é preciso construir as seguintes operações de pensamento: *identificar as fontes de campo elétrico* – os dois objetos dotados de carga elétrica; *enumerar pontos relevantes do espaço* – em virtude da simetria esférica, analisar pontos ao longo dos raios de esféricas concêntricas centradas nas cargas elétricas; *associar vetores* (campo elétrico) *ou escalares* (potencial elétrico) *a pontos do espaço* – atribuir qualitativamente um valor de campo elétrico, dependente da carga elétrica e da distância, a cada ponto do espaço; *construção da representação analógica* – construção de um desenho de linhas tangenciando o campo nos pontos em questão.

A segunda classe de situações, codificada por  $A^B$ , engloba a construção, a partir das distribuições de carga elétrica, da representação analógica do campo elétrico ou do potencial elétrico a partir de mais de uma carga elétrica puntual. Aqui a complicação fica por conta da dificuldade de tornar compatíveis a representação por linhas de campo elétrico e o princípio da superposição. Tal dificuldade pode ser contornada usando-se representação por diagramas de seta em associação com o uso qualitativo da regra do paralelogramo em pontos convenientemente escolhidos do espaço.

“Esboce as superfícies equipotenciais devidas a um dipolo elétrico.”

Distinta da situação anterior, esta questão requer estimativas qualitativas da superposição dos campos elétricos de duas cargas. Neste caso, requer-se que o estudante pense, não somente em termos de campos individuais, mas em função do campo elétrico resultante no

espaço. Como *objetos* tem-se o dipolo, constituído por dois portadores de carga elétrica. Como *parâmetros*, tem-se os valores de cargas elétricas; os campos elétricos de cada uma; o campo elétrico resultante; o potencial elétrico resultante no espaço; fluxo elétrico e circulação elétrica do campo resultante; os pontos do espaço. Como *variável*, tem-se as superfícies equipotenciais. Para resolver esta situação, é preciso construir as seguintes operações de pensamento: *identificar as fontes de campo elétrico* – objetos dotados de carga elétrica  $+q$  e  $-q$ ; *enumerar pontos relevantes do espaço* – indicar pontos em coordenadas esféricas ou cartesianas distantes das cargas ao ponto, se se aplica o princípio da superposição depois, ou distantes do ponto médio do dipolo, se se parte da equação aproximada para o campo elétrico do dipolo; *associar vetores* (campo elétrico) *ou escalares* (potencial elétrico) *a pontos do espaço* – associar o potencial elétrico aos pontos relevantes e aos que exibam simetria com fins de identificar as superfícies equipotenciais; *construção da representação analógica* – desenhar as superfícies onde o potencial é constante.

A terceira classe de situações, codificada por  $A^C$ , engloba a construção, a partir de distribuições contínuas de carga elétrica, da representação analógica do campo elétrico ou do potencial elétrico. Aqui ocorre maior complicação em comparação com a segunda, pois além da incompatibilidade entre a representação por linhas de campo elétrico e o princípio da superposição, não é possível usar a regra do paralelogramo indefinidamente, o que exige certa capacidade de indução e abdução por parte do aluno. Tal dificuldade é difícil de ser contornada, mas entendemos que em trabalhos futuros, o uso de Física Computacional seja uma ferramenta interessante para aborda-la.

“Como você representaria, usando um desenho, o campo elétrico devido a uma esfera maciça uniformemente carregada? Explique a representação fundamentando-se na lei de Gauss e na lei de Circulação.”

Nesta situação, tem-se como *objeto* uma esfera maciça eletricamente carregada. Como *parâmetros*, há: a carga elétrica da esfera; seu raio; o campo elétrico produzido por ela; a distribuição de carga elétrica do objeto; seu fluxo elétrico e sua circulação elétrica (sempre nula em casos eletrostáticos); os pontos do espaço. Como *variável* tem-se uma representação do campo elétrico, no caso, a que soe mais conveniente ao estudante (dada a abertura do problema) – pode ser uma linha de campo, um gráfico, um diagrama de seta que expresse o aumento linear do campo elétrico da esfera no interior desta, seu decrescimento com o quadrado da distância para pontos no seu exterior e sua orientação radial. Para resolver esta situação, é preciso construir as seguintes operações de pensamento: *identificar as fontes de campo elétrico* – esfera; *enumerar pontos relevantes do espaço* – indicar pontos dentro e fora da distribuição; *associar vetores* (campo elétrico) *ou escalares* (potencial elétrico) *a pontos do espaço* – indicar vetores campo elétrico crescendo com a distância dentro da esfera e decaindo com o inverso do quadrado da distância fora dela (as distâncias devem ser medidas com respeito ao centro da

esfera; *construção da representação analógica* – desenhar de acordo com o passo anterior.

