Una aplicación inusual del método perturbativo de Feynman de la mecánica cuántica

J. D. Bulnes
Grupo de Mecânica Quântica, Informação Quântica e Física Aplicada, Universidade Federal do Amapá, Rod. Juscelino Kubitschek, Km. 2, Jardim Marco Zero, CEP. 68903-419, Macapá, AP, Brasil.

E-mail: bulnes@unifap.br

(Recibido el 25 de Julio de 2012; aceptado el 13 de Diciembre de 2012)

Resumen

En este artículo se da un ejemplo de uso del método de perturbaciones de Feynman en una situación que no corresponde a la mecánica cuántica. Nuestro ejemplo muestra que el método de Feynman no es exclusivo de la mecánica cuántica.

Palabras clave: Método de perturbaciones de Feynman, mecánica cuántica, ecuaciones diferenciales ordinarias.

Abstract

The use of Feynman's perturbation method in a non-quantum situation is exemplified in this paper. Our example shows that the Feynman method is not exclusive for quantum mechanics.

Keywords: Feynman's perturbation method, quantum mechanics, ordinaries differential equations.

PACS: 03.65.-w, 02.30.Mv, 02.30.Hq **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Los métodos y las técnicas matemáticas de la teoría de perturbaciones, Ref. [1], que aquí serán considerados dentro del contexto de su aplicación a la física, son útiles para construir diversas soluciones aproximadas de problemas 'perturbados'; ellos son solamente aplicables bajo condiciones específicas: (i) la solución del problema inicial, 'no perturbado', debe ser completamente conocida y (ii) la perturbación debe ser 'pequeña'. Que una perturbación sea pequeña significa que ella ha de garantizar que la estructura matemática general subyacente al problema no perturbado no sea afectada por la perturbación. Eso se ve con claridad en el caso del método de perturbaciones de Rayleigh-Schrödinger, usado en la mecánica cuántica, donde los estados perturbados son escritos como combinaciones lineales de los estados de la base no perturbada; es decir, suponiendo que el estado perturbado pertenece al espacio de Hilbert correspondiente a la situación no perturbada (si la 'perturbación' no fuese pequeña podría modificar el espacio de Hilbert). Cuando esos métodos y técnicas son aplicados, los resultados son válidos sólo sobre un intervalo bien definido, que tendrá que ser identificado, pues las soluciones aproximadas pueden no tener significado (físico y/o matemático) sobre intervalos mayores.

Por otro lado, es bien conocido que Feynman propuso un método de perturbaciones dentro de su formulación de caminos integrales de la mecánica cuántica, Ref. [2, 3], que, como veremos, también resulta aplicable a cierto tipo de ecuación diferencial ordinaria (EDO).

En este artículo mostramos una aplicación de la técnica de perturbaciones de Feynman a una EDO con coeficientes dependientes de la variable. Enfatizamos que la ecuación que vamos a considerar no surge de algún problema mecánico cuántico que podría ser propuesto. La aplicación específica del método de Feynman que presentamos en las próximas secciones también sirve para mostrar el método en sí mismo, pero dentro de un contexto simple y más familiar a los estudiantes, quienes, de manera general, desconocen los conceptos y los métodos del modelo cuántico de Feynman.

El artículo está dividido de la siguiente manera. En la subsección *A* de la sección introductoria presentamos resumidamente el método de perturbaciones de Feynman. En la sección *II* definimos una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden con coeficientes constantes: $F^{(3)}(t)-3F^{(2)}(t)+3F^{(1)}(t)-F(t)=0$, la que es resuelta usando los métodos generales del álgebra lineal. En la sección *III* consideramos la ecuación anterior para luego perturbar sus coeficientes, haciéndolos dependientes de la variable: $F^{(3)}(t)-(3+\varepsilon.t^2)F^{(2)}(t)+(3+\varepsilon.t)F^{(1)}(t)-F(t)=0$, la que resolvemos de manera detallada usando el método de Feynman. En las ecuaciones anteriores, y en las secciones correspondientes, el exponente (que aparece, o aparecerá, entre paréntesis) indica el orden de la derivada ordinaria de la función; la misma notación, cuando sea aplicada sobre matrices, indicará el orden de una solución perturbativa.

