

# Divergencias y singularidades en la escala de Compton



Rafael Andrés Alemañ Berenguer<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Instituto Universitario de Física Aplicada a la Ciencia y a la Tecnología. Universidad de Alicante (España).

<sup>2</sup> Agrupación Astronómica de Alicante (División de Cosmofísica), c/ Arzobispo Loaces, 12 - 4ºA, esc. dcha. Alicante – 03003 (España).

**E-mail:** agrupacion.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 25 de Septiembre de 2012; aceptado el 18 de Diciembre de 2012)

## Resumen

La eliminación de divergencias infinitas y singularidades en el marco de la teoría cuántica, suele buscarse mediante la incorporación de distancias y tiempos mínimos por debajo de los cuales no se permite la existencia de procesos físicamente significativos. Pese a que habitualmente esos mínimos se identifican con la longitud y el tiempo de Planck, en este artículo se analiza la posibilidad de que la escala de Compton desempeñe un papel semejante en teorías semiclásicas, y por tanto sólo válidas en primera aproximación en el régimen cuántico. Para examinar la cuestión, se analizan el caso del modelo clásico del electrón con potenciales avanzados, así como la singularidad gravitatoria típica de los agujeros negros en la relatividad general.

**Palabras clave:** Escala Compton, divergencia, singularidad, partícula puntual

## Abstract

The goal of eliminating infinite divergences and singularities in the framework of quantum theory, is often sought by incorporating minimum distances and times below which the existence of physically significant processes are not allowed. Although these minima usually are taken to be the Planck length and the Planck time, this paper discusses the possibility that the Compton scale happens to play a similar role in theories that are semi-classical, and therefore only valid in first approximation in the quantum regime. To examine this question the case of classical electron model with advanced potentials, and that of the gravitational singularities typical of black holes in general relativity, are analyzed.

**Keywords:** Compton scale, divergence, singularity, point-particle

**PACS:** 03.65.Sq, 04.20.Dw, 04.70.Bw, 41.60.-m

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Cuando Einstein propuso su teoría especial de la relatividad, eran dos los paradigmas dominantes en la ciencia física, cuya validez –aunque ampliamente aceptada en multitud de casos– ya no se considera hoy universal. El primero de ellos consistía en la mecánica clásica de partículas puntuales, que se juzgaba un modelo adecuado para la estructura microscópica de la materia; y el segundo, complementario del primero, venía dado por los campos de fuerzas, perfectamente continuos y matemáticamente diferenciables.

Por su parte, el trabajo de Einstein introdujo la exigencia de causalidad, es decir, ninguna señal física podía viajar más deprisa que la luz. El efecto físico –gravitatorio, electromagnético o cualquier otro– ejercido por un objeto, sería experimentado por otro cuerpo en un momento posterior, y no de manera instantánea como hasta entonces se había admitido (no sin cierta relucencia en algunos autores, empezando por el propio Newton). En otras palabras, las señales físicas habían de ser siempre de la clase

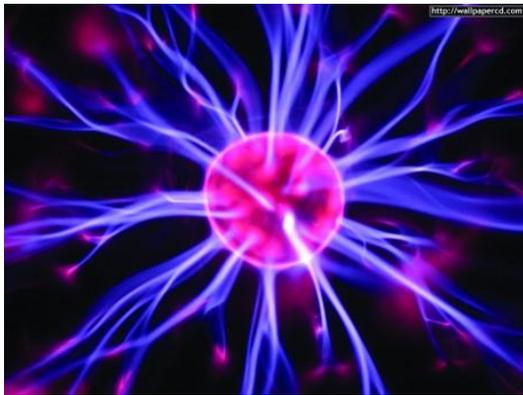
que denominamos “retardadas”, actuando en un tiempo posterior al de su emisión.

Poco sorprendente fue, por tanto, que según se desarrollaba la teoría del electrón en la microfísica, apareciesen inconsistencias insalvables que en último término sólo fueron mitigadas gracias a la posterior intervención de la teoría cuántica. Así ocurrió porque históricamente el concepto original de electrón se correspondía con una distribución esférica de carga eléctrica [1]. Es interesante subrayar que en el caso no relativista, abordado entre finales del siglo XIX y comienzos del XX, se probó que la totalidad de la masa inercial del electrón equivalía a su masa electromagnética. La pregunta surgió de inmediato: ¿había algún vínculo a nivel fundamental entre la mecánica y el electromagnetismo? Y la respuesta ofrecida por la física pre-relativista fue la siguiente [2]:

$$\text{Energía cinética} = (\beta/2)(e^2/Rc^2)v^2 \quad (1),$$

donde  $e$  es la carga del electrón,  $c$  la velocidad de la luz,  $R$  el radio del electrón,  $v$  su velocidad, y  $\beta$  un factor numérico del orden de la unidad. Expresiones de este tipo son las que permitieron aventurar la posibilidad de que la masa del electrón fuese enteramente de origen electromagnético.

Vale la pena señalar que en un contexto relativista (o al menos en un marco teórico compatible con las transformaciones de Lorentz) era posible pensar en un electrón como una distribución de carga eléctrica sobre una corteza esférica, en tanto dicho electrón estuviese en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme (Fig. 1). Para ello era necesario introducir, además de la fuerza electromagnética, la llamada “tensión de Poincaré”, cuya misión consistía en compensar la repulsión mutua entre las distintas partes del electrón, evitando así un estallido autodestructivo de esta partícula.



**FIGURA 1.** Modelo del electrón extenso como una distribución esférica de carga.

Cuando el electrón así considerado se acelera en el seno de un campo electromagnético, la imagen precedente pierde su validez. Entonces aparece una fuerza que el electrón ejerce sobre sí mismo (una “auto-fuerza” o fuerza de “autoacción”) cuya expresión en el caso más simple de un movimiento unidimensional –salvo constantes numéricas– viene dada por [3, 4]:

$$F \sim \frac{2}{3} \frac{e \ddot{x}}{cR} - \frac{2}{3} \frac{d\dot{x}}{dt} + \frac{e^2 R}{c^4} \ddot{x} + o(R^2) \quad (2)$$

En esta expresión –que en su caso más general sería de carácter vectorial– los puntos indican derivación con respecto al tiempo, como es habitual, y  $R$  es el radio clásico del electrón. Como se observa fácilmente, cuando  $R \rightarrow 0$  el primer término tiende a infinito, lo que provoca una grave inconsistencia en la fórmula. En realidad, es uno de los primeros casos de incoherencia debida a las divergencias infinitas de diversos tipos que han plagado la física del siglo XX.

