

# Generalización de la ecuación de Bernoulli a partir de la Dinámica de Newton



**H. González**

*Programa de Física, Universidad Surcolombiana, Avenida Pastrana con carrera I, A. A 385, Neiva (Colombia).*

**E-mail:** hergosi@usco.edu.co

(Recibido 28 de julio de 2012; aceptado el 17 de Diciembre de 2012)

## Resumen

Obtenemos una generalización de la ecuación de Bernoulli a partir del diagrama de cuerpo libre, de un elemento de fluido, utilizando la segunda ley de Newton y álgebra vectorial.

**Palabras clave:** Hidrodinámica, Mecánica Newtoniana, cuerpo libre.

## Abstract

We obtain the Bernoulli's equation in generalized form starting of the free body, at the one element fluid, using the second Newton's law and vectorial algebra.

**Keywords:** Hydrodynamics, Newtonian Mechanics, free body.

**PACS:** 45.20.da, 42.20dh, 01.40.-d

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La ecuación de B0 el teorema del trabajo y la energía cinética [1]. En este caso se expresa que el cambio en la energía mecánica total del "sistema", energía cinética más energía potencial gravitacional, es compensada por el cambio de presión por unidad de volumen entre dos configuraciones del sistema [2].

Desde la anterior perspectiva se asume que los cambios en la energía mecánica total son propiciados por la fuerza externa que genera la presión; de esta manera, el principio de conservación de la energía en Hidrodinámica contiene tres términos que son: energía cinética por unidad de volumen, energía potencial gravitacional por unidad de volumen y energía generada por la fuerza de presión por unidad de volumen.

En el presente artículo elaboramos una derivación de una forma generalizada de la ecuación de Bernoulli usando la segunda ley de Newton de la mecánica y algunas técnicas vectoriales, sin hacer alusión al teorema del trabajo y la energía cinética. Este procedimiento muestra la equivalencia entre el método de la energía y la dinámica de Newton al resolver un sistema sometido a diferentes fuerzas; sin embargo, las potencialidades de la Dinámica Newtoniana, en este caso particular, muestran las ventajas de la generalidad.

El desarrollo del artículo es el siguiente: En la Sección II se efectúa una derivación de la ecuación de Bernoulli utilizando el teorema del trabajo y la energía cinética, tal y como se obtiene en la mayoría de los textos de Física. En la

sección III, que es la parte central de nuestro trabajo, presentamos la obtención de una forma generalizada de la ecuación de Bernoulli usando la segunda ley de Newton de la mecánica y técnicas vectoriales. Finalmente, se elabora una discusión de nuestros resultados y las respectivas conclusiones.

## II. LA ECUACIÓN DE BERNOULLI A PARTIR DEL TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Se considera un fluido ideal a lo largo del tubo de flujo de la Fig. 1. Un elemento de fluido, de masa  $\Delta m$ , es transportado desde la posición vertical inicial  $y_1$  (configuración (a)) a la posición vertical final  $y_2$  (configuración (b)). Al moverse el elemento entre las dos configuraciones ni se acumula, ni se genera, masa durante su traslado entre esos dos puntos.

Debido al cambio en la sección transversal del tubo de flujo, al pasar el sistema de la configuración (a) a la configuración (b), su anchura cambia de  $\Delta x_1$  a  $\Delta x_2$ . El trabajo hecho por la fuerza neta, sobre el sistema, para trasladar el elemento de masa  $\Delta m$  desde la posición  $y_1$  a la posición  $y_2$  es [2]:

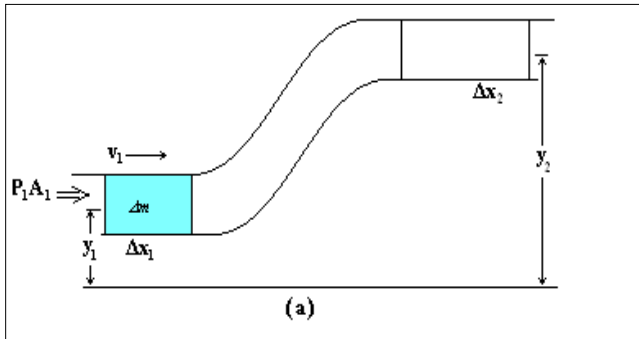
$$W = P_1 A_1 \Delta x_1 - P_2 A_2 \Delta x_2 - \Delta m g (y_2 - y_1). \quad (1)$$