A. El método de perturbaciones de Feynman

Presentamos en esta subsección las principales ecuaciones matemáticas del método de perturbaciones definido en la formulación de la mecánica cuántica debida a Feynman [2, 3], algunos de cuyos aspectos, vistos a través de una simplificación conveniente, pueden encontrarse en [4].

Comencemos definiendo algunos objetos matemáticos que después serán útiles. Sea A una matriz numérica conocida; W una matriz (del mismo tamaño que A), también conocida, cuyos elementos son dependientes de una variable t; $\prod$ una matriz (del mismo tamaño que W) dependiente de dos variables, como t y t'; ε un parámetro numérico (que junto con W, bajo la forma $\varepsilon.W$, definen el término perturbativo) y ∂ el símbolo que será usado para indicar la operación de derivación usual sobre matrices o vectores columna. Para continuar, vamos a considerar una ecuación diferencial expresada en forma matricial,

$$\partial\vec{u}(t) = B\vec{u}(t)\,, \tag{1}$$

donde $B = A + \varepsilon.W$, $\vec{u}(t)$ es un vector y $\vec{u}(t_0)$ el vector definido por las condiciones iniciales. Una solución aproximada de la Ec. (1) puede expresarse en términos de una matriz de propagación temporal, $\prod(t,t_0)$, la cual se encontrará al resolver la siguiente ecuación,

$$(\partial - B)\prod = \delta(t-t_0)I\,, \tag{2}$$

siendo I la matriz identidad (del mismo tamaño que las otras matrices) y δ la *delta* de Dirac; entonces, la solución de la Ec. (1) puede escribirse de la siguiente forma,

$$\vec{u}(t) = \prod(t,t_0).\vec{u}(t_0)\,, \tag{3}$$

la cual es (por ahora) sólo una solución formal, pues la matriz $\prod$ aún no está definida. Notar que si ε es tomado con valor cero para todo $t > t_0$, la solución de la Ec. (2) es la siguiente,

$$\prod{}^{(0)}(t,t_0) = \exp\{(t-t_0)A\} \quad , \qquad t > t_0\,, \tag{4}$$

la cual, dentro del contexto del método de perturbaciones, da lugar a la aproximación de orden ‘cero’, que resulta de aplicar esa matriz sobre el vector $\vec{u}(t_0)$; éste es el caso no perturbado. Las aproximaciones superiores corresponden al problema perturbado; así, la aproximación de ‘primer orden’ se obtiene por la aplicación de la matriz,

$$\prod{}^{(1)}(t,t_0) = \prod{}^{(0)}(t,t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} dt'\prod{}^{(0)}(t,t').W(t').\prod{}^{(0)}(t',t_0)\,, \tag{5}$$

sobre el vector $\vec{u}(t_0)$; la aproximación de ‘segundo orden’ se obtiene por la aplicación de la matriz,

$$\prod{}^{(2)}(t,t_0) = \prod{}^{(0)}(t,t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} dt'\prod{}^{(0)}(t,t').W(t').\prod{}^{(1)}(t',t_0)$$

$$\Rightarrow \qquad \prod{}^{(2)}(t,t_0) = \prod{}^{(0)}(t,t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} dt'\prod{}^{(0)}(t,t').W(t')\times$$

$$\times\left\{\prod{}^{(0)}(t',t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t'} dt''\prod{}^{(0)}(t',t'').W(t'').\prod{}^{(0)}(t'',t_0)\right\}.$$

$$\Rightarrow \prod{}^{(2)}(t,t_0) = \prod{}^{(0)}(t,t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} dt'\prod{}^{(0)}(t,t').W(t').\prod{}^{(0)}(t',t_0) +$$

$$\varepsilon^2\int_{t_0}^{t} dt'\int_{t_0}^{t'} dt''\prod{}^{(0)}(t,t')W(t').\prod{}^{(0)}(t',t'').W(t'').\prod{}^{(0)}(t'',t_0)\,, \tag{6}$$

sobre el mismo vector, y así sucesivamente para los demás ordenes del desarrollo perturbativo. Entonces, la ecuación matricial perturbada,

$$\partial\vec{u} = (A + \varepsilon.W)\vec{u}\,, \tag{7}$$

tiene como solución aproximada, a $\nu - \acute{e}sima$ orden de la teoría de perturbaciones, la siguiente expresión,

$$\vec{u}(t) = \prod{}^{(\nu)}(t,t_0).\vec{u}(t_0)\,, \tag{8}$$

donde la convergencia de la expansión se manifiesta, para cierto orden mínimo, μ, a través de la siguiente relación,

$$\prod{}^{(\nu+1)}(t,t_0) - \prod{}^{(\nu)}(t,t_0) \to 0 \quad si \quad \nu \to \mu\,, \tag{9}$$

y para un determinado intervalo de la variable t, con $t > t_0$.

