



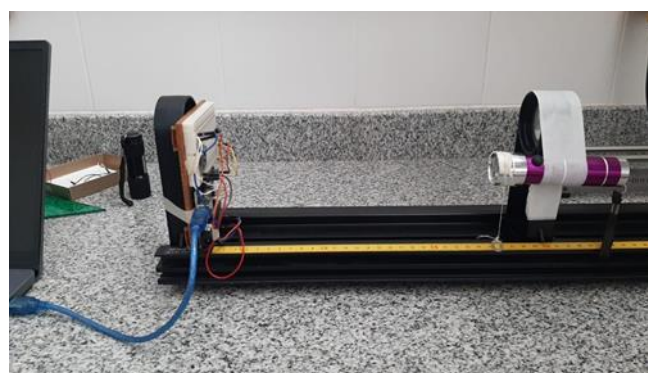
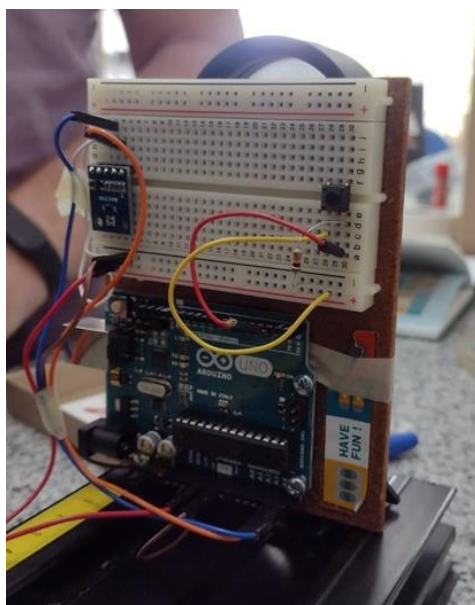
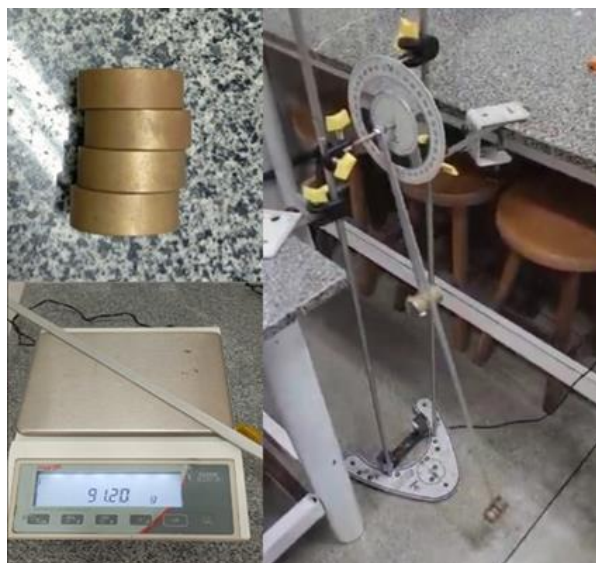
LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

www.lajpe.org

Volume 19

Number 4

December 2025



A publication sponsored by the Latin American Physics Education Network
and the Institute of Science Education



LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Electronic version of this journal can be downloaded free of charge from the web-resource:

<http://www.lajpe.org>

Production and technical support

R. Bourbaki

r.bourbaki@gmail.com

Latin American Journal of Physics Education is indexed in:

DOAJ

Dialnet

latindex

EBSCO
PUBLISHING

INDEX COPENICUS
INTERNATIONAL

EDITORIAL POLICY

Latin American Journal of Physics Education (LAJPE) is a peer-reviewed, electronic international journal for the publication of papers of instructional and cultural aspects of physics. Articles are chosen to support those involved with physics courses from introductory up to postgraduate levels.

Papers may be comprehensive reviews or reports of original investigations that make a definitive contribution to existing knowledge. The content must not have been published or accepted for publication elsewhere, and papers must not be under consideration by another journal.

This journal is published quarterly (March, June, September and December), by the Latin American Physics Education Network (LAPEN) and the Institute of Science Education. Manuscripts should be submitted to boubarkic@gmail.com or lajpe@lapen.org.mx. Further information is provided in the "Instructions to Authors" on www.lajpe.org

Direct inquiries on editorial policy and the review process to: César Mora and C. Bourbaki, Editors in Chief, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (Cuba), calle 154 No. 12906 entre 129 y 133 Reparto Reynold Garcia, Matanzas, Cuba CP 40100. Phone: 53 45 265794

ISSN 1870-9095

Copyright © 2025 Latin American Physics Education Network. (www.lajpe.org)

INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Ann-Marie Pendrill, Göteborgs University (Sweden)
Bayram Akarsu, Erciyes University (Turkey)
Carl Wenning, Illinois State University (USA)
Diane Grayson, Andromeda Science Education (South Africa)
David Sokoloff, University of Oregon (USA)
Dean Zollman, Kansas State University (USA)
Freidrich Herrmann, University of Karlsruhe (Germany)
Hiroshi Kawakatsu, Kagawa University (Japan)
Jorge Barojas Weber, Universidad Nacional Autónoma de México (México)
Laurence Viennot, Université Paris 7 (France)
Marisa Micheli, University of Udine (Italy)
Marco Antonio Moreira, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brazil)
Minella Alarcón, UNESCO (France)
Orhan Karamustafaoğlu, Amasya University, (Turkey)
Pratibha Jolly, University of Delhi (India)
Ton Ellermeijer, (Netherlands)
Verónica Tricio, University of Burgos (Spain)
Vivien Talisayon, University of the Philippines (Philippines)

EDITORIAL BOARD

Deise Miranda, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
Eduardo Moltó, Instituto Superior Pedagógico José Varona (Cuba)
Eduardo Montero, Escuela Superior Politécnica del Litoral (Ecuador)
Josefina Barrera, Universidade do Estado do Amazonas (Brasil)
Julio Benegas, Universidad Nacional de San Luis (Argentina)
Leda Roldán, Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
Celso Ladera, Universidad Simón Bolívar (Venezuela)
Nelson Arias Ávila, Universidad Distrital, Bogotá (Colombia)
Octavio Calzadilla, Universidad de la Habana (Cuba)
Ricardo Buzzo Garrao, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
Zulma Gangoso, Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

EDITOR-IN-CHIEF

César Mora, Instituto Politécnico Nacional (México)

ASSOCIATED EDITOR

Josip Slisko, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)
Carlos Bourbaki, Instituto Pedagógico Latinoamericano y Caribeño (Cuba)

LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Volume 19, Number 4, December 2025

CONTENTS/CONTENIDO

Papers/Artículos

- El debate sobre la consistencia de la electrodinámica
Rafael Andrés Alemañ Berenguer 4301
- Determination of Period and Frequency of Oscillatory Systems: A Non-Traditional Approach Through Energy
Leonardo Sampaio Motta, André da Silva Ramos, Marcio Augusto Sampaio de Carvalho, Denizar Rodrigo Barbosa, Rafael de Souza Dutra, Antônio Carlos Fontes dos Santos 4302
- Projectile Motion from Free Fall
Yuji Kajiyama 4303
- Noncommutative Dirac and Schrödinger equations in the background of the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials using Bopp's shift method and perturbation theory
Abdelmadjid Maireche 4304
- Variability of geomagnetic field at Langkawi, south-east asia during the ascending phase of solar cycle 24
Mustapha Abbas, Arzika Yusuf Koko, Mukhtar Mohammad, Mukhtar Ibrahim Furfuri, Aminu Muhammad, Asabe Ibrahim Audu, Mohammed Bello Kaoje 5305
- Método generalizado para la comprensión de problemas de Física
Ramón Rubén González Nápoles, Segifredo Luis González Bello 4306
- Visión innovadora de la asignatura Cromatografía de Capa delgada y de Papel dentro del proceso de aprendizaje en los planes de estudios universitarios y de postgrado
Luis. E. Jiménez Rodríguez, Eduardo. R. Besada Maribona, Nancy Martínez Alfonso 4307
- The Disk Paradox of Feynman
Sepand Khosravi, Houshyar Noshad 4308

LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Volume 19, Number 4, December 2025

CONTENTS/CONTENIDO

Papers/Artículos

- Numerical Solutions of the Lane-Emden Equation and Stellar Density Profiles
Sepandhosravi 4309
- Problematização de aspectos conceituais, procedimentais e epistemológicos da lei de Arquimedes
Winiston Ransdonner Cruvinel Ribeiro, Luanna S. de Pires Campos Alves, Gustavo Quereza de Freitas, Tiago Clarimundo Ramos, Ronivan Sousa da Silva Suttini, Salmon Landi Jr. 4310
- Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo da Evolução Estelar no Ensino Médio
Paulo Moreira Veiga, Glauco Cohen Ferreira Pantoja 4311
- Aplicación de la Ley de Lambert-Beer con fines docentes en método por espectrofotometría ultravioleta para Vitamina A (retinol)
L. E. Jiménez Rodríguez 4312
- Efecto del tipo de partícula de carbono sobre las propiedades fotocatalíticas en películas TiO₂:C
Martínez González María Fernanda, Zapata Torres Martín Guadalupe, Cruz González Nadia, Valaguez Velazquez Enrique 4313
- Aprender explicando: Impacto de los proyectos de exposición oral en el aprendizaje de la Física
Miriam Marcela Scancich 4314
- Comprobando la ley de variación de intensidad de la luz con la distancia por medio de sensores para Arduino
Pedro A. Willging, Carmen E. Lambrecht, Juan M. Distel, Mario G. Campo 4315

El debate sobre la consistencia de la electrodinámica

EDVATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Rafael Andrés Alemañ Berenguer

Departamento de Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal, Universidad de Alicante, Ap. de correos 99, 03080-Alicante (España)

E-mail: raalbe.autor@gmail.com

(Recibido el 6 de noviembre de 2024, aceptado el 30 de octubre de 2025)

Resumen

A comienzos del siglo XXI se desarrolló una peculiar discusión sobre la posible existencia de contradicciones sin solución en las bases conceptuales de la electrodinámica clásica. Los argumentos expuestos para señalar tales presuntas inconsistencias, así como las réplicas que recibieron, constituyen un ejemplo excelente de controversia científica de la cual la teoría electromagnética salió indemne. Sin embargo, los detalles del debate demuestran que la física clásica, lejos de hallarse privada de problemas interesantes, aun puede albergar diversas y profundas líneas de investigación de carácter fundamental.

Palabras clave: Electrodinámica clásica, modelo del electrón, inconsistencias teóricas, materia y campo.

Abstract

At the beginning of the 21st century, a peculiar discussion about the possible existence of unresolvable contradictions in the conceptual bases of classical electrodynamics was carried out. The arguments put forward to point out such alleged inconsistencies, as well as the replies they received, constitute an excellent example of scientific controversy from which electromagnetic theory emerged unscathed. However, the details of the debate show that classical physics, far from being devoid of interesting problems, can still accommodate various and profound lines of research of a fundamental nature.

Keywords: Classical electrodynamics, electron model, theoretical inconsistencies, matter and field

I. INTRODUCCIÓN

Frente a la extendida opinión según la cual los únicos problemas físicos dignos de interés surgen en disciplinas nacidas a lo largo del siglo XX, la teoría electromagnética, en su formulación más tradicional, plantea algunos de los más desafiantes retos para los fundamentos de la física. No se trata ya de asuntos relacionados con las fronteras de la investigación, como la física del plasma, los fenómenos magnetohidrodinámicos o la fotónica no lineal, que en todas las disciplinas científicas existen. En este caso hemos de enfrentarnos a cuestiones que alcanzan las raíces conceptuales de la teoría que se discute, acaso debilitando su propia coherencia interna.

Así ocurrió con el debate desarrollado durante la primera década del siglo XXI sobre la inconsistencia fundamental de la electrodinámica clásica. El fuego dialéctico lo abrió M. Frisch, de la Universidad de Hannover, quien poco después recibió una contundente respuesta por parte de F. A. Muller, de la Universidad de Utrecht, seguido en la misma línea por G. Belot, de la Universidad de Michigan.

Por momentos las discrepancias parecían desplazarse hacia la duda de si los contendientes se estaban refiriendo realmente al mismo cuerpo teórico, o cada uno de ellos se remitía a su propia versión de la electrodinámica clásica. Eso condujo a su vez, siquiera subsidiariamente, a la cuestión de

las distintas formulaciones de una misma teoría científica, y si todas ellas son intercambiables, o en qué grado lo son.

La agitación acabó por aquietarse, aunque las alegaciones expuestas durante la pugna fueron de tal calibre que cabría preguntarse si el asunto quedó saldado definitivamente, o sencillamente se halla en estado de letargo hasta reavivarse en cuanto aparezcan mejores argumentos. Por ello, con el fin de obtener una visión de conjunto acerca de esta discusión tan profunda como polifacética, el presente artículo comenzará remontándose, en el segundo y tercer apartado, a los orígenes históricos de esta controversia, situados en la comprensión científica de los fenómenos electromagnéticos elaborada a lo largo del siglo XIX. Después se expondrán en el cuarto epígrafe las tesis principales de la acometida de Frisch contra las bases de la electrodinámica clásica, contrapesadas por las correspondientes respuestas que él mismo recibió. El quinto y último epígrafe se dedicará al intento de trazar un balance de los argumentos vertidos en esta disputa.

II. SURGE LA ELECTRODINÁMICA

La magna obra del escocés James Clerk Maxwell (1831 – 1879) logró la unificación de los fenómenos eléctricos, magnéticos y ópticos al costoso precio de renunciar

simultáneamente a ciertos rasgos de las visiones del mundo de Faraday y de Newton (dos concepciones en muchos aspectos enfrentadas entre sí) sobre las cuales este autor decía sostenerse. Como la inmensa mayoría de sus contemporáneos, Maxwell suponía la existencia de un medio invisible e imponderable que ocupaba todo el espacio –el éter– y actuaba como soporte de la propagación de ondas luminosas, fuerzas electromagnéticas y gravitatorias [1]. La misión principal del éter consistía en satisfacer un requisito fundamentalmente metafísico, cual era el deseo de eludir las acciones a distancia. La idea de campo debida a Faraday resolvía la cuestión a falta de un sustrato material, en apariencia indispensable para justificar la realidad física de las líneas de fuerza de los campos. Ese era el papel que se adjudicaba entonces al éter decimonónico.

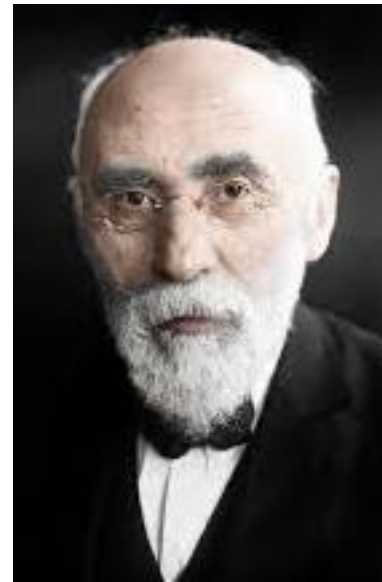
Maxwell, no obstante, construyó su propio modelo de éter asimilándolo a un sistema mecánico de rodillos y cojinetes en el que se prescindía de propiedades que hoy se nos antojan tan básicas como la carga eléctrica. Con todo y ello, obtuvo unas ecuaciones de campo sustancialmente idénticas a las que utilizamos en la actualidad considerándolas plenamente acertadas en el dominio macroscópico [2]. Esto no significa que a finales del siglo XIX faltasen autores dispuestos a retocar la teoría maxwelliana especificando las propiedades del éter, ya fuese como un fluido perfecto o como un sólido elástico. Pese a los esfuerzos de investigadores del calibre de Lord Kelvin, Lodge, Larmor, Heaviside o Fitzgerald, nada definitivo se consiguió al respecto [3].

