Solución de las ecuaciones de onda electromagnética y Helmholtz con espacio-tiempo discreto

J. C. Campos García
Departamento de Física Matemáticas e Ingeniería, Unidad Sur (Campus Cajeme), Universidad de Sonora, Boulevard Bordo Nuevo s/n, Antiguo Ejido Providencia, Cd. Obregón, Son. México.

E-mail: julio.campos@correo.fisica.uson.mx

(Recibido el 20 de Junio de 2012; aceptado el 15 de Octubre de 2012)

Resumen
En el presente trabajo se lleva a cabo una inspección de las ecuaciones de onda electromagnética y de Helmholtz, a través de un espacio-tiempo discreto. Ambas ecuaciones son resueltas en una dimensión, adoptando dicho modelo. Tanto las soluciones de la ecuación de onda electromagnética como las de la ecuación de Helmholtz quedan expresadas en términos de las variables discretas de dicho modelo. En el límite cuando la longitud y el tiempo fundamental del modelo tienden a cero, se recuperan las soluciones de ambas ecuaciones para el caso del espacio-tiempo continuo.

Palabras clave: Mecánica Cuántica, Soluciones de Ecuaciones de Onda: Estados Ligados, Métodos de diferencia finita.

Abstract
This work is carried out an inspection of the electromagnetic wave equations and Helmholtz through a discrete space-time. Both equations are solved one dimension. Therefore the solutions of the electromagnetic wave equation as well as that of Helmholtz equation are expressed in terms of discrete variables of the model. In the limit when the fundamental length and time of the model tend to zero, we recover the solutions of both equations for the case of a continuum space-time.

Keywords: Quantum Mechanics, Solutions of Wave Equations: Bound States, Finite Difference Methods.

PACS: 03.65.-w, 03.65.Ge, 02.70.Bf. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Recientemente, a través de la literatura (ver [1]) se muestra un realzado interés en investigar sobre la posibilidad de existencia de las magnitudes fundamentales de espacio-tiempo discreto. La posible existencia de un espacio-tiempo de carácter cuántico permanece latente en las diversas ramas de la física, por ejemplo, una cuyo interés ha crecido de manera significativa es lo relacionado con las investigaciones de una teoría sobre la gravedad cuántica. La investigación teórica sobre la gravedad cuántica ha generado muchos trabajos de investigación, por ejemplo [2, 3, 4, 5, 6, 7], los cuales investigan los contextos de cuantización con integral de trayectoria, teoría de cuerdas, entre otras aproximaciones. También, en [8] se resuelve la ecuación de onda de Schrödinger para el caso de una partícula libre, en el límite no relativista, usando un modelo de espacio-tiempo discreto. En ese trabajo se encuentran resultados muy interesantes, por ejemplo, que tanto la densidad de probabilidad como el flujo de probabilidad para el caso de un espacio-tiempo discreto son radicalmente diferentes con las correspondientes del estándar espacio-tiempo continuo, es decir, densidad y flujo de probabilidad poseen una dependencia del parámetro espacial y temporal, proporcionándole además un carácter de no uniformidad.

Otra ecuación de onda, la cual resultaría interesante investigar a través de un espacio-tiempo discreto, es la correspondiente al campo electromagnético y la ecuación de Helmholtz. En el presente trabajo, se resuelven las ecuaciones de onda electromagnética y de Helmholtz en una dimensión, para el caso de un modelo de espacio-tiempo discreto. En la segunda sección, se muestra la solución de ambas ecuaciones para el caso estándar de un espacio-tiempo continuo, las cuales servirán para comparar con las soluciones en un espacio-tiempo discreto. En la tercera sección, se describe el modelo de espacio-tiempo usado. En la cuarta sección, aplicamos dicho modelo para resolver la ecuación de onda electromagnética unidimensional. En una subsección de la cuarta se analiza el caso límite, el cual, permite recuperar la solución para el caso de un espacio-tiempo continuo. En la quinta sección, volvemos aplicar este modelo pero ahora para resolver la ecuación de Helmholtz unidimensional. En una subsección de la quinta se analiza el caso límite, mediante el cual, se recupera la solución para el caso del espacio-tiempo continuo. Por último, en la sexta sección se escriben las conclusiones del trabajo.