El primer término de la Ec. (1) corresponde al trabajo hecho sobre el sistema por la fuerza externa que genera la presión,

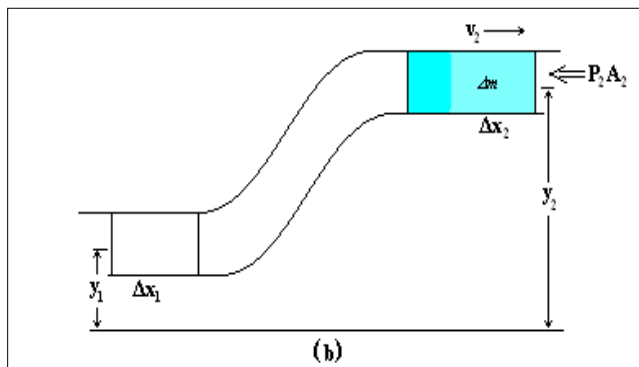
H. González

$P_1 A_1$ , en la configuración (a) y es positivo; el segundo término es el trabajo efectuado sobre el sistema por la fuerza externa que genera la presión,  $P_2 A_2$ , en la configuración (b) y es negativo; el tercer término corresponde al trabajo hecho por la fuerza de gravedad para trasladar el elemento de masa  $\Delta m$  la distancia vertical  $(y_2 - y_1)$  y es negativo. Como el fluido es incompresible su densidad  $\rho$ , es constante. De esta forma podemos escribir

$$\Delta V = \frac{\Delta m}{\rho}. \quad (2)$$



**FIGURA 1.** Un elemento infinitesimal de fluido de masa  $\Delta m$  es llevado desde la posición vertical  $y_1$  a la posición vertical  $y_2$ . Mostramos el momento en que el elemento  $\Delta m$  está en la parte inferior, a una altura  $y_1$  con respecto a un nivel de referencia horizontal arbitrario, y moviéndose con una velocidad  $v_1$ . El área transversal del tubo de flujo en la posición vertical  $y_1$  es  $A_1$ .



**FIGURA 2.** El elemento de fluido de masa  $\Delta m$  es trasladado hasta la posición vertical  $y_2$ , con respecto a un nivel de referencia horizontal arbitrario, en donde tiene una velocidad  $v_2$ . En esta posición vertical  $y_2$  el tubo de flujo tiene una sección transversal  $A_2$ .

Donde se ha tomado que en las configuraciones (a) y (b) el volumen es constante, debido a las propiedades de incompresibilidad del fluido; es decir

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = \Delta V. \quad (3)$$

Tomando en consideración las expresiones (2) y (3), en la Ec. (1), se tiene

$$W = \frac{(P_1 - P_2) \Delta m}{\rho} - \Delta m g (y_2 - y_1). \quad (4)$$

Al pasar el elemento de fluido de la configuración (a) a la configuración (b) su cambio de energía cinética es [3]

$$\Delta K = \frac{\Delta m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (5)$$

En donde  $v_1$  es la velocidad del elemento de fluido en la configuración (a), y  $v_2$  es su velocidad en la configuración (b).