A quarta classe de situações, codificada como  $A^D$ , é extremamente complicada e dificilmente pode ser resolvida por alunos de ciclo básico sem um entendimento conceitual forte sobre o princípio da superposição e sem a discussão sobre princípios relacionados à redistribuição de carga elétrica, especialmente em condutores, pois este tipo de situação envolve condições de contorno em problemas de desconhecimento da distribuição de carga elétrica a priori; ela é determinada posteriormente à determinação do potencial e do campo elétrico. Temas como condutores em equilíbrio eletrostático necessitam de um aprofundamento conceitual, haja vista serem muito complexos e pouco compreendidos por muitos cientistas ao longo do tempo [19]. Repare que não se defende o desuso desta situação em nível de Física geral, pelo contrário, entende-se aqui que maior discussão deve ser feita para recrutar conceitos tais como o de densidade de carga elétrica.

“Um condutor esférico descarregado é colocado em uma região de Campo Elétrico originalmente uniforme. Esboce as linhas de Campo Elétrico estáticas próximos ao condutor e dentro do condutor” (adaptado de Halliday et al [15])

Neste problema tem-se como *objeto* um condutor esférico. Como parâmetros tem-se: a forma geométrica do condutor (esférica); o tipo de material do qual é formado; o campo elétrico no qual é inserido; a carga elétrica do condutor (descarregado); a densidade de carga elétrica (modificável); a circulação elétrica e o fluxo elétrico; o campo elétrico resultante no espaço. Como *variável* tem-se as linhas de campo elétrico associadas ao campo produzido por este sistema. Para resolver esta situação, é preciso construir as seguintes operações de pensamento: *identificar as fontes de campo elétrico* – a fonte externa de campo elétrico e a esfera condutora descarregada na qual haverá redistribuição de carga elétrica<sup>7</sup>; *enumerar pontos relevantes do espaço* – indicar pontos no interior e no exterior, e localização em coordenadas esféricas; *associar vetores* (campo elétrico) *ou escalares* (potencial elétrico) *a pontos do espaço* – associar linhas a pontos tangenciando os vetores de campo elétrico; *construção da representação analógica* – não há linhas no interior do condutor em função do princípio da superposição e da suposição de equilíbrio eletrostático (linhas abertas contornando o condutor e aproximando-se de linhas retas no infinito).

#### D. Cálculo operacional do campo elétrico ( $\Delta$ )

Neste tipo de tarefa é necessário calcular o campo elétrico devido a distribuições de carga elétrica e isto significa encontrar uma expressão analítica ou numérica relacionando o campo elétrico resultante no espaço, cargas elétricas relevantes e distâncias apropriadas, além de

<sup>7</sup> A esfera continuará descarregada, mas sua densidade de carga será não nula, pois haverá concentração de cargas positivas variável ao longo da esfera (a maior concentração será nos hemisférios). Pode-se ver isto através da integração da expressão  $\sigma(\theta) = 3E_0\epsilon_0 \cos(\theta)$  sobre a área da casca esférica. O resultado é nulo.

orientações de vetores pertinentes. Grande parte das situações-problema de livros-didáticos de Ensino Superior ou se enquadra neste tipo de situações ou necessita dela para descrever interações eletrostáticas (situações  $\Gamma$ ) de maneira quantitativa.

Para calcular campos elétricos, é necessário fazer referência à equação regendo o campo elétrico, aos objetos portadores de carga elétrica, à função densidade de carga elétrica (que descreve a maneira pela qual a carga elétrica está distribuída) e a pontos no espaço. Para dominar situações deste tipo é necessário: *identificar portadores de cargas elétricas e a maneira pela qual estão distribuídas; identificar as características geométricas da distribuição de carga elétrica; analisar a distância de pontos da fonte, convenientemente escolhidos, a um ponto no espaço onde se deseja calcular o campo elétrico; aplicar a equação para o cálculo do campo elétrico; descrever fisicamente o resultado*. Desenvolvemos pelo menos cinco tipos de situações distintas de problemas envolvendo cálculo de campo elétrico: *cálculo do campo elétrico devido a uma carga elétrica puntual ( $\Delta^A$ ); cálculo do campo elétrico devido a duas ou mais cargas elétricas puntuais ( $\Delta^B$ ); cálculo do campo elétrico de distribuições contínuas de cargas elétricas, e de alta simetria, conhecidas a priori ( $\Delta^C$ ); cálculo do campo elétrico de distribuições contínuas e sem alto grau de simetria, conhecidas a priori, de cargas elétricas ( $\Delta^D$ ); cálculo do campo elétrico a partir de condições de contorno conhecidas, sem conhecimento, a priori, sobre a distribuição da densidade de carga elétrica ( $\Delta^E$ ).*