II. EL CASO NO PERTURBADO

Para mostrar que el método de perturbaciones de Feynman es también aplicable a problemas matemáticos que no necesariamente surgen dentro de problemas mecánico cuánticos vamos a considerar dos situaciones: la primera, que será definida en esta sección, y que corresponde a una situación no perturbada, es la de una EDO lineal con coeficientes constantes, que permitirá, en la próxima sección, al extenderla al caso perturbado, aplicar el método perturbativo de Feynman para encontrar una solución aproximada de la misma.

Consideremos la EDO de tercer orden,

$$F^{(3)}(t) - 3F^{(2)}(t) + 3F^{(1)}(t) - F(t) = 0\,, \tag{10}$$

junto con las condiciones iniciales: $F(0)=c_1$, $F^{(1)}(0)=c_2$ y $F^{(2)}(0)=c_3$. El objetivo de esta sección es resolver la Ec. (10) usando las técnicas generales del álgebra lineal; ello resulta conveniente para pode apreciar mejor los cálculos que serán presentados en la próxima sección, donde se usará, de conformidad con la sección I, un tratamiento matricial. Entonces debemos rescribir la Ec. (10) matricialmente; para ello se define un vector $\vec{u}$ a través de sus componentes, de la siguiente manera: $u_1=F(t)$, $u_2=F^{(1)}(t)$, $u_3=F^{(2)}(t)$. Ahora podemos escribir la Ec. (10), junto con las condiciones iniciales, en la siguiente forma,

$$\partial\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}\quad;\quad\begin{bmatrix}u_{10}\\u_{20}\\u_{30}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix},\tag{11}$$

o, de manera compacta, $\partial\vec{u}=A\vec{u}$ y $\vec{u}(0)=\vec{c}$. La Ec. (11) tiene por solución,

$$\vec{u}=\exp\{tA\}.\vec{u}(0),\tag{12}$$

donde hemos elegido, por simplicidad, $t_0=0$. En (12) vemos que tenemos que determinar la matriz exponencial $\exp\{tA\}$ para encontrar la solución. Para ello, convine calcular primero los valores propios y los vectores propios de la matriz A. Se encuentra que $\lambda=1$ es el valor propio (de multiplicidad 3) de A y que $\vec{x}_1=[1\ 1\ 1]^T$ es su único vector propio independiente; por lo tanto, la matriz A no puede ser diagonalizada por una matriz invertible. Sin embargo, entre los métodos del álgebra lineal es conocido un teorema que nos permitirá construir una *matriz canónica* de Jordan que sea semejante con la matriz A: asociado con el valor propio $\lambda=1$ se pueden construir tres vectores linealmente independientes ζ_1, ζ_2, ζ_3, con los cuales se construirá una matriz invertible y, a partir de ella, la *forma canónica* de Jordan. Con eso, la matriz $\exp\{tA\}$ puede ser calculada aprovechando dicha semejanza de matrices. Para construir los vectores ζ_1, ζ_2, ζ_3, se tiene que resolver las ecuaciones matriciales: $A\zeta_1=\lambda\zeta_1$, $A\zeta_2=\lambda\zeta_2+\zeta_1$, $A\zeta_3=\lambda\zeta_3+\zeta_2$. Luego de resolverlas, con $\lambda=1$ y $\zeta_1=\vec{x}_1$, se encuentran (entre otras posibles soluciones) los vectores,

$$\zeta_2=\begin{bmatrix}0&1&2\end{bmatrix}^T\quad;\quad\zeta_2=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T,\tag{13}$$

y puede verificarse que ζ_1, ζ_2, ζ_3 son vectores linealmente independientes. Usando ellos definimos una matriz invertible D,

$$D=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&2&1\end{bmatrix}.\tag{14}$$