Sin embargo, cuando  $R \rightarrow 0$  el segundo término permanece inalterado, en tanto que los restantes términos se anulan. Este segundo término (no newtoniano ya que

*Divergencias y singularidades en la escala de Compton* contiene una derivada tercera de  $x$  respecto a  $t$ ) se relaciona con el bien conocido factor de Schott [5]. Su presencia se debe a la necesidad de compensar la energía perdida por electrón a causa de la radiación emitida al acelerarse.

En cualquier caso, de todo esto se desprende que es posible construir un modelo de electrón extenso consistente con las transformaciones relativistas, al precio de introducir fuerzas no electromagnéticas de índole muy peculiar. Aun así, todavía existe otro camino para elaborar una teoría relativista del electrón, si bien se hace igualmente necesario introducir nociones de dudosa legitimidad física.

### III. CAMPOS AVANZADOS Y RETARDADOS

Desde un punto de vista clásico, una carga acelerada emite energía, lo que a su vez altera el movimiento de dicha carga, tal como se recoge en el segundo término de (2), pero es la divergencia infinita del primero la que crea las mayores dificultades teóricas. Por eso en 1938 Dirac propuso una ecuación fenomenológica que eludía el problema de la masa electromagnética infinita [6]. La ecuación de Lorentz-Dirac, en la que  $\tau$  es el tiempo propio y los índices recorren valores del 1 al 4, quedaría:

$$m \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = e F_k^i \frac{dx^k}{d\tau} + \frac{4e}{3} g_{lk} \left( \frac{d^3 x^i}{d\tau^3} \frac{dx^l}{d\tau} - \frac{d^3 x^l}{d\tau^3} \frac{dx^i}{d\tau} \right) \frac{dx^k}{d\tau} \quad (3)$$

La ecuación (3) se aplica a una carga puntual, con  $m$  una masa renormalizada que absorbe el valor infinito. Aquí se halla el antecedente directo de los procedimientos de renormalización que durante el siglo XX han suministrado el único camino para escapar de las divergencias infinitas en la microfísica. El primer término de (3) expresa el efecto del campo externo sobre la carga, mientras el segundo se introduce sin más finalidad que preservar la conservación de la energía teniendo en cuenta las pérdidas por radiación.

Combinando las ecuaciones (2) y (3) tenemos.

$$m \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = e (F_k^i + R_k^i) \frac{dx^k}{d\tau} \quad (4)$$

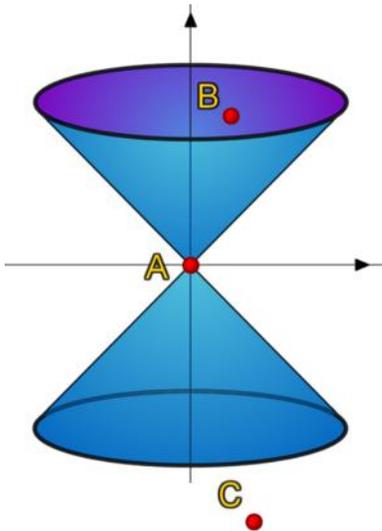
donde resulta que

$$R_k^i \equiv \frac{1}{2} (F_k^i{}_{(ret)} - F_k^i{}_{(av)}) \quad (5)$$

En (5)  $F_{(ret)}$  alude al campo retardado o causal, permitido por la relatividad, en el cual las señales físicas se propagan desde su fuente en instantes posteriores al instante inicial de su emisión. Por otro lado,  $F_{(av)}$  es un campo avanzado, una entidad no física en el sentido de que la relatividad no permite su actuación. Por ejemplo,  $F_{(ret)}$  representa las influencia causales que una carga  $A$  ejerce sobre otra carga  $B$  situada a una distancia  $r$  de la primera, tras un tiempo  $t = r/c$ . El campo avanzado, por el contrario, sería el que actuaría sobre  $A$  desde su futuro. Lo que Dirac mostró en sus trabajos, fue que el término de disipación radiativa en

(3) y en (4) venía dado por (5), donde se toma la diferencia antisimétrica de los campos avanzados y retardados.

Las ecuaciones de Maxwell admiten dos clases de soluciones generales, una de ellas asociada al cono de luz futuro en un diagrama de Minkowski (campos retardados) y la otra asociada al cono de luz pasado (campos adelantados). La solución retardada es la que se elige para describir las situaciones físicas reales en la teoría convencional, habida cuenta del concepto de causalidad típico de la relatividad especial (Fig. 2). Esta solución retardada describe la radiación electromagnética que viaja a la velocidad de la luz desde una carga eléctrica –la fuente de dicha radiación– y llega a otro punto del espacio en un instante posterior. Por ese motivo, esta solución ha sido denominada también como “causal”. Sobre la base de la preservación de la causalidad, las soluciones avanzadas se descartan sin más, salvo en un pequeño número de formulaciones teóricas, como la de Dirac o la de Feynman y Wheeler (que se comentará más adelante).



**FIGURA 2.** En el espacio-tiempo relativista, el suceso B y el suceso C se hallan respectivamente en el cono de luz futuro y en el cono de luz pasado de A.

Conviene recordar al respecto que la propuesta de Dirac contiene las llamadas soluciones divergentes auto-aceleradas, donde el electrón adquiere velocidades cada vez mayores sin la actuación de una fuerza externa. Tan extraña predicción –nada realista, ciertamente– se relaciona con la auto-energía infinita de un electrón puntual.

Para concretar algo más el problema de las soluciones auto-aceleradas, recurriremos a la diferencia entre los campos avanzado y retardado cuando se aplican en (2). Es decir, sustituiremos  $F_{(av)}$  y  $F_{(ret)}$  en (2) y restaremos ambas expresiones, en cuyo caso la auto-fuerza queda como:

$$F = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d}{dt} (\ddot{x}) + o(R) \quad (6)$$

De esa manera se elimina el molesto término que genera la divergencia infinita y se retiene la tercera derivada de  $x$  con respecto al tiempo. Por otra parte, este término se necesita con el fin de asegurar la conservación de la energía, ya que un electrón acelerado la emite en forma de radiación. En esta formulación tampoco hay un término de masa electromagnética, y además hemos de extender nuestras consideraciones a una pequeña región entorno al electrón, no al electrón como una partícula puntual.