A primeira classe de situações, codificada por  $\Delta^A$ , exige que se calcule o campo elétrico de uma carga elétrica puntual. Costumeiramente abordada no Ensino Médio, é a mais simples de todas tanto do ponto de vista conceitual como do matemático. Os parâmetros e as variáveis podem ser carga elétrica, distância, campo elétrico. Se se sabem duas, a terceira, essas são parâmetros e a terceira é variável. Não há muito o que se fazer além de usar a “lei de Coulomb”<sup>8</sup>.

“Um átomo de hidrogênio possui um próton e um elétron. A posição mais provável de encontrar um elétron, em seu estado fundamental de energia, é o raio de Bohr. Qual o valor do campo elétrico produzido pelo próton nesta posição?”

Nesta situação, os *objetos* são o elétron e o próton. Como *parâmetros* tem-se: a carga elétrica do próton; a carga elétrica do elétron; o raio de Bohr, a posição onde se encontra o elétron; a constante eletrostática. Como *variável* tem-se o valor do campo elétrico produzido na posição onde está o elétron. Operacionalmente, o elétron só serve ao objetivo de atestar o ponto onde se vai calcular o campo, de modo que a suposição de sua carga elétrica é desnecessária, o que serve muito bem ao propósito de requerer dos estudantes a diferenciação entre campo elétrico e força elétrica, algo em que enfrentam muita dificuldade [19]. As

<sup>8</sup> Coulomb nunca enunciou sua lei na forma de campo elétrico. Esse conceito é de meados do século XIX, enquanto Coulomb desenvolveu seu trabalho no fim do século XVIII. Por isso as aspas.

operações de pensamento necessárias para resolver esta classe de situações são: *identificar as fontes de campo elétrico*, no caso, a fonte relevante de carga elétrica é o próton (o elétron só indica a posição onde se deve calcular o campo elétrico); *identificar aspectos relevantes da distribuição de carga elétrica* – identificar distribuição de carga elétrica como pontual e com a carga elementar; *analisar a distância de pontos convenientemente escolhidos no espaço à da fonte de campo elétrico* – realizar a suposição de órbita circular; *aplicar a equação para o cálculo do campo elétrico* – usar a lei de Coulomb ou a lei de Gauss para o campo elétrico; *interpretar fisicamente o resultado* – indicar que o campo elétrico devido ao próton tem determinado valor naquele lugar.

A segunda classe de situações, codificada por  $\Delta^B$ , exige que se calcule o campo elétrico devido a uma distribuição discreta de cargas elétricas pontuais. Possível de ser abordada no Ensino Médio, tem uma complicação, qual seja, a necessidade do uso do princípio da superposição e conhecimento de regras de soma vetorial. As variáveis e os parâmetros podem ser carga elétrica, distância, campo elétrico. Aqui existe grande possibilidade de variação, inclusive da criação de problemas abertos e de problemas literais.

“Os sprites são enormes clarões que às vezes são vistos no céu, acima de grandes tempestades. Foram observados durante décadas por pilotos em voos noturnos, mas eram tão fracos e fugazes que a maioria dos pilotos imaginava que não passavam de ilusões. Na década de 1990, porém, os sprites foram registrados por câmaras de vídeo. Ainda não são muito bem compreendidos, mas acredita-se que sejam produzidos quando ocorre um relâmpago especialmente intenso entre a terra e uma nuvem de tempestade, particularmente se o relâmpago transfere uma grande quantidade de carga negativa,  $-q$ , da terra para a base da nuvem. Logo depois da transferência, a terra possui uma distribuição complexa de cargas positivas; entretanto, podemos usar um modelo simplificado do campo elétrico produzido pelas cargas da nuvem e da terra supondo que existe um dipolo vertical formado por uma carga  $-q$  na altura  $h$  da nuvem e uma carga  $+q$  a uma distância  $h$  abaixo da superfície. Se  $q=200C$  e  $h=6,0km$ , qual é o módulo do campo elétrico do dipolo a uma altitude  $z_1=30km$ , ou seja, um pouco acima das nuvens, e a uma altitude  $z_2 = 60 km$ , ou seja, um pouco acima da estratosfera?” (Halliday, Resnick & Walker [27]).