Luego, construimos la *forma canónica* de Jordan,

$$J=D^{-1}AD=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.\tag{15}$$

Usando (15) podemos escribir: $\exp\{tJ\}=D^{-1}\exp\{tA\}D$, pero también podemos escribir: $\exp\{tA\}=D\exp\{tJ\}D^{-1}$, la cual, escrita de manera explícita, tiene el aspecto,

$$\exp\{tA\}=\frac{1}{2}e^t\begin{bmatrix}2-2t+t^2&2t-2t^2&t^2\\t^2&2-2t-2t^2&2t+t^2\\2t+t^2&-6t-6t^2&2+4t+t^2\end{bmatrix}.\tag{16}$$

Entonces, usando (16) y (12), puede verificarse que,

$$u_1=F(t)=\frac{1}{2}e^t\left(c_1(2-2t+t^2)+2c_2(t-t^2)+c_3t^2\right),\tag{17}$$

y que $u_2=\partial u_1$, $u_3=\partial u_2$, lo cual es consistente con la definición del vector $\vec{u}$. La Ec. (17) representa una solución aproximada de la Ec. (10).

III. EL CASO PERTURBADO

Ahora consideremos la ecuación diferencial perturbada. A partir de la Ec. (10), por la incorporación de algunos términos dependientes de un parámetro pequeño ε dentro de los coeficientes de la misma, conseguimos la ecuación,

$$F^{(3)}(t)-(3+\varepsilon.t^2)F^{(2)}(t)+(3+\varepsilon.t)F^{(1)}(t)-F(t)=0.\tag{18}$$

Notar que para $\varepsilon=0$ recuperamos la situación inicial no perturbada. Junto con la Ec. (18) consideramos las condiciones iniciales del caso no perturbado.

La Ec. (18) la escribimos en forma matricial,

$$\partial\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&+1&0\\0&0&+1\\1&-3-\varepsilon.t&3+\varepsilon.t^2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}.\tag{19}$$

La matriz que aparece en (19), denominada B, se puede rescribir de la siguiente manera,

$$B=\begin{bmatrix}0&+1&0\\0&0&+1\\1&-3-\varepsilon.t&3+\varepsilon.t^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-3&3\end{bmatrix}+\varepsilon\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-t&t^2\end{bmatrix}\tag{20}$$

o de manera compacta,

$$B=A+\varepsilon.W\ .\tag{21}$$

Entonces tenemos que resolver la ecuación,

$$\partial\vec{u}=(A+\varepsilon.W)\vec{u},\tag{22}$$

la que, de acuerdo con lo visto en la subsección A de la sección introductoria, tiene por solución, en $\nu-$*ésima* aproximación, al vector,

$$\vec{u}(t) = \prod^{(\nu)}(t,t_0).\vec{u}(0)\,. \tag{23}$$

Vamos a construir una solución aproximada que sea de primera orden de la teoría de perturbaciones,

$$\prod^{(1)}(t,t_0) = \prod^{(0)}(t,t_0) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} dt' \prod^{(0)}(t,t').W(t').\prod^{(0)}(t',t_0)\,. \tag{24}$$

Para ello necesitamos calcular cada una de las matrices que aparecen en el lado derecho de la Ec. (24). Eligiendo, por simplicidad, $t_0=0$, tenemos,

$$\prod^{(0)}(t,t_0) = \prod^{(0)}(t) = \exp\{tA\}, \tag{25}$$

donde la matriz $\exp\{tA\}$ está dada por la Ec. (16). Para simplificar la escritura vamos a escribir $t-t' \equiv g$, entonces tenemos,

$$\prod^{(0)}(t,t') = \exp\{(t-t')A\} = \exp\{gA\} = \frac{1}{2}\exp\{g\}\times,$$

$$\times\begin{bmatrix} 2-2g+g^2 & 2g(1-g) & g^2 \\ g^2 & 2(1-g-g^2) & g(2+g) \\ g(2+g) & -2g(3+g) & 2+4g+g^2 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Además, de (20), escribimos,

$$W(t') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t' & t'^2 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