El siguiente paso fue dado por el holandés Hendrik Antoon Lorentz (1823 – 1958), quien decidió reinterpretar la electrodinámica de Maxwell en 1892 añadiendo dos postulados [4]: (1º) Los campos electromagnéticos tienen su origen en una propiedad –la carga eléctrica– poseída por las partículas que a nivel microscópico constituyen la materia; (2º) El éter permanece perfectamente inmóvil ante el movimiento de la materia y de los campos electromagnéticos a ella asociados. Cuando el británico Joseph John Thomson (1856 – 1940) descubrió experimentalmente la partícula que hoy denominamos “electrón”, las hipótesis de Lorentz adquirieron un atractivo irresistible y las ecuaciones del campo electromagnético pasaron a denominarse “ecuaciones de Maxwell-Lorentz”.

A las cuatro ecuaciones de Maxwell que describen las variaciones recíprocas de los campos eléctricos y magnéticos en el espacio y el tiempo (ecs. 1 – 4), Lorentz añadió una quinta (la “fuerza de Lorentz”), referida a la fuerza electromagnética que actúa sobre una partícula cargada en movimiento (ec. 5). Como de costumbre, $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son, respectivamente los campos eléctrico y magnético, ρ es la densidad de carga eléctrica, $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente, $\mathbf{v}$ la velocidad de la partícula cargada y q el valor de su carga eléctrica.

El hecho de que la partícula cargada sobre la que actúan las fuerzas electromagnéticas porte su propio campo, el cual interactúa con los campos externos, anunciaba el advenimiento de serios problemas, como pronto advirtieron investigadores de la talla de Poincaré. Al gran científico francés no se le escaparon las consecuencias de la auto-

inducción electromagnética, en relación con el fenómeno denominado “reacción radiativa” [5].



Hendrik Antoon Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - (\partial \mathbf{E} / \partial t) = \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (5)$$

Una carga eléctrica sometida a un campo electromagnético se acelera y emite radiación, alterando la fuerza de Lorentz sobre ella, lo que a su vez modifica la aceleración de la partícula y su irradiación. De este modo, el campo electromagnético dependerá de las derivadas de la posición con respecto al tiempo en todos los órdenes hasta el infinito. De inmediato Poincaré se percató de que tan peculiar efecto se traducía en una componente añadida al valor total del campo proporcional a la aceleración, lo que a su vez podía interpretarse como una contribución electromagnética a la inercia de la partícula.

Consideraciones como estas animaron el denominado “programa electromagnético”, consistente en el intento de reducir las características puramente mecánicas de la materia, como la masa inercial, a subproductos de sus propiedades electromagnéticas. Desde semejante punto de vista, el genuino sustrato de la realidad física no sería sino el campo electromagnético y, por tanto, la mecánica clásica newtoniana debería subsumirse de algún modo en la electrodinámica de Maxwell-Lorentz convenientemente ampliada. Adalides en esta línea de pensamiento fueron los alemanes Wilhelm Wien (1864 – 1928) y Max Abraham (1875 – 1922).

El programa electromagnético se agotó en sí mismo, anegado por la marea de avances teóricos y experimentales acaecidos a comienzos del siglo XX, dejando abierto el interrogante sobre la completa reconciliación entre mecánica y electrodinámica. Incluso en un texto clásico como el de Landau y Lifshitz se reconoce la dificultad de tomar rigurosamente en cuenta ciertos efectos de difícil tratamiento. Así ocurre cuando tratamos de explicar la pérdida de energía por radiación en las cargas aceleradas por un campo externo introduciendo las llamadas “fuerzas de rozamiento de Lorentz” y se llega a la conclusión de que una carga que atravesase un campo electromagnético, al salir de él, experimentaría una autoaceleración ilimitada [6]:

«Se nos puede plantear la pregunta de cómo la electrodinámica, que cumple la ley de la conservación de la energía, puede conducir a un resultado absurdo en el cual una partícula libre aumenta indefinidamente su energía. La raíz de esta contradicción estriba en realidad en la presunta “masa” electromagnética “propia”, infinita, de las partículas elementales de que hablamos [...]. Al escribir en las ecuaciones del movimiento la masa infinita de la carga, en realidad le asignamos formalmente una “masa propia” negativa infinita, de origen no electromagnético, que conjuntamente con la masa electromagnética daría por resultado la masa finita de la partícula. Pero la substracción de una magnitud infinita de otra también infinita no es una operación matemática correcta, y esto ocasiona toda una serie de contradicciones entre las que figura la que acabamos de indicar.»

III. LA TEORÍA CLÁSICA DEL ELECTRÓN

No solo existían inquietudes sobre las interacciones entre campos y partículas, sino que el propio concepto de corpúsculo eléctricamente cargado se enfrentaba a muy graves obstáculos. Si suponemos que el electrón es una partícula puntual, una simple mirada a la ley de Coulomb revela que el campo eléctrico tendería a infinito, ya que al aproximarnos a un punto, $r \rightarrow 0$ y, obviamente, $F \propto 1/r^2 \rightarrow \infty$. Parece lógico que así sea, por cuanto estamos asignando una carga eléctrica finita a un volumen nulo con el resultado de una densidad de carga infinita. Esto no parecía muy tolerable, lo que empujó a los teóricos a ocuparse de modelos no puntiformes para los electrones [7, 8, 9, 10].

El hecho de admitir que el electrón podría ser un objeto extenso, una esfera de radio finito, no se hallaba exento de problemas. En ese caso habría de explicarse cómo es que el electrón no se descompone a causa de la repulsión electrostática entre sus partes. Poincaré señaló este escollo y propuso como solución la existencia de fuerzas no electromagnéticas que compensaban tal repulsión, las llamadas “tensiones de Poincaré”. En la electrodinámica cuántica también se necesitan fuerzas no electromagnéticas que equilibren las repulsiones eléctricas entre las diversas partes de un electrón extenso. Es decir, ni en la electrodinámica clásica ni en la cuántica el electrón se revela

como una entidad autosuficiente, puesto que siempre se necesitan campos compensatorios de las fuerzas internas que no pueden ser ellos mismos electromagnéticos.



Jules Henri Poincaré

En esencia, nos encontramos ante el mismo inconveniente mencionado por Landau y Lifshitz al final del apartado anterior. Se supone que la masa del electrón se compone de una parte electromagnética y otra que no lo es –quebrando así el paradigma puramente electromagnético de Abraham– esta última con signo negativo. El recurso a las tensiones de Poincaré para compensar la repulsión interna de una distribución esféricamente uniforme de carga (como suponía el caso pre-relativista), por otro lado, resultaba irrelevante en el análisis del modelo no puntual del electrón [11]:

«The arbitrariness of the Lorentz-Poincaré electron is much greater than the freedom we have in choosing the 00-component of the energy-momentum tensor for the mechanism stabilizing a spherical surface charge distribution. For starters, we can choose a (surface or volume) charge distribution of any shape we like –a box, a doughnut, a banana, etc. As long as this charge distribution is subject to the Lorentz-FitzGerald contraction, we can turn it into a system with the exact same energy-momentum-mass-velocity relations as the Lorentz-Poincaré electron by adding the appropriate non-electromagnetic stabilizing mechanism. Of course, as the analysis in this section, [...], shows, any closed static system will have the same energy-momentum-mass-velocity relations as the Lorentz-Poincaré electron, no matter whether it consists of charges, electromagnetic fields, and Poincaré pressure or of something else altogether. The only thing that matters is that whatever the electron is made of satisfies Lorentz-invariant laws. The restriction to static closed systems, moreover, is completely unnecessary. Any closed system will do. In short, there is nothing we can learn about the nature

and structure of the electron from studying its energy-momentum-mass-velocity relations.»

El modelo clásico del electrón, en todo caso, resultaba energéticamente inestable a falta de una ligadura que contrapesara la repulsión electrostática, aun cuando Weisskopf mostrase que su carga parecía hallarse dispersa sobre una región en la escala de la longitud de onda de Compton [12]. Como cabía suponer, el significado físico de la introducción de masas negativas despertó un reluctant escepticismo [13]. Sin embargo, parecía justificado esperar que la energía responsable de mantener la integridad del electrón fuese negativa si tenemos en cuenta que la energía del campo electromagnético se define como el trabajo necesario para reunir una carga elemental a partir de sus porciones infinitesimales separadas infinitamente entre sí. De hecho, la búsqueda de modelos clásicos para el electrón que se demuestren energéticamente estables sigue siendo una cuestión abierta en la actualidad, pese a las diversas respuestas ofrecidas hasta la fecha [14, 15].

El hecho es que la ontología de la electrodinámica clásica establece una distinción taxativa entre partículas y campos, lo que a su vez divide las leyes de la teoría en dos mitades: por un lado las ecuaciones de Maxwell, destinadas a explicar cómo las partículas cargadas crean los campos, y por otro la fuerza de Lorentz, concerniente al efecto de los campos sobre las cargas. De las ecuaciones maxwellianas poco cabe discutir porque el problema se halla en la fuerza de Lorentz, en principio compuesta por dos términos, una componente externa y otra interna. Los campos electromagnéticos externos a la partícula cargada, obviamente, son los responsables de la componente externa de la fuerza de Lorentz total, mientras que la componente interna, o “propia”, tiene su origen en la acción del campo sobre la propia partícula que lo genera. Es decir, $\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{F}_{int}$.

Difícilmente podremos caracterizar esa fuerza de Lorentz interna sin disponer de un modelo sobre la estructura de la partícula cargada que nos indique cómo los campos afectan el comportamiento de su propia fuente. La que podríamos llamar “auto-acción” se debe al hecho de que el campo coulombiano de diferentes partes de un electrón –supongámoslo así– afecta otras partes de ese mismo electrón como campos externos, creando unas fuerzas que no se equilibran cuando el electrón acelera. Por ello, solo cuando tengamos una aproximación a la estructura de la partícula podremos calcular la fuerza interna de Lorentz porque solo entonces podremos sumar los efectos sobre cada una de las diferentes partes del electrón de los campos producidos por el resto de la partícula (y aun así deberíamos plantearnos si existe alguna auto-acción de cada parte sobre sí misma).

La alternativa a tan abstrusa situación pasaría por tomar la energía irradiada por el electrón acelerado y calcular la fuerza sobre la partícula mediante la conservación de la energía. Esta estrategia conduce a la ecuación de Abraham-Lorentz, cuya deducción, desafortunadamente, arrastra un importante abanico de problemas debido a su carácter no newtoniano, ya que es una ecuación de tercer orden en la derivada de la posición con respecto al tiempo [16]. El principal obstáculo nace de la existencia de soluciones no

físicas que infringen la conservación de la energía, como es el caso de las autoaceleraciones que la ecuación predice incluso cuando la fuerza externa sobre la partícula se anula por completo.

Una generación más tarde los requisitos de la relatividad especial se incorporaron explícitamente en la llamada ecuación de Lorentz-Dirac. A pesar de su denominación, el británico Paul Dirac (1902 – 1984) no obtuvo esta ecuación como el límite puntual de un electrón extenso, sino que asumió el carácter puntiforme del electrón desde el inicio, suponiendo la validez de las ecuaciones de Maxwell en todas las escalas de distancia (excepto en el punto mismo ocupado por el electrón). No obstante, el gran físico inglés siempre insistió en que esta ecuación tenía un alcance puramente fenomenológico y aun así con restricciones, pues deben imponerse ciertas condiciones sobre las fuerzas externas presentes si queremos eludir la aparición de soluciones sin significado físico [17].

IV. ¿ES LA ELECTRODINÁMICA CLÁSICA INCONSISTENTE?

Las acusaciones de inconsistencias que Frisch iba a formular contra la electrodinámica clásica en la primera década del siglo XXI, así pues, contaban con venerables precedentes y un dilatado historial de discusiones al respecto. Ahora bien, la vertiente más novedosa de sus objeciones provino del carácter irrefutable con el que las revistió, –negando la posibilidad de que futuras ampliaciones teóricas las superasen– y de las consecuencias epistemológicas que pretendió extraer de ellas. De las presuntas incoherencias que detectaba en los fundamentos de la teoría electromagnética, Frisch coligió que cierto grado de inconsistencia debía ser inherente al conocimiento científico, por lo cual más que combatirlo tendríamos que aprender a adaptarnos a él.

El primer movimiento en esta dirección tuvo lugar por medio de un artículo publicado en 2004 con el sugerente título *Inconsistency in Classical Electrodynamics* [18]. El tema de este trabajo se amplió un año después dando paso a un libro completo titulado *Inconsistency, Asymmetry, and Non-Locality: A Philosophical Investigation of Classical Electrodynamics* [19]. Ya en 2009, un lustro tras el inicio de la polémica, Frisch publicó otro artículo [20] donde compendia las ideas principales recogidas en su libro de 2005 sin añadir contenidos sustancialmente nuevos.

El subtítulo del libro de Frisch (“Una investigación filosófica de la electrodinámica clásica”) manifiesta con toda claridad que la intención del autor es la de extraer todas las conclusiones físicas y metafísicas que se obtuviesen de las premisas por él defendidas en el texto. Quizás por ello su contenido se divide en dos grandes secciones: la primera parte se ocupa de las partículas y la segunda de los campos.

Los capítulos dedicados a los campos tratan la ausencia de ondas electromagnéticas adelantadas en el tiempo (cronorretrogradadas), pese a estar permitidas por las ecuaciones de Maxwell, así como las conexiones de este problema con la entropía y la termodinámica. Hacia el final de la obra también se mencionan los efectos no locales auspiciados por el efecto Aharonov-Bohm en relación con la descripción

cuántica de los potenciales electromagnéticos. Estos asuntos raramente podrían calificarse de inconsistencias, sino que más bien se trataría de cuestiones abiertas en curso de investigación, que conectan a su vez con interrogantes físicos mucho más amplios, cuyo desenlace no tiene visos de amenazar la coherencia de la teoría.

En realidad, es en los capítulos referidos a las partículas en el seno de la electrodinámica donde se encuentran las objeciones centrales contra el edificio teórico de la electrodinámica clásica. Frisch comienza asegurando que las contradicciones objeto de sus críticas se derivan directamente del que –en su opinión– es el esquema teórico universalmente empleado por los especialistas en electrodinámica. Esa formulación se sintetiza en cuatro suposiciones básicas: (1°) Existen partículas eléctricamente cargadas susceptibles de experimentar aceleraciones; (2°) las ecuaciones de Maxwell describen correctamente los campos electromagnéticos; (3°) la expresión de la fuerza de Lorentz sobre las partículas cargadas es válida; y (4°) la energía se conserva en las interacciones entre cargas y campos.

La conservación de la energía, más que como un postulado inicial, suele deducirse de las propias simetrías de la teoría, cuyas ecuaciones dinámicas pueden escribirse en forma lagrangiana o hamiltoniana para obtener de inmediato –mediante los teoremas de Noether– las correspondientes leyes de conservación.

Así pues, no parece justificado situar la conservación de la energía entre las premisas teóricas de la electrodinámica clásica; hacerlo así supone colocarnos en la misma posición de los científicos decimonónicos que carecían de la visión de conjunto que hoy tenemos de la teoría y de su evolución posterior. En ese mismo sentido, actualmente sabemos que el comportamiento microscópico de los electrones no pertenece en rigor al régimen clásico sino al cuántico, donde no es sorprendente que la física clásica ofrezca pobres resultados.