Este é um exemplo no qual se pede para modelar um fenômeno real. Seria possível não mencionar o dipolo explicitamente, de forma que os sujeitos pudessem inferir esta distribuição de carga elétrica como adequada ao cálculo, mas decidimos colocar a questão na sua forma fechada, tal qual apresentada em Halliday *et al.* [27] para melhor exemplificar os objetos, parâmetros e variável.

Como objetos temos os sprites, representados pelo objeto modelo dipolo elétrico e enquadrados como modelo teórico na teoria eletromagnética [18]. Como parâmetros, tem-se: as cargas distribuídas pelas nuvens e pelo solo; a distância entre as nuvens; as distâncias onde se deve calcular o campo (um pouco acima das nuvens e um pouco acima da estratosfera). Como variável, tem-se o campo elétrico nas duas posições. As operações de pensamento necessárias para resolver esta classe de situações são: *identificar as fontes de campo elétrico* – identificar as

nuvens e o chão como os portadores de carga elétrica; *identificar aspectos relevantes da distribuição de carga elétrica* – realizar a suposição de que o sistema pode se comportar ou ser modelado como um dipolo elétrico; *analisar a distância de pontos convenientemente escolhidos no espaço ao que localiza a fonte de campo elétrico* – analisar as distâncias entre pontos dadas no problema, quais sejam, as distâncias entre as cargas do dipolo e a distância ao ponto médio entre estas e o ponto onde se deseja calcular o campo elétrico; *aplicar a equação para o cálculo do campo elétrico* – usar a lei de Coulomb e o princípio da superposição para determinar o campo elétrico resultante, bem como aproximações necessárias, tais como expansões em séries; *interpretar fisicamente o resultado* – apontar o campo elétrico resultante como o formado pelo sistema terra-nuvens.

A terceira classe de situações, codificada por  $\Delta^C$ , exige que se calcule o campo elétrico devido a uma distribuição contínua de cargas elétricas pontuais. Praticamente impossível de ser abordada no Ensino Médio brasileiro<sup>9</sup>, tem uma complicação matemática, qual seja, a necessidade do uso do princípio da superposição na forma integral. As variáveis e parâmetros podem ser carga elétrica, distância, campo elétrico. Aqui existe grande possibilidade de variação, inclusive da criação de problemas abertos resolvíveis somente com integração numérica, de problemas literais e de problemas com cálculo assintótico.

“Uma barra de plástico, semicircular, com uma carga  $-q$ , uniformemente distribuída ao longo de sua extensão, compreende uma circunferência de  $120^\circ$  e tem raio  $R$ . Os eixos de coordenadas são escolhidos de forma que o eixo de simetria da barra é o eixo  $x$  e a origem  $P$  está no centro de curvatura do arco. Em termos de  $q$  e  $R$ , qual é o Campo Elétrico produzido pela barra no ponto  $P$ ?” (Adaptado de Halliday *et al.* [27]).

Como objeto, nesta situação, temos a barra de plástico eletricamente carregada. Como parâmetros temos: a carga elétrica total; a informação sobre a distribuição de cargas (uniforme); o arco de circunferência envolto pela barra; o raio da semicircunferência formada pela haste; o ponto  $P$  (no centro de curvatura da barra) onde se deve calcular o campo elétrico. Como variável temos o vetor campo elétrico produzido por esta distribuição de cargas elétricas. As operações de pensamento necessárias para resolver esta classe de situações são: *identificar as fontes de campo elétrico* – a barra de plástico semicircular; *identificar aspectos relevantes da distribuição de carga elétrica* – distribuição uniforme, ângulo subtendido pela barra, raio da barra, carga elétrica total da barra e eixo de simetria da barra coincidente com o centro de curvatura; *analisar a distância de pontos convenientemente escolhidos no espaço à da fonte de campo elétrico* – todos os pontos da barra correspondentes a elementos infinitesimais de carga elétrica distam igualmente do centro de curvatura; *aplicar a equação para o cálculo do campo elétrico* – aplicar a expressão adequada para o cálculo do campo elétrico e o princípio da superposição para determinar o campo elétrico

<sup>9</sup> Com exceção a determinados cursos dados pelos Institutos Federais de Educação (IF) ou algo do tipo.

resultante; interpretar fisicamente o resultado – interpretar o campo elétrico resultante como a soma das contribuições de todos os campos elétricos produzidos por cada infinitesimal de cargas elétricas, analisar a simetria do problema e chegar à conclusão de que o campo aponta ao longo do eixo de simetria, em virtude de haver sobreposição de componentes antiparalelas.

