Propuesta didáctica sobre el teorema de Gauss: Teoría y aplicaciones prácticas para el cálculo del campo eléctrico

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?
ISSN 1870-9095

David Marqués Villarroya

E-mail: d.marquesvillarroy@edu.gva.es

(Recibido el 25 de octubre de 2022, aceptado el 29 de noviembre de 2022)

Resumen

En este trabajo se presenta una secuenciación didáctica sobre el teorema de Gauss para un nivel de bachillerato preuniversitario. El artículo está enfocado a la didáctica del teorema de Gauss aplicado al cálculo del campo eléctrico debido a la dificultad que encuentran los estudiantes preuniversitarios en este tema, con el cual se pretende proporcionar a los docentes de física de una metodología dinámica basada en *Aprendizaje Basado en el Pensamiento* o *Thinking Based Learning (TBL)* que consiga interiorizar y consolidar los conceptos teóricos para poder aplicarlos luego a casos prácticos. Se presenta, en primer lugar, una propuesta metodológica sobre cómo explicar el teorema de Gauss a este perfil de alumnado para que profundicen en la formulación de hipótesis y extraigan sus propias conclusiones mediante la aplicación del método científico. Seguidamente, se proponen una serie variada de ejercicios o casos prácticos ordenados por nivel de dificultad donde se puede aplicar este teorema para el cálculo del campo eléctrico en diversas geometrías con distribuciones de carga no puntuales en distintos medios.

Palabras clave: Teorema de Gauss, Campo Eléctrico, Aprendizaje Basado en Pensamiento.

Abstract

A didactic sequence of Gauss' theorem for a pre-university high school level is presented in this paper. The article is focused on the didactics of Gauss' theorem applied to the calculation of the electric field due to the complexity that pre-university students find in this topic. The paper provides physics teachers with a dynamic methodology based on *Thinking Based Learning (TBL)* that manages to internalize and consolidate the theoretical concepts to be able to apply it later to practical situations. First, the methodology is presented about how to explain Gauss' theorem to this profile of students, which must delve into the formulation of hypotheses and draw their own conclusions by applying the scientific method. Then, some exercises or practical situations are proposed to apply the theory formulated before. The exercises consist of calculate the electric field of some geometries with charge distributions in different media and they are sorted by level of difficulty.

Keywords: Gauss' Theorem, Electric Field, Thinking Based Learning.

I. INTRODUCCIÓN

El teorema de Gauss es especialmente importante en el campo de la física porque permite estudiar sistemas no puntuales de una manera relativamente sencilla. Para estudiantes preuniversitarios, normalmente, es la primera herramienta que se les presenta para abordar este tipo de problemas por primera vez, ya que en cursos anteriores siempre han trabajado con sistemas puntuales (masas y cargas puntuales especialmente) [1].

El estudio de sistemas no puntuales no es tan sencillo como el caso puntual, tanto a nivel conceptual como matemático, lo que produce en el alumnado una serie de dudas e inseguridades que trataremos de abordar en este artículo para intentar erradicarlas desde la perspectiva del docente, anticipándonos a ellas e inculcando en el alumnado conceptos claros y concisos que les permitan comprender el tema sin errores de concepto [2].

Para ello se propone una metodología de *Aprendizaje Basado en el Pensamiento* o *Thinking Based Learning (TBL),* que consiste en enfocar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde un punto de vista de generación de hipótesis y utilización del método científico como bases para construir el conocimiento de forma exitosa. Este método ya ha sido utilizado previamente en la didáctica de la física como se puede comprobar en [3] y [4], cuyos trabajos han servido de motivación para realizar este artículo.

Por lo tanto, con este trabajo se pretende proporcionar al docente de física de una metodología dinámica e innovadora basada en la estrategia de aprendizaje *TBL* para explicar el teorema de Gauss aplicado al cálculo del campo eléctrico de distribuciones no puntuales de carga a estudiantes preuniversitarios, así como proporcionar una colección de casos prácticos y ejercicios para profundizar sobre este tema a un nivel adecuado para bachillerato.

II. METODOLOGÍA

La metodología escogida para abordar el tema del cálculo del campo eléctrico de distribuciones no puntuales utilizando el teorema de Gauss ha sido la de *Aprendizaje Basado en el Pensamiento* o *Thinking Based Learning (TBL)* porque es una estrategia de enseñanza-aprendizaje que trabaja las destrezas

relacionadas con la estimulación del pensamiento activo, el análisis crítico y reflexivo de situaciones, y la compresión profunda de los conceptos. Todo esto aporta al alumnado una herramienta muy útil para desarrollar su madurez personal y desarrollo cognitivo para la etapa adulta [5].
La metodología se basa en potenciar el pensamiento eficaz, que está formado por tres elementos fundamentales sobre los que se sustenta esta metodología, que son [6]:

- *Destrezas del pensamiento*: consiste en emplear procedimientos reflexivos específicos y apropiados para un ejercicio de pensamiento determinado
- *Hábitos de la mente:* consiste en conducir estos procedimientos para dar lugar a conductas de reflexión amplias y productivas relacionadas con el hecho de pensar
- *Metacognición:* consiste en analizar nuestra propia forma de pensar para poder adquirir las destrezas y los hábitos de los que hemos hablado.

El pensamiento eficaz implica la aplicación planificada, correcta y coherente de los procedimientos adecuados para una tarea que requiera que pensemos, sin saltarnos ninguna operación clave y apoyándonos en las actitudes reflexivas adecuadas y en el conocimiento relevante en la materia [5]. Es por ello que, esta metodología *TBL* se ajusta a la perfección para la didáctica de la física, pues es la ciencia que estudia el comportamiento de la naturaleza, y su estudio se basa en la observación, formulación de hipótesis, verificación de las hipótesis y formulación de leyes, es decir, en el método científico establecido por Galileo.

Además, el aprendizaje basado en el pensamiento (*TBL*) tiene una serie de ventajas como [6]:

- *El impulso del aprendizaje activo*: donde se coloca al alumnado en el centro del conocimiento, motivándolos e impulsándolos a reflexionar y a tener pensamiento crítico.
- *Adquisición de conocimientos más profundos:* el alumnado aprende a relacionar mejor los conocimientos que adquiere y, por lo tanto, comprende más a fondo la materia y fija el aprendizaje para el futuro
- *Evaluación más eficaz:* el alumnado que emplea esta metodología de aprendizaje, cuando se enfrentan a una prueba para evaluar sus conocimientos, no solo recuerdan lo que han aprendido, sino que demuestran que saben relacionar todos los datos que se les han dado y comprenden mejor los conceptos, lo que permite utilizar diversos sistemas de evaluación.

En este trabajo se ha enfocado el proceso de enseñanza-aprendizaje siguiendo esta metodología *TBL* desde una práctica de aula de tipo pregunta-respuesta, de manera que, con cuestiones planteadas y guiadas por el docente, el alumnado va construyendo su propio y nuevo conocimiento a partir de los conceptos ya conocidos y asimilados anteriormente, formulando hipótesis y favoreciendo la utilización del método científico y del aprendizaje activo. Este enfoque ya ha sido utilizado previamente en la didáctica de la física exitosamente como se ha comentado en la introducción en los trabajos [3] y [4].

III. SECUENCIA DIDÁCTICA

En este apartado se muestra una secuenciación didáctica basada en la metodología de enseñanza-aprendizaje basada en el pensamiento (*TBL*) a través de un proceso de pregunta-respuesta. En ella se trata de explicar el teorema de Gauss aplicado al cálculo de campo eléctrico a estudiantes preuniversitarios, por lo que nos situamos en un curso de bachillerato, en el tema de campo eléctrico. Supondremos, por tanto, que el alumnado ya ha recibido conocimientos anteriores de física y en concreto sobre electromagnetismo. Los alumnos deben conocer los conceptos de carga puntual, distribuciones no puntuales, campo eléctrico y líneas de fuerza. Pero antes de abordar el teorema de Gauss es necesario definir un nuevo concepto que es el flujo.

A. Flujo Eléctrico

Para introducir el concepto de flujo, necesario antes de adentrarnos en el teorema de Gauss, es útil utilizar la similitud con el mismo concepto de fluidos [7].

Cuando decimos que un río tiene mucho caudal, o que baja con mucha fuerza, ¿Qué significa?

Los alumnos y alumnas deben llegar a la conclusión de que el caudal representa la cantidad de agua (masa) que atraviesa una cierta de superficie por unidad de tiempo. A partir de ahora trabajaremos siempre por unidad de tiempo.

Entonces, ¿Cómo se podría medir la cantidad de campo eléctrico que atraviesa una superficie?

Los alumnos posiblemente deberán recordar que el campo eléctrico se representa con líneas de fuerza y, por lo tanto, cuantas más líneas de fuerza atraviesen una superficie, mayor será la intensidad del campo eléctrico.
Llegados a este punto, ya se puede introducir el concepto de flujo eléctrico como la cantidad de líneas de campo que atraviesan una superficie.