El nudo de la contradicción que Frisch señala se halla en el hecho de que, a su juicio, la ley de fuerzas electromagnéticas de Lorentz estipula que la variación de energía de una carga se debe tan solo al efecto de la componente externa de la fuerza, F_{ext} ; es decir, $F_{int} = 0$. Bajo esta condición, Frisch llega a una contradicción al deducir que una carga acelerada emite y no emite, al mismo tiempo, energía en forma de radiación [19].

Una réplica que de inmediato puede surgir entre quienes no respalden estas objeciones subrayaría que, precisamente esas inconsistencias, o el quebrantamiento de la conservación de la energía, revelan que la posición de Frisch es insostenible [21]. La autoconsistencia como requisito lógico y la conservación de la energía como principio regulativo sirven para cribar aquellas propuestas que aspiren a ser aceptadas en calidad de teorías científicas de pleno derecho. Los planteamientos que no cumplan con tales precondiciones se verán descartados desde el principio. De adoptarse semejante punto de vista la pregunta pertinente sería entonces por qué Frisch llega a las conclusiones que dice obtener de su versión de la electrodinámica clásica. Averiguar las raíces de esas aparentes inconsistencias también parece interesante como ejercicio de aclaración de las bases sobre las que descansa la teoría electromagnética [22].

En la inmensa mayoría de los casos reales la electrodinámica clásica se muestra capaz de proporcionar respuestas de extrema precisión prescindiendo de las autoacciones ($F_{int} \approx 0$), circunstancia que no impide reconocer su carácter de mera aproximación [23]. En el caso más general –como sabemos– el movimiento acelerado del electrón provoca variaciones en los campos que afectan el propio movimiento del electrón, lo que a su vez modifica los campos y así sucesivamente. En otras palabras, tanto los campos como sus fuentes resultan desconocidos, aun cuando sepamos que sus variaciones se hallan acopladas, lo que nos permite comprender la complejidad del problema. Las formas de abordarlo son muy numerosas, si bien todas ellas se basan en una variada gama de idealizaciones y simplificaciones adaptadas a una gran diversidad de casos [24].

En [20] Frisch realiza unas apreciaciones a primera vista sorprendentes:

«The problem is that any theory with self-interactions has to posit a model for charged particles and arguably there is no physically ‘well-behaved’ model of a discrete finitely charged particle that does not involve what *by the theory’s own lights* are idealizations.»

La pregunta que queda flotando en la mente del lector cuestionaría dónde está el problema que sugiere el párrafo precedente. Naturalmente que todas las teorías científicas, como construcciones que son del intelecto humano, involucran idealizaciones en mayor o menor grado y en cualquiera de sus niveles de sofisticación. Por ejemplo, la ecuación de los gases ideales –como su mismo nombre indica– es una idealización de alto nivel que se puede reemplazar en ciertas condiciones por la ecuación de Van der Waals, pretendidamente más cercana al comportamiento de los gases reales. Pero nunca criticaríamos la física de fluidos por ofrecernos teorías que nunca encajan a la perfección con la naturaleza real de los objetos que estudia.

Frisch entra en detalles un poco más adelante y puntualiza que las idealizaciones sometidas a su crítica resultan callejones sin salida que abocan a contradicciones insalvables. Por ejemplo, al tratar al electrón como una partícula puntual, chocamos con los valores infinitos del campo en la propia localización de la partícula. Y cuando consideramos modelos de partículas extensas evitamos las cantidades infinitas al precio de infringir las restricciones relativistas que prohíben la propagación de señales superlumínicas. No obstante, debemos acoger estas afirmaciones con suma cautela, pues hay motivos para desconfiar de las mismas.

En la electrodinámica clásica –y presumiblemente también en la cuántica– solemos encontrarnos con dos clases de problemas: aquellos en los que conociendo los campos y su variación con el tiempo hemos de calcular el efecto por ellos producido sobre cargas y corrientes, y aquellos otros en los que dada la distribución de cargas y corrientes debemos determinar los campos electromagnéticos engendrados. Sin embargo, existe un tercer tipo de problemas, mucho más complicado, en el cual tendríamos que resolver un conjunto

de ecuaciones acopladas en derivadas parciales en las que se tomen en cuenta ambas componentes, externa e interna, de los campos electromagnéticos utilizando la fuerza de Lorentz.

Frisch reconoce que de optar por esta vía las inconsistencias que él denuncia quedarían muy debilitadas, aunque señala que se trata de un camino inviable, minado por multitud de enredos conceptuales como las autoaceleraciones o el valor infinito para el potencial eléctrico de una carga puntual. Pero no hay tal, pues la energía electrostática de una carga puntual en reposo puede obtenerse mediante una integral sobre todo el espacio salvo una diminuta esfera de radio $d > 0$ tan pequeño como se quiera [25]. Esto es, exceptuando una esfera de radio d arbitrariamente minúsculo, la integral que define la energía electrostática de una carga puntual no diverge. ¿Qué ocurre en $d = 0$? En tal caso la divergencia de los cálculos nos dice que la teoría electromagnética no tiene cabida para partículas cargadas de tamaño nulo. Sencillamente constatamos que las cargas puntuales no son entidades propias de la electrodinámica clásica.

La alternativa a este planteamiento pasa por las técnicas de renormalización, que obtienen la masa experimental medida del electrón m_{exp} a partir de dos cantidades: la masa equivalente a la energía de su propio campo (incluyendo, en el caso cuántico, toda clase de partículas virtuales), m_f , y la masa que quedaría si tales campos desapareciesen, m_d . Para lograr la conclusión deseada m_d debe ser negativa y ajustarse con mucho cuidado, por cuanto los cálculos indican que tanto m_f como m_d tienden a infinito cuando se toman en cuenta todos los órdenes de corrección.

Frisch juzga esto como un problema insalvable cuando, en principio, no lo es. Puede resultar engorros –y a menudo lo es– calcular $m_{exp} = m_f - m_d$, pero lo cierto es que la diferencia de dos series divergentes puede muy bien converger por sí misma [26]. Por fortuna, así ocurre con la suficiente asiduidad para que las técnicas de renormalización constituyan una herramienta útil y versátil en la física teórica, pese a su discutible trasfondo interpretativo.

Tras un análisis cuidadoso, también es posible contemplar la pre-aceleración y a la auto-aceleración como artefactos de cálculo causados por las complejidades inherentes a los problemas en los que consideramos las interacciones mutuas entre cargas y campos. Esta clase de aceleraciones no físicas desaparecen cuando reformulamos la ecuación de Abraham-Lorentz en forma integro-diferencial e imponemos las adecuadas condiciones de contorno [27, 28, 29]. Y no es el único ejemplo; tampoco sufren estos problemas la ecuación de Abraham modificada [15] y la ecuación de Yaghjian [30].

V. CONCLUSIONES

La electrodinámica clásica introdujo por primera vez una duplicidad irreducible en su base ontológica, formada por partículas y campos. Las partículas idealizaban las porciones discretas de materia como puntos sin volumen, perfectamente localizables en el espacio físico, mientras los campos constituían una nueva clase de entidad física

continua y extensa –presente en todo el espacio, en principio– cuya fuente era la propia materia que también se veía afectada por su influencia. Las propiedades de partículas y campos se mostraban tan dispares que casi deberíamos sorprendernos de la belleza y potencia de la unificación llevada a cabo por Maxwell con los posteriores retoques de Lorentz.

Sin embargo, el doble papel de la materia como sujeto activo (los crea) y como objeto pasivo (los sufre) de los campos no podía dejar de traer complicaciones en algún momento. Y de hecho el desarrollo de la teoría electromagnética constató la existencia de problemas sin solución cerrada, especialmente en los casos en los que se deseaba tener en cuenta simultáneamente ese doble papel mencionado más arriba infiriendo de él una descripción dinámica completa de campos, cargas y corrientes.

La sutileza de los caminos abiertos para rebasar tales obstáculos llegó a ser de tal calibre que se fue confundida con la existencia de paradojas, contradicciones e inconsistencia por autores como Frisch. Un análisis más profundo, no obstante, revela que la electrodinámica cuenta con problemas sin resolver, como todas las ciencias dignas de tal nombre, pero carece de verdaderas inconsistencias en un nivel fundamental. Las dificultades conceptuales que sin duda posee se trasladan en su modalidad específica al mundo cuántico, hasta tal punto de que la electrodinámica cuántica, más que una teoría fundamental de la que se deriva la versión clásica, podría tomarse como una extensión de la electrodinámica clásica a un dominio en el que sus conceptos y estrategias pierden validez [31].

Pese a todo, el debate mantenido por Frisch con el resto de la comunidad científica a cuenta de las supuestas inconsistencias de la electrodinámica clásica también ha servido para reavivar la vieja controversia sobre la fidelidad con que nuestras teorías científicas representan las propiedades y evolución del mundo natural. El significado de una teoría, las hipótesis semánticas que permiten interpretar su formalismo, no queda al margen de los debates de la comunidad profesional involucrada. Otorgar nuestra confianza a la veracidad, más o menos aproximada, de unas determinadas premisas siempre resulta una cuestión de grado. Y con frecuencia es discutible si una inferencia merece la misma confianza –siempre provisional– que sus premisas, las cuales, a su vez, pueden presentar un nivel de confirmación muy variable y dependiente del momento histórico.

De ahí que una imagen estrictamente lakatosiana de las teorías científicas, con un núcleo duro y un cinturón protector de hipótesis auxiliares, no parezca muy representativa de las investigaciones reales. Precisamente a través de esas fisuras entre las suposiciones fundamentales y las accesorias penetran equívocos como el de Frisch. Es en esas fronteras borrosas donde pueden anidar los postulados implícitos que tácitamente se aceptan (como $\mathbf{F}_{int} = 0$, la condición de frontera de Sommerfeld para la radiación o la variación lenta de los campos en el llamado límite adiabático) dando por descontada su validez o aplicándolos en un rango de fenómenos al que no corresponden.

Actualmente sabemos que la electrodinámica clásica ha de ser sustituida en ciertos ámbitos por su versión cuántica,

de la cual la teoría clásica se comporta, en cierto modo, como una aproximación excelente. Ciertamente es que diferentes aproximaciones a una misma teoría subyacente pueden resultar mutuamente incompatibles dependiendo de las suposiciones adoptadas en la simplificación. Pero más allá de la inconsistencia mutua entre aproximaciones parciales, lo que nunca puede darse es la aparición de contradicciones flagrantes dentro de un mismo armazón teórico, como Frisch pretendió haber establecido en el marco de la electrodinámica clásica.

En definitiva, la descalificación radical que Frisch lanzó contra la electrodinámica clásica no se puede sostener como una objeción insalvable contra cualquier forma de teoría electromagnética. Tiene mérito como recordatorio de los problemas formales que aún encierran construcciones teóricas generalmente consideradas libres de dificultades, pero no constituye una prueba irrefutable de la inconsistencia de uno de los legados más importantes de la física del siglo XIX cuyos beneficios aun hoy disfrutamos.

REFERENCIAS

- [1] Whittaker, E. T., *A History of the Theories of Aether and Electricity. From the Age of Descartes to the Close of the Nineteenth Century* (Longmans, Green, & Co., London, 1910).
- [2] Maxwell, J.C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, vol. I & II (Clarendon Press, Oxford, 1873).
- [3] Berkson, W., *Las teorías de los campos de fuerza* (Alianza Universidad, Madrid, 1995).
- [4] Lorentz, H. A., *La théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants*, Arch. Néerl. Sci. **25**, 363–552 (1892).
- [5] Poincaré, H., *Sur la Dynamique de l'Électron*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **21**, 129–175 (1906).
- [6] Landau, L. y Lifshitz, E., *Curso abreviado de física teórica* (Editorial MIR, 2ª Edición, Moscú, 1979).
- [7] Lorentz, H. A., *Theory of Electrons* (Teubner, Leipzig/Stechert, New York, 1909).
- [8] Feynman R.P., *The Feynman lectures on Physics*, vol. II (Addison & Wesley, Reading, 1964).
- [9] Rohrlich, F., *Classical Charged Particles* (World Scientific, Singapore, 2007).
- [10] Pearle, P., *Classical Electron Models*, in Teplitz, D. (ed.), *Electromagnetism. Paths to research*, Ch. 7 (Plenum Press, New York – London, 1982).
- [11] Janssen, M. and Mecklenburg, M., *From classical to relativistic mechanics: Electromagnetic models of the electron*, in Hendricks, V.F. et al. (eds.), *Interactions: Mathematics, Physics and Philosophy*, 65–134 (Springer, Dordrecht, 2007).
- [12] Weisskopf, V.F., *On the Self-Energy and the Electromagnetic Field of the Electron*, Phys. Rev. **56**, 72 (1939).
- [13] Dirac, P. A. M., *Classical theory of radiating electrons*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **167**, 148–169 (1938).
- [14] Rohrlich, F., *Dynamics of a charged particle*, Phys. Rev. E **77**, 046609 (2008).
- [15] Rohrlich, F., *The dynamics of a charged sphere and the electron*, Am. J. Phys. **65**, 1051–1056 (1997).
- [16] Muller, F., *Inconsistency in Classical Electrodynamics?*, Philosophy of Science **74**, 253–277 (2007).
- [17] Ribarič, M., L. Šušteršič, L., *Conservation Laws and Open Questions of Classical Electrodynamics* (World Scientific, Singapore 1990).
- [18] Frisch, M., *Inconsistency in Classical Electrodynamics*, Philosophy of Science **71**, 525–549 (2004).
- [19] Frisch, M., *Inconsistency, Asymmetry, and Non-Locality: A Philosophical Investigation of Classical Electrodynamics* (Oxford university Press, Oxford – New York, 2005).
- [20] Frisch, M., *Philosophical Issues in Electromagnetism*, Philosophy Compass **4**, 255 – 279 (2009).
- [21] Belot, G., *Is Classical Electrodynamics an Inconsistent Theory?*, Canadian Journal of Philosophy **37**, 263–82 (2007).
- [22] Vickers, P., Frisch, Muller, and Belot on an *Inconsistency in Classical Electrodynamics*, The British Journal for the Philosophy of Science **59**, 767–792 (2008).
- [23] Smorenburg, P. W., Kamp, L. P. J., Luiten, O. J., *Classical formulations of the electromagnetic self-force of extended charged bodies*, The European Physical Journal H **39**, 283–302 (2014).
- [24] Gralla, S., Harte, A., Wald, R., *A Rigorous Derivation of Electromagnetic Self-force*, Physical review D: Particles and fields **80**, 52 (2009).
- [25] Rohrlich, F., *Classical Self-Force*, Physical Review D **60**, 84017–84022 (1999).
- [26] Griffiths, D., *Introduction to Electrodynamics* (Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 1999).
- [27] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics* (Wiley & Sons, New York, 1975).
- [28] Cook, R. J., *Radiation Reaction Revisited*, American Journal of Physics **52**, 894–895 (1984).
- [29] Cook, R. J., *Radiation Reaction Revisited — One More Time*, American Journal of Physics **54**, 569–570 (1986).
- [30] Yaghjian, A. D., *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere: Updating the Lorentz-Abraham Model* (Springer-Verlag, Berlin & New York, 1992).
- [31] Bacelar, M., *The relation between classical and quantum electrodynamics*, THEORIA **26**, 51–68 (2011).