A quarta classe de situações, codificada por  $\Delta^D$ , exige que se calcule o campo elétrico devido a uma distribuição contínua de cargas elétricas pontuais com alto grau de simetria. Aqui é preciso levar-se em conta o princípio da superposição, a noção de simetria e certa familiaridade com o conceito de fluxo elétrico. As variáveis e parâmetros podem envolver carga elétrica, distância, campo elétrico, superfície gaussiana, versor normal à superfície gaussiana, simetria. Qualquer problema desta classe pode ser resolvido com competências necessárias para resolver os da classe anterior, mas como se pode ver, é necessário um aprofundamento e integração conceitual para resolver problemas desta natureza de forma consciente e explícita. Muitos livros didáticos consideram, ao contrário de nós, que a simplicidade matemática justifica o argumento didático de dar maior ênfase à lei de Gauss como ferramenta para cálculo de campos elétricos ao invés da lei de Coulomb, no entanto, em nosso entendimento, a maior simplicidade conceitual, devida ao menor número de conceitos necessários de serem aplicados na lei de Coulomb, justifica maior ênfase nela para ensino de cálculo de campos elétricos, enquanto à lei de Gauss poderia ser enfatizada em discussões mais conceituais.

“Uma casca esférica com densidade volumétrica de cargas uniforme igual a  $1,84nC/m^3$ , raio interno  $a=10,0cm$  e raio externo  $b=2a$ . Qual o módulo do Campo Elétrico para as regiões:  $r < a$ ;  $a \leq r \leq b$ ;  $r > b$ ?” (adaptado de Halliday et al. [27])

Como objeto, tem-se uma casca esférica eletricamente carregada. Como parâmetros, tem-se: a informação sobre a densidade de carga elétrica (constante); os raios interno e externo; pontos do espaço onde se deve calcular o campo elétrico; a constante eletrostática. Como variável, tem-se o campo elétrico. As operações de pensamento são basicamente as mesmas da classe anterior, à exceção das pré-suposições de simetria, da invariância do campo elétrico sobre a superfície gaussiana estrategicamente escolhida e do cálculo do fluxo elétrico, donde irá retirar-se o campo elétrico.

A classe de situações  $\Delta^E$  envolve problemas complexos impossíveis de serem abordados em um ciclo básico de Física Geral, pois envolvem a resolução da equação de Laplace para determinação, a posteriori, da densidade de carga elétrica. Do ponto de vista conceitual, a abordagem é complexa, pois envolve, em geral, além dos conceitos já mencionados, a não uniformidade da densidade de carga elétrica, além da existência de campos elétricos e potenciais que são condições de contorno aplicáveis à solução de equações diferenciais. Outra forma de resolução para alguns destes problemas envolve o método das imagens eletrostáticas, algo que pode, em algumas ocasiões ser aplicado no ciclo básico de graduação, a nível conceitual.

“Considere uma certa região do espaço onde exista um campo elétrico uniforme apontando ao longo do eixo  $z$ , na qual introduzimos uma esfera condutora descarregada de raio  $R$ . Qual o campo elétrico resultante no espaço?” (Adaptado de Barcelos [23]).

Neste caso tem-se como objeto a esfera condutora. Como parâmetros, tem-se: o campo elétrico uniforme; o valor constante do campo elétrico em regiões muito distantes; a função desconhecida de distribuição de carga na região do condutor; os pontos do espaço; o valor do potencial na superfície. O valor do Campo Elétrico é, portanto, a variável, o que se precisa descobrir a partir do que foi dado ou possa ser inferido (parâmetros) sobre o objeto. As operações de pensamento necessárias para resolver esta classe de situações são: identificar as fontes de campo elétrico – a fonte oculta que produz um campo elétrico constante; o condutor descarregado que, sob redistribuição de carga elétrica, produzirá um campo elétrico no espaço; identificar aspectos relevantes da distribuição de carga elétrica – carga elétrica desconhecida, mobilidade de cargas elétricas no condutor, potencial constante na superfície (condutor), campo elétrico constante no infinito, ou seja, o campo elétrico produzido pela esfera tende a zero mais rapidamente que o campo elétrico uniforme; analisar a distância de pontos convenientemente escolhidos no espaço às da fonte de campo elétrico – analisar o problema em coordenadas esféricas e escrever o potencial assintótico (condição de contorno no infinito); aplicar a equação para o cálculo do campo elétrico – utilizar a equação de Poisson para o caso em que a densidade de carga seja nula, que recai na equação de Laplace e aplicar as condições de contorno da segunda etapa; interpretar fisicamente o resultado – interpretar o campo elétrico como resultante da superposição de um campo elétrico externo e da redistribuição de carga elétrica no condutor.