Pero, en el caso del agua, sabemos que ésta nace de las nubes y fluye hasta el mar. En el caso del campo eléctrico, ¿Quién lo crea? o ¿dónde nace? ¿por dónde fluye? ¿cuánta cantidad fluye? ¿dónde muere o dónde va a parar?

En este punto se trata de que los alumnos relacionen los conceptos ya explicados sobre las líneas de fuerza y lleguen a la conclusión de que el campo eléctrico tiene su origen en las cargas eléctricas, y que las cargas positivas son creadoras de campo mientras que las negativas son sumideros, y que el campo fluye a través de las líneas de fuerza, que son directamente proporcionales a las cargas que lo generan [8].

Comparándolo con el símil del agua: las nubes serían las cargas positivas; el río las líneas de fuerza; y el mar las cargas negativas. Es importante que el alumnado realice este tipo de comparaciones para profundizar en los conceptos y fomentar el pensamiento eficaz que pretendemos mediante esta dinámica.
Finalmente, ¿cómo podríamos cuantificar esa cantidad de campo eléctrico que atraviesa una superficie? Es decir,

¿Cómo se calcula el flujo eléctrico? Pensad las magnitudes de las que depende esta magnitud.

En este punto es interesante abrir un pequeño debate sobre qué factores puede depender esa magnitud, favoreciendo de esta manera el aprendizaje activo mediante la emisión de hipótesis. Los alumnos llegarán por sí mismos a la conclusión de que el flujo (Φ) depende linealmente de la intensidad del campo eléctrico (E) y de la superficie (S), por lo tanto, lo podemos expresar como:

$$\Phi = K \cdot E \cdot S. \quad (1)$$

Por simplicidad, tomaremos como valor de la constante de proporcionalidad K=1 para simplificar los cálculos.
No obstante, una dependencia que a los alumnos se les suele escapar es que el flujo también depende de la orientación del campo con respecto a la superficie. Para ello, se plantearía la siguiente cuestión.

Habéis dicho muy acertadamente que el flujo depende de la intensidad del campo eléctrico y de la superficie. Pero si sumerjo un aro en un río paralelamente a su corriente. ¿Qué caudal/flujo atraviesa esa superficie?

De los conocimientos matemáticos que tienen los alumnos de este nivel, sabrán que las superficies se representan por vectores, cuyo modulo es el área de la superficie, la dirección perpendicular a la propia superficie y el sentido si es una superficie cerrada siempre hacia el exterior de la superficie, y si es plana lo podemos representar en el sentido que mejor nos convenga.

Los alumnos entenderán enseguida que si el vector superficie es perpendicular a la corriente del río no atraviesa nada de agua por el aro y por lo tanto el flujo es nulo. Así pues, el flujo también depende del ángulo que forme la corriente con la superficie; paralelamente se debe relacionar este concepto con el campo eléctrico (líneas de campo). Para estudiar la dependencia del flujo con el ángulo se plantearía la siguiente cuestión.

Entonces, ¿Cuándo será máximo y mínimo el flujo?
Los alumnos verán con la similitud del río que cuando el vector superficie es paralelo a la corriente del río o a las líneas de campo eléctrico, el flujo será máximo; y cuando forman 90º el flujo es nulo. La operación matemática que conoce el alumnado que opera con dos vectores y es máxima en 0º y mínima en 90º es el producto escalar. Por lo tanto, se puede establecer, llegados a este punto, que el flujo eléctrico vendrá dado por el producto escalar entre el vector campo eléctrico y el vector superficie, que forman un ángulo θ entre ellos:

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{S} = |E| \cdot |S| \cdot \cos\theta. \quad (2)$$

¿Qué sucedería con la expresión anterior si el campo eléctrico no fuera constante en toda la superficie escogida?

Los alumnos, con ayuda del profesor, deben razonar que, en física, cuando las magnitudes no son constantes, se utilizan infinitesimales o diferenciales, que tratan de alguna manera hacer esas magnitudes constantes o puntuales en un espacio muy pequeño. Aplicado a este caso, tendríamos que por una superficie infinitesimal dS (se puede considerar puntual) el campo se puede considerar constante, y por esa superficie infinitamente pequeña atravesaría un diferencial de flujo $d\Phi$ (o escalar flujo elemental), de tal manera que:

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3)$$

Por lo tanto, despejando el flujo de la expresión anterior, la expresión más genérica para el flujo eléctrico es [9]:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (4)$$

Cabe remarcar en este punto que, si el campo es constante en toda la superficie, la expresión integral anterior se convierte en la (2).

B. Teorema de Gauss

Una vez introducido el concepto de flujo, podemos abordar el teorema de Gauss aplicado al cálculo de campos eléctricos siguiendo la misma dinámica de pregunta-respuesta que favorece el aprendizaje activo del alumnado.

En primer lugar, se debe enunciar el teorema de Gauss de forma genérica con una definición que nos sirva de punto de partida: "*El flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es directamente proporcional a la magnitud de las fuentes que generan dicho campo encerradas en dicha superficie"* [9]. Este teorema se basa en el teorema de la divergencia [10], puramente matemático, que queda a un nivel demasiado avanzado para alumnos preuniversitarios, por lo que no es necesario complicar la explicación haciendo hincapié en su procedencia. No obstante, se puede hacer mención a éste de manera cualitativa, por ejemplo, exponiendo que "*El teorema de Gauss, a nivel matemático, relaciona lo que pasa en una superficie cerrada con lo que hay dentro de ella". Por ejemplo: si la superficie de una cortina es opaca y no nos deja ver lo que hay dentro, aún podríamos obtener información sobre ese sistema estudiando lo que pasa en la superficie a la que sí tenemos acceso* [11].

A partir del enunciado del teorema, dictado por el profesor, los alumnos vuelven a ser protagonista para llegar a la aplicación de este teorema al campo de la electroestática, concretamente al cálculo del campo eléctrico.

A la vista de la definición del teorema, ¿podemos aplicarlo para calcular el campo eléctrico?

El alumnado no dudará en afirmar que sí se puede utilizar, ya que el campo eléctrico es un campo vectorial. En este punto el profesor/a debe incitar a aplicarlo entonces.
¿Qué datos necesitamos para aplicar el teorema?

En este punto se abrirá un debate donde deberán aparecer las siguientes ideas:

- Necesitamos conocer la magnitud de las fuentes encerradas en la superficie, que en nuestro caso son las cargas eléctricas.
- Necesitamos definir una superficie cerrada.
- Necesitamos conocer la constante de proporcionalidad.

Con respecto a las fuentes de campo eléctrico, ¿de qué maneras se pueden presentar?

Los alumnos pensarán inmediatamente en cargas puntuales. Será el profesor el que, si no surge la idea, recuerde las distribuciones de carga pueden ser no puntuales, y se pueden presentar como distribuciones con densidades lineales (λ C/m), superficiales (σ C/m^2) o volumétricas (ρ C/m^3) de carga. Cabe recordar en este punto que la carga neta (q) se calcula como se indica a continuación, ya que lo necesitaremos para aplicar luego el teorema de Gauss [9]:

$$q = \begin{cases} \int_L \lambda \, dl \,, \\ \int\int_S \sigma \, dS \,, \\ \int\int\int_V \rho \, dV. \end{cases} \tag{5}$$

En el caso de que las distribuciones sean constantes (como lo serán en bachillerato), las integrales se pueden omitir, quedando:

$$q = \begin{cases} \lambda \cdot L, \\ \sigma \cdot S, \\ \rho \cdot V. \end{cases} \tag{6}$$

Con respecto a la superficie a elegir, ¿cuál escogeríais?

Los alumnos plantearán varias opciones, pero deben llegar a la conclusión, guiada por el profesor si los alumnos lo llegan a ver, de que pueden elegir cualquier superficie cerrada, y es importante en hacer insistencia en que la superficie escogida debe ser cerrada.

¿Creéis que hay alguna superficie idónea?

En este punto se debe incitar a repasar el enunciado del teorema de Gauss y ver qué magnitudes necesitamos calcular. Entre ellas está el flujo, que como hemos visto en (4), se calcula mediante una integral y un producto escalar. Hay que hacer ver al alumnado que cabe minimizar esfuerzos e intentar simplificar al máximo las operaciones matemáticas que aparezcan, en este caso la integral y el producto escalar.

¿Cómo creéis que podemos simplificar la integral? O *¿En qué caso creéis que la integral sería más fácil de realizar?*

El alumnado se percatará de que, si el campo eléctrico es constante, la integral desaparece, por lo tanto, si escogen una superficie donde el campo eléctrico es constante (superficie equipotencial), el cálculo del flujo es mucho más sencillo, ya que desaparece la integral, quedando la expresión (2) y, por tanto, la aplicación del teorema de Gauss es más factible. A la superficie elegida la llamaremos "Superficie de Gauss".