Determination of Period and Frequency of Oscillatory Systems: A Non-Traditional Approach Through Energy



ISSN 1870-9095

Leonardo Sampaio Motta¹, André da Silva Ramos², Marcio Augusto Sampaio de Carvalho³, Denizar Rodrigo Barbosa³, Rafael de Souza Dutra⁴, Antônio Carlos Fontes dos Santos²

¹Colégio Brigadeiro Newton Braga, Diretoria de Ensino da Aeronáutica, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

²Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil

³Universidade Federal do Oeste da Bahia, Avenida Manoel Novaes 1064, Centro; Bom Jesus da Lapa-BA.

⁴Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brazil.

E-mail: toni@if.ufrj.br

(Received 9 November 2025, accepted 27 December 2025)

Abstract

This paper proposes an alternative theoretical approach to analyzing oscillatory systems in situations involving translation or rotation, emphasizing energy as a methodological tool. Traditionally, the analysis of these systems is performed through the direct application of Newton's second law, which can pose conceptual challenges for high school students involving vector addition and decomposition. In this study, we discuss how elastic constants—the restoring characteristic—as well as the moment of inertia—the inertial characteristic—and, consequently, the period and frequency of oscillation, emerge naturally from the analysis of the system's mechanical energy, without using any approach explicitly involving rotational dynamics. The methodology presented aims to foster the development of critical thinking, as well as skills and strategies associated with solving complex problems, offering an effective alternative to traditional approaches, in a sort of introductory essay on analytical mechanics. We also present a proposal for a conceptual discussion associated with an experimental activity; the latter can be used by the teacher to spark students' curiosity and spark discussion on the topic in the classroom.

Keywords: Rotational dynamics, Oscillatory motion, period, frequency, Physics teaching.

Resumen

Este artículo propone un enfoque teórico alternativo para el análisis de sistemas oscilatorios en situaciones de traslación o rotación, haciendo hincapié en la energía como herramienta metodológica. Tradicionalmente, el análisis de estos sistemas se realiza mediante la aplicación directa de la segunda ley de Newton, lo que puede plantear desafíos conceptuales para estudiantes de secundaria que involucran la adición y descomposición de vectores. En este estudio, analizamos cómo las constantes elásticas (la característica restauradora), así como el momento de inercia (la característica inercial) y, en consecuencia, el período y la frecuencia de oscilación, surgen naturalmente del análisis de la energía mecánica del sistema, sin utilizar ningún enfoque que involucre explícitamente la dinámica rotacional. La metodología presentada busca fomentar el desarrollo del pensamiento crítico, así como las habilidades y estrategias asociadas con la resolución de problemas complejos, ofreciendo una alternativa efectiva a los enfoques tradicionales, en una especie de ensayo introductorio a la mecánica analítica. También presentamos una propuesta para una discusión conceptual asociada a una actividad experimental; esta última puede ser utilizada por el profesor para despertar la curiosidad de los estudiantes y generar debate sobre el tema en el aula.

Palabras clave: Dinámica rotacional, Movimiento oscilatorio, período, frecuencia, Enseñanza de la Física.

I. INTRODUCTION

In textbooks typically used in regular high school, it is stated, without formal proof, that a particle oscillating slightly around a stable equilibrium position (potential well) under the action of conservative forces performs a harmonic movement (HM). The usual practice is to seek examples

(illustrations) that corroborate this assertion, showing that the resulting force on the particle in these cases is of the algebraic form $FR = -kx$ (x = algebraic displacement from the equilibrium position), the well-known Hooke's Law. Then, by comparison with the mass-spring system, we obtain what would become the "effective force constant" (k_{ef}) for a given physical situation. If m is the mass of the oscillating body, we

obtain the angular frequency $\omega = \sqrt{\frac{k_{ef}}{m}}$ and the period $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{ef}}}$. Examples commonly involve applications of SHM in various fields of physics, such as hydrostatics, gravitation and electrostatics [1, 2, 3] and [4].

When we have a system of discrete particles or even a rigid body, the associated difficulties become even greater. For these cases, we propose in this article a theoretical approach in which we choose to develop the theory through energy—along with the comparison (analogy) with the mass-spring system—with one of the main objectives being to obtain and discuss, both qualitatively and quantitatively, the following quantities: the "effective force constant" (k_{eff})—which, in oscillatory movements, relates to the restoring forces and torques—and also the system's "coefficient of inertia," which, in rotational movements around an axis, corresponds to the moment of inertia. These quantities determine the period and frequency of such movements.

We will discuss these concepts through a case study, analyzing a physical asymmetric pendulum without directly using the equations of rotational dynamics, as is done in higher education (e.g., Newton's Second Law in angular form, torque = moment of inertia $\times$ angular acceleration). Thus, one of the article's objectives is to arrive at the concept of moment of inertia in a different way from that traditionally used. Generally, the moment of inertia is quantitatively introduced when analyzing the kinetic energy of a system of solid particles (or rigid body) rotating around an axis [1]. If such an expression involves the inertial masses of the particles, in the authors' view, the moment of inertia as a physical—in fact, a coefficient of rotational inertia—is merely suggested; clarification would come through Newton's Second Law in angular form.

We understand that the methodological-didactic approach to theoretical development using energy broadens the range of situations that can be analyzed in a high school context. We can say that, theoretically, this article addresses problems involving oscillatory systems by subtly and fundamentally introducing some concepts of analytical mechanics, such as generalized coordinates and the elimination of binding forces. After all, as we know from mechanics, approaching some problems using the linear force-momentum approach can be quite laborious, even making it virtually impossible to solve certain problematic situations in some cases. In such cases, analytical methods involving energy can prove to be a fruitful option.

After the theoretical development of the physical pendulum, a didactic activity of discussion of concepts is proposed, involving some points that we consider important and interesting, with experimental results as auxiliary elements.

II. LITERATURE REVIEW

Regarding the theoretical development of HM via energy to determine the period and frequency of small oscillations, when researching some textbooks most commonly used in

the basic cycle of undergraduate studies [1, 2, 3], and [4], we noticed that this method was addressed in only two solved exercises in reference [4]: one concerning the oscillation of a U-shaped liquid column and the other concerning the oscillation of a diatomic molecule. In turn, reference [1] follows the line used by us in this article, as its development falls within the scope of physics and mathematics commonly seen in high school. It is worth noting that in the oscillation of a liquid column, there is the particularity, for an incompressible fluid, that all the particles that make up the system have the same magnitude of velocity. In this article, we explore slightly more general situations in which the different parts of the system have their velocities related through the bonds respected by the system.

The other topic covered in this article, rotational dynamics, requires students to hone their critical thinking skills to understand abstract concepts such as moments of inertia, equilibrium, and torque. However, there are significant obstacles and difficulties in approaching this topic.

A study involving 70 11th-grade high school students from the SMA (Brazilian State School of Social Sciences) employed a descriptive quantitative methodology to investigate the topic [5]. Data was collected through a multiple-choice test based on five indicators of critical thinking: elementary clarification, basis for decision-making, inference, advanced clarification, and strategies and tactics. The results revealed that 51.4% of the students had low critical thinking skills, 34.3% moderate, and only 14.3% high. Performance varied across the indicators, with the best results in elementary clarification (61%) and the worst in advanced clarification (21.4%) and strategies and tactics (25.2%). This indicates that students have greater ease with basic understanding and recognition of fundamental concepts of rotational dynamics, but encounter difficulties in formulating inferences, making evidence-based decisions, and developing strategies to solve more complex problems.

These difficulties may be associated with traditional teaching approaches, which prioritize the memorization of concepts and formulas over the active exploration of physical principles and investigative problem-solving [5]. In this sense, a teaching model based on a problem-solving laboratory (PSL), as proposed by [6], highlights the importance of active and experimental learning. This model allows students to participate in the learning process through experiments, data analysis, and discussion of results, and has been shown to improve conceptual understanding and the development of scientific skills, such as hypothesis formulation and analysis of experimental errors.

The difficulties faced by students in physics can have several causes. The studies developed in [7] highlight the lack of connection between theory and practice, the difficulty in manipulating mathematical equations (especially formulas for moment of inertia and torque), the fragmented understanding of concepts, and the absence of structured problem-solving strategies. [8] add that most students have low skills in areas such as basic clarification, basic support, and advanced clarification, essential for analyzing problems, presenting evidence-based facts, and evaluating issues logically.

Conventional teaching methods, such as exclusively expository classes and traditional teaching materials, make it difficult to visualize and understand the concepts of rotational dynamics. The content is particularly challenging due to the need to visualize rotational motion, calculate the moment of inertia, and understand the relationships between complex physical quantities, which directly impacts students' ability to provide clear explanations or solve problems logically and systematically.

The work of [9] presents a systematic review on the teaching of oscillations, which offers a solid basis for developing teaching materials, technology-based instructional media and educational instruments related to oscillations, emphasizing the need to expand research on effective teaching methods on this topic, offering practical insights for educators and researchers.

Finally, the study by [10] shows that a significant portion of future science teachers have important conceptual difficulties on the topic of vibration and in this work, we seek to strengthen the fundamental concepts of basic physics that are essential for physics teachers.

III. METHODOLOGY AND RESULTS

We will analyze an asymmetrical physical pendulum that can rotate frictionlessly around a horizontal axis, where we will develop the concept through conservation of mechanical energy. In the authors' view, the analysis of such exercises not only provides examples of the fundamental points of the theoretical development we intend to present but also allows for a qualitative and quantitative discussion of important concepts involving physical pendulums, a discussion covered in the didactic proposal presented below.

A. Theoretical Development of the Case Study

Let the system consist of two point masses, m and M ($m < M$), rigidly connected by two rods of negligible mass of lengths ℓ and L ($\ell < L$), which form an angle β between them, this system capable of rotating with negligible friction around a horizontal axis, as shown in Figure 1.

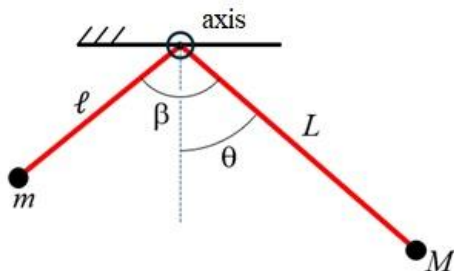


FIGURE 1. Asymmetrical physical pendulum that oscillates in a vertical plane.

Neglecting any friction or buoyancy forces, the two-mass system is acted upon by the connecting forces exerted by the rods and the weight forces. In this case, the system is conservative.

It is known from the study of statics that a system has two equilibrium points: the first, unstable, with the system's center of mass vertically above the suspension point, and the second, stable, with the system's center of mass vertically below the suspension point. We will analyze small oscillations of the system around the stable equilibrium position.

Equalizing the intensities of the torques of the weights, to calculate the equilibrium positions:

$$m g \ell \sin (\beta - \alpha) = M g L \sin \alpha \quad (1)$$

$$\alpha = \arctan [m \ell \sin \beta / (m \ell \cos \beta + M L)] \quad (2)$$

Considering the horizontal plane that passes through the axis as the reference level for the gravitational potential energy (height; $z = 0$), when the rod forms, at an instant t , an angle θ with the vertical direction, as shown in figure 1, we have the following expressions for the kinetic (E_k) and potential (E_p) energies of the system:

Equilibrium position α

$$E_{p1} = -m g \ell \cos (\beta - \alpha) - M g L \cos \alpha, \quad (3)$$

$$E_{k1} = \frac{m u^2}{2} + \frac{M U^2}{2}. \quad (4)$$

Since both masses have the same angular velocity (ω) due to the bond, the relationship between the linear velocities is $(u / \ell) = (U / L) = \omega$. Then putting the kinetic energy of the system in terms of the velocity U of the larger mass M :

$$E_{k1} = \frac{(m \ell^2 + M L^2) U^2}{2 L^2}. \quad (5)$$

Generic position θ

$$E_{p2} = -m g \ell \cos (\beta - \theta) - M g L \cos \theta. \quad (6)$$

Similarly, with V being the velocity of the larger mass:

$$E_{k2} = \frac{(m \ell^2 + M L^2) V^2}{2 L^2}. \quad (7)$$

Expressing the generic angular coordinate (θ) in terms of the angular coordinate at equilibrium (α) and the angular displacement from the equilibrium position ($\Delta\theta$), we have:

$$\theta = \alpha + \Delta\theta \quad (8)$$

From the conservation of mechanical energy:

$$E_{M1} = E_{M2} \rightarrow E_{p1} + E_{k1} = E_{p2} + E_{k2} \quad (9).$$

From the previous equations:

$$\frac{(m \ell^2 + M L^2) U^2}{2 L^2} = (1 - \cos \Delta\theta) [m g \ell \cos (\beta - \alpha) + M g L \cos \alpha] +$$

$$(\sin \Delta\theta) \left[-m g \ell \sin(\beta - \alpha) + M g L \sin \alpha \right] + \frac{(m l^2 + M L^2) v^2}{2 L^2}. \quad (10)$$

Since the equilibrium equation (eq. 1a) is precisely $m g \ell \sin(\beta - \alpha) = M g L \sin \alpha$; it follows that

$$\frac{(m l^2 + M L^2) U^2}{2 L^2} = (1 - \cos \Delta\theta) [m g \ell \cos(\beta - \alpha) + M g L \cos \alpha] + \frac{(m l^2 + M L^2) v^2}{2 L^2}. \quad (11)$$

Since these are small oscillations, we will consider approximations referring to small angles and binomial expansions.

$$\Delta\theta \approx \sin \Delta\theta, \quad (12)$$

$$\text{and } (1 - \cos \Delta\theta) \approx (\Delta\theta)^2 / 2. \quad (13)$$

Geometrically, the linear displacement of the larger mass M along the arc of the circle can be approximated by a straightline segment of length X (approximation already known from the simple pendulum),

$$\Delta\theta \approx (X / L) \quad (14)$$

From equations 11 to 14, in equation 10, we have:

$$\frac{(m l^2 + M L^2) U^2}{2} = \frac{g [m l \cos(\beta - \alpha) + M L \cos \alpha] X^2}{2} + \frac{(m l^2 + M L^2) v^2}{2}. \quad (15)$$

The first term is the maximum kinetic energy of the system, which is reached at the stable equilibrium position. The equation corresponding to (15), in a mass-spring system of mass m' (inertial characteristic) and elastic force constant k' (restoring characteristic), taking the mechanical energy at the points of generic abscissa x and equilibrium ($x = 0$) is:

$$\frac{m' u'^2}{2} = \frac{m' v'^2}{2} + \frac{k' x^2}{2}. \quad (16)$$

Note that in the physical pendulum analyzed here, the movement of any of the masses depends, due to the geometric constraint, on the following characteristics of the system as a whole: i) the inertia associated with the rotation around the axis; ii) restoring characteristic.