II. ECUACIÓN DE ONDA ELECTRO-MAGNETICA Y DE HELMHOLTZ

En cualquier libro de electrodinámica clásica, (ver por ejemplo [9]) se describen las ecuaciones de Maxwell, de las cuales, es siempre posible establecer la ecuación de onda electromagnética. Nos concentraremos a continuación, en el caso unidimensional y describiremos la forma usual en que esta es resuelta en el caso de un espacio-tiempo continuo. Entonces, la ecuación de onda electromagnética unidimensional se puede escribir como

$$\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial x^2}-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\Phi(x,t)}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

La función $\Phi(x, t)$, representa a el campo eléctrico o el campo magnético unidimensional. Aplicando el método de separación de variables a la Ec. (1), con $\Phi=\varphi_1(x)\varphi_2(t)$, se separa la ecuación en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2\varphi_1(x)}{dx^2}+\alpha\varphi_1(x)=0, \tag{2}$$

y

$$\frac{d^2\varphi_2(t)}{dt^2}+\frac{n^2}{c^2}\alpha\varphi_2(t)=0. \tag{3}$$

donde α es la constante de separación y su valor depende de las condiciones físicas establecidas para una situación específica, $n=\sqrt{\mu\epsilon}$ es el índice de refracción y $c=(\mu_0\epsilon_0)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz. Las soluciones generales de las Ecs. (2) y (3) se pueden escribir como

$$\varphi_1(x)=A\cos(\sqrt{\alpha}x)+B\sin(\sqrt{\alpha}x), \tag{4}$$

y

$$\varphi_2(t)=C\cos\left(\frac{n}{c}\sqrt{\alpha}t\right)+D\sin\left(\frac{n}{c}\sqrt{\alpha}t\right). \tag{5}$$

La solución general de (1) puede escribirse, también, como

$$\Phi=Ae^{i\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{n}{c}t\right)}+Be^{-i\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{n}{c}t\right)}. \tag{6}$$

En el vacio $n=1$, la solución general quedaría expresada como

$$\Phi=Ae^{i\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{1}{c}t\right)}+Be^{-i\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{1}{c}t\right)}. \tag{7}$$

De manera similar, es conocido que si describimos fenómenos periódicos en el tiempo, con frecuencia $\nu=\omega/2\pi$, entonces, la ecuación de onda se reduce a la ecuación de Helmholtz

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}+\frac{n^2\omega^2}{c^2}\varphi(x)=0, \tag{8}$$

donde las soluciones son del tipo

$$\varphi(x)=\varphi_0e^{-ikx}, \tag{9}$$

con

$$k^2=\frac{n^2\omega^2}{c^2}k_0^2n^2=k_0^2\epsilon\mu, \tag{10}$$

donde k_0 es el número de onda en el espacio libre.

Enseguida, se realizará la descripción del modelo de espacio-tiempo discreto, el cual, posteriormente será usado para resolver las Ecs. (2), (3) y (8) del presente trabajo.

III. MODELO DE ESPACIO-TIEMPO DISCRETO

Para resolver la ecuación de onda electromagnética y de Helmholtz en un espacio-tiempo discreto, es necesario primero, realizar la descripción de dicho modelo. Este modelo fue propuesto en [8], el cual, consiste en hacer discreta la línea real (por ejemplo, el dominio x) en la forma