¿Y qué sucede con el producto escalar? ¿Cómo creéis que podemos minimizar la complejidad de su cálculo?

La integral no es la única operación matemática a realizar, y los alumnos deben percatarse de ello. También aparece un producto escalar del que cabe minimizar esfuerzos en su cálculo. Al plantear la pregunta, los alumnos deberán caer en la cuenta (de lo contrario el profesor los guiará) de que el producto escalar es más sencillo de realizar siempre que los vectores campo eléctrico y superficie formen un ángulo constante. De lo contrario el producto escalar se complica y deberíamos volver a emplear diferenciales de ángulo y a plantear el problema por integración, y por lo general no aparecerán integrales sencillas de resolver.

Finalmente, ¿cómo calculamos la constante de proporcionalidad? Este punto debe ser guiado por el profesor. *Partimos de una distribución de carga cualquiera.* Dibuja en la pizarra una distribución de carga arbitraria (en 1D, 2D o 3D). *¿Qué superficie escogemos?* Los alumnos dudarán, pues no sabrán qué superficie escoger, ya que no saben dónde el campo es constante o dónde el producto escalar es sencillo de realizar. *Consideremos una esfera, por ejemplo*. El profesor rodeará la distribución de carga con una esfera. *¿El campo es constante en la superficie de la esfera?*

Los alumnos deben percatarse de que no lo es, pues la distancia de la carga a la esfera no es la misma para todos los puntos de la esfera. *Cojamos una esfera un poco más grande entonces.* El profesor rodeará la distribución de carga con una esfera más grande que la anterior. *¿Es constante el campo ahora?* Los alumnos seguirán viendo que no. *¿Y el flujo?* En este punto los alumnos deben caer en la cuenta de que el flujo que atraviesa la primera esfera es el mismo que atraviesa la segunda.

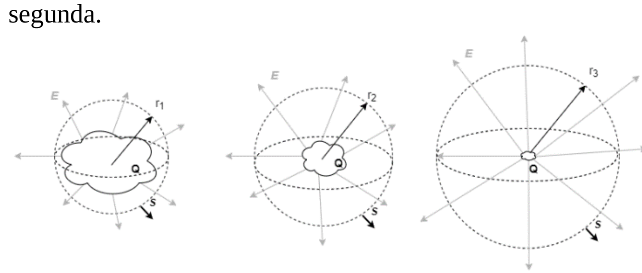


FIGURA 1. Se muestra una distribución de carga genérica de carga neta Q y las superficies de Gauss (esferas de radio r_i) que se pueden escoger para demostrar el teorema de Gauss para el campo eléctrico.

Y si cogiéramos una esfera muchísimo más grande, ¿Cómo se vería esta distribución de carga amorfa que he dibujado aquí? Los alumnos deberán relacionar estas ideas con las de cargas puntuales, pues la distribución de carga se vería como algo muy pequeño, es decir, una carga puntual. *¿Cómo es el campo en la superficie de esta esfera?* Los alumnos no dudarán en decir acertadamente que es constante, pues saben que el campo creado por una carga puntual varía con el inverso del cuadrado de la distancia, pues ya lo han estudiado previamente, y la distancia entre la superficie de la esfera y la carga puntual es constante, por lo tanto, el campo será constante sobre en la superficie de la esfera. *¿Y qué podéis decir sobre el producto escalar?* Los alumnos deberán ver que las líneas de campo y el vector superficie son paralelos en este caso (radiales), lo cual simplifica notablemente el cálculo del producto escalar. *¿Y el flujo?* Deben volver a concluir que el flujo es el mismo en la primera, segunda y tercera esfera. *Bien, pues como el flujo es constante para cualquiera de estas superficies, consideremos la tercera esfera, que contiene una carga puntual (q_{in}), que genera un campo que permanece constante en la superficie de la esfera y es paralelo al vector superficie de la misma, por lo que podemos escribir:*

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos 0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q_{in}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \tag{7}$$

Por lo tanto, hemos llegado a la expresión del teorema de Gauss para el campo eléctrico [11]*: "El flujo eléctrico que* *atraviesa una superficie cerrada es igual a la carga encerrada dentro de dicha superficie dividido entre la permitividad del medio ε". Por lo tanto, para el campo eléctrico, la constante de proporcionalidad entre el flujo y las cargas que generan el campo es 1/ ε. Esta expresión es genérica para cualquier caso.*

$$\Phi = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \tag{8}$$

Es importante hacer ver a los alumnos que la permitividad del medio ε que aparece en la expresión hace referencia a la permitividad del medio donde se encuentran las líneas de campo que generan el flujo eléctrico. Si estamos en el aire o en el vacío $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$, pero si nos encontramos en el interior de un material dieléctrico $\varepsilon \neq \varepsilon_0$, por ejemplo, si situamos una distribución de cargas en el interior de algún fluido como agua. En el siguiente apartado de aplicaciones prácticas se contemplan varias casuísticas para que esto quede claro a nivel práctico, ya que mucho material de la bibliografía no lo contempla y considera siempre que $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Es interesante remarcar que en la demostración teórica el flujo es el mismo en la primera, la segunda y la tercera esfera como se puede ver en la Fig. 1, ya que las tres contenían la misma carga encerrada. Y que hemos escogido la tercera porque es la más sencilla de realizar la integral (ya que el campo es contante) y el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ (porque las líneas de campo son paralelas a las del vector superficie).

También hay que insistir en que el teorema especifica que solo se debe tener en cuenta la carga encerrada en la superficie de Gauss (q_{in}), el resto de las cargas externas a esa superficie no se deben considerar porque el flujo del campo que generan las cargas externas es nulo a través de la superficie de Gauss, pues son el mismo número de líneas de campo entrantes y salientes a la superficie. Esto es importante tenerlo en cuenta cuando se calcula el campo en el interior de ciertas distribuciones de carga.

Por lo tanto, este teorema resultará útil para el cálculo del campo eléctrico siempre que las distribuciones de carga presenten cierta simetría [12], ya que de lo contrario el producto $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ puede llegar a ser muy complejo; la otra condición para poder aplicar con éxito el teorema de Gauss es cuando se pueda escoger una superficie donde el campo permanezca constante, de lo contrario el teorema no aporta ninguna ventaja en el cálculo del campo eléctrico, más bien lo complica. En estos casos, por ejemplo, un hilo finito o un disco finito, hay que recurrir a la definición elemental del campo eléctrico que se obtiene de la ley de Coulomb [9]. El teorema de Gauss ofrece, por lo tanto, una forma mucho más simple de calcular el campo eléctrico en situaciones con un alto grado de simetría como especifican [9] y [12], y estos casos es donde se debe aplicar. No obstante, no se debe olvidar que la ley de Gauss es más genérica y fundamental que la de Coulomb, de hecho, esta última es un caso particular de la ley de Gauss para cargas estáticas, por eso la ley de Gauss es la primera ecuación de fundamental del electromagnetismo o de las cuatro ecuaciones de Maxwell.

Una vez demostrado el teorema de Gauss para el campo eléctrico, se puede plantear a los alumnos que calculen la constante de proporcionalidad para el caso del campo gravitatorio, ya que, en bachillerato, normalmente no se explica este teorema para su aplicación con masas y es igualmente útil para calcular, por ejemplo, el campo gravitatorio en el interior de un planeta.

IV. APLICACIONES PRÁCTICAS

En esta sección se muestran algunas aplicaciones prácticas para calcular el campo eléctrico de varias distribuciones de carga con cierta simetría utilizando el teorema de Gauss. Las actividades se presentan de manera escalonadas por nivel de dificultad y están pensadas para ser desarrolladas con alumnado de bachillerato.

Es interesante, antes de empezar a abordar casos prácticos, determinar claramente a los alumnos cuándo es útil aplicar el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico de una distribución de cargas, y cuándo no lo es, lo cual se ha especificado en el apartado anterior, pero cabe remarcarlo. El teorema de Gauss es útil para calcular el campo eléctrico y merece la pena emplearlo cuando [12]:

- Podamos escoger una superficie de Gauss donde el campo sea constante para que la integral del cálculo del flujo (4) desaparezca.
- Cuando el producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ sea factible de realizar, es decir, que los dos vectores formen un ángulo constante entre ellos.