It is concluded, then, comparing equations (15) and (16), that

$$m l^2 + M L^2 = \text{moment of inertia of the system}, \quad (17)$$

$$g [m l \cos(\beta - \alpha) + M L \cos \alpha] = \text{"effective force constant" of the system}. \quad (18)$$

The moment of inertia (I) and the "effective force constant" (k_{eff}) emerge, both qualitatively and quantitatively. The oscillation period is

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2 + M L^2}{g [m l \cos(\beta - \alpha) + M L \cos \alpha]}}. \quad (19)$$

Specific cases: i) $\beta = 0^\circ$ (which implies $\alpha = 0^\circ$, stable; or $\alpha = \pi$, unstable); masses "on the same side" (see Fig. 2), in that case:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2 + M L^2}{g (M L + m l)}}. \quad (20)$$

ii) $\beta = 180^\circ$ (which implies $\alpha = 0^\circ$, stable; or $\alpha = 180^\circ$, unstable); diametrically opposite masses (see Fig. 3). In that case:

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m l^2 + M L^2}{g (M L - m l)}}. \quad (21)$$

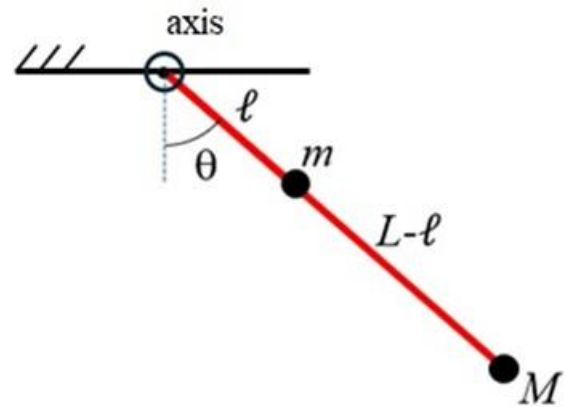


FIGURE 2. Asymmetrical physical pendulum that oscillates in a vertical plane for $\beta = 0^\circ$.

For $\beta = 180^\circ$, the torques due to gravitational forces have opposite directions (causing rotational effects in opposite directions); or, in terms of potential energy, while one mass rises, the other descends, reducing the effects of potential energy variation and, consequently, the gain of kinetic energy (and speeds).

In the case $\beta = 0^\circ$, the torques due to gravitational forces have the same direction, causing overlapping rotational effects; or, in terms of potential energy, the two masses rise and fall together, accentuating the effects of potential energy variation and, consequently, the gain of kinetic energy (and speeds), resulting in a shorter period compared to the previously mentioned case.

B. Teaching Proposal

The authors understand the multiplicity of possibilities and objectives involved in each activity, whether theoretical or experimental. Here are just a few comments and suggestions regarding points to be discussed with the students: i) Highlight that the moment of inertia mathematically depends on the sum of products, where each term is directly proportional to the mass and the square of the distance of the

terms to the axis of rotation; ii) Possibility of introducing the generalized expression for the moment of inertia for a system of n discrete particles $I = \sum_1^n m_i r_i^2$, where the derivation of the expression for rotational kinetic energy $E_k = \frac{I \omega^2}{2}$ occurs naturally from equations (5) and (7), and definition (17); iii) Discuss the dimensionality aspect of the formulas obtained; iv) Develop the scheme referring to $\beta = 180^\circ$ and ask students to investigate the changes that theoretically exist for the case of $\beta = 0^\circ$, regarding torques, energy variations, and their implications; v) As is known from the dynamics of rotation, when analyzing physical pendulums, it cannot be considered that all the mass of the physical pendulum is concentrated in the center of mass and treat it as simple pendulums, where the length of the “equivalent simple pendulum” is the distance between the center of mass (CM) and the axis of rotation [1, 2, 3] and [4].

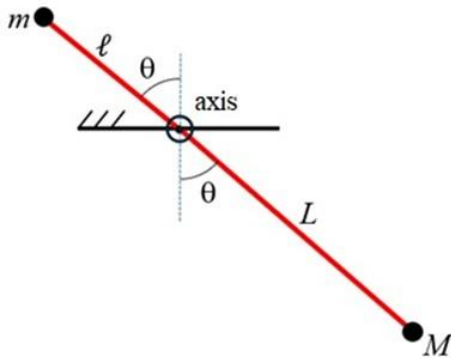


FIGURE 3. Asymmetrical physical pendulum that oscillates in a vertical plane for $\beta = 180^\circ$.

The following questions could be posed to students: could we replace the masses with a single mass located at the center of mass and think of the period of the physical pendulum in terms of an equivalent simple pendulum? In this case, it is possible to introduce the concept of radius of gyration.

Taking the axis of rotation as a reference point (origin), the centers of mass (CM) of the systems constituted by the two masses are at distances from the axis of rotation, for the cases $\beta = 0^\circ$ and $\beta = 180^\circ$ respectively:

$$d_3 = (ML + m \ell) / (m + M) \quad \text{e} \quad d_4 = (ML - m \ell) / (m + M),$$

$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{(ML + m \ell)}{g(M + m)}}, \quad (22)$$

and

$$T_4 = 2\pi \sqrt{\frac{(ML - m \ell)}{g(M + m)}}. \quad (23)$$

In such predictions, T_3 and T_4 , which are in themselves already wrong, lead us to $T_3 > T_4$, which is at odds with what is expected qualitatively, according to the previous conceptual argument (i and ii).

When considering masses and lengths with very close values $\gamma = (M/m) \approx 1$; $\sigma = (L/\ell) \approx 1$, the period T_4 (23) would approach zero and not “infinity”, which shows a great mistake in the reasoning used to obtain such an expression.

Comparing the expressions for the periods of the physical pendulums (20) and (21) with the expression for the period of the simple pendulum, the true associated radii of gyration (v) would be:

$$d_1 = \frac{m \ell^2 + M L^2}{M L + m \ell} \quad (\text{for } \beta = 0^\circ). \quad (24)$$

$$d_2 = \frac{m \ell^2 + M L^2}{M L - m \ell} \quad (\text{for } \beta = 180^\circ). \quad (25)$$

For the case $\beta = 0^\circ$, it is possible to demonstrate that the period of the physical pendulum T_1 (20) is greater than that of a physical pendulum of length ℓ and less than that of a simple pendulum of length L ; or, in other words, that the distance d_1 obtained previously is greater than ℓ and less than L . Demonstrating:

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} < 2\pi \sqrt{\frac{m \ell^2 + M L^2}{g(M L + m \ell)}} < 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \leftrightarrow \ell < \frac{m \ell^2 + M L^2}{(M L + m \ell)} < L.$$

The previous equation is true for any values of ℓ and L , with $\ell < L$. vi) Compare the theoretical predictions for the periods T_1 (20), T_2 (21), T_3 (22), and T_4 (23), and also for the associated radii of gyration d_1 , d_2 , d_3 , and d_4 , respectively, with the experimental results; vii) Include the influence of the rods, asking students to discuss how the expressions for the periods (and radii of gyration) would be altered.

Note that: representing M' and m' as the masses of the rods of greater and lesser lengths, respectively, and knowing that $I_{\text{bars}} = 1/12(M'L^2 + m'\ell^2)$, the general expression for the period T (19) takes the following form

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m \ell^2 + L^2 + I_{\text{bars}}}{g[(m + \frac{M'}{2}) \ell \cos(\beta - \alpha) + (M + \frac{M'}{2}) L \cos \alpha]}}. \quad (26)$$

C. Apparatus and Experimental Results

The experiment was conducted with metal bars, cylinders, and fasteners, whose masses and characteristic dimensions were determined with appropriate measuring instruments, including their respective uncertainties. These procedures ensured the reliability of the data obtained and allowed comparison with the adopted theoretical model. Figures 3 and 4 illustrate the experimental setup and the main aspects observed. The set up specifications are:

$$M_{\text{minor bar}} = (31,23 \pm 0,05) \text{ g};$$

$$M_{\text{bigger bar}} = (91,20 \pm 0,05) \text{ g};$$

$$M_{\text{fixing screw}} = (6,08 \pm 0,05) \text{ g};$$

$$M_{\text{cylinders}} = m_{\text{cylinders}} = (400,42 \pm 0,05) \text{ g};$$

$$L = (90 \pm 1) \text{ cm}; \quad \ell = (30 \pm 1) \text{ cm}.$$



FIGURE 4. Set of materials used in the experiment: cylinders, metal bar and fixing elements. Regarding the measurement of periods, the sensor indicated the time interval of each oscillation.

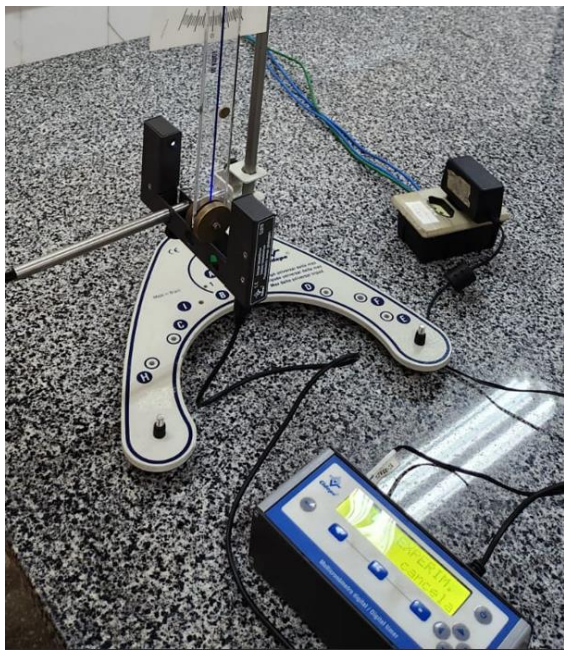


FIGURE 5. Experimental apparatus.

In equations (20) to (25), the values of M and m used will be the masses of the cylinders fixed to the bars added to the masses of the fixing screws; that is, $M = m = (406.5 \pm 0.1)$ g. Tables I and II present comparisons between experimental and theoretical values for the oscillation periods.

TABLE I. Comparison between the theoretical and experimental values for the oscillation periods for $\beta = 0^\circ$.

d_1 (cm)	T_1 (s) (theory)	d_3 (cm)	T_3 (s)	$T_{\text{experiment}} \text{ (s)}^*$
57.5	1.74	46	1.36	(1.73 ± 0.01)

TABLE II. Comparison between the theoretical and experimental values for the oscillation periods for $\beta = 180^\circ$.

d_2 (cm)	T_1 (s) (theory)	d_4 (cm)	T_4 (s)	$T_{\text{experiment}} \text{ (s)}$
115	2.46	23	0.96	(2.39 ± 0.01)

For $\beta = 5^\circ$
 $\alpha = 1,62^\circ$; $T \approx T_1$

The two previous tables indicating a discrepancy between predictions based on a mistaken line of reasoning involving radii of gyration (d_3, T_3) and (d_4, T_4) and the experimental result, may constitute a trigger for a conceptual change.

IV. CONCLUSIONS

In this paper, we present an alternative approach to HM, regarding the quantities period and frequency, accessible physically and mathematically within the typical high school curriculum. While this approach is not necessarily the simplest (at least from an algebraic standpoint), when compared to the typical solution in the basic undergraduate cycle using Newton's Second Law in angular form ($\tau R = I\alpha$), it does provide high school students with a better understanding of the "power" of analytical methods. Equally important is addressing the concept of moment of inertia not only qualitatively, as is routinely done (both theoretically and experimentally), but also quantitatively; we hope, in this way, to contribute in some way to bridging the gaps identified.

In the authors' view, the transition from the discrete situation $I = \sum_1^n m_i r_i^2$ to the continuous one $\int r^2 dm$ becomes purely mathematical, and no longer physical (In this case, the results of the calculation could be presented to high school students, which would greatly expand the range of possible situations to be addressed.

The condition for approaching the problems along the path we followed, in the previous case study and also in general, is that the system of particles is subject to constraints such that it is possible to express both the total kinetic energy of the system and the total potential energy, as a function of the linear velocity and the linear displacement from the equilibrium position of a given (chosen) particle of the system.

Regarding the teaching activity, numerous topics can be discussed involving the proposed problem: extended-body equilibrium—along with stability and instability analysis—torque and moment of inertia, mechanical energy (potential and kinetic), center of mass, and radius of gyration. It is up to the teacher, depending on factors such as time and objectives, to decide which topics to cover and to what degree, as well as, of course, the methodology to be used.

REFERENCES

[1] Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J., *Fundamentos De Física Volume 1 - 2 Mecânica – Gravitação, Ondas E Termodinâmica*, (Ed. Ltc, Rio De Janeiro, 2007).

- [2] Tipler, P. A. & Mosca, G., *Física Para Cientistas E Engenheiros Volume 1*, (Ed. LTC, Rio De Janeiro, 2009).
- [3] Alonso, M. & Finn, E. J., *Física Um Curso Universitário Volume I, Mecânica*, (Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1972).
- [4] Nussenzveig, H. M., *Curso De Física Básica, 2: Fluídos, Oscilações E Ondas, Calor*, (Ed. E. Blücher, São Paulo, 2002).
- [5] Takus, Y. M., Sunarno, W. & Wahyuningsih, D., *Analysis of Senior High School Students' Critical Thinking Skills on Rotational Dynamics*. In: *IcIssee 2021: Proceedings of The 1st International Conference On Law, Social Science, Economics, And Education*, 6 Mar. 2021, Jakarta, Indonésia. P. 304. European Alliance for Innovation. Disponível Em: <https://doi.org/10.4108/Eai.6-3-2021.2306455>.
- [6] Iradat, R. D. & Alatas, F., *The Implementation of Problem-Solving Based Laboratory Activities to Teach The Concept of Simple Harmonic Motion in Senior High School*, *Journal of Physics: Conference Series* **895**, 012014 (2017). IOP Publishing. Disponível Em: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/895/1/012014>.
- [7] Mulyastuti, H. & Taufiq, A., *Identification of High School Students' Problem-Solving Skills on Rotational Dynamics*, *Journal of Physics: Conference Series* **1171**, 012028 (2019). IOP Publishing. Disponível Em: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1171/1/012028>.
- [8] Rosyida, K. M. I. & Prahani, B. K., *Enhancing Students' Critical Thinking Skills In Physics: Exploring Problem-Based Learning and Mobile Technology Integration in Rotational Dynamics Education*, *Advances In Mobile Learning Educational Research* **5**, 1301–1313 (2025).
- [9] Kurniawan, Y., Suhandi, A., Samsudin, A. & Xuan, N. T. T., *A Systematic Literature Review of Physics Education Teaching Regarding Oscillations*, *Journal of Science Learning* **7**, 25-32 (2024).
- [10] Winarno, N., Afifah, R. M. A., Sihombing, R. A., Firdaus, R. A. & Damopolii, I., *Analyzing Misconceptions on The Topic of Vibration: A Survey of Pre-Service Science Teachers*, *Unnes Science Education Journal* **14**, No. 1 (2025).

Projectile Motion from Free Fall

Yuji Kajiyama

*Faculty of Education, Gifu Shotoku Gakuen University,
Takakuwa-Nishi 1-1, Yanaizu, Gifu, 501-6194, Japan.*

E-mail: kajiyama@gifu.shotoku.ac.jp

EDUCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

(Received 25 August 2025, accepted 30 October 2025)

Abstract

The range of a projectile without air resistance depends on the launch angle, the initial speed, and the launch height. If the speed of a free fall at a certain height directly reflects the initial speed of a projectile thrown from that height, the launch height is a key factor because a larger initial speed requires a lower launch height. In this article, we discuss the maximum range of a projectile launched with an initial speed caused by free fall. This problem is suitable for undergraduate students in calculus-based physics courses.

Keywords: Classical Mechanics, Projectile Motion, Optimization, Physics Education.

Resumen

El alcance de un proyectil sin resistencia del aire depende del ángulo de lanzamiento, la velocidad inicial y la altura de lanzamiento. Si la velocidad de caída libre a cierta altura refleja directamente la velocidad inicial de un proyectil lanzado desde esa altura, la altura de lanzamiento es un factor clave, ya que una mayor velocidad inicial requiere una menor altura de lanzamiento. En este artículo, analizamos el alcance máximo de un proyectil lanzado con una velocidad inicial causada por la caída libre. Este problema es adecuado para estudiantes de grado en física con base en cálculo.