Como o foco escolhido em trabalho prévio [16] foi o de estudantes de ciclo básico de nível superior, demos ênfase para situações adequadas a este nível, no entanto estas classes de situações diferem das possíveis de serem trabalhadas no Ensino Médio e no ciclo profissional de um curso de Física, algo que foi destacado ao longo do manuscrito. Esta diferenciação é importante a mérito de transposição didática do conteúdo para outros níveis, já que esta discussão pode ajudar alguns professores a entenderem porque é mais difícil de introduzir problemas de modelagem matemática com condutores, por exemplo, em um curso de Física Geral em virtude de Problemas como estes necessitarem da ideia de distribuição de carga elétrica determinada a posteriori.

## V. CONCLUSÕES

Identificou-se, neste trabalho, quatro grandes classes de situações, aquelas nas quais se deve: descrever interações eletrostáticas ( $\Gamma$ ), com cinco classes de situações; representar simbolicamente o campo eletrostático ( $B$ ), com quatro classes; representar analogicamente o campo

eletrostático ( $A$ ), com quatro classes; calcular o campo eletrostático ( $\Delta$ ), com cinco classes. Estas classificações estão em grau crescente de complexidade epistemológica e cada uma destas classes de situações tem variáveis complicadoras como, por exemplo, o fato de o meio ser dielétrico, seja linear ou não, isotrópico ou anisotrópico, homogêneo ou não-homogêneo, e no presente caso, o conceito de polarização torna-se tão importante quanto o de campo elétrico<sup>10</sup>. Deve-se levar, em consideração, ainda as distintas formulações da descrição – campo elétrico ou potencial elétrico – que são equivalentes. No futuro, apresentaremos os resultados de experimentos pedagógicos para medir o grau de complexidade psicológica atribuído a cada classe e às subclasses associadas a elas.

Na literatura, muitos trabalhos publicados enfocam-se em estudar conceitos relativos a classes distintas de situação. [1], assim como [2], notadamente abordam casos de representação analógica de campo elétrico. [6, 7] parecem ter focado em situações nas quais o cálculo do campo elétrico ou do potencial era o mais relevante. [8], dentre diversas classes de situações, pareceu focar nas descrições de interações eletrostáticas, enquanto [3, 4, 5] parecem ter enfatizado a representação simbólica do campo elétrico. Estes resultados são valiosos, no entanto, existem diferenças nas formas com que os conhecimentos prévios, expressos nos invariantes operatórios, são mobilizados de uma grande classe de situações para a outra e como são mobilizados entre subclasses de situações, portanto maior investigação sobre as diferenças e semelhanças entre a conceitualização em diferentes classes de situações é necessária.

Uma pista sobre a conceitualização dos estudantes é encontrada nos trabalhos de Vergnaud [28] e Furió *et al.* [19] que argumentam haver um possível paralelo entre as dificuldades enfrentadas pelos cientistas ao longo do tempo e pelos estudantes na medida em que aprendem e se desenvolvem. Podemos ver que os distintos esquemas para dominar estas classes de situações se desenvolvem de maneira distinta e que seguem certo grau de continuidade epistemológica, mas também de rupturas que podem levar o estudante a outro grau de conceitualização. Desta forma, fornecer grandes classes e classes de situação de referência pode ajudar a organizar o processo de ensino e a analisar onde estão as dificuldades dos alunos.

Outro dado apontado por Furió *et al.* [19] é o de que maior parte dos alunos enfrentam maiores dificuldades em resolver problemas cotidianos que para resolver problemas acadêmicos. A questão referencial surge de maneira flagrante neste ponto, pois muitos dos problemas apresentados a estudantes de Ensino Médio, embora conceituais, são muito difíceis, pois em geral não envolvem

distribuições discretas de carga, o que, via de regra, se ensina nesse nível de ensino. Muitos estudantes parecem utilizar modelos não-newtonianos em situações não acadêmicas e os modelos newtonianos em situações acadêmicas, o que demonstra uma distância grande em relação ao conhecimento científico e, portanto, um *gap* epistemológico e ontológico a ser superado [29]. Estas classes de situações podem ajudar o professor a entender quais são as mais adequadas para conduzir o processo de problematização por parte do estudante e para fazer sentido para importantes conceitos como, por exemplo o de campo.