La ecuación de Lorentz-Dirac puede escribirse:

$$ma^\mu(\tau) = \int_0^\infty K^\mu(\tau + \alpha\tau_0) e^{-\alpha} d\alpha \quad (7)$$

donde  $a^\mu$  es la aceleración,  $\tau$  es el tiempo,  $\alpha = (\tau' - \tau)/\tau_0$ , y

$$\tau_0 \equiv \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} \sim 10^{-23} \text{ s} \quad (8)$$

Además, denotando como  $\bar{R}$  el ritmo de emisión de la radiación total, tendríamos:

$$K^\mu(\tau) = F_{int}^\mu + F_{ext}^\mu - \frac{1}{c^2} \bar{R} v^\mu, \quad (9)$$

en la que, junto con la velocidad  $v^\mu$ ,  $F_{int}^\mu$  y  $F_{ext}^\mu$  son respectivamente la fuerza interna y la fuerza externa que actúa sobre el electrón en este modelo teórico.

Como se observa fácilmente, la ecuación (7) se diferencia de la dinámica newtoniana típica en el hecho de que no se maneja un tiempo local. Es decir, la aceleración  $a^\mu$  depende de la fuerza aplicada no sólo en un instante  $\tau$ , sino también en instantes posteriores.

Ya que el valor de  $\tau_0$  dado por (8) es el tiempo de Compton, alrededor de  $10^{-23}$  segundos, la ecuación (7) puede escribir como un desarrollo aproximado en función de un parámetro  $\xi$  según la igualdad:

$$ma^\mu(\tau) = K^\mu(\tau + \xi\tau_0) = K^\mu(\tau) + \xi\tau_0 \dot{K}^\mu(\tau) + \dots \quad (10)$$

Partiendo de este desarrollo se deduce que la ecuación de Lorentz-Dirac difiere de la típica teoría local por un término del orden de

$$\sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \dot{a}^\mu, \quad (11)$$

que es el llamado término de Schott. La componente temporal de este término, a su vez, viene dada por [2]:

$$-\frac{dE}{dt} \approx \bar{R} \approx \frac{2}{3} \frac{e^2 c}{r^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4, \quad (12)$$

donde  $E$  es la energía de la partícula. Integrando sobre el tiempo de Compton,  $\tau_0$ , se deduce que el orden de magnitud de la extensión espacial –el carácter “no puntual”, digamos– del electrón, sería  $r \sim c\tau_0$ , que es el orden de magnitud de la longitud de onda de Compton, como cabía esperar.

$$F = \frac{1}{2} \{F_{ret} + F_{av}\} + \frac{1}{2} \{F_{ret} - F_{av}\}, \quad (16)$$

En la formulación de Feynman-Wheeler, el resto de las cargas del universo reaccionan sobre el electrón original mediante las ondas avanzadas, que llegan desde el futuro a la carga dada al mismo tiempo que dicha carga irradia sus ondas electromagnéticas. Más concretamente, cuando un electrón se acelera en un instante  $t$ , interactúa con las demás cargas en un instante posterior  $t' = t + r/c$ , donde  $r$  es la distancia hasta otra carga; éstas son las interacciones retardadas. Sin embargo, las otras cargas reaccionan sobre el electrón original a través de sus ondas avanzadas, que llegarán en el instante  $t' - r/c = t$ .

Efectivamente, se trata de una acción a distancia instantánea. Es de subrayar que en la formulación de Feynman-Wheeler no hay auto-fuerzas, ni masa electromagnética infinita, lo cual es uno de sus principales méritos. Tampoco hay frenado por radiación, efecto que se atribuye a la acción del resto de cargas del universo sobre la carga original.

Hay dos aspectos importantes en el planteamiento anterior. Uno de ellos es la acción del resto del universo sobre una carga dada, y el otro se refiere a los intervalos espacio-temporales involucrados, que son del orden de la escala de Compton. Así, el trabajo realizado sobre una carga  $e$  situada en el punto  $O$  por otra carga cualquiera  $q$  separada de la primera una distancia  $r$  de modo que provoque un desplazamiento  $l$  en el eje  $x$  de  $e$ , es proporcional a  $e^2 l/r^2$ .

Sea el número de partículas a una distancia  $r$  de  $O$  el que indica la expresión:

$$n(r) = \rho(r)4\pi r^2 dr, \quad (13)$$

donde  $\rho(r)$  es la densidad de partículas. Entonces el trabajo total vendría dado por:

$$E \sim \int (e^2 l/r^2)4\pi r^2 \sim mc^2. \quad (14)$$

Ocurre así porque  $\rho(r) = N/R^3$ , donde  $N$  es el número total de partículas del universo y  $R$  es su radio estimado.

Wheeler y Feynman reformularon el esquema precedente de acción a distancia, en términos de lo que ellos denominaron su "Teoría del Medio Absorbente". Desde semejante perspectiva, el campo que experimenta una carga debido a su acción a distancia sobre las otras cargas del universo, las cuales a su vez reaccionarán sobre la carga original, se corresponde con la expresión:

$$\bar{R}_e = \frac{2e^2}{3} \frac{d(\ddot{x})}{dt}. \quad (15)$$

La clave del argumento reside en que en vez de tomar la fuerza descrita en (15) sobre la carga  $e$ , si consideramos la respuesta en un punto arbitrario de su entorno (cuya magnitud se halla en la escala de Compton), como mostraron Feynman y Wheeler [9, 10], el campo existente coincidirá con el campo de Dirac dado en (4) y (5).

La fuerza neta ejercida por la carga vendrá dada entonces por:

la cual se identifica fácilmente con la interacción retardada aceptable en términos causales. El campo físicamente admisible, pues, consistiría en la combinación de un campo temporalmente simétrico, que implica una carga sin emisión de radiaciones, junto con el campo de Dirac, dado por el segundo término de (16), que representa la respuesta del resto de cargas. Merece destacarse que en esta formulación se ha recurrido a un campo cronológicamente simétrico –el primer término de (16)– para recuperar el campo retardado con la orientación correcta en el tiempo.

Feynman y Wheeler subrayaron que el universo ha de ser un absorbente perfecto, porque sólo así se explicaría que no detectásemos las ondas avanzadas en el tiempo. Si cualquier carga acelerada emitiera ondas de ambos tipos electromagnéticas, retardadas y avanzadas, no advertimos la presencia de ondas avanzadas porque éstas se cancelan a causa de las ondas avanzadas y retardadas emitidas por el resto del universo. Un universo que no se comportase como un absorbente perfecto, sí permitiría manifestarse las ondas electromagnéticas avanzadas, contra toda evidencia empírica.

En este escenario de acción a distancia cada carga en el universo debería reaccionar instantáneamente en respuesta a la influencia de la carga original (Fig. 3). Ha de reiterarse que en este planteamiento no hay masa electromagnética ni frenado por radiación; se obtiene al final el campo retardado físicamente significativo, pero en el contexto de una acción a distancia instantánea.



**FIGURA 3.** Cada carga emisora de ondas electromagnéticas interactúa instantáneamente con el resto de cargas del universo, en el modelo de Feynman-Wheeler.