Ahora haciendo uso del teorema del trabajo y la energía cinética

$$W = \Delta K. \quad (6)$$

Sustituyendo las Ecs. (4) y (5) en la Ec. (6) se obtiene

$$(P_1 - P_2) \frac{\Delta m}{\rho} - \Delta m g (y_2 - y_1) = \frac{\Delta m}{2} (v_2^2 - v_1^2). \quad (7)$$

Reordenando términos se llega a

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2. \quad (8)$$

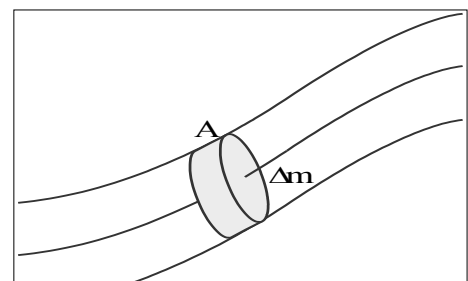
Para cualquier configuración arbitraria del elemento de fluido de masa  $\Delta m$  a lo largo del tubo de flujo se tiene [4]

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{constante}. \quad (9)$$

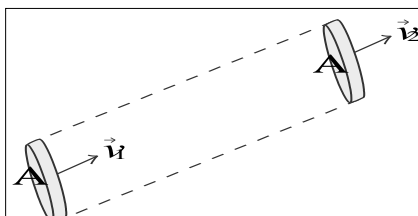
Esta es la ecuación de Bernoulli de la Hidrodinámica o ley de conservación de la energía [5].

### III. OBTENCION DE LA ECUACION DE BERNOULLI GENERALIZADA A PARTIR DE LA DINAMICA NEWTONIANA

Un elemento de fluido ideal de masa  $\Delta m$ , en forma de disco circular, se desplaza a través de un tubo de flujo de forma cilíndrica (Fig. 3). En la Fig. 4 se muestra el desplazamiento del elemento en un intervalo infinitesimal de tiempo  $\Delta t$ . En su movimiento a través del tubo de flujo el elemento de fluido barre secciones cilíndricas.



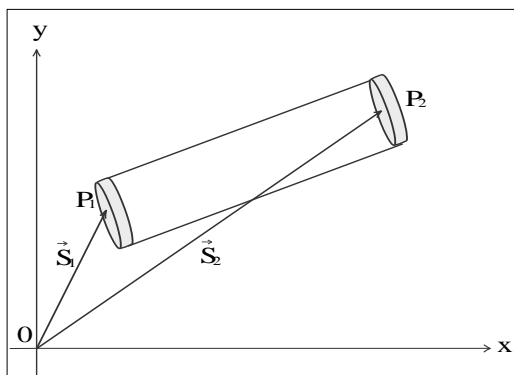
**FIGURA 3.** El elemento de masa  $\Delta m$ , y sección transversal  $A$ , se mueve a lo largo de un tubo de flujo de forma cilíndrica.



**FIGURA 4.** En el instante  $t$  el elemento está en la base de un cilindro circular recto y tiene una velocidad  $v_1$ . En el instante  $t + \Delta t$  el elemento se encuentra en la base superior del cilindro y tiene una velocidad  $v_2$ . El área de las caras del cilindro es  $A$ .

En el instante  $t$  la posición del elemento, con respecto a un origen arbitrario de coordenadas cartesianas, está descrita por el vector  $\vec{S}_1 = \vec{S}_1(t)$  y en el instante  $t + \Delta t$  su posición está dada por el vector  $\vec{S}_2 = \vec{S}_2(t + \Delta t)$  (ver Fig. 5). El desplazamiento del elemento de fluido, que corresponde a la altura del cilindro generado por el movimiento del elemento en el intervalo de tiempo  $\Delta t$ , se expresa mediante

$$\Delta \vec{S} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j}. \quad (10)$$



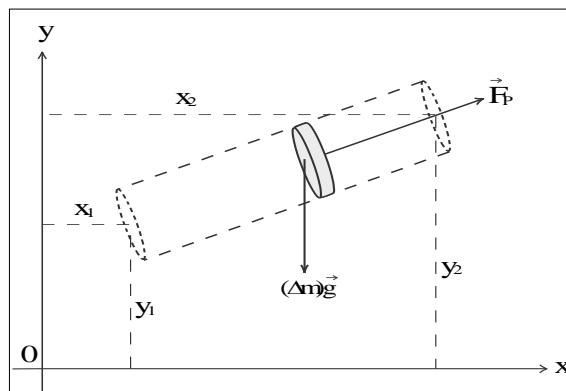
**FIGURA 5.** La figura muestra las posiciones del elemento de fluido, con respecto al origen arbitrario de un sistema de coordenadas cartesianas. En el instante  $t$  la posición está especificada por el vector  $\vec{S}_1$ , y en el instante  $t + \Delta t$  su vector posición es  $\vec{S}_2$ .