$$R_\lambda=\{j_x\lambda | j_x\in Z\}, \tag{11}$$

donde λ representa a una longitud "fundamental" no especificada. Un ejemplo conocido en la física de escalas muy pequeñas, es la longitud de Planck, la cual es definida como $\lambda_P=\sqrt{G\hbar/c^3}\cong 1.6\times10^{-35}m$. Por simplicidad, este modelo expresa al dominio del tiempo discretizado como $\tau=\lambda/c$, donde c es la velocidad de la luz. Por lo tanto, el dominio de tiempo discreto queda expresado como

$$R_\tau=\{j_t\tau | j_t\in Z\}. \tag{12}$$

Tanto j_x como j_t representan a enteros arbitrarios. Ahora, el límite continuo corresponde a $j_x\to\infty$ mientras que $j_x\lambda\to x$. En forma similar para j_t y $j_t\tau$. Enseguida, aplicaremos este simple modelo de espacio-tiempo discreto, para encontrar el tipo de soluciones que pertenecen a las Ecs. (2), (3) y (8).

IV. ECUACIÓN DE ONDA ELECTROMAG-NETICA EN UN ESPACIO-TIEMPO DISCRETO

Al aplicar el modelo, descrito en la sección anterior, a las Ecs. (2) y (3), obtenemos dos ecuaciones en diferencias

$$\frac{\Delta^2\varphi_1^d(j_x\lambda)}{\Delta^2(j_x\lambda)}+\alpha\varphi_1^d(j_x\lambda)=0, \tag{13}$$

y

$$\frac{\Delta^2\varphi_2^d(j_t\tau)}{\Delta^2(j_t\tau)}+\frac{n^2}{c^2}\alpha\varphi_2^d(j_t\tau)=0, \quad (14)$$

donde Δ es el operador diferencia, el cual, es definido comúnmente en cualquier libro de ecuaciones en diferencia, por ejemplo ver [10]. Entonces, de [10] se tiene

$$\Delta^2\varphi_1^d(j_x\lambda)=\varphi_1^d\big((j_x+2)\lambda\big)-2\varphi_1^d\big((j_x+1)\lambda\big)+\varphi_1^d, \quad (15)$$

y

$$\Delta^2\varphi_2^d(j_t\tau)=\varphi_2^d\big((j_t+2)\tau\big)-2\varphi_2^d\big((j_t+1)\tau\big)+\varphi_2^d. \quad (16)$$

Sustituyendo (15) y (16) en (13) y (14), obtenemos las siguientes relaciones de recurrencias

$$\varphi_1^d\big((j_x+2)\lambda\big)-2\varphi_1^d\big((j_x+1)\lambda\big)+(1+\alpha\lambda^2)\varphi_1^d=0, \quad (17)$$

y

$$\varphi_2^d\big((j_t+2)\tau\big)-2\varphi_2^d\big((j_t+1)\tau\big)+\left(1+\frac{n^2}{c^2}\alpha\tau^2\right)\varphi_2^d=0. \quad (18)$$

Las Ecs. (17) y (18) son dos ecuaciones en diferencia, homogéneas, de segundo orden y coeficientes constantes. Estas ecuaciones se resuelven, haciendo uso de los métodos estándar (ver por ejemplo [10]), obteniéndose las soluciones respectivas

$$\varphi_1^d(j_x\lambda)=A\big(1+i\lambda\sqrt{\alpha}\big)^{j_x}+B\big(1-i\lambda\sqrt{\alpha}\big)^{j_x}, \quad (19)$$

y

$$\varphi_2^d(j_t\tau)=C\left(1+i\frac{n}{c}\tau\sqrt{\alpha}\right)^{j_t}+D\left(1-i\frac{n}{c}\tau\sqrt{\alpha}\right)^{j_t}. \quad (20)$$

Como se puede observar, la solución de la ecuación de onda electromagnética unidimensional, para el caso de un espacio-tiempo discreto, también muestra un carácter oscilatorio.

