Campos escalares acoplados a gravedad

Rubén Sánchez-Sánchez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694. Col. Irrigación. Del. Miguel Hidalgo, C.P. 11500, México, D.F.

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 24 de Agosto de 2012; aceptado el 17 de Noviembre de 2012)

Resumen

Este documento contiene algunas discusiones básicas acerca de las características físicas de ciertos campos escalares acoplados a gravedad, cuyas soluciones ya han sido publicadas anteriormente en otra revista en calidad de soluciones exactas de Einstein, para ser utilizadas en la teoría de campos de gravedad acoplados a campos escalares.

Palabras clave: Gravedad, Campos escalares, Dyones.

Abstract

This document contains some basic discussions about the physical characteristics of certain scalar fields coupled to gravity, whose solutions have been previously published in another journal as exact solutions of Einstein, for use in the field theory of gravity coupled to scalar fields.

Keywords: Gravity, Scalar fields, Dyons.

PACS: 04.20.Jb, 04.20.-q **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

En este artículo el autor quiere hacer una breve revisión de algunas características que mantienen ciertos campos escalares acoplados a gravedad en el campo moderno de la investigación de nuevos modelos cosmológicos que podrían usarse para tratar de explicar el origen de la energía obscura del Universo.

Dicho campo de investigación es bastante extenso y controversial hoy en día. Sin embargo, es posible hacer una pequeña recapitulación de algunos campos que se han obtenido y publicado en otras revistas de investigación para la teoría en su forma básica.

El autor publicó ciertos campos del tipo Einstein-Maxwell-Dilatón-Axión junto a otros investigadores [1, 2], y es posible discutir a grandes términos las características matemáticas de estas soluciones.

También cabe mencionar, que hay otros posibles candidatos para tratar de describir la energía obscura. Aquí tomamos y discutimos muy brevemente la densidad lagrangiana para obtener soluciones exactas de gravedad acopladas a campo fantasma.

Desde luego, hay todavía mucho por hacer en este interesante campo de la ciencia, por lo que finalizamos esta pequeña discusión esperando encontrar más soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein a campo fantasma.

II. ANTECEDENTES TEÓRICOS

La teoría de supercuerdas heteróticas a bajas energías ofrece un marco teórico dentro del cual es posible encontrar soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein cuando el campo de gravedad se acopla a campos de Maxwell además de campos escalares dilatónicos y seudoescalares axiónicos. A muy bajas energías contamos con la siguiente acción para la mencionada teoría EMDA.

$$\begin{aligned} S &= \int \mathcal{L}\, d^4x \\ &= \int \Big(-R + \frac{1}{3} e^{-4\Phi} H_{\mu\nu\lambda} H^{\mu\nu\lambda} + 2\partial_\mu \Phi\, \partial^\mu \Phi \\ &\quad - e^{-2\Phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Big) \sqrt{-g}\; d^4x. \end{aligned} \tag{1}$$

Aquí $F_{\mu\nu}$ es el campo de Maxwell definido según

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu . \tag{2}$$

Donde se usa la derivada covariante. $H_{\mu\nu\lambda}$ es el tensor de Kalb-Ramon de tres índices, que a su vez se define por la identidad tensorial siguiente

$$H_{\mu\nu\lambda}=\partial_{\mu}B_{\nu\lambda}+\partial_{\lambda}B_{\mu\nu}+\partial_{\nu}B_{\lambda\mu} \\ -A_{\mu}F_{\nu\lambda}-A_{\lambda}F_{\mu\nu}-A_{\nu}F_{\lambda\mu}. \quad (3)$$

Para esta descripción el 4 vector potencial A_μ tiene dos componentes no triviales que coinciden con la simetría axial que tiene la solución

$$A_{\mu}=\frac{1}{\sqrt{2}}(v,0,0,\sqrt{2}A_{\varphi}). \quad (4)$$

Además el tensor de Kalb-Ramon de dos índices tiene una sola componente axial simétrica

$$B_{03}=b, \quad (5)$$

Y el campo dilatónico no se anula en general $\Phi\neq 0$.
En términos del campo de Pecci-Quinn, tenemos además

$$H^{\mu\nu\lambda}=\frac{1}{2}e^{4\Phi}E^{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial\kappa}{\partial x^{\sigma}}. \quad (6)$$

Con

$$E^{\mu\nu\lambda\sigma}=\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\mathrm{sign}(g)/\sqrt{-g}. \quad (7)$$

Como el tensor de Levi-Civita y

$$\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$$

Es el símbolo alternante de cuatro índices.