En todo caso, parece claro que las consideraciones precedentes alcanzan los límites de la física clásica en el marco de la escala de Compton. Dos aspectos merecen ser enfatizados en la formulación de Feynman-Wheeler, antes de abordar su vertiente cuántica. Uno de ellos es la acción del resto del universo sobre una carga dada, y el otro atañe a los intervalos espacio-temporales mínimos, cuyo orden de magnitud es el de la escala de Planck. Ese intervalo espacio-temporal mínimo elimina en primer lugar los efectos del

campo avanzado, que se dan dentro del tiempo de Compton, y en segundo lugar la auto-energía del electrón puntual desaparece al intervenir la distancia de Compton. Con ello se evita la necesidad de recurrir a las técnicas de renormalización, lo que no es un logro menor.

### III. TRATAMIENTO CUÁNTICO

La escala de Compton pertenece en realidad al mundo cuántico, en cuyo dominio encontramos fenómenos como el conocido *zitterbewegung* y la ruptura de la causalidad física habitual [11]. Así fue como Dirac advirtió dos dificultades en relación con su célebre ecuación cuántica para el electrón. Una de ellas surge porque la velocidad del electrón cuántico-relativista resulta ser la velocidad de la luz. Esto supondría que, en términos inerciales, el electrón debería comportarse como si su masa fuese infinita. El segundo obstáculo, no inferior al primero, se hacía patente por el hecho de que las coordenadas de posición adquirían valores complejos o no hermíticos, lo que carece de significado físico.

Dirac trató de salvar estas inconveniencias insistiendo en que dentro de la teoría cuántica no podemos descender a intervalos espacio-temporales arbitrariamente pequeños. De hacerlo así, las desigualdades de Heisenberg implicarían momentos lineales y energías arbitrariamente grandes. En consecuencia, las mediciones cuánticas serían en realidad promedios sobre intervalos del orden de la escala de Compton. Obrando de este modo se recupera el sentido físico de la situación, incluso en contextos tan exóticos como la geometría no conmutativa o el espacio tiempo difuso (*fuzzy*) no diferenciable [12].

Steven Weinberg también se percató de las espinosas cuestiones involucradas en la escala de Compton. Partiendo del cono de luz típico de la relatividad especial y con respecto al problema de la inversión del orden temporal de los acontecimientos, Weinberg señaló que aun cuando la relatividad del orden temporal no plantea problemas en la física clásica, sí que desempeña un profundo papel en las teorías cuánticas.

Se refería en concreto a la imposibilidad de precisar la velocidad de una partícula cuando se ha especificado su posición  $x_1$  en un instante  $t_1$ . Por tanto, hay una cierta probabilidad de que la partícula se desplace de  $x_1$  a  $x_2$ , incluso aunque  $x_1 - x_2$  sea aun intervalo de tipo espacial, es decir  $|x_1 - x_2| > |ct_1 - ct_2|$ . Dicho de otro modo, la probabilidad de que una partícula de masa  $m$  alcance el punto  $x_2$  desde  $x_1$  resulta no despreciable siempre que

$$0 \leq (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq \hbar^2/m^2. \quad (17)$$

Lo cierto es que tales intervalos espacio-temporales son diminutos incluso para las partículas elementales. Por ejemplo, si  $m$  es la masa de un protón, entonces  $\hbar/m = 2 \times 10^{-16}$  m, o en unidades de tiempo,  $6 \times 10^{-25}$  s, dado que un segundo en unidades de distancia es  $3 \times 10^8$  m.

Sea como fuere, nos vemos confrontados con una paradoja. Si para un observador una partícula es emitida en  $x_1$  y absorbida en  $x_2$ , tal que  $0 < (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \leq \hbar^2/m^2$ , entonces un segundo observador puede ver la partícula absorbida en  $x_2$  en  $t_2$  antes de ser emitida en  $x_1$  en  $t_1$ . Weinberg comentó sobre ello [13]:

“Sólo hay una escapatoria conocida para esta paradoja. El segundo observador debe ver la partícula emitida en  $x_2$  y absorbida en  $x_1$ . Pero en general, la partícula que entonces ve el segundo observador será necesariamente distinta de la que ve el primer observador.”

También existe otra interpretación de (17) aunque no menos controvertida, y consiste en considerar el cono de luz de la relatividad especial como si estuviese distorsionado a causa de ciertos efectos cuánticos. Supongamos, como hacen algunos modelos teóricos [14, 15, 16], que el fotón tiene una masa no nula igual a  $10^{-68}$  kg, lo que conduciría a una longitud de Compton de  $10^{30}$  m, comparable con el radio del universo. Además, imaginemos que un observador ve que un fotón emitido por una partícula  $A$  llega a una partícula  $B$ , mientras otro observador distinto ve exactamente lo contrario: el fotón deja  $B$  y retrocede en el tiempo hasta  $A$ , como en la interpretación de Weinberg. En este caso hemos de considerar ambos potenciales, avanzado y retardado, para describir por completo la situación. Esto es lo que en la teoría cuántica de campos se toma como un intercambio de fotones virtuales, obedeciendo (17).

Las soluciones avanzadas y retardadas de la ecuación de onda quedan determinadas por los potenciales avanzados y retardados, los cuales adquieren en la notación usual la bien conocida expresión, cuya parte retardada corresponde al potencial de Lienard-Wiechert:

$$A_{ret(av)}^\mu = \frac{1}{c} \int \frac{j^\mu(x')}{|r-r'|} \delta(|r-r'| \mp c(t-t')) d^4x'. \quad (18)$$

En la igualdad (18) se contienen las dos descripciones equivalentes antes mencionadas: un fotón deja la carga  $A$  y llega a la carga  $B$ , o alternativamente el fotón deja  $B$  y llega a  $A$ . Esta expresión para los potenciales retardados y avanzados conduce de inmediato a los correspondientes campos (5) y (16) de la formulación Feynman-Wheeler, excepto por el hecho de que ahora aparece un argumento a favor de ese planteamiento en términos de la masa del fotón, sin necesidad de suponer un absorbente perfecto más bien *ad hoc*.

En suma, la teoría de Wheeler y Feynman sobre un hipotético absorbente perfecto requiere que cada carga eléctrica interactúe instantáneamente con el resto de cargas del universo, de modo que el universo en su conjunto se comporte como un absorbente perfecto de todos los campos electromagnéticos que se propagan en su interior. Bajo esta condición, la respuesta neta de todas las partículas cargadas a lo largo del cono de luz futuro de una carga dada, se expresa mediante una integral convergente. Sin embargo, existe una alternativa teórica consistente en admitir una

pequeña masa para el fotón, dentro de los límites experimentales, en lugar de recurrir a potenciales avanzados de poca coherencia física.