Si no se cumple alguna de estas condiciones, es mejor no utilizar el teorema de Gauss y emplear la definición elemental de campo eléctrico en formato general, pues considerando las distribuciones de carga como muchas cargas puntuales infinitesimales siempre podemos recurrir a la ley de Coulomb en forma infinitesimal, que establece que el campo eléctrico es la fuerza por unidad de carga (aunque para este nivel aparecen integrales un poco complejas al intentar resolver casos prácticos aplicando esta definición):

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r. \tag{9}$$

De hecho, al comentar que utilizar la definición elemental de campo eléctrico también se puede utilizar, es interesante hacer ver al alumnado que todos los casos que vamos a estudiar a continuación con el teorema de Gauss se pueden plantear a partir de esta definición también. La ventaja que ofrece el teorema de Gauss frente a la propia definición es que para geometrías con alto grado de simetría en la distribución de cargas el problema se simplifica mucho a nivel matemático y es mucho más fácil de resolver mediane el teorema de Gauss. Sería interesante realizar el cálculo del campo eléctrico de alguna de las geometrías propuestas más adelante mediante la definición elemental, para que los alumnos observaran la diferencia de dificultad que aparece al aplicar el teorema de Gauss. Esto se puede ver muy claramente en el caso del hilo infinito [9]. En otros casos, como en el plano infinito o en distribuciones volumétricas, las integrales se complican bastante y es difícil de seguir para un estudiante de bachillerato. También es interesante comentar cuando no es factible utilizar el teorema de Gauss y hay que utilizar la definición general, como en el caso del hilo finito que, aunque el cálculo del campo eléctrico es relativamente sencillo, se puede vislumbrar la dificultad de su aplicación general.

Una vez establecida la utilidad del teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico de ciertas geometrías, habría que establecer los pasos a seguir para calcular el campo eléctrico de las mismas. Como ya se ha explicado en el apartado anterior un caso genérico, los casos particulares se abordarían de la misma forma, siguiendo los pasos que hemos desarrollado en el apartado anterior:

1. Escoger una superficie de Gauss adecuada.
2. Calcular la carga encerrada.
3. Aplicar el teorema.

El primer paso es el que más costará a los alumnos inicialmente, ya que no existe manera alguna de saber con certeza una superficie donde el campo sea constante. Para ello, hay que hacer ver a los alumnos que esto se debe hacer de manera intuitiva, imaginándose las líneas de campo de la estructura e intentando establecer la región del espacio (superficie) donde el campo permanece constante. En este punto es importante hacer notar que la superficie de Gauss debe ser cerrada, pues es uno de los errores con los que se encuentran los estudiantes de este nivel. Al explicar los casos prácticos, se hará hincapié en este primer punto, pues suele ser el más complicado para el alumnado.

El segundo paso consiste en calcular la carga encerrada, que una vez determinada la superficie de Gauss, no tiene mayor complicación que aplicar las fórmulas de las distribuciones de carga (5), que en la mayoría de los casos presentarán como distribuciones constantes y se podrán reducir a las expresiones (6).

El tercer paso consiste en aplicar el teorema que, si hemos escogido correctamente la superficie de Gauss y hemos calculado bien la carga encerrada, basta con aplicar la definición del mismo (8) para calcular el campo eléctrico. En esta expresión, si el campo es constante y los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ forman un ángulo constante (como sucederá si hemos escogido bien la superficie de Gauss), la integral desaparece y el teorema queda:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon} \rightarrow \left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\theta = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \qquad (10)$$

Consideraremos en todos los casos que el medio exterior que envuelve a las distribuciones de carga es un medio genérico de permitividad dieléctrica ε, que si se trata de aire o vacío $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$, pero podría no serlo, por eso consideraremos un medio genérico. En cualquier caso, la ε que aparece en la expresión del teorema de Gauss es la permitividad del medio por el que se fluyen las líneas de campo que generan el flujo del teorema de Gauss.

Una vez establecidos los pasos a seguir, pasemos a calcular el campo eléctrico de varias distribuciones de carga. La secuenciación de actividades se ha desarrollado en orden progresivo de dificultad, considerando en primer lugar la carga puntual, luego la distribución lineal de carga (hilo), seguidamente la distribución superficial (plano infinito, cilindro y esfera) y finalmente la distribución volumétrica (en cilindro y esfera). De cada ejemplo práctico mostrado a continuación se proporciona el enunciado, la secuenciación didáctica y la resolución detallada del mismo, de manera que pueda servir de material curricular a docentes y alumnos.

A. Carga puntual

Considere una carga puntual +Q. Calcula el campo eléctrico que genera a una distancia r de la misma.

Siguiendo los pasos descritos anteriormente:

1. Para escoger la superficie de Gauss debemos imaginarnos las líneas de fuerza que emanan de la carga, que en este caso son radiales a la misma y se propagan en todas las direcciones del espacio. Como sabemos que el campo creado por una carga es constante para todos los puntos que equidistan de la carga, escogemos una superficie esférica de radio *r* que encierre a la carga en su centro como muestra la Fig.2. Además, si escogemos esta superficie, el vector campo eléctrico será paralelo al vector superficie, ya que ambos son radiales a la carga, lo cual simplificará el cálculo del producto escalar.

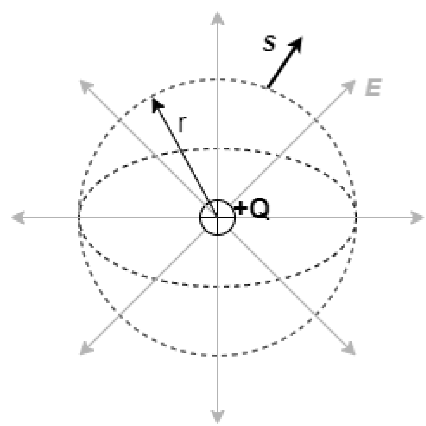


FIGURA 2. Se muestra una carga puntual de +*Q* Culombios y la superficie de Gauss escogida (esfera de radio *r* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera a una distancia *r* de la misma.

2. La carga encerrada en el interior de esta superficie es, obviamente la propia carga $q_{in} = +Q$.

3. Aplicando el teorema tenemos:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \qquad (11)$$

Como el campo es constante en la superficie escogida y los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º):

$$\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos 0 = \frac{Q}{\varepsilon}. \qquad (12)$$

Como la superficie de Gauss es una esfera:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{S \cdot \varepsilon} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}. \quad (13)$$

En carácter vectorial podemos expresar el campo eléctrico de la siguiente manera:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\varepsilon}}\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{r^2}}\,\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}. \quad (14)$$

Esta expresión es la misma que se obtiene a partir de la ley de Coulomb, definiendo el campo eléctrico como la fuerza eléctrica por unidad de carga [8].

En el caso de haber tenido una carga negativa, las líneas de campo hubieran ido hacia dentro de la esfera, por los que hubiera formado 180º con el vector superficie. Se hubiera obtenido el mismo resultado, pero en la dirección -$\vec{u}_r$.

B. Hilo infinito

Considere un hilo infinito con una distribución lineal de carga λ C/m. Calcula el campo eléctrico que genera el hilo a una distancia r del mismo.

1. Para escoger una superficie de Gauss adecuada es necesario conocer la dirección del campo eléctrico que genera la distribución de cargas. En el caso del hilo, la dirección del campo se puede intuir imaginando el hilo como una sucesión infinita de cargas puntuales. Si representamos el campo de algunas de estas cargas puntuales, veremos que muchas componentes vectoriales se anulan o compensan entre sí, de hecho, todas excepto aquellas que son perpendiculares al hilo (ver Fig. 3), que en este caso se suman las contribuciones de cada diferencial de carga. Por lo tanto, el campo que genera un hilo infinito será perpendicular propio hilo. Este proceso no es evidente para alumnado de bachillerato y cabe insistir y hacerles ver la estrategia a seguir para determinar el campo que genera una distribución de carga no puntual.

   Por lo tanto, la superficie más adecuada para escoger en este caso será un cilindro de radio *r* (donde el campo será constante) y longitud L. En este apartado cabe insistir a los alumnos sobre la importancia de que la superficie sea cerrada, por lo que hay que tener en cuenta las bases del cilindro también para aplicar el teorema de Gauss. Esta superficie también es adecuada para realizar el producto escalar, ya que, en las bases del cilindro, los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares (θ=90º) y en el lateral del cilindro son paralelos (θ=0º).
2. Al tratarse de una distribución lineal, la carga encerrada en el interior de esta superficie será $q_{in} = \lambda \cdot L$.
3. Aplicando el teorema tenemos:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \quad (15)$$

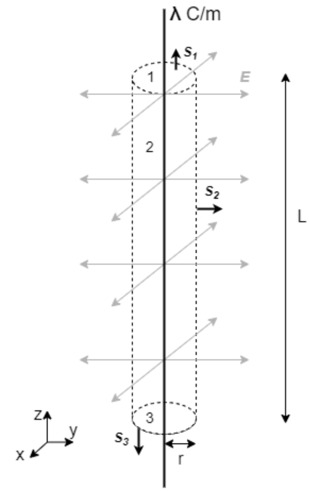


FIGURA 3. Se muestra un hilo infinito cargado con una densidad lineal de carga λ C/m y la superficie de Gauss escogida (cilindro de radio *r* y longitud *L* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera a una distancia *r* del mismo.