Se emplea un ansatz con simetría axial y con un vector de Killing temporal, que tiene la siguiente forma:

$$ds^{2}=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}=f(dt-\omega_{i}dx^{i})-\frac{1}{f}h_{ij}dx^{i}dx^{j}. \quad (8)$$

Siendo h_{ij} una submétrica tridimensional que sirve de soporte para construir soluciones, y tiene la siguiente forma con simetría cilíndrica:

$$h_{ij}dx^{i}dx^{j}=2e^{2\Gamma}dzd\overline{z}+\rho^{2}d\varphi^{2} \\ =e^{2\Gamma}(d\rho^{2}+d\zeta^{2})+\rho^{2}d\varphi^{2}. \quad (9)$$

La última igualdad, es conocida como la forma de Lewis-Papapetrou de la tres-métrica h_{ij}.

Utilizando la teoría de los mapeos armónicos sobre el grupo de simetría $Sp(4,\mathbb{R})$ es posible resolver el problema y encontrar una solución, que a continuación describimos.

III. DISCUSIÓN DE UNA SOLUCIÓN EMDA

Una solución del problema para campos escalares tipo EMDA se puede hallar usando el método de mapeos armónicos [2]. A continuación la muestro y hallamos algunos de sus parámetros físicos de relevancia.

$$\begin{aligned}
f &= \frac{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}{r^2+2qr+2q^2+a^2\cos(\theta)^2}, \\
\chi &= 0, \\
v &= \frac{\sqrt{2}q(r+q-a\cos(\theta))}{r^2+2qr+2q^2+a^2\cos(\theta)^2}, \\
u &= \frac{\sqrt{2}q(r+q-a\cos(\theta))}{r^2+2qr+2q^2+a^2\cos(\theta)^2}. \\
\kappa^{-1} &= -\frac{r^4+4qr^3+6q^2r^2+4q^3r+2q^4}{2q^2(r^2+2qr+q^2-a^2\cos(\theta)^2)} \\
&+\frac{4q^2a(r+q)\cos(\theta)}{2q^2(r^2+2qr+q^2-a^2\cos(\theta)^2)} \\
&+\frac{2a^2(r+q)^2\cos(\theta)^2+a^4\cos(\theta)^3}{2q^2(r^2+2qr+q^2-a^2\cos(\theta)^2)}, \\
\Phi &= -\frac{1}{2}\ln\Big[-\Big(r(r+2q)(r^2+2qr+2q^2) \\
&\quad \left(2(r+q)^2+a^2\cos(\theta)^2\right)a^2\cos(\theta)^2\Big) \\
&\quad \Big(r^4+4qr^3+6q^2r^2+4q^3r+2q^4 \\
&\quad +4q^2a(r+q)\cos(\theta)+2a^2(r+q)^2\cos(\theta)^2 \\
&\quad +a^4\cos(\theta)^4\Big)^{-1}\Big].
\end{aligned} \quad (10)$$

Esta es una solución que pertenece al espacio potencial. Donde los potenciales los describimos a continuación:

1. f: Es el factor conforme de la solución.
2. χ: Es el potencial de rotación.
3. v: Es el potencial electrostático.
4. u: Es el potencial magnetostático.
5. κ: Es el campo seudoescalar axiónico.
6. Φ: Es el campo escalar dilatónico.

Como los potenciales eléctrico y magnético de esta solución son iguales, a la solución se le acostumbra llamar dyon.

A partir de esta solución para los campos de potenciales podemos derivar una métrica que describa el espacio tiempo correspondiente a esta solución en particular.
Pero primero, hay que trabajar con el potencial de rotación, a partir de la ecuación tensorial:

$$\omega^{i}=-\frac{f^{2}}{\sqrt{h}}\varepsilon^{ijk}\partial_{j}\kappa_{k}. \quad (11)$$

Donde, el tensor de twist ω_i se calcula para la tres métrica h_{ij} a partir del potencial de rotación y de los potenciales eléctrico y magnético de acuerdo a la expresión siguiente:

$$\omega_{i}=\partial_{i}\chi+v\partial_{i}u-u\partial_{i}v. \quad (12)$$

Debido a la simetría axial el tensor de twist tiene una sola componente dada por

$$\omega^i = (0, 0, \omega). \tag{13}$$

Una solución de la ecuación (11), está dada por la expresión

$$\omega = \frac{2q^2 a\,\mathrm{sen}(\theta)^2}{r^2 + 2qr + a^2\cos(\theta)^2}. \tag{14}$$

En la siguiente sección vamos a calcular los campos eléctrico y magnético que corresponden a los potenciales electromagnéticos correspondientes. Antes de dar el aspecto que tomará la métrica del espacio-tiempo correspondiente a esta solución (10) del espacio potencial.