También tenemos,

$$\prod^{(0)}(t',t_0) = \prod^{(0)}(t') = \frac{1}{2}\exp\{t'\}\times,$$

$$\begin{bmatrix} 2-2t'+(t')^2 & 2t'(1-t') & (t')^2 \\ (t')^2 & 2(1-t'-(t')^2) & (t')(2+t') \\ (t')(2+t') & -2t'(3+t') & 2+4t'+(t')^2 \end{bmatrix}, \tag{28}$$

así, podemos escribir,

$$W(t').\prod^{(0)}(t',t_0) \quad =$$

$$\frac{1}{2}\exp\{t'\}\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} t'^3+ \\ +t'^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2t'+2t'^2+ \\ -4t'^3-2t'^4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3t'^3+ \\ +t'^4 \end{bmatrix}. \end{bmatrix}_{3\times 3}, \tag{29}$$

entonces podemos determinar la matriz producto,

$$\prod^{(0)}(t,t').W(t').\prod^{(0)}(t',t_0) = \left[b_{i,j}\right]. \tag{30}$$

A continuación escribimos explícitamente cada uno de sus elementos de matriz,

$$b_{11} = \frac{1}{4}e^t\left(t'^3t^2 - 2t'^4t + t'^5 + t'^4t^2 - 2t'^5t + t'^6\right), \tag{31}$$

$$b_{12} = \frac{1}{4}e^t\left(-2t^2(t'-t'^2+2t'^3+t'^4) + 4t(t'^2-t'^3+2t'^4+t'^5)\right)+$$
$$-\frac{1}{2}e^t\left(t'^3-t'^4+2t'^5+t'^6\right), \tag{32}$$

$$b_{13} = \frac{1}{4}e^t\left(t^2(3t'^3+t'^4) - 2t(3t'^4+t'^5) + 3t'^5+t'^6\right), \tag{33}$$

$$b_{21} = \frac{1}{4}e^t\left((2t+t^2)(t'^3+t'^4) - 2t(t'^4+t'^5) - 2t'^4-t'^5+t'^6\right), \tag{34}$$

$$b_{22} = \frac{1}{4}e^t\left((-2t'+2t'^2-4t'^3-2t'^4)(2t+t^2) + 4tt'^2-4tt'^3\right)+$$
$$+\frac{1}{4}e^t\left(8tt'^4+4tt'^5+4t'^2-6t'^3+10t'^4-2t'^6\right), \tag{35}$$

$$b_{23} = \frac{1}{4}e^t\left((3t'^3+t'^4)(2t+t^2) - 2t(3t'^4+t'^5) - 6t'^4+t'^5+t'^6\right), \tag{36}$$

$$b_{31} = \frac{1}{4}e^t\left((2+4t+t^2)(t'^3+t'^4) - 2t(t'^4+t'^5) - 4t'^4-3t'^5+t'^6\right), \tag{37}$$

$$b_{32} = \frac{1}{4}e^t\left((2+4t+t^2)(-2t'+2t'^2-4t'^3-2t'^4) - 2t(-2t'^2+2t'^3)\right)+$$
$$+\frac{1}{4}e^t\left(8tt'^4+4tt'^5-(2t'-2t'^2+4t'^3+2t'^4)(-4t'+t'^2)\right), \tag{38}$$

$$b_{33} = \frac{1}{4}e^t\left((2+4t+t^2)(3t'^3+t'^4) - 2t(3t'^4+t'^5) - 12t'^4-t'^5+t'^6\right), \tag{39}$$

Ahora determinaremos, separadamente, cada uno de los elementos de la matriz que resultan de integrar la matriz producto en (30),

$$\int_0^t dt' \prod^{(0)}(t,t').W(t').\prod^{(0)}(t',t_0)\,. \tag{40}$$

Encontramos,

$$\int_0^t dt' b_{11} = \frac{1}{4}e^t\left(\frac{t^6}{60} + \frac{t^7}{105}\right), \tag{41}$$

$$\int_0^t dt' b_{12} = \frac{1}{4}e^t\left(-\frac{t^4}{6} + \frac{t^5}{15} - \frac{t^6}{15} - \frac{t^7}{105}\right), \tag{42}$$

$$\int_0^t dt' b_{13} = \frac{1}{4} e^t \left(\frac{t^6}{20} + \frac{t^7}{105} \right), \tag{43}$$