De ello se deduce que cuando hablamos de dos partículas cargadas en reposo relativo en el instante  $t$ , estamos asignando el mismo valor de  $t$  a  $A$  y a  $B$ , con independencia de la separación entre ellas. Esto es compatible con las prescripciones de la relatividad especial, hasta el punto de que incluso nos permite conjeturar sobre ondas avanzadas que abandonan  $B$  en el instante  $t + \Delta t$  y viajan “retrocediendo” en el tiempo para alcanzar  $A$  en el instante  $t$ . Semejante apreciación ya no es necesaria si empleamos consideraciones cuánticas relacionadas con la escala de Compton. En ese caso se puede describir el proceso como una onda ordinaria retardada que deja  $B$  en  $t - \Delta t$  y llega a  $A$  en  $t$ .

De todo lo anterior se desprende que aún resulta posible rescatar la teoría relativista clásica del electrón, en ciertos aspectos, a costa de introducir campos avanzados a los cuales siempre se ha atribuido un carácter no físico.

Otra perspectiva sugiere recuperar alguna forma de acción a distancia, aunque ello aparentemente infringiría la causalidad relativista. Ahora bien, tanto en la teoría de Dirac como en la de Feynman-Wheeler, ya no estamos tratando con electrones puntuales, sino con un entorno finito (en la escala de Compton) alrededor de lo que en la imagen previa sería una partícula puntual. Dentro de ese entorno la causalidad relativista ya no conserva necesariamente una validez total, según la condición establecida por (17).

Es por ello que la discusión precedente puede replantearse del siguiente modo. El límite de aplicabilidad o –si se quiere– el límite de validez del modelo del electrón como partícula puntual, así como el de la propia relatividad especial, se daría en la escala de Compton. El interior de una región espacio-temporal en la escala de Compton no estaría ya sujeto a las prescripciones relativistas, de manera que dentro de dicha región podrían darse acciones a distancia instantáneas sin perjuicio causal para el resto del universo.

Pensándolo bien, la noción de una carga puntual clásica no parece tener mucho sentido. Sabemos que la física clásica pierde su validez en escalas de distancia comparables o inferiores a la longitud de onda de Compton. Por eso mismo, las leyes de la física clásica no pueden ser correctas cuando se aplican a partículas puntuales, algo que nadie discutiría seriamente.

#### **IV. IMPLICACIONES TERMODINÁMICAS**

Aunque pueda parecer un tanto digresivo, debemos detenernos brevemente sobre las repercusiones termodinámicas de cuanto se ha discutido hasta aquí acerca de las ondas avanzadas y retardadas. Y ha de ser así porque, junto con la expansión cosmológica y el aumento de la entropía, la inexistencia de ondas electromagnéticas avanzadas ha venido considerándose otro de los rasgos característicos de la llamada “flecha del tiempo”, es decir,

esa intrigante asimetría fundamental que nos permite distinguir entre pasado y futuro.

Wheeler y Feynman realizaron sus cálculos en un universo estático, que por ello carecía de flecha cosmológica para el tiempo. Invertiendo la coordenada temporal se intercambiaban los papeles de las ondas avanzadas y retardadas, sin que globalmente hubiese una diferencia física significativa. La razón estriba en la simetría esencial del modelo de acción a distancia, como en el modelo de universo estático, frente a cambios de signo en la coordenada  $t$ . Para obtener una flecha del tiempo nítida, hemos de incluir entre estas ideas un criterio adicional, como puede ser la ley usual de aumento de la entropía.

Habitualmente la segunda ley de la termodinámica se interpreta en términos de la transición desde el orden al desorden, así que apliquémosla al caso de una carga emisora  $A$  que ejerce su influencia sobre otras cargas absorbentes  $B$ ,  $C$ ,... Cuando actúan las ondas retardadas, las cargas absorbentes se hallan inicialmente en reposo y comienzan a moverse después de recibir las ondas emitidas por  $A$ . Ello equivale a la transición desde un estado ordenado a otro más desordenado. Por el contrario, las ondas avanzadas provocarían el movimiento inicial de las cargas absorbentes y el reposo después. En ese caso se tendría una transición desde el desorden al orden, en clara contradicción con la ley de la entropía.

La aplicación del criterio entrópico al modelo de Feynman-Wheeler nos permite distinguir entre el pasado y el futuro, pero no explica por qué no hallamos rastro de las ondas avanzadas. Examinando lo que ocurre cuando pasamos a un universo en expansión, la respuesta depende de las condiciones iniciales y finales del modelo cosmológico escogido. Tomando como referencia una carga cualquiera  $A$ , toda la materia que se halle en el interior de su cono de luz futuro podrá interactuar con la radiación retardada emitida por  $A$ ; ese será el “absorbente futuro”. Análogamente, la materia abarcada por el cono de luz pasado de  $A$  recibe el nombre de “absorbente pasado”, ya que es susceptible de interactuar con las ondas avanzadas que  $A$  emita.

Pues bien, para que la flecha electromagnética del tiempo coincida con las otras dos –cosmológica y entrópica– el absorbente futuro ha de ser perfecto y el absorbente pasado imperfecto [17]. De admitirse lo contrario, serán las ondas retardadas las que acaban cancelándose; y si ambos absorbentes son perfectos (como sucede en el universo estático de Feynman-Wheeler) aparece una ambigüedad esencial que solo puede disiparse recurriendo a un criterio distinto del puramente electromagnético.

No está claro si el universo físico real satisface este requisito. En principio, parece que no lo cumple con respecto al absorbente pasado. Conforme retrocedemos hacia el nacimiento del cosmos, la radiación se desplaza hacia el azul aumentando su frecuencia y su energía. Pero a la vez la densidad de materia también crece sin límites – hasta considerarse infinita en la singularidad inicial– lo que sugiere que el absorbente pasado sería perfectamente capaz

de absorber toda la radiación que llegase a él desde el futuro. Por otro lado, el absorbente futuro ve disminuida su densidad a causa de la expansión cosmológica, pero correlativamente la radiación que recibe va desplazándose cada vez más hacia el rojo, disminuyendo su frecuencia y debilitando su energía.