IV. CAMPOS ELÉCTRICO Y MAGNÉTICO

El tensor de Maxwell $F_{\mu\nu}$ y su contraparte contravariante dual ${}^*F^{\mu\nu}$, se definen en términos de los campos eléctrico E_i y magnético B_i en términos de las siguientes expresiones tensoriales:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_r & -E_\theta & -E_\varphi \\ E_r & 0 & B_\varphi & -B_\theta \\ E_\theta & -B_\varphi & 0 & B_r \\ E_\varphi & B_\theta & -B_r & 0 \end{pmatrix},$$
$${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\begin{pmatrix} 0 & B_r & B_\theta & B_\varphi \\ -B_r & 0 & -E_\varphi & E_\theta \\ -B_\theta & E_\varphi & 0 & -E_r \\ -B_\varphi & -E_\theta & E_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Y debemos de tomar en cuenta las siguientes dos relaciones, para la tres métrica h_{ij}.

$$E_i = F_{i0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_i v,$$
$$B_i = \varepsilon^{ijk} F_{jk}. \tag{16}$$

También hay que tomar en cuenta la relación para hallar el campo magnético, dada por:

$$e^{-2\Phi}F^{ij} + \kappa\,{}^*F^{ij} = \frac{f}{\sqrt{2h}}\varepsilon^{ijk}\partial_k u. \tag{17}$$

De esta forma hallamos a los campos eléctrico E_i y magnético B_i como:

$$E_r = -\frac{q(r^2 + 2qr - 2a\cos(\theta)(r+q) - a^2\cos(\theta)^2)}{(r^2 + 2qr + 2q^2 + a^2\cos(\theta)^2)^2},$$
$$E_\theta = qa\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\frac{r^2 + 2qr + 2q^2 + 2a\cos(\theta)(r+q) - a^2\cos(\theta)^2}{(r^2 + 2qr + 2q^2 + a^2\cos(\theta)^2)^2}, \tag{18}$$
$$E_\varphi = 0.$$

Para el campo eléctrico.

Y se tienen las siguientes identidades para las componentes del campo magnético

$$B_r = q\,\mathrm{sen}(\theta)\frac{r^2 + 2qr + a^2 + 2q^2}{(r^2 + 2qr + 2q^2 + a^2\cos(\theta)^2)^2}$$
$$\left(r^2 + 2qr + 2q^2 - 2a(r+q)\cos(\theta) - a^2\cos(\theta)^2)\right),$$
$$B_\theta = qa\,\mathrm{sen}(\theta)^2 \tag{19}$$
$$\frac{(r+2q)r - 2a(r+q)\cos(\theta) - a^2\cos(\theta)^2}{(r^2 + 2qr + 2q^2 + a^2\cos(\theta)^2)^2},$$
$$B_\varphi = 0.$$

En la siguiente sección detallamos a la función métrica $\Gamma = \Gamma(r,\theta)$, y su papel dentro de la métrica de la solución.

VI. SOLUCIÓN MÉTRICA

Para encontrar a la función métrica Γ necesitamos las ecuaciones de Einstein para EMDA que son:

$$R_{\mu\nu} = 2\partial_\mu\Phi\,\partial_\nu\Phi + \frac{1}{2}e^{4\Phi}\partial_\mu\kappa\,\partial_\mu\kappa$$
$$+e^{-2\Phi}\left(2F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{2}F_{\lambda\sigma}F^{\lambda\sigma}g_{\mu\nu}\right). \tag{20}$$

Además necesitamos poner a la métrica en una forma más conveniente, que es como sigue:

$$ds^2 = -\frac{1}{f}\Big[e^{2\Gamma}\left((r-m)^2 + K^2\cos(\theta)^2\right)$$
$$\left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\Big] + f(dt - \omega\, d\varphi)^2. \tag{21}$$

En donde se distinguen las siguientes cantidades y parámetros a identificar o encontrar:

$$\Gamma = \Gamma(r,\theta): \quad \text{función métrica a encontrar,}$$
$$K^2 = \sigma^2 - q^2,$$
$$\Delta = r^2 + 2qr + \sigma^2, \tag{22}$$
$$\rho^2 = \Delta\,\mathrm{sen}(\theta)^2,$$
$$\sigma: \quad \text{parámetro a determinar,}$$
$$q: \quad \text{parámetro a determinar.}$$

La identidad para la función Γ que satisface a (21) es la siguiente:

$$\Gamma = -\ln\left(1+\frac{q^2\,\mathrm{sen}(\theta)^2}{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}\right). \tag{23}$$