Como hay 3 superficies, deberemos considerar 3 integrales:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\lambda\, L}{\varepsilon}. \quad (16)$$

Como en las bases del cilindro (superficies 1 y 3) los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares (θ=90º) y en el lateral del cilindro (superficie 2) son paralelos (θ=0º):

$$\int_{S_1} \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}_1\right| \cdot \cos 90 + \int_{S_2} \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}_2\right| \cdot \cos 0 + \int_{S_3} \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}_3\right| \cdot \cos 90 = \frac{\lambda \cdot L}{\varepsilon}. \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que el campo eléctrico es constante sobre la superficie 2, nos queda:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right| = \frac{\lambda\, L}{\varepsilon}. \quad (18)$$

Podemos comentar al alumnado que en las bases el campo eléctrico no es constante, ya que la distancia al hilo en las bases sí que cambia, pero como el $\cos 90º = 0$, el producto escalar se anula y no nos influye en el cálculo del campo eléctrico en el punto que queremos estudiar.

Como la superficie 2 es el lateral del cilindro:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\lambda\, L}{2\pi r L \varepsilon} = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon}. \quad (19)$$

En carácter vectorial podemos expresar el campo eléctrico como:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{2\pi r\varepsilon}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}. \quad (20)$$

Este campo es el que genera, por ejemplo, un cable de cobre rectilíneo, muy largo y cargado cerca de su superficie, ya que en este caso se puede considerar un hilo infinito.

C. Plano infinito

Considere un plano infinito con distribución superficial de carga σ C/m². Calcula el campo eléctrico generado por el plano a una distancia L del mismo.

1. Para imaginarse las líneas de campo en una distribución superficial aplicaremos la misma idea que en el hilo infinito, consideraremos un diferencial de superficie que se comporte como una carga puntual, cuyas líneas de campo sabemos que son radiales a la misma. Si representamos algunas líneas de campo de varios diferenciales de superficie del plano, veremos que la dirección del campo eléctrico que genera un plano infinito cargado será perpendicular al plano, pues el resto de componentes se anulan o compensan unas con otras. Por lo tanto, será interesante escoger una superficie plana paralela al plano (donde el campo será constante y el vector campo eléctrico y superficie serán paralelos). Pero cabe recordar a los alumnos que la superficie de Gauss debe ser cerrada. Así pues, podemos escoger un prisma o cilindro como superficie de Gauss, de manera que las bases sean perpendiculares al campo y las paredes laterales paralelas al mismo, lo cual simplifica notablemente el cálculo del producto escalar. Como la superficie debe encerrar a la carga, tomaremos en nuestro caso un cilindro de radio *r* y longitud *2L* que atraviese el plano como muestra la Fig. 4.

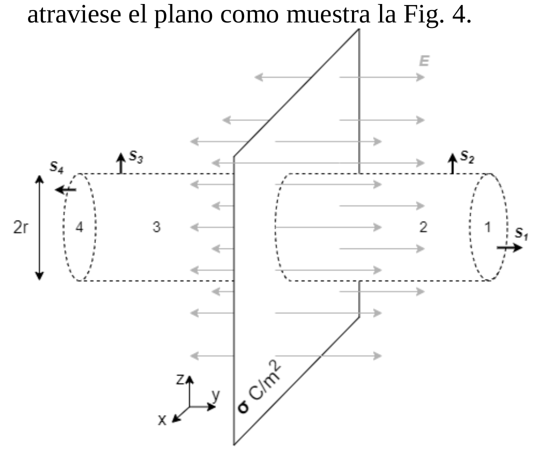


FIGURA 4. Se muestra un plano infinito cargado con una densidad superficial de carga σ C/m² y la superficie de Gauss escogida (cilindro de radio *r* y longitud *2L* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera a una distancia *L* del mismo.

2. La carga encerrada en el interior de esta superficie será $q_{in} = \sigma \cdot S$, donde *S* es la superficie 1 o 4, es decir, un círculo de radio *r*, pues es la carga que encierra la superficie de Gauss (el cilindro).
3. Aplicando el teorema tenemos:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon}. \tag{21}$$

Como hay 4 superficies en este caso:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 + + \int_{S_4} \vec{E} \cdot d\vec{S}_4 = \frac{\sigma S}{\varepsilon}. \tag{22}$$

Teniendo en cuenta que en las bases del cilindro (superficies 1 y 4) los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º) y en el lateral del cilindro (superficies 2 y 3) son perpendiculares (θ=90º), tenemos:

$$\int_{S_1} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_1| \cdot \cos 0 + \int_{S_2} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_2| \cdot \cos 90 + \int_{S_3} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_3| \cdot \cos 90 + \int_{S_4} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_4| \cdot \cos 0 = \frac{\sigma S}{\varepsilon}. \tag{23}$$

Como el campo es constante e igual en ambas bases del cilindro, hay que distan lo mismo del plano (superficies 1 y 4, que son paralelas al plano):

$$|\vec{E}| \cdot |\vec{S}_1| + |\vec{E}| \cdot |\vec{S}_4| = \frac{\sigma S}{\varepsilon}. \tag{24}$$

En las superficies 2 y 3 el campo no es constante, ya que la distancia al plano tampoco lo es, pero como los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son perpendiculares, el $\cos 90º = 0$, por lo que producto escalar se anula y no nos influye en el cálculo del campo eléctrico en el punto que queremos estudiar.

Las superficies 1 y 4 (bases del cilindro) son iguales, por lo tanto:

$$2|\vec{E}| \cdot S = \frac{\sigma S}{\varepsilon}, \tag{25}$$

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon}. \tag{26}$$

El campo expresado en forma vectorial teniendo en cuenta los ejes cartesianos de la Fig. 4 será:

$$\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon}} \vec{\boldsymbol{J}}. \tag{27}$$

Este es el campo que generan, por ejemplo, las placas de los condensadores planos.

En este caso en concreto, es interesante trabajar en profundidad el punto 1 de la resolución de problemas, es decir, la elección de la superficie de Gauss, ya que en este problema se pueden escoger múltiples superficies perfectamente válidas, obteniendo el mismo resultado de manera bastante sencilla y abordable para alumnos de bachillerato. Por lo tanto, es interesante plantear al alumnado que repitan el ejercicio tomando otra superficie de Gauss con cualquier prisma de distinta base (triángulo, cuadrado, rectángulo, pentágono, hexágono…), para que observen que el resultado al que se llega es el mismo, pues el teorema de Gauss funciona con cualquier superficie cerrada, pero no siempre es sencillo o evidente encontrar superficies adecuadas para la aplicación del teorema de forma eficiente. En el caso del plano infinito se puede ver todo esto con bastante claridad.

El resultado obtenido en este apartado es especialmente importante porque nos proporciona un campo eléctrico constante, es decir, no depende de la distancia al plano, por lo tanto, la intensidad del campo será idéntica a 1 mm o a 1 m del plano, lo cual suele impresionar bastante al alumnado, pues lo esperable es que dependa de la distancia. Hay que hacer ver que este resultado será así siempre que se pueda considerar que el plano es infinito, de lo contrario se debería reconsiderar su cálculo. De hecho, en muchos ejercicios de electroestática aparecen campos constantes, esta manera es una forma de conseguirlos, mediante planos infinitos.

D. Esfera hueca

Considere una esfera de radio R con una distribución de carga superficial σ C/m². Calcula el campo eléctrico generado por la esfera en su interior y en su exterior.

1. Para imaginarnos las líneas de campo de una corteza esférica debemos tener claro que toda la carga se encuentra repartida sobre la superficie de la esfera, no habiendo nada de carga en su interior, por lo que las líneas emanarán desde la superficie. Al tratarse de una esfera, por similitud con una carga puntual, parece obvio que las líneas de campo serán radiales a la misma, por lo que la superficie más adecuada para aplicar el teorema de Gauss es otra esfera de radio *r*.
   Es importante ver en esta geometría que el campo que genera la esfera no será el mismo en el interior que en el exterior de la misma, ya que la carga encerrada tampoco lo es, por lo que cabe estudiar el problema en el interior y en el exterior de la esfera, considerando en cada caso la superficie de Gauss que convenga, como se muestra en la Fig. 5.

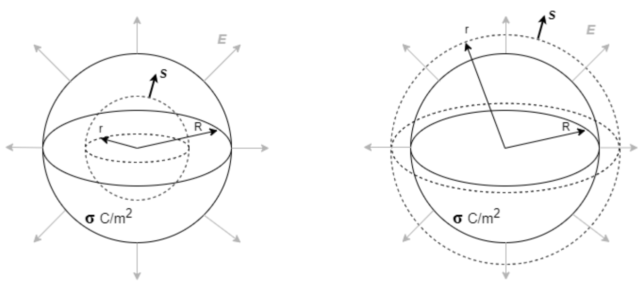


FIGURA 5. Se muestra una esfera de radio *R* cargada con una densidad superficial de carga *σ* C/m² y la superficie de Gauss escogida (esfera de radio r en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera en su interior (a) y en su exterior (b).