Desde el punto de vista de la estructura atómica, para que el absorbente futuro resulte efectivo los electrones de sus átomos han de ascender a orbitales superiores –más energéticos– al absorber la radiación que llega a ellos emitida desde el pasado. Ello implica que la mayoría de tales electrones han de hallarse en su estado fundamental, o cercanos a él; en otras palabras, ha de haber en el futuro un medio cósmico frío. Por “frío” se entiende en este contexto estados electrónicos de baja energía en el interior de los átomos, y pequeños movimientos atómicos aleatorios (baja temperatura en sentido macroscópico). Obviamente, es más fácil conseguir una situación así en un modelo cosmológico en expansión que en cualquier otro caso, pues la dispersión de la materia produce un enfriamiento que permite al universo actuar a modo de sumidero y recibir las ondas electromagnéticas de tipo retardado.

## V. MODELOS EN COMPETENCIA

En la física clásica, el modelo de electrón puntual desemboca inevitablemente en una auto-energía infinita debida al término de masa electromagnética,  $e^2/R$ , donde  $R$  es el radio de la partícula que se hace tender a cero. Pero si decidimos que  $R$  no se anule, es decir, optamos por el modelo de un electrón extenso, entonces hemos nos vemos obligados a introducir peculiares fuerzas no electromagnéticas –como las tensiones de Poincaré– con el fin de garantizar la estabilidad de este objeto extenso pese a la repulsión eléctrica interna (aunque con ello se eviten las pérdidas por radiación y las auto-fuerzas requeridas por las leyes de conservación).

Dirac consiguió eludir estos problemas incorporando en su ecuación fenomenológica tanto potenciales retardados como otros avanzados, de modo que la masa electromagnética infinita fuese absorbida en una nueva masa renormalizada, conservando la noción de partícula puntual. Ese fue el preludio de las posteriores técnicas de renormalización, y en él residía el contenido físico de la ecuación de Lorentz-Dirac.

El precio de este logro fue elevado, y consistió en la mencionada introducción de potenciales avanzados o, de forma equivalente, en el recurso a un tiempo no local. Sin embargo, esta no localidad tiene lugar dentro de la escala de Compton, preservando así la validez de la relatividad especial para cualquier otro propósito práctico. Había además otras cuestiones insatisfactorias en este modelo, como la derivada no newtoniana de la aceleración, o las soluciones auto-aceleradas, si bien todas ellas quedaban confinadas a la escala de Compton, haciéndose así menos molestas.

La formulación de Feynman-Wheeler esquivaba la masa infinita y las auto-repulsiones de un electrón extenso, con la consecuencia de que la masa deja de ser de carácter electromagnético. Es más, el resultado final indica que tan solo queda el potencial retardado físicamente aceptable, pero para ello ha de invocarse una extraña interacción instantánea de cada partícula cargada con el resto de cargas del universo.

No obstante, la interacción con las cargas en el entorno más cercano de una carga dada, recupera en el modelo Feynman-Wheeler la resta de términos antisimétricos del modelo de Dirac con su típica no localidad circunscrita a la escala de Compton. Hay así una cierta reconciliación entre los planteamientos de Dirac y de Feynman-Wheeler gracias a la introducción de la escala de Compton, que actúa como amortiguador de los fenómenos no físicos generados por cada modelo.

En efecto, más allá del orden de magnitud de esta escala la teoría recobra su índole plenamente causal. El potencial avanzado se cancela ya que aparece como la suma de dos términos que son respectivamente una resta simétrica y otra antisimétrica.

La conclusión de todo ello era que en un contexto clásico un electrón enteramente electromagnético resultaba imposible sin introducir conceptos adicionales de carácter no físico, como la acción a distancia. Por tanto, se admitía sin reservas que el electrón, en tanto que objeto físico, pertenecía por completo al marco de la teoría cuántica de campos.

La teoría cuántico-relativista de Dirac, por su parte, presentaba de por sí una imagen consistente del electrón, pues bastaba admitir que los resultados tendrían sentido físico si se interpretaban como promedios sobre la escala de Compton, (eliminando el fenómeno del *zitterbewegung*, por ejemplo). Se supone la pérdida de validez de la relatividad especial por debajo de la escala de Compton, donde entonces resultan posibles fenómenos no locales, inversiones en el tiempo y la existencia de potenciales avanzados, en el sentido de la ecuación de Lorentz-Dirac.

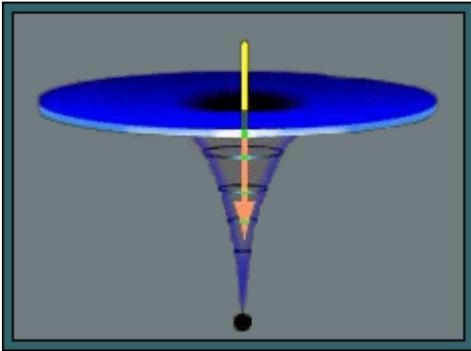
Lo cierto es que la teoría cuántica de campos tampoco resuelve el problema del todo, ya que ha de recurrir a las controvertidas técnicas de renormalización [18]. Todo ello quizás indique la necesidad de renunciar en el futuro a explicaciones físicas que involucren el concepto de punto espacio-temporal –como sucede en las geometrías no conmutativas– del mismo modo que el progreso de la microfísica condujo a abandonar la noción de partícula puntual.

## VI. SINGULARIDADES GRAVITATORIAS

Si las singularidades marcan el fin de la validez de una teoría, sería lógico buscar una alternativa que nos librase de ellas en el caso gravitatorio, bien conocido con el nombre de “agujeros negros”. Y casi con toda seguridad, en el menosprecio hacia los efectos cuánticos podría residir la clave de la solución.

La relatividad general predice, de hecho, el colapso catastrófico de una masa en un agujero negro suponiendo que la presión gravitatoria sobrepasará cualquier otro fenómeno interno que se oponga a la contracción infinita [19]. Esta premisa, añadida a las ecuaciones relativistas, es la responsable de que tantas estrellas fenecidas se vean teóricamente condenadas a acabar como agujeros negros (Fig. 4). Se admite explícitamente la incapacidad de todo efecto cuántico para impedir que la creciente gravitación termine por condensar en una singularidad los cuerpos de masa suficientemente grande.

Luego no es del todo cierto que la existencia de los agujeros negros se siga únicamente de la relatividad general, si no añadimos el supuesto de la completa ausencia de presión interior, a la cual convendría denominar *hipótesis de compresibilidad infinita* (HCI).



**FIGURA 4.** Representación gráfica de una singularidad en el interior de un agujero negro

Por eso, podría darse el caso de que algún proceso interno de origen cuántico compensase la contracción gravitatoria, evitando así la molesta singularidad final. Con este propósito recurriremos al teorema de indeterminación de Heisenberg. Aquí  $\Delta x$  se interpreta como la distancia promedio entre partículas en el estado de máximo empaquetamiento de las mismas, y  $\Delta p$  su intervalo de valores para el impulso.