En la Fig. 6 se ilustran las coordenadas cartesianas del elemento de fluido en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ .

En la Fig. 6  $(x_2, y_2)$  y  $(x_1, y_1)$ , son las coordenadas cartesianas del elemento de fluido en los instantes  $t$  y  $(t + \Delta t)$ , respectivamente;  $\hat{i}, \hat{j}$  son los vectores unitarios en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$ .

Durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  el elemento de fluido barre un cilindro circular recto de área  $A$  y de altura  $\Delta S$ . Debido a que el intervalo de tiempo es muy pequeño, asumimos que la sección transversal del tubo de flujo no cambia apreciablemente en ese lapso; entonces el volumen barrido por el vector de posición, del elemento de fluido, en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es

$$\Delta V = A(\Delta S). \quad (11)$$



**FIGURA 6.** Se muestran las coordenadas cartesianas del elemento en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$ . Las fuerzas que actúan sobre el elemento, en un tiempo arbitrario entre  $t$  y  $t + \Delta t$ , son la fuerza generada por la presión  $\vec{F}_p$  y la fuerza gravitacional  $\Delta m\vec{g}$ .

La presión sobre la cara inferior del cilindro, y en el instante  $t$ , es  $P(t)$  y la presión sobre la cara superior del cilindro, en el instante  $t + \Delta t$ , es  $P(t + \Delta t)$ .

La diferencia de presión entre las dos caras del cilindro circular recto se puede determinar a partir de

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t) = P_2 - P_1. \quad (12)$$

Esta diferencia de presión genera una fuerza externa, en la dirección de movimiento del elemento de fluido, dada por

$$\vec{F}_p = -(\Delta P)A \hat{s}. \quad (13)$$

$\hat{s}$  es un vector unitario en la dirección de movimiento del elemento de fluido y el cambio de presión es negativo,  $-\Delta P$ , porque la presión en la parte inferior del cilindro es mayor que en la parte superior.

El movimiento del elemento de fluido, en un instante arbitrario entre  $t$  y  $t + \Delta t$ , obedece a la segunda ley de Newton

$$\vec{F}_p + (\Delta m)\vec{g} = (\Delta m)\vec{a}. \quad (14)$$

En donde  $\vec{a} = \Delta \vec{v} / \Delta t$ , es el vector de aceleración media adquirida por el elemento de fluido en el intervalo de tiempo entre  $t$  y el instante arbitrario considerado.

Multiplicando escalarmente cada uno de los términos de la Ec. (14) por  $(\Delta \vec{S})$ , esta última expresada por la Ec. (10), se obtiene

$$\vec{F}_p \cdot (\Delta \vec{S}) + (\Delta m\vec{g}) \cdot (\Delta \vec{S}) = \Delta m \left( \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \right) \cdot (\Delta \vec{S}). \quad (15)$$

H. González

Usando las Ecs. (9), (12) y (13) el primer término, de la parte izquierda, de la Ec. (15) se convierte en

$$\vec{F}_p \cdot (\Delta \vec{S}) = -(\Delta P)A(\Delta S) = -(P_2 - P_1)(\Delta V). \quad (16)$$

Empleando la Ec. (10), y la relación,  $\vec{g} = g\hat{j}$  el segundo término de la parte izquierda de la Ec. (15) adquiere la forma

$$\Delta m \vec{g} \cdot (\Delta \vec{S}) = -\Delta m g (y_2 - y_1). \quad (17)$$

El segundo miembro de la Ec. (15), usando  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right) \hat{s}$ , se puede escribir de la siguiente manera

$$\Delta m \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right) \cdot (\Delta \vec{S}) = \Delta m [\Delta v \hat{s} \cdot v \hat{s}] = \Delta m \left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (18)$$

Sustituyendo las Ecs. (16), (17) y (18) en la Ec. (15), y dividiendo por  $\Delta V$ , se obtiene

$$-(P_2 - P_1) - \rho g (y_2 - y_1) = \rho g \Delta \left(\frac{v^2}{2}\right). \quad (19)$$

En la ecuación anterior  $\rho = \Delta m / \Delta V$ , es la densidad del elemento de fluido.