Palabras clave: Mecánica clásica, Movimiento de proyectiles, Optimización, Educación en Física.

I. INTRODUCTION

The projectile motion on the ground is a topic that students are sure to study in introductory physics courses. When a projectile is launched from and lands on the ground, the horizontal range of the projectile is maximized at a 45° angle to the horizontal. However, if the projectile is launched, with the same initial speed, at a certain height above the ground, then the optimal angle is less than 45° . This results in an increased maximum range because of the initial height [1, 2, 3, 4, 5].

What happens if the initial speed depends on the initial height? If the speed of free fall at a height h directly reflects the initial speed of the projectile thrown from that height h , the larger the initial speed, the lower the initial position of the projectile. In that case, what condition would result in the maximum range? In this short article, we discuss the maximum range problem in the following two cases: (i) to find the optimal angle when the launch height h is given, (ii) to find the optimal height when the initial launch angle θ is given. The case (i) can be done without calculus, while the case (ii) requires solving an extremum problem with differentiation, finding that the behavior changes completely at an angle of 30° . This optimization problem is suitable for undergraduate students in calculus-based physics courses.

II. PROJECTILE MOTION

Consider an object falling freely from a starting point at a height H . It then bounds off a board placed at a height h , changing its direction at an angle θ to the horizontal as shown in FIGURE 1. After bounding off the board perfectly elastically, the object moves as a projectile with the initial speed

$$v_h = \sqrt{2gH(1-\eta)}, \quad \eta = \frac{h}{H}, \quad (1)$$

where g is the gravitational acceleration.

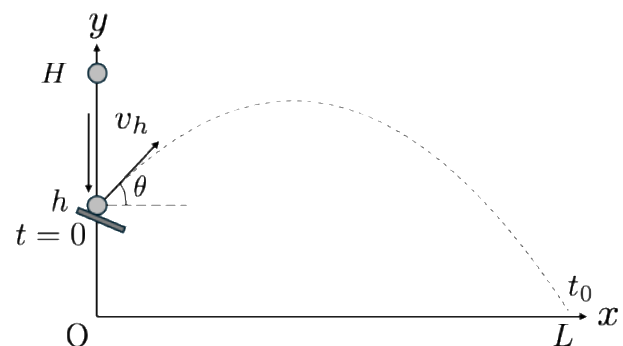


FIGURE 1. Schematic diagram of free fall and its subsequent projectile motion.

The object finally lands at the point of the range L . The problem is to find the condition to maximize the range L for various situations.

After performing some basic calculations, one finds the position of the projectile after being launched from the point $(0, h)$ at $t = 0$ as

$$x(t) = v_h t \cos \theta, \quad (2)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_h t \sin \theta + h. \quad (3)$$

The object lands at the point $(L, 0)$ at time t_0 . The condition $y(t_0) = 0$ gives

$$t_0 = \frac{v_h \sin \theta}{g}(1 + z), \quad (4)$$

and thus the range $L = x(t_0)$ is

$$L = \frac{v_h^2 \sin 2\theta}{2g}(1 + z), \quad (5)$$

where

$$z = \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{2gH}{v_h^2} - 1 \right)}. \quad (6)$$

Since $0 \leq v_h^2 \leq 2gH$ from Eq. (1), z is real and positive definite.

We will discuss the maximum value of L in the following two cases: (i) to find the optimal angle $\theta_{\max}$ when h is given, and (ii) to find the optimal height $h_{\max}$ when θ is given.

(i) $\theta_{\max}$ for a given h

Suppose that the board is placed at a point of height h , and its angle can be changed freely. The problem is to find the optimal angle $\theta_{\max}$ to maximize the range L as a function of h .

Following Ref. [3], $L^2 = x(t_0)^2$ can be written as

$$\begin{aligned} L^2 &= v_h^2 t_0^2 \cos^2 \theta, \\ &= v_h^2 t_0^2 - \left(\frac{1}{2}gt_0^2 - h \right)^2, \\ &= -\frac{1}{4}g^2 \left[t_0^2 - \frac{2H(2-\eta)}{g} \right]^2 + 4H^2(1-\eta). \end{aligned} \quad (7)$$

The maximum range $L_{\max}$ requires the landing time $t_{0\max} = \sqrt{2H(2-\eta)/g}$, and thus we obtain $L_{\max}$ and its corresponding launch angle $\theta_{\max}$ as a function of η , as

$$\tilde{L}_{\max} = \frac{L_{\max}}{H} = 2\sqrt{1-\eta}, \quad (8)$$

and

$$\tan \theta_{\max} = \frac{\frac{1}{2}gt_{0\max}^2 - h}{L_{\max}} = \sqrt{1-\eta}. \quad (9)$$

Therefore, when the board is placed at a height h , the maximum range is given by Eq. (8), provided that the launch angle is given by Eq. (9).

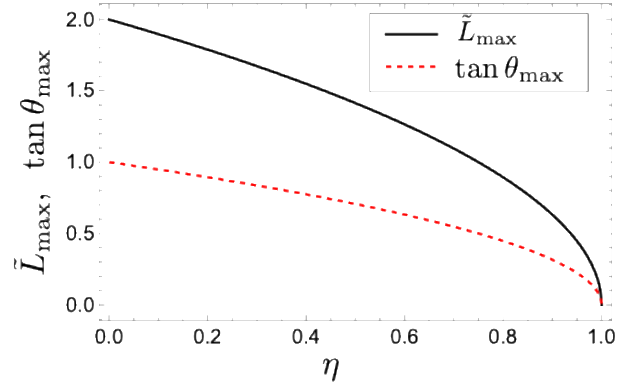


FIGURE 2. The $\eta = h/H$ dependence of $\tilde{L}_{\max} = L_{\max}/H$ (black) and $\tan \theta_{\max}$ (red dashed).

Fig. 2 shows the η dependence of $\tilde{L}_{\max}$ (black) and $\tan \theta_{\max}$ (red dashed) drawn from Eqs. (8) and (9), respectively. As seen from the figure, as η increases, $\tilde{L}_{\max}$ decreases. When $\eta = 0$, $\tan \theta_{\max} = 1$ and $\tilde{L}_{\max} = 2$ corresponding to the projectile motion from the ground with the initial speed of $\sqrt{2gH}$ and the angle of 45° .

(ii) $h_{\max}$ for a given θ

Next, suppose that the angle of the board is fixed, and that the launch angle is θ . What is the optimal height of the board $h_{\max}$ that maximizes the range L ?

We first examine the v_h -dependence of L of Eq. (5). The first derivative of L with respect to v_h^2 is

$$\frac{dL}{d(v_h^2)} = \frac{\sin 2\theta}{4gz} \left(z + 1 + \frac{1}{\sin \theta} \right) \left(z + 1 - \frac{1}{\sin \theta} \right). \quad (10)$$

Since $z \geq 0$ and $\sin 2\theta \geq 0$ for $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, the sign of Eq. (10) depends on that of $f(v_h) = z + 1 - 1/\sin \theta$. The values of $f(v_h)$ for the lower and upper limits of v_h ,

$$\begin{aligned} f(v_h) &\rightarrow \infty & \text{as } v_h &\rightarrow 0, \\ f(v_h) &\rightarrow 2 - \frac{1}{\sin \theta} & \text{as } v_h &\rightarrow \sqrt{2gH}. \end{aligned}$$

Therefore, if $\sin \theta < 1/2$ ($\theta < 30^\circ$), the sign of $f(v_h)$ changes at a certain value of v_h . This indicates that for $\theta < 30^\circ$, the range L has a maximum at a certain value of v_h . Conversely, for $\theta \geq 30^\circ$, L is a monotonically increasing function of v_h , that is, a monotonically decreasing function of h .

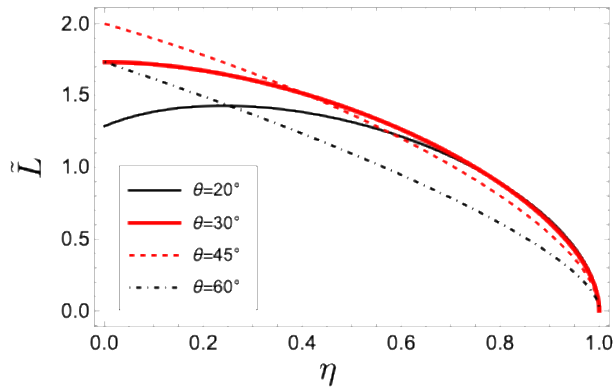


FIGURE 3. The η dependence of $\tilde{L} = L/H$ from Eqs. (5), (6), and (1) for various values of θ . The black solid curve for $\theta = 20^\circ$ has a maximum.

Fig. 3 shows the η dependence of $\tilde{L} = L/H$ drawn from Eqs. (5), (6), and (1) for various values of θ . As one can see that $\tilde{L}$ is monotonically decreasing function of η except for $\theta = 20^\circ$ (black solid curve). The maximum of the function for $\theta = 20^\circ$ is at about $\eta = 0.3$, while the red solid curve for $\theta = 30^\circ$ has the maximum at $\eta = 0$. Therefore, for $\theta \geq 30^\circ$, the maximum range $\tilde{L}_{\max}$ is given by Eq. (5) when $v_h = \sqrt{2gH}$ ($\eta = 0$) as

$$\theta \geq 30^\circ : \tilde{L}_{\max} = 2 \sin 2\theta. \quad (11)$$

Then, what is the condition of the maximum of L for $\theta < 30^\circ$? The extremum condition from Eq. (10) is

$$z + 1 - \frac{1}{\sin \theta} = 0, \quad (12)$$

that gives

$$v_{h\max} = \sqrt{\frac{gH}{1 - \sin \theta}}, \quad (13)$$

or

$$\eta_{\max} = \frac{1 - 2 \sin \theta}{2(1 - \sin \theta)}. \quad (14)$$

Therefore, the maximum range for $\theta < 30^\circ$ is given by

$$\theta < 30^\circ : \tilde{L}_{\max} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}. \quad (15)$$

Fig. 4 shows the θ dependence of $\eta_{\max}$ (red dashed) and $\tilde{L}_{\max}$ (black solid). For $\theta < 30^\circ$, these are drawn from Eqs. (14) and (15), and for $\theta \geq 30^\circ$ from Eq. (11) and $\eta_{\max} = 0$. When the launch angle θ is fixed in the region of $0 \leq \theta < 30^\circ$, one must place the board at a certain height given in

Eq. (14) to maximize the range L . When the launch angle is $\theta \geq 30^\circ$, the board should be placed on the ground.

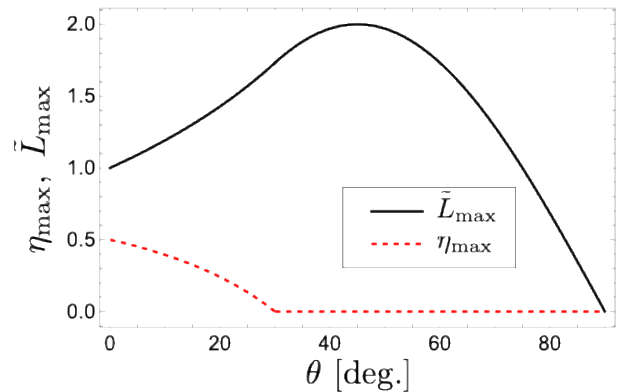


FIGURE 4. The θ dependence of $\eta_{\max}$ and $\tilde{L}_{\max}$.

III. CONCLUSIONS

When an object is dropped freely from a height H and then bounds at an angle off a board at a height h , it performs a projectile motion. The initial speed depends on the height of the board h . In such a case, it is not obvious where to place the board and at what launch angle to maximize the range. In this paper, we determined the conditions for the maximum range, where the launch angle is fixed, and where the board height is fixed. In the former case, the solution can be obtained without differentiation. We found that the maximum range and the tangent of the corresponding angle are proportional to $\sqrt{1 - h/H}$. In the latter case, by solving the extremum problem with differentiation, we found that the behavior changes completely at an angle of 30° . When the launch angle is smaller than 30° , there exists the optimal height depending on the angle, while the launch angle is larger than 30° , the board should be placed on the ground. This optimization problem will be a good exercise for undergraduate students in calculus-based physics courses.

REFERENCES

- [1] Porter, W. S., *The range of a projectile*, Phys. Teach. **15**, 358 (1977).
- [2] Lichtenberg, D. B. and Willis, J. G., *Maximizing the range of the shot put*, Am. J. Phys. **46**, 546 (1978).
- [3] Bose, S. K., *Maximizing the range of the shot put without calculus*, Am. J. Phys. **51**, 458 (1983).
- [4] Thomsen, J. S., *Maxima and minima without calculus*, Am. J. Phys. **52**, 881 (1984).
- [5] Brown, R. A., *Maximizing the Range of a Projectile*, Phys. Teach. **30**, 344 (1992).

Noncommutative Dirac and Schrödinger equations in the background of the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials using Bopp's shift method and perturbation theory

EDUCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Abdelmadjid Maireche

*Laboratory of Physics and Material Chemistry, Faculty of Sciences, Department of Physics,
University of M'sila, University Pole, Road Bourdj Bou Arreiridj, M'sila 28000, Algeria.*

E-mail: abdelmadjid.maireche@univ-msila.dz

(Received 20 November 2025, accepted 27 December 2025)

Abstract

Among the significant potential that showed its great importance in the literature is what is known as the Manning-Rosen potential with a Yukawa tensor coupling because it has wide applications to a wide variety of physical systems. In this work, new Bound-state solutions of the deformed Dirac equation with improved spin and pseudo-spin symmetries are investigated for the new combined Manning--Rosen and Yukawa tensor potentials (*NCMRYPs*) in the context of three-dimensional relativistic noncommutative quantum space (3D-RNCQS) symmetries. The new energy eigenvalues a are obtained using the parametric Bopp's shift method and the like Greene-Aldrich approximation for the centrifugal terms $\frac{z^2}{(1-z)^3}, \frac{z^{5/2}}{(1-z)^{4/2}}, \frac{z^{3/2}}{(1-z)^{3/2}}, \frac{z^{5/2}}{(1-z)^{3/2}}, \frac{z^3}{(1-z)^4}, \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4}$ and $\frac{z^2}{(1-z)^4}$ to obtain the effective potentials of the *NCMRYPs* model in 3D-RNCQS symmetries. The new energy levels are sensitive depending on noncommutativity parameters (η, λ, γ), the potential depths (β, A, V_0) of the *NCMRYPs* model, the quantum numbers ($j, l/l_p, s/s_p, m/m_p$) in addition to arbitrary spin-orbit coupling quantum number k , radial quantum numbers n , and screening parameter δ which are known in the literature. The non-relativistic limit is obtained and the composite systems such as molecules made of $N = 2$ particles of masses $m_n (n = 1, 2)$ in the frame of three-dimensional nonrelativistic noncommutative quantum space (3D-NRNCQS) symmetries are considered. After studying the relativistic and nonrelativistic solutions of the *NCMRYPs* model in 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries, we examine some important cases that we see as useful to the reader and the researcher.

Keywords: Dirac equation; Schrödinger equation; Manning-Rosen potential; Pseudospin and spin symmetry; Yukawa tensor interaction; Noncommutative space; Bopp's shift method.