Como el colapso gravitatorio disminuye el volumen de la estrella, reduce correlativamente el intervalo  $\Delta x$ . Ello incrementa también el impulso  $\Delta p$ , y con él la energía según la expresión  $E \sim c\Delta p$ . Los efectos cuánticos sobre el colapso gravitacional conducen a un calentamiento de la estrella en contracción que frena la disminución de volumen, tal que  $\Delta x = \hbar/\Delta p \sim \hbar c/E$ , y así  $\Delta x > 0$ . Por consiguiente, si el volumen se relaciona con el número  $N$  de partículas en la estrella como  $V \sim N\Delta x^3 \gg 0$ , y la singularidad no llega a formarse jamás.

Así, gracias a la indeterminación cuántica el volumen de una estrella que colapsa gravitacionalmente no se anulará jamás. Cuando la contracción gravitatoria supera la presión cuántica de degeneración neutrónica (en la fase de estrella de neutrones, por ejemplo), la energía ganada se manifiesta de modo explosivo mediante un estallido de tipo supernova.

#### Divergencias y singularidades en la escala de Compton

Dado que los efectos cuánticos del derrumbamiento estelar aumentan la energía promedio de las partículas, éstas tienden a abandonar el volumen que las contiene y la estrella explosiona.

Si somos objetivos, no hay razones para pensar que en el colapso de una estrella la contracción gravitatoria venza la presión cuántica originada por el principio de exclusión de Pauli (que prohíbe la existencia de dos fermiones en el mismo estado cuántico). Así pues, las zonas interiores de la estrella pueden verse incapacitadas para superar la densidad de la materia ultrarrelativista degenerada de neutrones. Y ya que esta densidad sería la máxima, las estrellas de neutrones –o algo semejante al estado de la materia que ahora asociamos con las estrellas de neutrones– resultarían incompresibles independientemente de su masa de partida [20].

De acuerdo con la teoría cuántica, una partícula no puede localizarse con mayor precisión que la longitud de onda Compton,  $\lambda_c$ , dada por  $\lambda_c = h/mc$ . Una región cuyo volumen sea  $\sim (\lambda_c)^3$  no puede contener más de una partícula cuántica o *cuantón*, con lo cual la conclusión es clara: los cuantones no pueden ser encerrados en un volumen infinitesimal (menos aún reducirse a cero, como impondría la singularidad). De hecho, no sería posible constreñirlos en un volumen inferior a  $\sim (\lambda_c)^3$  independientemente de la presión externa, gravitatoria o de otro tipo.

Siendo esto así, para  $N$  cuantones ese volumen sería  $\sim N(\lambda_c)^3$ . Existiría, pues, una densidad máxima para la materia condensada que, en el caso de neutrones de masa  $m_n$ , es:

$$\rho_{max} \approx m_n / (\lambda_c)^3 = (m_n)^4 c^3 / h^3 \approx 10^{18} \text{ kg/m}^3. \quad (19)$$

Desde esta perspectiva cuántica, la capacidad de compresión gravitacional queda limitada por la longitud de onda de las partículas, y el colapso gravitatorio se detiene en la etapa de estrella neutrónica. Si la densidad no alcanza jamás un valor infinito, el tensor de energía  $T_{\mu\nu}$  en las ecuaciones relativistas adopta la forma

$$T_{\mu\nu} \leq \rho_{max} c^2 \sim m_n^4 c^5 / h^3, \quad (20)$$

lo que a su vez implica,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \leq 8\pi (m_n)^4 \frac{Gc}{h^3}, \quad (21)$$

y ya que el impulso es  $p \sim E/c$ , las anteriores ecuaciones son aproximadamente válidas en cualquier caso.

Puesto que la constante de Planck nunca se anula, deducimos de inmediato que  $T_{\mu\nu}$  no puede hacerse infinito. Obtenemos de nuevo la singularidad típica del caso sin efectos cuánticos, cuando tomamos el límite en el que la constante de Planck se hace cero ( $h \rightarrow 0$ ), ya que los cocientes en los que  $h$  aparece como divisor, tienden a infinito.

La corrección relativista para las longitudes de onda en un espacio-tiempo curvo cuya métrica sea  $g_{\mu\nu}$ , vendría dada por:

$$\lambda_{RG} = \lambda (-g)^{1/2}, \quad (22)$$

(donde  $g$  es el determinante de la métrica pseudo-riemanniana, y  $0 < -g < 1$ ), en lugar de  $\lambda$ . Como  $g_{uv}$  siempre permanece definida en el interior de una estrella de neutrones, jamás se llegaría realmente al estado de singularidad. En el caso general, la densidad máxima es

$$\rho_{max} \approx \frac{m_n^4 c^3}{h^3 \sqrt{-g}}. \quad (23)$$

En síntesis, cuando una estrella de masa superior a la del Sol alcanza el estado de estrella de neutrones por colapso gravitatorio y continúa comprimiéndose, debería intervenir una serie de efectos cuánticos habitualmente desdenados en los estudios sobre agujeros negros. De acuerdo con la indeterminación de Heisenberg, el impulso  $p \sim \hbar/\Delta x$  y la energía  $E \sim \hbar c/\Delta x$  (con  $\hbar = h/2\pi$ ) de las partículas aumentan con la disminución del volumen, el cual puede descender hasta un valor  $V \sim N\lambda^3$ .

Las partículas de alta energía bajo una presión tan elevada colisionan entre sí produciendo nuevas partículas. Como ningún cuantón puede localizarse con mayor precisión que su longitud de onda  $\lambda_c$ , se ven forzadas a abandonar la estrella en colapso. Durante la contracción gravitatoria las dimensiones de la estrella de neutrones decrecería, y en el modelo típico se supone que la densidad aumentaría sin límites.

Pero en un tratamiento cuántico aproximado –donde se admite que la presión gravitacional no sobrepasa cualquier efecto contrario– se deduce que la densidad alcanza un máximo imposible de superar a causa de la indeterminación cuántica y de la exclusión de Pauli [21].

La disminución de volumen a densidad constante sólo puede lograrse reduciendo la masa, es decir, las partículas (fotones, neutrones, etc.) son expulsadas de la estrella en contracción. Dado que la densidad de las capas exteriores es inferior a la de las zonas centrales, la reducción del volumen estelar se compensa con el desprendimiento explosivo del caparazón externo.

Estas emisiones de materia y radiación prosiguen hasta que la presión gravitatoria se equilibra con la presión interna debida a la materia neutrónica degenerada de Fermi. La energía gravitacional se emplea entonces en provocar un estallido de tipo supernova con la formación de una estrella de neutrones, sin aparición de singularidad ni agujeros negros. Cuando la masa de la estrella en contracción alcanza el valor crítico de la estrella de neutrones, la presión gravitatoria externa (que disminuye por la reducción de la masa estelar) se iguala con la presión de degeneración de los neutrones y el colapso gravitacional finaliza.