Ahora,

$$\Delta \left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(\frac{v_{2x}^2 + v_{2y}^2}{2}\right) - \left(\frac{v_{1x}^2 + v_{1y}^2}{2}\right). \quad (20)$$

En la Ec. (19) las vectores de velocidad del elemento de fluido en las caras superior e inferior del cilindro están dadas por

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{2x}\hat{i} + v_{2y}\hat{j} \\ v_1 &= v_{1x}\hat{i} + v_{1y}\hat{j} \end{aligned} \quad (21)$$

Sustituyendo las Ecs. (20) y (21) en la Ec. (19), y reorganizando términos, se llega al siguiente resultado

$$P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}(\rho v_{2x}^2 + \rho v_{2y}^2) = P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}(\rho v_{1x}^2 + \rho v_{1y}^2). \quad (22)$$

La expresión (22) es una forma generalizada de la ecuación de Bernoulli, que se ha derivado a partir de la mecánica Newtoniana y es válida para una tubería de sección transversal inclinada. Si dos sectores de la tubería son horizontales  $v_{2y} = v_{1y} = 0$ , de manera que  $v_2 = v_{2x}$  y  $v_1 = v_{1x}$ ; en consecuencia, la Ec. (22) se transforma en

$$P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2. \quad (23)$$

Esta es la ecuación de Bernoulli que aparece en los textos de Física [5] y generalmente se obtiene a partir del teorema del trabajo y la energía cinética como lo hemos mostrado en la Sección II.

## IV. CONCLUSIONES

Hemos utilizado la segunda ley de Newton, y algunas técnicas del álgebra vectorial, para derivar una ecuación generalizada de Bernoulli de la Hidrodinámica. La forma particular de la ecuación de Bernoulli, que aparece en los textos estándar de Física, es obtenida cuando se consideran dos tramos horizontales del tubo de flujo; así, las componentes verticales de la velocidad del elemento de fluido en la base superior e inferior del tubo de flujo se anulan.

El resultado obtenido muestra, en este caso particular, las rigurosas potencialidades de la dinámica Newtoniana y del álgebra vectorial. No obstante, es conocido que los métodos de Newton y el de la energía son equivalentes pero en determinadas circunstancias alguno de ellos resulta más adecuado.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a Ricardo Gaitán Lozano investigador de la FES de Cuautitlán-UNAM, por la lectura y discusiones sobre el tema; igualmente, por el apoyo parcial brindado durante mi permanencia en esa casa de estudios. Un especial reconocimiento a la hospitalidad de los miembros del Departamento de Física del Centro de Investigación y Estudios Avanzados de México D.F, donde este trabajo fue terminado.

## REFERENCIAS

- [1] Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D. y Ford, A. L., *Física Universitaria*, Vol. I, Décimo primera Ed. (Pearson Educación, México, 2004); Giancoli, D., *Física para Ciencias e Ingeniería*, Vol. 1, 6ta Ed. (Editorial Pearson, México, 2008).
- [2] Alonso, M. y Finn, E. J., *Física*, (Edición en español, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1995).
- [3] Resnick, R., Halliday, D. y Krane, K. S., *Física*, Vol. 1, 4ta Ed. (Editorial CECSA, México, 1999).
- [4] Tipler, P. A., *Physics for scientists and engineers*, 4ta Ed. (W. H. Freeman and Company, New York, 1999).
- [5] Serway, R. A. y Beichner, R. J., *Física para Ciencias e Ingeniería*, Vol. I, 5ta Ed. (McGraw-Hill, México, 2002).