2. En este caso el cálculo de la carga encerrada no es tan trivial como en los anteriores, ya que debemos considerar las dos situaciones que hemos comentado anteriormente:
   a) Cuando calculemos el campo en el interior de la esfera, r<R, y como la distribución es superficial, la superficie de Gauss no encierra ninguna carga, por lo que la carga encerrada será nula $q_{in} = 0$. En la Fig. 5 se ha escogido una esfera pequeña (línea discontinua) como superficies de Gauss, pero podríamos tomar cualquiera en este caso, ya que como la carga encerrada será nula en cualquier geometría que escojamos.
   b) Cuando calculemos el campo en el exterior de la esfera, r>R, por tanto, la carga encerrada en el interior de la superficie de Gauss será $q_{in} = \sigma \cdot S$, siendo *S* la superficie de la esfera cargada (la de radio *R*). Tendremos entonces que $q_{in} = \sigma \cdot 4\,\pi R^2$.

   Es importante insistir en este paso, ya que la carga encerrada es distinta cuando calculamos el campo en el exterior y en el interior.
3. Aplicando el teorema tenemos:

<u>a. Interior de la esfera</u>

Como la carga encerrada es nula:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon} = 0. \tag{28}$$

Por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{int}} = \boldsymbol{0}. \tag{29}$$

<u>b. Exterior de la esfera</u>

Aplicamos el teorema con la carga encerrada correspondiente:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma \cdot 4\,\pi R^2}{\varepsilon}. \tag{30}$$

Como los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos, θ=0º:

$$\int_S |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}| \cdot \cos 0 = \frac{\sigma \cdot 4\,\pi R^2}{\varepsilon}. \tag{31}$$

Considerando que el campo es constante sobre la superficie, la integral desaparece, quedando:

$$|\vec{E}| \cdot |\vec{S}| = \frac{\sigma \cdot 4\,\pi R^2}{\varepsilon}. \tag{32}$$

Siendo ahora *S* la superficie de Gauss (esfera de radio *r*). Es importante no confundir las superficies que utilizamos para calcular la carga encerrada a partir de la distribución de carga superficial con la superficie de Gauss, en ocasiones pueden coincidir o no, pero hay que tener en cuenta que no son lo mismo. Este punto en concreto cabe remarcárselo a los alumnos, ya que suele ser una fuente de error o confusión.

Operando obtenemos la expresión del campo eléctrico en el exterior de la corteza esférica:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma \cdot 4\,\pi R^2}{4\,\pi r^2 \varepsilon} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r^2}. \tag{33}$$

Si expresamos el campo como una magnitud vectorial obtenemos:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{ext}} = \frac{\boldsymbol{\sigma R^2}}{\boldsymbol{\varepsilon r^2}} \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}. \tag{34}$$

Si sustituimos en la expresión anterior la densidad de carga superficial por su expresión en función de la carga neta tenemos:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{R^2}{\varepsilon r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2} \vec{u}_r. \tag{35}$$

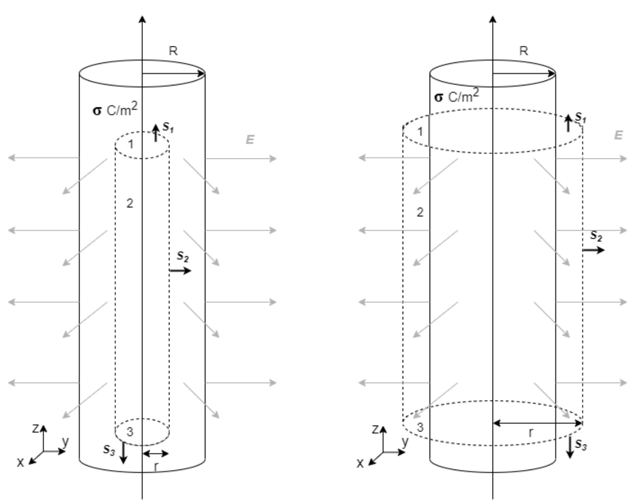
Por lo tanto, en el exterior de una esfera hueca con densidad de carga superficial, ésta se comporta como una carga puntual en el centro de la esfera con la misma carga neta. Por eso siempre se dice que la ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales o esferas en su exterior.

Este campo es el que genera, por ejemplo, un conductor esférico, que distribuye la carga por su superficie y en el interior no existe campo eléctrico. También es el principio físico de funcionamiento de una jaula de Faraday.

E. Cilindro hueco

Considere un cilindro infinitamente largo de radio R con una distribución de carga superficial σ C/m². Calcula el campo eléctrico generado por el cilindro en su interior y en su exterior.

1. Por similitud entre el cilindro infinito y el hilo, se puede deducir fácilmente que el campo que genera un cilindro es radial al mismo, y que las líneas de campo tendrán su origen en la propia superficie del cilindro, por lo que la superficie más adecuada para aplicar el teorema de Gauss es otro cilindro de radio *r* y longitud *L* como ya hicimos en el caso del hilo infinito. Recuerda que la superficie debe ser cerrada, por lo tanto, debemos tener en cuenta las bases también.
   Como en el caso de la esfera hueca, el campo generado por esta distribución de carga no será igual en el interior que en el exterior del cilindro, por lo que habrá que aplicar el teorema de Gauss dentro y fuera del mismo como muestra la Fig. 6.



(a) (b)

FIGURA 6. Se muestra un cilindro infinito de radio *R* cargado con una densidad superficial de carga *σ* C/m² y la superficie de Gauss escogida (cilindro de radio *r* y longitud *L* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera en su interior (a) y en su exterior (b).

2. Como en el caso de la esfera hueca, debemos considerar dos problemas distintos:
   a) Cuando calculemos el campo en el <u>interior</u> del cilindro, r<R, como la distribución es superficial, la carga encerrada será nula $q_{in} = 0$.
   b) Cuando calculemos el campo en el <u>exterior</u> del cilindro, r>R, por lo tanto, la carga encerrada en el interior de la superficie de Gauss será $q_{in} = \sigma \cdot S$, siendo *S* la superficie del cilindro cargado (las paredes de radio *R* y longitud *L*). Por lo tanto, $q_{in} = \sigma \cdot 2\pi RL$.

3. Aplicando el teorema tenemos:

<u>a. Interior del cilindro</u>

Como la carga encerrada es nula:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon} = 0. \tag{36}$$

Por lo tanto:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{int}} = \boldsymbol{0}. \tag{37}$$

<u>b. Exterior del cilindro</u>

Aplicamos el teorema con la carga encerrada correspondiente:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon} = \frac{\sigma\, 2\pi RL}{\varepsilon}. \tag{38}$$

Como tenemos 3 superficies: dos bases (superficies 1 y 3) y la pared lateral (superficie 2), tendremos:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\sigma\, 2\pi RL}{\varepsilon}. \tag{39}$$

Teniendo en cuenta que los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (*θ*=0º) en la superficie 2 (pared lateral) y perpendiculares (*θ*=90º) en las bases (superficies 1 y 3):

$$\int_{S_1} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_1| \cdot \cos 90 + \int_{S_2} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_2| \cdot \cos 0 + \int_{S_3} |\vec{E}| \cdot |d\vec{S}_3| \cdot \cos 90 = \frac{\sigma\, 2\pi RL}{\varepsilon}. \tag{40}$$

Al ser el campo es constante sobre la superficie 2, la integral desaparece:

$$|\vec{E}| \cdot |\vec{S}_2| = \frac{\sigma\, 2\pi RL}{\varepsilon}. \tag{41}$$

Teniendo en cuenta que la superficie 2 es la pared lateral del cilindro de la superficie de Gauss, tenemos:

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma\, 2\pi RL}{2\pi rL\varepsilon} = \frac{\sigma R}{\varepsilon r}. \tag{42}$$

Expresando el resultado de forma vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{ext}} = \frac{\boldsymbol{\sigma R}}{\boldsymbol{\varepsilon r}} \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}. \tag{43}$$

Si sustituimos en la expresión anterior la densidad de carga superficial por su expresión en función de la carga neta tenemos:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{2\pi RL} \frac{R}{\varepsilon r} \vec{u}_r = \frac{Q}{2\pi L\varepsilon r} \vec{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \vec{u}_r. \tag{44}$$

Esta expresión equivale a la de un hilo infinito, por lo tanto, un cilindro hueco con carga superficial, en su exterior, se comporta como un hilo infinito de grosor despreciable situado en el eje del cilindro.

Este es el campo que generan los conductores cilíndricos como cables con sección no despreciable o cables coaxiales. También es el fundamento de las jaulas de Faraday.

F. Esfera maciza

Considere una esfera dieléctrica de permitividad dieléctrica ε_d y radio R con una distribución volumétrica de carga ρ C/m³. Calcula el campo eléctrico generado por la esfera en su interior y en su exterior.