Ahora, supongamos que la propagación se realiza hacia el lado del eje x positivo, entonces, la solución general puede quedar expresada como

$$\Phi^d(j_x\lambda,j_t\tau)=A\big(1+i\lambda\sqrt{\alpha}\big)^{j_x}\left(1-i\frac{n}{c}\tau\sqrt{\alpha}\right)^{j_t}. \quad (21)$$

Recordemos que Φ^d representa a cualquiera de las componentes unidimensionales, tanto del campo eléctrico como del campo magnético.

A. Subsección 1. PASO DEL CASO DISCRETO AL CONTINUO

Ahora, se mostrará que en el límite cuando $j_x\rightarrow\infty$ y $j_t\rightarrow\infty$, se obtiene la solución en el caso de espacio-tiempo continuo. Tal paso se lleva a cabo, haciendo uso de la aproximación siguiente

$$\left(1-\frac{q}{n}\right)^n=e^{-q}, con\ n\rightarrow\infty. \quad (22)$$

Entonces, aplicando (22) a (21) se obtiene

$$\left(1+i\frac{j_x\lambda\sqrt{\alpha}}{j_x}\right)^{j_x}=e^{i\sqrt{\alpha}x}, \quad (23)$$

y

$$\left(1-i\frac{j_t\tau\frac{n}{c}\sqrt{\alpha}}{j_t}\right)^{j_t}=e^{-i\frac{n}{c}\sqrt{\alpha}t}, \quad (24)$$

cuando $j_x\rightarrow\infty$ y $j_t\rightarrow\infty$, respectivamente.

Por lo tanto, en el límite del continuo

$$\Phi(x,t)=Ae^{i\sqrt{\alpha}\left(x-\frac{n}{c}t\right)}, \quad (25)$$

donde se observa, esta es la forma de la solución de onda estándar para el caso del espacio-tiempo continuo.

V. ECUACIÓN DE HELMHOLTZ UNIDIMENSIONAL EN UN ESPACIO DISCRETO

Como se menciono en la segunda sección, otra ecuación de carácter importante en la física, es la ecuación de Helmholtz. Por lo tanto, al describir fenómenos periódicos en el tiempo con frecuencia $\nu=\omega/2\pi$, entonces, la ecuación de onda se reduce a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\varphi(\vec{x})+\frac{n^2\omega^2}{c^2}\varphi(\vec{x})=0. \quad (26)$$

Al igual que en la ecuación de onda, nos concentraremos en el caso unidimensional, es decir, nos interesa resolver la Ec. (8) para un espacio discreto. Entonces, primero cambiamos el operador diferencial por el de diferencia y obtenemos

$$\frac{\Delta^2\varphi^d}{\Delta^2(j_x\lambda)}+\frac{n^2\omega^2}{c^2}\varphi^d(j_x\lambda)=0. \quad (27)$$

Haciendo uso de

$$\Delta^2\varphi^d=\varphi^d\big((j_x+2)\lambda\big)-2\varphi^d\big((j_x+1)\lambda\big)+\varphi^d, \quad (28)$$

y

$$\Delta^2(j_x\lambda)=\lambda^2. \quad (29)$$

La Ec. (27) queda expresada como

$$\varphi^d\big((j_x+2)\lambda\big)-2\varphi^d\big((j_x+1)\lambda\big)+\left(1+\frac{n^2\omega^2\lambda^2}{c^2}\right)\varphi^d=0. \quad (30)$$

Esta última ecuación, es una ecuación en diferencias de segundo orden, lineal, homogénea y de coeficientes constantes. Similarmente, esta ecuación se resuelve a través de métodos estándar para resolver ecuaciones en diferencia. Entonces, la solución a la ecuación de Helmholtz unidimensional en un espacio discreto queda como

$$\varphi^d(j_x\lambda) = A\left(1 + i\frac{n\omega}{c}\lambda\right)^{j_x} + B\left(1 - i\frac{n\omega}{c}\lambda\right)^{j_x}. \qquad (31)$$

De (10) podemos notar que $k = n\omega/c$, entonces, (31) se puede expresar en términos del número de onda

$$\varphi^d(j_x\lambda) = A(1 + ik\lambda)^{j_x} + B(1 - ik\lambda)^{j_x}. \qquad (32)$$

Podemos observar en (32), también, un comportamiento oscilatorio, similar al caso de la solución en el espacio continúo.