Y al reincorporar los valores de f,ω y Γ en el ansatz de la métrica (21) obtenemos la siguiente expresión que nos da la solución para este caso de espacio-tiempo con campos escalares

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \left(1+\frac{2q^2}{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}\right)^{-1}\left(dt-\frac{2q^2 a\,\mathrm{sen}(\theta)^2}{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}d\varphi\right)^2-\left(1+\frac{2q^2}{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}\right) \\ & \left\{\left(1+\frac{q^2\mathrm{sen}(\theta)^2}{r^2+2qr+a^2\cos(\theta)^2}\right)^{-2}\left((r+q)^2+(a^2-q^2)\cos(\theta)^2\right)\left(\frac{dr^2}{\Delta}+d\theta^2\right)+\Delta\,\mathrm{sen}(\theta)^2 d\varphi^2\right\} \end{aligned} \tag{24}$$

Un análisis con integrales de Komar nos muestra que esta solución particular, nos representa a un dyon con carga eléctrica *q*, carga monopolar magnética *-q*, y masa cero. Esto es, para un observador alejado del horizonte de eventos la solución no presenta masa. Tampoco tiene carga dilatónica, ni carga axiónica. Sin embargo, la solución prueba ser de gran ilustración como una solución de Eisntein para la teoría de supercuerdas heteróticas a bajas energías.

Este ejemplo de espacio tiempo, es una muestra matemática de cómo es posible acoplar el campo gravitatorio de Einstein con campos escalares. También es posible demostrar, que se trata de una singularidad desnuda. Hecho que no es raro hallar para teorías de gravedad acopladas con campos escalares dentro del modelo de supercuerdas.

VII. DENSIDAD LAGRANGIANA PARA CAMPOS ESCALARES FANTASMA

Otro tipo de campos escalares que pueden ser acoplados a la gravedad, lo constituyen los campos fantasmas que en la literatura científica y de investigación se les denomina Quintessence en inglés o "Quinta esencia". Los llamados campos fantasma constituyen un atractivo hoy en día en el campo de la cosmología porque nos presentan con una alternativa al problema encontrado en ese campo, para explicar el origen de la "energía oscura" en el universo. Esta representa un componente astronómico que provoca la expansión acelerada del universo.

Aquí nos limitamos a exponer la correspondiente densidad lagrangiana para este caso está dada por la teoría como:

$$\mathcal{L} = -\sqrt{-g}\left(-R-2(\nabla\Phi)^2+e^{-2\alpha\Phi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right). \tag{25}$$

Las ecuaciones de campo pueden ser escritas a partir de esta identidad y son las siguientes

$$\begin{aligned} & \nabla_{\mu}\left(e^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}\right)=0, \\ & \nabla^2\phi-\frac{\alpha}{2}e^{-2\alpha\phi}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}=0, \\ & -2\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi+2e^{-2\alpha\phi} \\ & \left(F_{\mu\lambda}F_{\nu}{}^{\lambda}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}e^{-2\alpha\phi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)=R_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{26}$$

Algunas soluciones pueden ser halladas en forma detallada en el artículo de Matos [3].

Como puede verse y recapitulando, los campos fantasmas representan, otra área de investigación alternativa, que puede en dado caso resolver el problema de la energía obscura del universo. Y si no, al menos constituirán un campo interesante de investigación para hallar nuevas soluciones de campo de gravedad acoplada a campo escalar dentro de las teorías nuevas que ofrecen modelos alternativos de solución para varios problemas de la cosmología actual [5, 6]. Esperamos que este artículo sirva de ilustración al lector interesado en estos nuevos campos de investigación de la física teórica.

AGRADECIMIENTOS

El autor quiere agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (México), por el apoyo otorgado en la realización de este trabajo. Este trabajo fue realizado también con el apoyo del proyecto de investigación SIP 20121635 "Campo de Einstein acoplado a campo escalar".

REFERENCIAS

[1] Matos, T., Miranda, G., Sánchez, R., Wiederhold, P., *Class of Einstein-Maxwell-dilaton-axion space-times*, Physical Review D **79**, 124016 (2009) pp. 1-12.

[2] Sánchez, R., *Mapeos armónicos para la teoría axión-dilatón*, Tesis de Doctorado en Física, CINVESTAV-IPN, México (2004).

[3] Matos, T., *Class of Einstein-Maxwell phantom fields: rotating and magnetized wormholes*, Gen. Rel. Grav. **42**, 1969-1990 (2010).

[4] Heusler, M., *Black Hole Uniqueness Theorems*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).

[5] Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., *Gravitation*, (Freeman, New York, 1995).

[6] Wald, R. M., *General Relativity*, (The University Chicago Press, Chicago, 1984),