Os estudantes de educação básica parecem ter graves dificuldades em entender os conceitos de campo elétrico, potencial elétrico, carga elétrica e de corrente elétrica vinculados a fenômenos como, por exemplo, a condução elétrica, a quantização da carga elétrica e a blindagem eletrostática. Podemos nos perguntar como foi possível para Cavendish, Coulomb e Gilbert trabalharem sem conhecer a quantização da carga elétrica, o conceito de campo elétrico e a noção de que diferença de potencial (ou FEM, dependendo do caso) produz corrente elétrica? Por que inserimos condutores, sistemas altamente complexos, em que a carga não é determinada a priori, logo no início do curso e não mencionamos as correspondências entre Coulomb e Priestley? Por que iniciamos o conteúdo de eletromagnetismo abordando quantização da carga elétrica e não trabalhamos no fim desta disciplina apresentando os problemas que conduziram as pesquisas a chegarem à conclusão de que seria mais coerente entender a carga elétrica como quantizada? Porque insistimos em uma precoce diferenciação entre sentido real e sentido convencional da corrente se, no final, iremos ficar com o segundo? Por que não problematizar estes conteúdos a partir de situações que lhes deem sentido? E porque exigimos que nossos alunos superem algumas lacunas que demoraram mais de dois séculos e meio para serem resolvidas? Por puro purismo e rigor de nossa parte ou por nossa ignorância histórico-epistemológica? Estes problemas são, notadamente, didáticos e não problemas de física teórica ou experimental. É por isso que devemos estar atentos que o processo de ensino, por já estar previamente mancomunado com uma transposição didática [30], deve ser cuidadosamente planejado não visando somente o rigor, mas também a aprendizagem significativa. E aprender significativamente, na perspectiva operatória, significa desenvolver novos invariantes operatórios e esquemas a partir de situações que tornem conceitos úteis e significativos. É preciso levar em conta a função referencial dos conceitos.

Obviamente este trabalho não visa ser uma “receita de bolo” para esgotar a eletrostática, mas objetiva construir uma referência de análise suficientemente flexível para os professores construírem e analisarem situações-problema e orientarem o ensino de maneira a respeitar cada nível educacional, para ajuda-los na sistematização da identificação de dificuldades dos alunos, inclusive levando em consideração diferentes níveis de estruturação do problema. Ressaltamos, ainda, que não basta analisar como o conteúdo dos problemas em questão é estruturado ou

<sup>10</sup> Em geral, em nível de Física Geral III, trabalha-se com eletrostática no vácuo ou em dielétricos lineares, isotrópicos e homogêneos. Inclusive em nível de ciclo profissional de um curso de Eletromagnetismo clássico, embora a formulação matemática seja mais sofisticada, pouco se discute o caso de dielétricos não lineares, anisotrópicos e não-homogêneos. Finda-se que os estudantes que migram para ciências de materiais ou campos correlatos acabam por aprofundar-se no domínio deste tipo de conhecimento.

organizado. É fundamental, também, estudar como os estudantes mobilizam seus conhecimentos prévios para buscar resolvê-los, ou seja, determinar seus modos de conceitualização. Trata-se, portanto, de analisar como os estudantes estabelecem referência ao real utilizando conceitos físicos de carga elétrica, de campo elétrico, força elétrica, etc. Reitera-se, portanto, a necessidade de mudança da unidade de análise do problema para a interação entre esquema e situação.