$$\int_0^t dt' b_{21} = \frac{1}{4} e^t \left(\frac{t^5}{10} + \frac{t^6}{12} + \frac{t^7}{105} \right), \tag{44}$$

$$\int_0^t dt' b_{22} = \frac{1}{4} e^t \left(-\frac{2t^3}{3} + \frac{t^4}{6} - \frac{t^5}{3} - \frac{t^6}{5} - \frac{2t^7}{105} \right), \tag{45}$$

$$\int_0^t dt' b_{23} = \frac{1}{4} e^t \left(\frac{3t^5}{10} + \frac{7t^6}{60} + \frac{t^7}{105} \right), \tag{46}$$

$$\int_0^t dt' b_{31} = \frac{1}{4} e^t \left(\frac{t^4}{2} + \frac{3t^5}{5} + \frac{3t^6}{20} + \frac{t^7}{105} \right), \tag{47}$$

$$\int_0^t dt' b_{32} = \frac{1}{4} e^t \left(-2t^2 - \frac{3t^4}{2} - \frac{23t^5}{15} - \frac{t^6}{3} - \frac{2t^7}{105} \right), \tag{48}$$

$$\int_0^t dt' b_{33} = \frac{1}{4} e^t \left(\frac{3t^4}{2} + t^5 + \frac{11t^6}{60} + \frac{t^7}{105} \right), \tag{49}$$

Luego, usando (24), (26) y los resultados de (41) a (49), calculamos los elementos de matriz de $\prod^{(1)}(t,t_0)$, aquí representados por $p_{i,j}$; éstos son,

$$p_{11} = \frac{1}{2} e^t \left(2 - 2t + t^2 + \varepsilon \frac{t^6}{120} + \varepsilon \frac{t^7}{210} \right), \tag{50}$$

$$p_{12} = \frac{1}{2} e^t \left(2t(1-t) - \varepsilon \frac{t^4}{12} + \varepsilon \frac{t^5}{30} - \varepsilon \frac{t^6}{30} - \varepsilon \frac{t^7}{105} \right), \tag{51}$$

$$p_{13} = \frac{1}{2} e^t \left(t^2 + \varepsilon \frac{t^6}{40} + \varepsilon \frac{t^7}{210} \right), \tag{52}$$

$$p_{21} = \frac{1}{2} e^t \left(t^2 + \varepsilon \frac{t^5}{20} + \varepsilon \frac{t^6}{24} + \varepsilon \frac{t^7}{210} \right), \tag{53}$$

$$p_{22} = \frac{1}{2} e^t \left(2(1 - t - t^2) - \varepsilon \frac{t^3}{3} + \varepsilon \frac{t^4}{12} - \varepsilon \frac{t^5}{6} - \varepsilon \frac{t^6}{10} - \varepsilon \frac{t^7}{105} \right), \tag{54}$$

$$p_{23} = \frac{1}{2} e^t \left(t(2+t) + \frac{3\varepsilon}{20} t^5 + \frac{7\varepsilon}{120} t^6 + \frac{\varepsilon}{210} t^7 \right), \tag{55}$$

$$p_{31} = \frac{1}{2} e^t \left(t(2+t) + \frac{\varepsilon}{4} t^4 + \frac{3\varepsilon}{10} t^5 + \frac{3\varepsilon}{40} t^6 + \frac{\varepsilon}{210} t^7 \right), \tag{56}$$

$$p_{32} = \frac{1}{2} e^t \left(-6t - (2+\varepsilon) t^2 - \frac{3\varepsilon}{4} t^4 - \frac{23\varepsilon}{30} t^5 - \frac{\varepsilon}{6} t^6 - \frac{\varepsilon}{105} t^7 \right), \tag{57}$$

$$p_{33} = \frac{1}{2} e^t \left(2 + 4t + t^2 + \frac{3\varepsilon}{4} t^4 + \frac{\varepsilon}{2} t^5 + \frac{11\varepsilon}{120} t^6 + \frac{\varepsilon}{210} t^7 \right), \tag{58}$$