A. Subsección 1. PASO DEL CASO DISCRETO AL CONTINUO

Enseguida, se muestra en forma similar como en la subsección 1 de la cuarta sección, que a través de la aproximación (22) se puede recuperar la solución estándar para el caso de un espacio continuo.

En virtud de esto, se tiene

$$\left(1 + i\frac{kj_x\lambda}{j_x}\right)^{j_x} = e^{ikx}, con\; j_x \to \infty, \qquad (33)$$

y

$$\left(1 - i\frac{kj_x\lambda}{j_x}\right)^{j_x} = e^{-ikx}, con\; j_x \to \infty. \qquad (34)$$

Por lo tanto, en el límite continuo recuperamos las soluciones, las cuales, a través de ellas se puede representar una combinación lineal de soluciones de la ecuación de Helmholtz unidimensional en un espacio continuo.

VI. CONCLUSIONES

En el Presente trabajo, se resolvieron las ecuaciones de onda electromagnética y de Helmholtz en una dimensión, a través de un modelo de espacio-tiempo discreto. En ambos casos se encontraron las soluciones generales, las cuales, muestran un significado físico equivalente a las soluciones generales observadas en el caso estándar de espacio-tiempo continuo, es decir, todas las soluciones muestran el comportamiento oscilatorio típico esperado para este tipo de campos. Además, al realizar los casos límites $j_x \to \infty$ y $j_t \to \infty$ se pudieron recuperar las soluciones del caso continuo, a partir del caso discreto.

En general, es de mucha importancia en la física, investigar la influencia que un espacio-tiempo discreto puede tener en la descripción de sistemas físicos de carácter importante, como los que pueden ser descritos a través de la ecuación de onda electromagnética y de Helmholtz aun en una dimensión. Sin embargo, nuestra contribución aquí es pequeña, por lo que es importante reiterar que una ampliación de este estudio resultaría viable e interesante, tomando de referencia el hecho de que tanto la ecuación de onda como la de Helmholtz pueden auxiliarnos en el estudio de la diferente fenomenología existente y verificar si un espacio-tiempo discreto realmente juega un rol crucial en la física involucrada a través de estas ecuaciones.

En un futuro trabajo, resultaría interesante inspeccionar a la ecuación de onda del fotón en el espacio libre.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Universidad de Sonora por el apoyo interno otorgado para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Martin, S., Piero, N. and Marcus, B., *Physics on Smallest-An Introduction to Minimal Length Phenomenology*, Arxiv: 1202.1500v2.

[2] Snyder, H., *Quantized Space-Time,* Phys. Rev. **71**, 38-41 (1947).

[3] Padmanabhan, T., *Planck length is the lower bound to all physical length scales,* Gen. Rel. Grav. **17**, 215-221 (1985).

[4] Gross, D. and Mende, P., *String theory beyond the Planck scale,* Nucl. Phys. B 303, 407-454 (1988).

[5] Rovelli, C. and Smolin, L., *Discreteness of area and volume in quantum gravity*, Nucl. Phys. B 442, 593-619 (1995).

[6] Mead, A., *Possible Connection Between Gravitation and Fundamental Length,* Phys. Rev. **135**, 849-862 (1964).

[7] Doplicher, S. *et al., The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields,* Commun. Math. Phys. **172**, 187-220 (1995).

[8] Manjit, B. and Swamy, N., *Free Particle Eigenfunctions of Schrodinger Equation with Quantized space-time*, Arxiv: 0910.0825v1.

[9] Walter, G., *Classical Electrodynamics*, 1st English Ed. (Springer, New York, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1998).

[10] Hilderbrand, F. B., *Finite-Difference Equations and Simulations*, (Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1968).