Resumen

Entre los potenciales significativos que han demostrado su gran importancia en la literatura se encuentra el denominado potencial de Manning-Rosen con acoplamiento tensorial de Yukawa, debido a sus amplias aplicaciones en una amplia variedad de sistemas físicos. En este trabajo, se investigan nuevas soluciones de estado ligado de la ecuación de Dirac deformada con simetrías de espín y pseudoespín mejoradas para los nuevos potenciales tensoriales combinados de Manning-Rosen y Yukawa (*NCMRYPs*) en el contexto de simetrías tridimensionales relativistas no conmutativas del espacio cuántico (3D-RNCQS). Los nuevos valores propios de energía a se obtienen utilizando el método paramétrico de desplazamiento de Bopp y la aproximación de Greene-Aldrich similar para los términos centrífugos $\frac{z^2}{(1-z)^3}, \frac{z^{5/2}}{(1-z)^{4/2}}, \frac{z^{3/2}}{(1-z)^{3/2}}, \frac{z^{5/2}}{(1-z)^{3/2}}, \frac{z^3}{(1-z)^4}, \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4}$ y $\frac{z^2}{(1-z)^4}$ para obtener los potenciales efectivos del modelo *NCMRYPs* en simetrías 3D-RNCQS. Los nuevos niveles de energía son sensibles a los parámetros de no conmutatividad (η, λ, γ), las profundidades potenciales (β, A, V_0) del modelo *NCMRYPs*, los números cuánticos ($j, l/l_p, s/s_p, m/m_p$), además del número cuántico de acoplamiento espín-órbita arbitrario k , los números cuánticos radiales n y el parámetro de cribado δ , conocidos en la literatura. Se obtiene el límite no relativista y se consideran los sistemas compuestos, como moléculas formadas por $N = 2$ partículas de masas $m_n (n = 1, 2)$, en el marco de simetrías tridimensionales del espacio cuántico no relativista no conmutativo (3D-NRNCQS). Tras estudiar las soluciones relativistas y no relativistas del modelo *NCMRYPs* en las simetrías 3D-RNCQS y 3D-NRNCQS, examinamos algunos casos importantes que consideramos útiles para el lector y el investigador.

Palabras clave: Ecuación de Dirac; Ecuación de Schrödinger; Potencial de Manning-Rosen; Pseudoespín y simetría de espín; Interacción del tensor de Yukawa; Espacio no conmutativo; Método de desplazamiento de Bopp.

I. INTRODUCTION

In 1933, Manning and Rosen (see Eq. (3.1)) proposed a potential function for diatomic molecules known as the Manning-Rosen (MR) potential model [1] which is used in different fields such as atomic, condensed matter, particle, and nuclear physics. In addition, this potential is used to describe the vibrations of diatomic molecules HCl, CH, LiH, CO, NO, O₂, I₂, N₂, H₂, and Ar₂ [2]. Wang *et al.* (2012), proposed a convenient form (see Eq. (3.2)) for the original expression of the MR potential function [3]. Wei and Dong carried out approximately analytical bound state solutions of the Dirac equation (DE) with the MR potential for arbitrary spin-orbit coupling quantum number k by taking a properly approximate expansion for the spin-orbit coupling term [4]. Chen *et al.* (2009) solved approximately the DE with the MR potential for the arbitrary spin-orbit quantum number k using the basic concept of the supersymmetric shape invariance formalism and the function analysis method [5]. Eshghi and Mehraban obtained analytically the approximate energy equation and the corresponding wave functions of the DE for the MR potential coupled with a Coulomb-like tensor under the condition of the pseudo-spin symmetry using the parametric generalization of the Nikiforov-Uvarov (NU) method [6]. Oktay and Sever obtained an approximate analytical solution of the DE for the Yukawa potential under the pseudospin symmetry condition using the asymptotic iteration method [7]. Aguda obtains the approximate analytical solutions of the DE for an improved expression of the Rosen-Morse potential energy model, including the Coulomb-like tensor under the condition of spin and pseudospin symmetry [8]. Jia *et al.* explored the analytical solutions of the DE with the spin symmetry for the improved MR potential energy model and presented the bound state energy equation and the corresponding upper and lower radial wave functions [9]. Yanar and Havare spin and pseudospin symmetry are obtained by solving the DE with centrifugal term Dirac spinors and energy relations with generalized MR potential using the NU method and also the Pekeris approximation to the centrifugal term [10]. Wei *et al.* (2008) studied approximately the bound state solutions of the Klein-Gordon equation with the MR potential [11]. Taskin [12] investigated approximately the bound state solutions of the DE with the MR potential within the framework of the spin symmetry and pseudo-spin symmetry concepts. Recently, Ahmadov *et al.* (2022) presented the bound state solutions of the DE with spin and pseudo-spin symmetries for the combined MR potential with Yukawa-like tensor interaction in the framework of supersymmetry quantum mechanics and NU methods [13]. It should be noted that there are other studies of MR that we mention [14, 15, 16, 17]. The objective of this work is to calculate the new relativistic and nonrelativistic energy eigenvalue for the combined MR and Yukawa tensor potentials using an unperturbed hypergeometric function with a centrifugal approximation factor within the framework of the extended symmetries of relativistic and non-relativistic quantum mechanics. For this, we develop a mathematical model using the unperturbed Dirac spinor to find the new energy eigenvalue. It is important to refer to previous studies that we have carried out in recent years related to MR potential, but in another context, we

mention it. Very recently, we have studied the new generalized Schiöberg and MR potentials within the generalized tensor interactions in the framework of three-dimensional extended QM symmetries [18]. In 2021, we investigated the bound state of deformed KGE and SE under the modified equal vector and scalar MR and class Yukawa potential (CYP) in relativistic and nonrelativistic extended QM symmetries [19]. In the same context deformed (KGE and SE), we carried out a study on, modified MR [20] and modified MR plus quadratic Yukawa potential [21] in addition to the modified MR and Yukawa potential [22]. To the best of my knowledge, no researcher has addressed the combined MR and Yukawa tensor potentials in the symmetries of deformed Dirac theory 3D-RNCQS. I hope that through this study we will discover more investigations at the sub-atomic scale and achieve more scientific knowledge of elementary particles in the field of Nanoscales. We aimed to shed more light on combined MR and Yukawa tensor potentials within the framework of an extended space that contains large symmetries based on the new postulate $[q_\mu^{(s,h,i)*}, q_\nu^{(s,h,i)}] \neq 0$ and $[\pi_\mu^{(s,h,i)*}, \pi_\nu^{(s,h,i)}] \neq 0$ in addition to the generalized postulate $[q_\mu^{(s,h,i)*}, \pi_\nu^{(s,h,i)}] \neq 0$ (see below equations). The wide interest of researchers in the field of noncommutativity came as a result of it being a strong candidate alternative to solve many of the problems that have emerged strongly such as quantum gravity, string theory, and the divergence problem of the standard model [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31]. NC of space-space and NC of phase-phase play an important role in changing the physical properties of a lot of quantum physical systems, and they have achieved interesting successes in recent years. The NC properties idea is not new but goes back decades and was suggested by Snyder [32, 33] in 1947, and its geometric analysis was introduced by Connes in 1991 and 1994 [34, 35]. Seiberg and Witten, extend earlier ideas about the appearance of NC geometry in string theory with a nonzero B-field and obtain a new version of gauge fields in noncommutative gauge theory [36]. Among the potential goals of NC deformation of space-space and phase-phase is the emergence of new quantum fluctuations capable of canceling the observed unwanted divergences or the infinities that appear to cause short-range effects in field theories that include gravitational theory [37]. The research reported in the present paper was motivated by the fact that the study of the new combined MR and Yukawa tensor potentials (NCMRYPs) in the 3D-RNCQS symmetries has not been reported in the available literature. In this work, the vector and scalar NCMRYPs model ($V_{mr}(d), S_{mr}(d)$) to be employed is defined as:

$$\begin{cases} V_{mr}^s(d) = V_{mr}(r) - \frac{\partial V_{mr}(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}}{2r} + O(\theta^2), \\ S_{mr}^s(d) = S_{mr}(r) - \frac{\partial S_{mr}(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}}{2r} + O(\theta^2), \end{cases} \quad (1)$$

and

$$\begin{cases} V_{mr}^p(d) = V_{mr}(r) - \frac{\partial V_{mr}(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{L}_p\boldsymbol{\theta}}{2r} + O(\theta^2), \\ S_{mr}^p(d) = S_{mr}(r) - \frac{\partial S_{mr}(r)}{\partial r} \frac{\mathbf{L}_p\boldsymbol{\theta}}{2r} + O(\theta^2), \end{cases} \quad (2)$$

remaining parts of the paper are structured as follows. A review of the DE with the combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials is presented in Sect. 2. Sect. 3 is devoted to studying the DDE by applying the usual well-known Bopp's shift method and the like Greene-Aldrich approximation for the centrifugal term to obtain the effective potentials of the NCMRYPs model in 3D-RNCQS symmetries. Furthermore, via standard perturbation theory, we find the expectation values of some radial terms to calculate the corrected relativistic energy generated by the effect of the perturbed effective potentials $\Sigma_{pert}^{mg}(r)$ and $\Delta_{pert}^{mg}(r)$ of the NCMRYPs model, we derive the global corrected energy with the NCMYPs model. In the next section, we obtain the nonrelativistic limit and consider the composite systems such as molecules made of $N = 2$ particles of masses $m_n (n = 1, 2)$ in the frame of 3D-NRNCQS symmetries are considered. Sect. 5 is reserved to study the relativistic and nonrelativistic special cases that can be generated from the NCMYPs model. Finally, the conclusion is given in Sec.6

II. AN OVERVIEW OF DE UNDER COMBINED MANNING-ROSEN AND YUKAWA TENSOR POTENTIALS

For a deeper understanding of the relativistic interactions of fermion particles that interacted with NCMYP's model in extended Dirac theory, it is useful to recall the eigenvalues and the corresponding eigenfunctions that influenced this system within the framework of relativistic quantum mechanics known in the literature. In this case, the system is governed by the basic equation:

$$\begin{cases} H_D^{mr} \Psi_{nk}(r, \theta, \phi) = E_{nk} \Psi_{nk}(r, \theta, \phi) \\ H_D^{mr} = \alpha p + \beta (M + S_{mr}(r)) - i\beta dU(r) + V_{mr}(r), \end{cases} \quad (8)$$

here H_D^{mr} is the Dirac Hamiltonian operator, M is reduced rest mass, $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ is the momentum. The vector potential $V_{mr}(r)$ due to the four-vector linear momentum operator $A^\mu(V_{mr}(r), \mathbf{A} = \mathbf{0})$ and space-time scalar potential $S_{mr}(r)$ due to the mass, E_{nk} is the relativistic eigenvalues, (n, k) representing the principal and spin-orbit coupling terms, respectively. The tensor interaction $U(r)$ equal to $(-V_0 \frac{\exp(-\delta r)}{r})$, V_0 denotes the strength of the interaction and δ is the screening parameter, $\alpha = anti_diag(\tau_i, \tau_i)$, $\beta = diag(I_{2 \times 2}, -I_{2 \times 2})$ and τ_i are the usual Pauli matrices. Since the combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials have spherical symmetry, the solutions of the known form

$$\Psi_{nk}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{F_{nk}(r)}{r} Y_{jm}^l(\theta, \phi) \\ i \frac{G_{nk}(r)}{r} Y_{j\bar{m}p}^{l\bar{p}}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad F_{nk}(r) \text{ and } G_{nk}(r)$$

represent the upper and lower components of the Dirac spinors $\Psi_{nk}(r, \theta, \phi)$ while $Y_{jm}^l(\theta, \phi)$ and $Y_{j\bar{m}p}^{l\bar{p}}(\theta, \phi)$ are the spin and pseudospin spherical harmonics and (m, m_p) are the projections on the z-axis. The upper and lower components $F_{nk}^s(r)$ and $G_{nk}^p(r)$ for spin symmetry and

pseudospin symmetry satisfy the two uncoupled differential equations as below:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} - k(k+1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(r) - (M + E_{nk}^s - \Delta_{mr}^p(r)) \right. \\ & \left. (M - E_{nk} + \Sigma_{mr}^s(r)) + \frac{\frac{d\Delta_{mr}^p(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r) \right)}{M + E_{nk} - \Delta_{mr}^p(r)} \right) F_{nk}^s(r) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dr^2} - k(k-1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(r) - (M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(r)) \right. \\ & \left. (M - E_{nk} + \Sigma_{mr}^s(r)) + \frac{\frac{d\Sigma_{mr}^s(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r) \right)}{M + E_{nk} + \Sigma_{mr}^s(r)} \right) G_{nk}^p(r) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Here

$$U_{eff}^{yt-s/p}(r) = \frac{2kU(r)}{r} \mp \frac{dU(r)}{dr} - U^2(r). \quad (11)$$

That can be expressed analytically as,

$$U_{eff}^{yt-s/p}(r) = B^\mp \frac{\exp(-\delta r)}{r^2} \mp \delta V_0 \frac{\exp(-\delta r)}{r} - V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^2}, \quad (12)$$

with $B^\mp = (-2k \mp 1)V_0$ while $\Sigma_{mr}^s(r) = V_{mr}(r)$ and $\Delta_{mr}^p(r) = V_{mr}(r)$ are determined by:

$$\begin{cases} \Sigma_{mr}^s(r) = \frac{\hbar}{2Mb^2} \left(\frac{\beta(\beta-1) \exp(-4\delta r)}{(1-\exp(-2\delta r))^2} - \frac{A \exp(-2\delta r)}{1-\exp(-2\delta r)} \right), \\ \text{and } \frac{d\Delta_{mr}^p(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \Delta_{mr}^p = C_{SE} \text{ for spin sy.} \end{cases} \quad (13)$$

and

$$\begin{cases} \Delta_{mr}^p(r) = \frac{\hbar}{2Mb^2} \left(\frac{\beta(\beta-1) \exp(-4\delta r)}{(1-\exp(-2\delta r))^2} - \frac{A \exp(-2\delta r)}{1-\exp(-2\delta r)} \right) \\ \text{and } \frac{d\Sigma_{mr}^s(r)}{dr} = 0 \Rightarrow \Sigma_{mr}^s = C_{PS} \text{ for p-spin sy.} \end{cases} \quad (14)$$