## REFERENCIAS

- [1] Gire, E. and Price, E., *Arrows as anchors: an analysis of the material features of electric field vector arrows*, Physical Review Physics Education Research **10**, 020112-1 – 020112-11 (2014).
- [2] Maries, A., Lin, S. and Singh, C., *Challenges in designin appropriate scaffolding to improve students' representational consistency: the case of a Gauss's la problem*, Physical Review Physics Education Research **13**, 020103-1 – 020103-17 (2017).
- [3] Çıbık, A., *Determining science teacher candidates' academic knowledge and misconceptions about electric current*, Educational Sciences: Theory & Practice **17**, 1061-1090 (2017).
- [4] Nousiainen, M. and Koponen, I., *Pre-service physics teachers' content knowledge of electric and magnetic field concepts: conceptual facets and their balance*, European Journal of Science and Mathematics Education **5**, 74-90. (2017).
- [5] Hekkenberg, A., Lemmer, M. and Dekkers, P., *An analysis of teachers' confusion concerning electric and magnetic fields*, African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education **19**, 34-44 (2015).
- [6] Taramopoulos, A. and Psillos, D., *Complex phenomena understanding in electricity through dynamically linked concrete and abstract representations*, Journal of Computer Assisted Learning **33**, 151-163 (2017).
- [7] Leniz, A., Zuza, K. and Guisasola, J., *Students' reasoning when tackling electric field and potential in explanation of dc resistive circuits*, Physical Review Education Research **13**, 010128-1 – 010128-12 (2017).
- [8] Cao, Y. and Brizuela, B., *High school students' representations and understandings of electric fields*, Physical Review Physics Education Research **16**, 020102-01 – 020102-19 (2016).
- [9] Vergnaud, G., *Pour quoi la théorie des champs conceptuels*, Infancia y Aprendizaje **32**, 131-161 (2013).
- [10] Vergnaud, G., *Forme opératoire et forme predicative de la connaissance*, Investigações em Ensino de Ciências, **17**, 287-304 (2011).
- [11] Vergnaud, G., *The theory of Conceptual Fields*, Human Development **52**, 83-94 (2009).
- [12] Vergnaud, G. *Multiplicative structures*, In: Resh, R.; Landau, M. (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processe*, New York: Academic Press, 127-174 (2013).
- [13] Moreira, M. A., *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área*, Investigações em Ensino de Ciências **7**, 7-29. (2002).
- [14] Vergnaud, G., *¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo?* Investigações em Ensino de Ciências **12**, 285-302. (2007).
- [15] Halliday, D., Resnick, R. and Krane, K., *Física: volume 3*, Quinta edição, (LTC, Rio de Janeiro, 2006).
- [16] Autor, (2015).
- [17] Tipler, P. and Mosca, G., *Física para cientistas e engenheiros*, Rio de Janeiro **2**, Rio de Janeiro: LTC (2016).
- [18] Bunge, M., *Teoria e Realidade*. (Perspectiva, São Paulo, 2014).
- [19] Furió, C., Guisasola, J. and Zubimendi, M., *Problemas históricos y dificultades de aprendizaje en la interpretación Newtoniana de fenómenos electrostáticos considerados elementales*, Investigações em Ensino de Ciências **3**, 165-188 (1998).
- [20] Moreira, M. and Krey, I. (2006).
- [21] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, Tercera Edición, (John Wiley & Sons, Hoboken, 1999).
- [22] Assis, A. K., *A eletrodinâmica de Weber e seus desenvolvimentos recentes*, Ciência e Natura **17**, 7-16. (1995).
- [23] Barcelos, J., *Teoria Eletromagnética: parte clássica*, (Livraria da Física, São Paulo, 2015).
- [24] Markman, A., *Knowledge representation*. (Psychology Press, Hove, 1999).
- [25] Guisasola, J., Zubimendi, J., Almuñí J., and Cerberio, J., *Dificultades persistentes en el aprendizaje de electricidad: estrategias de razonamiento de los estudiantes al explicar fenómenos de carga eléctrica*, Enseñanza de las Ciencias **26**, 177-191 (2008).
- [26] Viennot, L. and Rainsong, *Design and evaluation of research-based teaching sequence: the superposition of electric field*, International Journal of Science Education **19**, 1-16 (1999).
- [27] Halliday, D., Resnick, R. and Walker, J., *Fundamentos de Física: eletromagnetismo*, 9ª edição, Rio de Janeiro: LTC, (2012).
- [28] Vergnaud, G., Booker, G., Confrey, J., Lerman, S., Lochhead, J., Sfard, A. and Wheeler, D., *Epistemology and psychology of mathematics education*. In Nesher, P., & Kilpatrick, J., (Eds.). Mathematics and cognition: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education, Cambridge University Press, 14-30 (1990).
- [29] Bravo, B. and Pesa, M., *El cambio conceptual en el aprendizaje de las ciencias, Un estudio de los procesos involucrados al aprender sobre la luz y la visión*, Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias **15**, 258-280 (2016).
- [30] Chevallard, Y., *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, (La Pensée Sauvage, Grenoble, 1986).