De acuerdo con el método presentado en la sección I, una solución aproximada de la Ec. (18) está definida por la primera componente del vector $\vec{u}(t)$. Por otro lado, el vector $\prod^{(1)}(t,t_0).\vec{u}(t_0)$ debe tener su segunda y tercera filas coincidentes con la derivada de la primera y la segunda filas, respectivamente, guardando así consistencia con la definición del vector $\vec{u}(t)$, dado en la sección II. Usando los resultados que hemos obtenido hasta aquí verificamos que tales relaciones entre las componentes de $\vec{u}(t)$ son satisfechas. Denominando $y_1(t)$ a la primera fila del vector $\vec{u}(t) = \prod^{(1)}(t,0).\vec{u}(0)$, donde $t_0=0$, encontramos la solución,

$$y_1(t) = \frac{1}{2} e^t \left(2 - 2t + t^2 + \frac{\varepsilon}{120} t^6 + \frac{\varepsilon}{210} t^7 \right) c_1 +$$

$$+ \frac{1}{2} e^t \left(2t - 2t^2 - \frac{\varepsilon}{12} t^4 + \frac{\varepsilon}{30} t^5 - \frac{\varepsilon}{30} t^6 - \frac{\varepsilon}{105} t^7 \right) c_2 +$$

$$+ \frac{1}{2} e^t \left(t^2 + \frac{\varepsilon}{40} t^6 + \frac{\varepsilon}{210} t^7 \right) c_3, \tag{59}$$

que, como ya se indicó, es sólo aproximada, pues se encuentra el siguiente resultado,

$$y^{(3)}(t) - (3 + \varepsilon.t^2) y^{(2)}(t) + (3 + \varepsilon.t) y^{(1)}(t) - y(t) =$$

$$= \varepsilon^2 \left(\frac{2c_2 t^4}{3} + \frac{c_2 t^5}{12} + (\frac{7c_2}{12} - \frac{c_1}{5} - \frac{3c_3}{5}) t^6 - (\frac{31c_1}{210} - \frac{2c_2}{3} + \frac{53c_3}{120}) t^7 \right)$$

$$+ \varepsilon^2 \left((-\frac{59c_1}{840} + \frac{11c_2}{70} - \frac{73c_3}{840}) t^8 - (\frac{c_1}{210} - \frac{c_2}{105} + \frac{c_3}{210}) t^9 \right), \tag{60}$$

Vemos que la menor potencia de la variable *t* es 4; así, por ejemplo, para $t < 1/2$ se tiene que $t^4 < 1/16$ y las otras potencias de *t* están limitadas por valores aún menores que $1/16$. Además, como el parámetro perturbativo ε es bastante pequeño, la expresión (59) representará una solución aproximada aceptable para la Ec. (18) cuando la variable se considere dentro del intervalo $0 < t < 1/2$, entonces tenemos,

$$y^{(3)}(t) - (3 + \varepsilon.t^2) y^{(2)}(t) + (3 + \varepsilon.t) y^{(1)}(t) - y(t) \approx 0. \tag{61}$$

IV. CONCLUSIONES

Hemos presentado una aplicación (no típica) del método de perturbaciones de Feynman a un problema matemático que no surge de un problema cuántico: el de una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden con coeficientes perturbados. Por otro lado, el ejemplo mostrado simplifica la presentación y esencia de la técnica de perturbaciones de

Feynman, la cual, de manera general, no es incluida en los cursos ordinarios de mecánica cuántica. Curiosamente, como puede verificarse, los libros que presentan las técnicas de solución de ecuaciones diferenciales ordinarias no incluyen el método de Feynman. Los resultados mostrados pueden interpretarse de la siguiente manera: la técnica de perturbaciones de Feynman no es exclusiva de la mecánica cuántica.

REFERENCIAS

[1] Nayfeh, A., *Perturbation Methods,* (Wiley, New York, 1973).

[2] Feynman, R. P., Hibbs, A. R., *Quantum Mechanics and Path Integrals,* (McGraw Hill, New York, 1965).

[3] Schulman, L. S., *Techniques and Applications of Path Integration,* (Wiley-Interscience Publication, New York, 1981).

[4] Bulnes, J. D., *Propagadores cuánticos calculados de acuerdo con el postulado de Feynman con caminos aproximados por polinomios*, Rev. Mex. Fis. E, **55**, 34-43 (2009).