La opinión más extendida es que la relatividad general predice las singularidades espacio-temporales por su indiferencia ante las propiedades cuánticas de la materia. Es muy posible que futuras investigaciones abran camino hacia respuestas bien alejadas de las que ahora imaginamos, pero es más probable todavía que tales respuestas –como sucedió

con la estabilidad de la materia, clásicamente inexplicable a comienzos del siglo XX– vengan de la mano de la teoría cuántica.

De hecho, hay indicios de que los efectos cuánticos en la teoría semiclásica de la gravedad permiten evitar que las estrellas en colapso gravitatorio formen agujeros negros si el colapso es suficientemente lento [22]. El resultado es un nuevo objeto astrofísico al que se ha denominado “estrella negra” (formada por la energía gravitatoria del vacío cuántico en un espacio-tiempo curvo), que para un observador externo es indistinguible de un agujero negro típico. No obstante, si el colapso es muy rápido o si la masa del objeto que colapsa supera una cierta cantidad –algunos millones de masas solares– el resultado es un agujero negro convencional.

## VII. CONCLUSIONES

Hemos visto que la teoría relativista clásica (no cuántica) del electrón se enfrenta a dificultades insalvables con respecto a la descripción de una partícula considerada elemental con carga eléctrica, como el electrón. Podemos obtener un modelo relativista especial del electrón a expensas de introducir fuerzas cohesivas y representarlo como un objeto extenso (no puntual). Con ello se pierde el carácter puramente electromagnético de esta partícula, lo que a su vez suscita dudas sobre su carácter elemental.

Por otra parte, un electrón puntual carece de sentido, puesto que auto-energía diverge, posiblemente debido a que las partículas puntuales son incompatibles con la propia teoría cuántica en cuyo marco conceptual se desean insertar. Eso hace que se deban examinar con cuidado los términos dependientes de la estructura en ecuaciones como (2).

La escala de Compton surge a continuación como una idea capaz de amortiguar las divergencias surgidas del carácter puntual del electrón. Además, constituye por sí misma un rango por debajo del cual puede suspenderse la validez de las reglas de la relatividad especial sin que ello afecte al resto del universo. De esa forma cabe introducir fenómenos y magnitudes no físicas, como la acción a distancia o los potenciales avanzados, formalmente necesarios para la coherencia interna de ciertas teorías pero de muy dudosa legitimidad física.

El mismo papel amortiguador de divergencias representa la escala de Compton cuando se aplica, en una teoría semiclásica, al problema de las singularidades en el interior de los agujeros negros. Sin llegar a magnitudes como el tiempo o la distancia de Planck, el uso de distancias mínimas del orden de la longitud de onda de Compton establecen una barrera contra las divergencias infinitas asociadas con las singularidades en contracción gravitatorias desbocadas. Tales singularidades aparecen fruto del carácter meramente clásico –no cuántico –a de nuestra teoría gravitatoria, más exitosa actualmente, la relatividad general. Es de suponer que el futuro desarrollo de la una teoría cuántica de la gravedad nos aproximará a una solución

verosímilmente a través de reinterpretaciones de nuestra noción de puntos espacio-temporales.

## REFERENCIAS

- [1] Jimenez, J. L. and Campos, I., *Models of the classical electron after a century*, Found. of Phys. Lett. **12**, 127-146 (1999).
- [2] Rohrlich, F., *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1965).
- [3] McDonald, K.T., *Limits on the Applicability of Classical Electromagnetic Fields as Inferred from the Radiation Reaction*, <[arXiv:physics/0003062v1](https://arxiv.org/abs/physics/0003062v1)> [physics.class-ph], Consultado el 01 de septiembre de 2012.
- [4] Stoeckel, H., *Full Poincaré invariant equation of motion for an extended charged ... particle in an electromagnetic field*, <[arXiv.org/pdf/math-ph/0702015](https://arxiv.org/pdf/math-ph/0702015)>, Consultado el 01 de septiembre de 2012.
- [5] Barut, A.O., *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Dover Publications, New York, 1964).
- [6] Hoyle, F. and Narlikar, J.V., *Lectures on Cosmology and Action at a Distance Electrodynamics* (World Scientific, Singapore, 1996).
- [7] Hoyle, F. and Narlikar, J.V., *Action at a Distance in Physics and Cosmology* (W.H. Freeman, New York, 1974).
- [8] Sidharth, B.G., *The Feynman-Wheeler Perfect Absorber Theory in a New Light*, Found. of Phys. **40**, 1134-1140 (2010).
- [9] Wheeler, J. A. and Feynman, R. P., *Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation*, Rev. Mod. Phys. **17**, 157-181 (1945)

*Divergencias y singularidades en la escala de Compton*

- [10] Sidharth, B.G. *Instantaneous Action at a Distance in Modern Physics: "Pro and Contra"* (Nova Science Publishing, New York, 1999).
- [11] Dirac, P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics* (Clarendon Press, Oxford, 1958)
- [12] Sidharth, B.G., *The Universe of Fluctuations* (Springer, Netherlands, 2005).
- [13] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York, 1972), p.61 y ss.
- [14] Sidharth, B.G., *A note on massive photons*, Found. Phys. Lett. **19**, 499-500 (2006).
- [15] Mersini-Houghton, L., *Do we have evidence for new physics in the sky?* Mod. Phys. Lett. A. **21**, 1-21 (2006).
- [16] Rohrlich, F., *The dynamics of a charged sphere and the electron*, Am. J. Phys. **65**, 1051-1056 (1997).
- [17] Hoyle, F. and Narlikar, J.V., *Action at a Distance in Physics and Cosmology* (W.H. Freeman, San Francisco, 1974)
- [18] Alemañ Berenguer, R.A., *El significado filosófico de la teoría cuántica de campos*, Contrastes - Revista Internacional de Filosofía **16**, 27-47 (2011).
- [19] Frolov, V. P., and Novikov, I. D., *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Springer, New York, 1998).
- [20] Kouveliotou, Ch., Ventura, J. E, and Van Den Heuvel, E. P. (eds.), *The Neutron Star-Black Hole Connection* (Springer, New York, 2002).
- [21] Moss, I.G., *Quantum Theory, Black Holes and Inflation* (John Wiley & Sons, New York, 1996).
- [22] Barceló, C., Liberati, S., Sonogo, S. and Visser, M., *Fate of gravitational collapse in semiclassical gravity*, Physical Review D **77**, 044032-044046 (2008).