1. Como en el caso de la esfera hueca, el campo que genera una esfera maciza cargada es radial a la misma, por lo que la superficie más adecuada para aplicar el teorema de Gauss es otra esfera de radio *r*. Hay que tener en cuenta que el campo generado por esta distribución de cargas no será igual en el interior que en el exterior, por lo que deberemos considerar los dos casos como se puede ver en la Fig. 7. Además, en este caso, a diferencia de la esfera hueca, el campo en el interior no será nulo porque la esfera es maciza y hay carga en su interior.

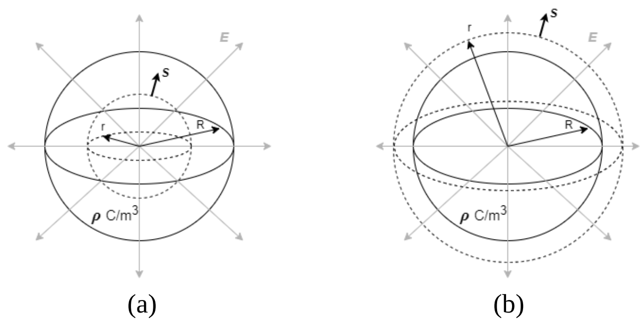


FIGURA 7. Se muestra una esfera de radio *R* cargada con una densidad volumétrica de carga ρ C/m³ y la superficie de Gauss escogida (esfera de radio *r* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera en su interior (a) y en su exterior (b).

2. Calcular la carga encerrada en este caso no es trivial para alumnos de bachillerato, pues suelen tener muchas dudas en cuanto al cálculo de la carga neta aplicando las fórmulas (5) y (6), por lo que cabe reforzarlo por parte del docente para que los conceptos queden claros y los alumnos comprendan que el teorema de Gauss solo tiene en cuenta la carga encerrada en la superficie de Gauss, y el resto es como si no existiera. Tendremos que calcular la carga encerrada en dos casos:
a) Cuando calculemos el campo en el <u>interior</u> de la esfera, r<R, la distribución es volumétrica y la carga encerrada será $q_{in} = \rho \cdot V$, siendo *V* el volumen de la carga encerrada dentro de la superficie de Gauss (la de radio *r*). Por lo tanto, $q_{in} = \rho \cdot 4/3\pi r^3$. Obviamente no se trata de toda la carga de la esfera, pero para calcular el campo el su interior no la necesitamos toda, solamente la encerrada en la superficie de Gauss. Es conveniente insistir en este punto, ya que cuesta entender por qué la carga externa no influye en el cálculo del campo.
b) Cuando calculemos el campo en el <u>exterior</u> de la esfera, r>R, la carga encerrada en el interior de la superficie de Gauss será $q_{in} = \rho \cdot V'$ porque presenta una distribución volumétrica, siendo *V'* el volumen total de la esfera cargada (la de radio *R*). Por lo tanto, $q_{in} = \rho \cdot 4/3\pi R^3$. Es muy importante que los alumnos no confundan poner *r* en lugar de *R* en este caso, ya que la carga está solamente en la esfera de radio *R*, aunque la encerremos con una más grande de radio *r*, la carga solo está en la primera, la de radio *R*.

Es importante insistir en este paso en que la carga encerrada es distinta cuando calculamos el campo en el exterior y en el interior, y que, además, en este caso, no es nula en ninguna situación.

3. Aplicando el teorema tenemos:

<u>a. Interior de la esfera</u>

Como en el interior de la esfera hay un dieléctrico $\varepsilon = \varepsilon_d$:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_d}. \tag{45}$$

Sustituyendo la carga encerrada (q_{in}) por su valor, y teniendo en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º) en toda la superficie de Gauss:

$$\int_S \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| \cdot \cos 0 = \frac{\rho \cdot 4/3\pi r^3}{\varepsilon_d}. \tag{46}$$

Como el campo es constante sobre la superficie *S*, la integral desaparece:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| = \frac{\rho \cdot 4/3\pi r^3}{\varepsilon_d}. \tag{47}$$

Siendo *S* la superficie de Gauss (esfera de radio *r*), por lo tanto:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\rho \cdot 4/3\pi r^3}{4\,\pi r^2 \varepsilon_d} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_d}. \tag{48}$$

Expresado de forma vectorial tenemos:

$$\boldsymbol{\vec{E}} = \frac{\boldsymbol{\rho r}}{\boldsymbol{3\varepsilon_d}} \boldsymbol{\vec{u}_r}. \tag{49}$$

<u>b. Exterior de la esfera</u>

Consideramos que en el exterior de la esfera hay un medio genérico de permitividad ε:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon} \tag{50}$$

Sustituyendo la carga encerrada (q_{in}) por su valor, y teniendo en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º) en toda la superficie de Gauss:

$$\int_S \left|\vec{E}\right| \cdot \left|d\vec{S}\right| \cdot \cos 0 = \frac{\rho \cdot 4/3\pi R^3}{\varepsilon} \tag{51}$$

Como el campo es constante sobre la superficie S:

$$\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| = \frac{\rho \cdot 4/3\pi R^3}{\varepsilon}. \quad (52)$$

Siendo S la superficie de Gauss (esfera de radio r), por lo tanto:

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\rho \cdot 4/3\pi R^3}{4\,\pi r^2 \varepsilon} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon r^2}. \quad (53)$$

Expresando el resultado en forma vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{ext}} = \frac{\boldsymbol{\rho R^3}}{\boldsymbol{3\varepsilon r^2}} \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}}. \quad (54)$$

Si sustituimos en la expresión anterior la densidad de carga volumétrica por su expresión en función de la carga neta tenemos:

$$\vec{E}_{ext} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^3}{3\varepsilon r^2} \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}_r. \quad (55)$$

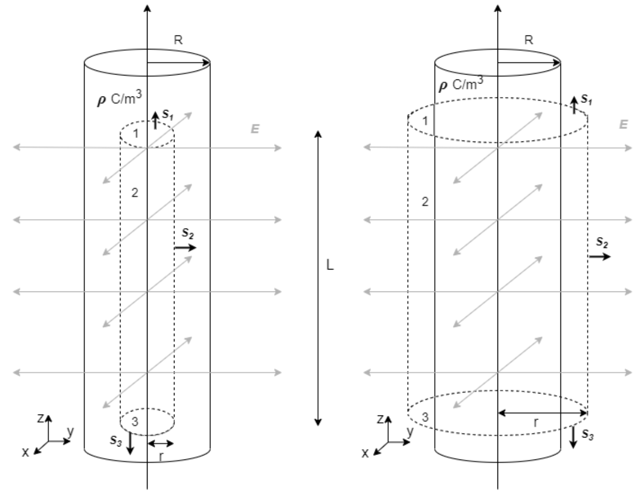
Por lo tanto, como pasaba con la esfera hueca, en el exterior de una esfera maciza, ésta se comporta como una carga puntual en el centro de la esfera con la misma carga neta. Por eso siempre se dice que la ley de Coulomb se aplica a cargas puntuales o esferas en su exterior.

Este es el campo que generan materiales dieléctricos esféricos que se utilizan por ejemplo en condensadores esféricos.

G. Cilindro macizo

Considere un cilindro dieléctrico de permitividad ε_d y radio R con una distribución volumétrica de carga ρ C/m[3]. Calcula el campo eléctrico generado por el cilindro en su interior y en su exterior.

1. Por similitud con el cilindro hueco o el hilo infinito, se puede deducir fácilmente que el campo que genera un cilindro macizo es radial al mismo, por lo que la superficie más adecuada para aplicar el teorema de Gauss es otro cilindro de radio *r* y longitud *L*.
2. Como en el caso de la esfera maciza, este apartado no es trivial de calcular para alumnado de bachillerato, por lo que cabe prestar especial atención al mismo por parte del docente para que los alumnos no se pierdan. Tendremos que calcular la carga encerrada en dos casos:
   a) Cuando calculemos el campo en el interior del cilindro, r<R, la distribución es volumétrica, por lo que la carga encerrada será la que contenga la superficie de Gauss (cilindro de radio *r*), es decir, $q_{in} = \rho \cdot \pi r^2 L$.
   b) Cuando calculemos el campo en el exterior del cilindro, r>R, la carga encerrada en el interior de la superficie de Gauss será $q_{in} = \rho \cdot V$ porque su distribución es volumétrica, siendo *V* el volumen del cilindro cargado (el de radio *R*). Por lo tanto, $q_{in} = \rho \cdot \pi R^2 L$



(a) (b)

FIGURA 8. Se muestra un cilindro infinito de radio *R* cargado con una densidad volumétrica de carga ρ C/m[3] y la superficie de Gauss escogida (cilindro de radio *r* y longitud *L* en línea discontinua) para calcular el campo eléctrico que genera en su interior (a) y en su exterior (b).

Al igual que sucedía con la esfera maciza, es importante remarcar que la carga encerrada en este caso no es la misma cuando calculamos el campo en el interior que en el exterior. El teorema de Gauss solo hace referencia a la carga encerrada en la superficie de Gauss, toda la que queda fuera de esta superficie es irrelevante para este teorema y no se tiene en consideración porque el flujo del campo que generan las cargas externas es nulo a través de la superficie de Gauss, pues hay igual número de líneas de campo entrantes y salientes.

3. Aplicando el teorema tenemos:

   a. Interior del cilindro
   Como en el interior del cilindro hay un dieléctrico $\varepsilon = \varepsilon_d$:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_d}. \quad (56)$$

Sustituyendo la carga encerrada por su valor:

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{in}}{\varepsilon_d} = \frac{\rho\,\pi r^2 L}{\varepsilon_d}. \quad (57)$$

Como hay 3 superficies, tendremos:

$$\int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = \frac{\rho\,\pi r^2 L}{\varepsilon_d}. \quad (58)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º) en la superficie 2 (pared lateral) y perpendiculares en las bases (θ=90º), tenemos:

$$\int_{S_1}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_1\right|\cdot\cos 90+\int_{S_2}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_2\right|\cdot\cos 0+\int_{S_3}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_3\right|\cdot\cos 90=\frac{\rho\,\pi r^2 L}{\varepsilon_d}. \quad (59)$$

Como el campo es constante sobre la superficie 2:

$$\left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|=\frac{\rho\,\pi r^2 L}{\varepsilon_d}. \quad (60)$$

Donde S_2 es la superficie de Gauss (pared del cilindro de radio r), por lo tanto:

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{\rho\,\pi r^2 L}{2\pi r L\varepsilon_{cil}}=\frac{\rho\, r}{2\varepsilon_d}. \quad (61)$$

Expresando el resultado en formato vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{int}=\frac{\rho\, r}{2\varepsilon_d}\vec{\boldsymbol{u}}_r. \quad (62)$$

b. Exterior del cilindro

Consideramos que en el exterior de la esfera hay un medio genérico de permitividad ε:

$$\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q_{in}}{\varepsilon}. \quad (63)$$

Sustituyendo la carga encerrada por su valor:

$$\int\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{q_{in}}{\varepsilon}=\frac{\rho\,\pi R^2 L}{\varepsilon}. \quad (64)$$

Como hay 3 superficies, tendremos:

$$\int_{S_1}\vec{E}\cdot d\vec{S}_1+\int_{S_2}\vec{E}\cdot d\vec{S}_2+\int_{S_3}\vec{E}\cdot d\vec{S}_3=\frac{\rho\,\pi R^2 L}{\varepsilon}. \quad (65)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{E}$ y $\vec{S}$ son paralelos (θ=0º) en la superficie 2 (pared lateral) y perpendiculares en las bases (θ=90º), tenemos:

$$\int_{S_1}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_1\right|\cdot\cos 90+\int_{S_2}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_2\right|\cdot\cos 0+\int_{S_3}\left|\vec{E}\right|\cdot\left|d\vec{S}_3\right|\cdot\cos 90=\frac{\rho\,\pi R^2 L}{\varepsilon}. \quad (66)$$

Como el campo es constante sobre la superficie 2:

$$\left|\vec{E}\right|\cdot\left|\vec{S}_2\right|=\frac{\rho\,\pi R^2 L}{\varepsilon}. \quad (67)$$

Siendo S_2 es la superficie de Gauss (pared del cilindro de radio r), por lo tanto:

$$\left|\vec{E}\right|=\frac{\rho\,\pi R^2 L}{2\pi r L\varepsilon}=\frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon r}. \quad (68)$$

Expresado en formato vectorial:

$$\vec{\boldsymbol{E}}_{ext}=\frac{\rho\, R^2}{2\varepsilon r}\vec{\boldsymbol{u}}_r. \quad (69)$$

Si sustituimos en la expresión anterior la densidad de carga volumétrica por su expresión en función de la carga neta tenemos:

$$\vec{E}_{ext}=\frac{Q}{\pi R^2 L}\frac{R^2}{2\varepsilon r}\vec{u}_r=\frac{Q}{2\pi L\varepsilon r}\vec{u}_r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\vec{u}_r. \quad (70)$$

Por lo tanto, como pasaba con el cilindro hueco, un cilindro macizo en su exterior se comporta como un hilo infinito de grosor despreciable situado en el centro del cilindro.

Este es el campo que generan materiales dieléctricos cilíndricos que se utilizan por ejemplo en condensadores cilíndricos.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado una secuencia didáctica basada en la metodología *TBL* formulada en forma de pregunta-respuesta, de manera que el alumnado ha sido capaz de construir su propio conocimiento del teorema de Gauss desde los cimientos, comprendiendo en cada paso que se da el por qué, el cómo y el para qué. Mediante esta metodología los alumnos interiorizan mejor los contenidos y quedan más remanentes que con otras metodologías tradicionales, además de favorecer el aprendizaje activo.

Se ha presentado también una propuesta variada de casos prácticos de aplicación del teorema de Gauss para el cálculo del campo eléctrico, organizada de manera escalonada y progresiva en nivel de dificultad para que el alumnado pueda ir interiorizando los conceptos teóricos a partir de situaciones prácticas. Todos los casos prácticos han sido resueltos en detalle para que puedan ser seguidos y comprendidos por cualquier estudiante de bachillerato y sirvan de material de apoyo a los docentes de física de etapas preuniversitarias.

Los casos prácticos han servido para calcular el campo eléctrico de varias distribuciones de carga (puntual, lineal, superficial y volumétrica), así como estudiar la existencia de diferentes medios dieléctricos, lo cual no suele ser habitual de ver en la bibliografía para la aplicación de este teorema al cálculo del campo eléctrico, pues en la mayoría de los casos se considera que el medio donde calculamos el campo eléctrico es aire o vacío y $\varepsilon=\varepsilon_0$. De hecho, en muchas referencias se enuncia el propio teorema como $\Phi=q_{in}/\varepsilon_0$ directamente, lo cual es impreciso, pues esta expresión es solo válida cuando se calcula el campo en el aire o en el vacío.

Cuando calculamos el campo en el interior de un dieléctrico (esfera o cilindro macizos, por ejemplo), la $\varepsilon\neq\varepsilon_0$. En este trabajo se ha intentado mostrar este hecho claramente, pues es una de las carencias que se encuentran en la bibliografía sobre este tema.

Queda para otros trabajos aplicar el teorema para fines diferentes como el cálculo de la carga encerrada en una región con campo no uniforme, así como explicar la aplicación del teorema de Gauss en otras ramas de la física diferentes a la electrostática, que es el campo donde más se utiliza este teorema, pero puede ser igualmente aplicado en mecánica, por ejemplo, para calcular el campo gravitatorio de un planeta en su interior. También se puede ampliar este trabajo para el cálculo de los potenciales en cargas no puntuales y para calcular el trabajo necesario para trasladar cargas de un punto a otro en presencia de distribuciones no puntuales de carga.

REFERENCIAS

[1] Tipler P. A., Mosca G., *Física preuniversitaria* (Ed. Reverté, Madrid, 2010).

[2] Llancaqueo, A., Caballero, M. C., y Moreira, M. A., *El concepto de campo en el aprendizaje de la física y en la investigación en educación en ciencias*, Revista electrónica de enseñanza de las ciencias **27**, (2003).

[3] Alonso M., *Estudio teórico-experimental de movimientos de caída vertical*, Alambique **95**, 23-30 (2019).

[4] Alonso Sánchez M. y Soler Selva V., *Construyendo la Relatividad* (Ed. Equipo Sirius, Madrid, 2003).

[5] Swartz R. J., Costa A.L., Beyer B. K., Reagan R., y Kallick B., *Thinking based learning: Promoting quality student ahievement in the 21st century* (Ed. Teachers College Press, New York, 2010).

[6] Perkins, D., Jay, E., y Tishman, S., *Beyond Abilities: A Dispositional Theory of Thinking*, Merrill- Palmer Quarterly, 39, 1-21 (2000).

[7] William, H. Jr. y Buck, J. A., *Teoría Electromagnética* (Ed. MacGraw-Hill, New York, 2006).

[8] Tipler P. A., Mosca G., *Física para la Ciencia y la Tecnología* (Ed. Reverté, Barcelona, 2006).

[9] Halliday, D., Resnick, R., *Física para estudiantes de ciencias e ingeniería* (Ed. John Wiley & Sons, New York, 1961).

[10] Katz, V. J., *The History of Stokes' Theorem*, Mathematics Magazine **52**, 146-156 (1979).

[11] Llinares J., Page A., *Electromagnetismo y Semiconductores* (Ed. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 1997).

[12] Singh, C., *Student understanding of symetry and Gauss´s law of electricity*, Proceedings of the Physics Education Research Conference, New York **790**, 65-68 (2005).