We obtain the following second-order Schrödinger-like equation in 3D-RQM symmetries, respectively:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - k(k+1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(r) - \Lambda_{nk}^s (M - E_{nk}^s + \Sigma_{mr}^s(r)) \right] F_{nk}^s(r) = 0 \quad (15)$$

and

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - k(k-1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(r) - (M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(r)) \Lambda_{nk}^p \right] G_{nk}^p(r) = 0 \quad (16)$$

with $k(k-1)$ and $k(k+1)$ are equals to $l_p(l_p-1)$ and $l(l+1)$, respectively. The authors of refs.[13,17] using both the Nikiforov-Uvarov method and Greene-Aldrich approximation for the centrifugal term to obtain the expressions for the upper and lower components $F_{nk}^s(r)$ and $G_{nk}^p(r)$ as hypergeometric polynomials $P_n^{(v_{nk}^1/2, \zeta_{nk}^1)}(1-2z)$ and $P_n^{(v_{pnk}^1/2, \zeta_{pnk}^1)}(1-2z)$ in 3D-RQM symmetries as,

$$F_{nk}^s(s) = C_{nk}^s s^{v_{nk}^1} (1-z)^{(1+\zeta_{nk}^1)/2} P_n^{(2v_{nk}^1, \zeta_{nk}^1)} (1-2z), \quad (17)$$

and

$$G_{nk}^p(s) = C_{nk}^p z^{v_{pnk}^1} (1-z)^{(1+\zeta_{pnk}^1)/2} P_n^{(2v_{pnk}^1, \zeta_{pnk}^1)} (1-2z), \quad (18)$$

here $z = \exp(-2\delta r)$, v_{nk}^1 , ζ_{nk}^1 , v_{pnk}^1 and ζ_{pnk}^1 are given by:

$$\begin{cases} v_{nk}^1 = \frac{1}{2\delta} \sqrt{M^2 - E_{nk}^{s2} - C_{ES}(M - E_{nk}^s)}, \\ \zeta_{nk}^1 = \sqrt{1 + 4k(k+1) + \Lambda_{nk}^s/\delta^2}, \\ v_{pnk}^1 = \frac{1}{2\delta} \sqrt{M^2 - E_{nk}^{p2} - C_{PS}(M + E_{nk}^p)}, \\ \zeta_{pnk}^1 = \sqrt{1 + 4k(k-1) + \Lambda_{nk}^p/\delta^2}, \end{cases} \quad (19)$$

with $\Lambda_{nk}^s = M + E_{nk}^s - C_{ES}$, $\Lambda_{nk}^p = M - E_{nk}^p - C_{PS}$ while C_{nk}^s and C_{nk}^p are the normalization constants. For the spin symmetry and the p-spin symmetry, the equations of energy are given by [13,17]:

$$\begin{aligned} M^2 - E_{nk}^{s2} - C_{ES}(M - E_{nk}^s) &= 4\delta^2 \\ \left[\frac{\frac{AA_{nk}^s}{2M} - k(k+1) - n(n+1) \sqrt{\frac{1}{4} + k(k+1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^s}{2M}}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4} + k(k+1) + \frac{AA_{nk}^s}{2M}}} \right]^2, \end{aligned} \quad (20)$$

and

$$\begin{aligned} M^2 - E_{nk}^{p2} + C_{PS}(M + E_{nk}^p) &= 4\delta^2 \\ \left[\frac{\frac{AA_{nk}^p}{2M} - k(k-1) - n(n+1) \sqrt{\frac{1}{4} + k(k-1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{2M}}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4} + k(k-1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{2M}}} \right]^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Later, we will need another formula for each of the upper and lower components $F_{nk}^s(z)$ and $G_{nk}^p(z)$. We will use the transform expression of $P_n^{(a_n, b_n)}(1-2z)$ in the following form:

$$P_n^{(a_n, b_n)}(1-2z) = \frac{\Gamma(n+a_n+1)}{n!\Gamma(a_n+1)} {}_2F_1(-n, n+a_n+b_n+1; 1+a_n, z). \quad (22)$$

This allows us to reformulate them in terms of the generalized hypergeometric function ${}_2F_1(-n, n+2v_{nk}^1+\zeta_{nk}^1+1; 1+2v_{nk}^1, z)$ and ${}_2F_1(-n, n+2v_{pnk}^1+\zeta_{pnk}^1+1; 1+2v_{pnk}^1, z)$ as follows:

$$F_{nk}^s(s) = C_{nk}^s s^{v_{nk}^1} (1-z)^{(1+\zeta_{nk}^1)/2} {}_2F_1(-n, n+2v_{nk}^1+\zeta_{nk}^1+1; 1+2v_{nk}^1, z), \quad (23)$$

and

$$G_{nk}^p(s) = C_{nk}^p z^{v_{pnk}^1} (1-z)^{(1+\zeta_{pnk}^1)/2} {}_2F_1(-n, n+2v_{pnk}^1+\zeta_{pnk}^1+1; 1+2v_{pnk}^1, z), \quad (24)$$

here $C_{nk}^{ns} = C_{nk}^s \frac{\Gamma(n+2v_{nk}^1+1)}{n!\Gamma(2v_{nk}^1+1)}$, $C_{nk}^{np} = C_{nk}^p \frac{\Gamma(n+2v_{pnk}^1+1)}{n!\Gamma(2v_{pnk}^1+1)}$. The lower component $G_{nk}^s(s)$ of spin symmetry and the upper component $F_{nk}^p(s)$ of p-spin symmetry are obtained as:

$$\begin{cases} G_{nk}^s(z) = \frac{\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r)\right) F_{nk}^s(z)}{M + E_{nk}^s - C_s}, \\ F_{nk}^p(z) = \frac{\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} - U(r)\right) G_{nk}^p(z)}{M - E_{nk}^p + C_p}. \end{cases} \quad (25)$$

III. THE NEW SOLUTIONS OF DDE UNDER NCMRYPs IN 3D-RNCQS SYMMETRIES

A. Review of Bopp's shift method

Let us begin in this subsection by finding the DDE in the symmetries of deformation Dirac theory under the NCMRYPs. Our objective is achieved by applying the new principles that we have seen in the introduction (Eqs. (4) and (7)), summarized in the new relationships between MASCCCRs and the notion of the Weyl-Moyal star product. Thus, these data allow us to rewrite the usual Dirac equation in Eq. (8) in the 3D-RNCQS symmetries as follows:

$$\left(\alpha p + \beta(M + S_{mr}(r)) - i\alpha dU(r) \right) * \Psi_{nk}(r, \theta, \phi) = 0. \quad (26)$$

In 3D-RNCQS symmetries, the upper and lower components $F_{nk}^s(r)$ and $G_{nk}^p(r)$ satisfying the following second-order differential equations:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - k(k+1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(r) \right] * F_{nk}^s(r) = 0, \quad (27)$$

and

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - k(k-1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(r) \right] * G_{nk}^p(r) = 0. \quad (28)$$

There are two approaches to including non-commutativity in quantum field theory: The first method is represented by rewriting the various NC physical fields such as the spinor Ψ_{nl} , KG operator Φ_{nl} , antisymmetric bosonic tensor $F_{\alpha\beta}$ and tetrad fields e_μ^a in terms of their corresponding fields $(\Psi_{nl}, \Phi_{nl}, e_\mu^a, F_{\alpha\beta}, \dots)$ in the known quantum space in the literature, in proportion to the non-commutative parameters $\Theta(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})/2$, which is similar to the Taylor development [24,59,60,61,62,63,64] while the second method depends on reformulating the non-commutative operator (q, π) with its view of the quantum operators (q, π) known in the literature and the properties of space associated with the non-commutative parameters $\Theta(\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13})/2$. It is normal for the physical results to be identical when using either of them. It is known to specialized researchers that Bopp had

proposed a new quantization rule $(x, p) \rightarrow (q = x - \frac{i}{2} \partial_p, \pi = p + \frac{i}{2} \partial_x)$ instead of the usual correspondence $(x, p) \rightarrow (q = x, p = p + \frac{i}{2} \partial_x)$ which is called Bopp's shifts method (BSM) [64,65,66,67]. This quantization procedure is called Bopp quantization [68]. The Weyl-Moyal star product $f(x, p) * g(x, p)$ induces BSM in the respect that it is replaced by $f(x - \frac{i}{2} \partial_p, p + \frac{i}{2} \partial_x) * g(x, p)$ [69]. This, allows us to obtain

$$\begin{cases} [k(k+1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(r)] * F_{nk}^s(r) = \\ [k(k+1)d^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(d)] F_{nk}^s(r), \\ (M - E_{nk}^s + \Sigma_{mr}^s(r)) * F_{nk}^s(r) = \\ (M - E_{nk}^s + \Sigma_{mr}^s(d)) F_{nk}^s(r), \\ [k(k-1)r^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(r)] * G_{nk}^p(r) = \\ [k(k-1)d^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(d)] G_{nk}^p(r), \\ (M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(r)) * G_{nk}^p(r) = \\ (M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(d)) G_{nk}^p(r). \end{cases}$$

The BSM has achieved great success when applied by specialized researchers to the four basic equations that correspond to the relativistic Schrödinger equation (see, e.g.;[70,71,72]) and the other three relativistic equations represented by the Klein-Gordon equation (see, e.g.;[73,74,75,76,77,78,79,80]), Dirac equation (see, e.g.;[81,82,83,84,85,86,87,88,89,90]) and the Duffin-Kemmer-Petiau equation (see, e.g.;[90,91,92]). In addition to some recent related research (see, e.g.;[93,94,95, 96, 97,98]).

It is worth motioning that the BSM permutes us to reduce Eqs. (27) and (28) to the simplest form:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} - k(k+1)d^{-2} + U_{eff}^{yt-s}(d) \\ -\Lambda_{nk}^s(M - E_{nk}^s + \Sigma_{mr}^s(d)) \end{bmatrix} F_{nk}^s(r) = 0, \quad (29)$$

and

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} - k(k-1)d^{-2} + U_{eff}^{yt-p}(d) \\ -(M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(d)) \Lambda_{nk}^p \end{bmatrix} G_{nk}^p(r) = 0. \quad (30)$$

The modified algebraic structure of noncommutative covariant canonical commutation relations with the notion of the Weyl-Moyal star product in Eqs. (4) becomes new METNCCRs with ordinary known products in literature as follows (see, e.g.; [64,65,66,67]):

$$\begin{cases} [q_\mu^{(s,h,i)}, \pi_\nu^{(s,h,i)}] = i\hbar_{eff} \delta_{\mu\nu}, \\ [q_\mu^{(s,h,i)}, q_\nu^{(s,h,i)}] = i\eta_{\mu\nu}. \end{cases} \quad (31)$$

In the symmetries of 3D-RNCQS, the generalized positions and momentum coordinates $q_\mu^{(s,h,i)}$ and $\pi_\mu^{(s,h,i)}$ are defined as:

$$\begin{cases} q_\mu^{(s,h,i)} = x_\mu^{(s,h,i)} - \sum_{v=1}^3 \frac{i\eta_{\mu\nu}}{2} p_\nu^{(s,h,i)}, \\ \pi_\mu^{(s,h,i)} = p_\mu^{(s,h,i)}. \end{cases} \quad (32)$$

This allows us to find the operator d^2 equal to [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90]:

$$d^2 = r^2 - \begin{cases} L\theta \text{ for spin symmetry} \\ L_p\theta \text{ for p-spin symmetry} \end{cases} + O(\theta^2), \quad (33)$$

while the new operators $\Sigma_{mr}^s(d)$, $V_{mr}^p(d)$, $U_{eff}^{yt-s/p}(d)$, $k(k+1)d^{-2}$ and $k(k-1)d^{-2}$ in the 3D-RNCQS symmetries, are expressed as:

$$\begin{cases} \Sigma_{mr}^s(d) = \Sigma_{mr}^s(r) - \frac{\partial \Sigma_{mr}^s(r)}{\partial r} \frac{L\theta}{2r} + O(\theta^2), \\ \Delta_{mr}^p(d) = \Delta_{mr}^p(r) - \frac{\partial \Delta_{mr}^p(r)}{\partial r} \frac{L_p\theta}{2r} + O(\theta^2), \\ U_{eff}^{yt-s} = U_{eff}^{yt-s}(r) - \frac{\partial U_{eff}^{yt-s}(r)}{\partial r} \frac{L\theta}{2r} + O(\theta^2), \\ U_{eff}^{yt-p}(d) = U_{eff}^{yt-p}(r) - \frac{\partial U_{eff}^{yt-p}(r)}{\partial r} \frac{L_p\theta}{2r} + O(\theta^2), \\ k(k+1)d^{-2} = k(k+1)r^{-2} + k(k+1)r^{-4}L\theta + O(\theta^2), \\ k(k-1)d^{-2} = k(k-1)r^{-2} + k(k-1)r^{-4}L_p\theta + O(\theta^2). \end{cases} \quad (34)$$

Substituting Eqs. (34) into Eqs. (29) and (30), we find the following two like Shrodinger equations:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} + U_{eff}^{yt-s}(r) - \Lambda_s(M - E_{nk}^s + \Sigma_{mr}^s(r)) - \\ \Sigma_{mr}^{pert}(r) \end{bmatrix} F_{nk}^s(r) = 0, \quad (35)$$

and

$$\begin{bmatrix} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} + U_{eff}^{yt-p}(r) - (M + E_{nk}^p - \Delta_{mr}^p(r)) \Lambda_p - \\ \Delta_{mr}^{pert}(r) \end{bmatrix} G_{nk}^p(r) = 0, \quad (36)$$

with

$$\Sigma_{mr}^{pert}(r) = \left(-\frac{\partial U_{eff}^{yt-s}(r)}{\partial r} \frac{1}{2r} + \frac{k(k+1)}{r^4} - \frac{\partial \Sigma_{mr}^s(r)}{\partial r} \frac{\Lambda_{nk}^s}{2r} \right) L\theta, \quad (37)$$

and

$$\Delta_{mr}^{pert}(r) = \left(-\frac{\partial U_{eff}^{yt-p}(r)}{\partial r} \frac{1}{2r} + \frac{k(k-1)}{r^4} - \frac{\partial \Delta_{mr}^p(r)}{\partial r} \frac{\Lambda_{nk}^p}{2r} \right) L_p\theta. \quad (38)$$

By comparing (Eqs. (9) and (10)) and (Eqs. (35) and (36)), we observe two additive potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$. Moreover, these terms are proportional to the infinitesimal noncommutativity parameter θ . From a physical point of view, this means that these two spontaneously generated terms $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ as a result, the topological properties of the deformation space-space can be considered very small compared to the fundamental terms $\Sigma_{mr}^s(r)$ and $\Delta_{mr}^p(r)$, respectively. A direct calculation gives $\frac{\partial \Sigma_{mr}^s(r)}{\partial r}$ and $\frac{\partial U_{eff}^{yt-s/p}(r)}{\partial r}$ as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_{mr}^s(r)}{\partial r} = & -\frac{2\delta\beta(\beta-1)}{Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{(1-\exp(-2\delta r))^2} \\ & + \frac{2\beta\delta(\beta-1)}{2Mb^2} \frac{\exp(-6\delta r)}{(1-\exp(-2\delta r))^3} \\ & + \frac{\delta A}{Mb^2} \frac{\exp(-2\delta r)}{1-\exp(-2\delta r)} + \frac{\delta A}{Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{(1-\exp(-2\delta r))^2}, \end{aligned} \quad (39)$$

and

$$\frac{\partial U_{eff}^{yt-\frac{5}{p}}}{\partial r} = -\delta(B^{\mp} \mp V_0) \frac{\exp(-\delta r)}{r^2} - 2B^{\mp} \frac{\exp(-\delta r)}{r^3} \mp (-\delta)\delta V_0 \frac{\exp(-\delta r)}{r} + 2\delta V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^2} + 2V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^3}. \quad (40)$$

Substituting Eqs. (39) and (40) into Eqs. (37) and (38), we obtain spontaneously generated terms $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ as follows:

$$\begin{aligned} \Sigma_{mr}^{pert}(r) = & (\delta(B^- - V_0) \frac{\exp(-\delta r)}{2r^3} + B^- \frac{\exp(-\delta r)}{r^4} \\ & - \delta^2 V_0 \frac{\exp(-\delta r)}{2r^2} - \delta V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^3} - V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^4} \\ & + \frac{\delta\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^s}{Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^2} - \frac{\delta\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^s}{2Mb^2} \frac{\exp(-6\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^3} \\ & - \frac{\delta A\Lambda_{nk}^s}{2Mb^2} \frac{\exp(-2\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))} - \frac{\delta A\Lambda_{nk}^s}{2Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^2} + \frac{k(k+1)}{r^4} \mathbf{L}\mathbf{\Theta} + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (41)$$

and

$$\begin{aligned} \Delta_{mr}^{pert}(r) = & (\delta(B^+ + V_0) \frac{\exp(-\delta r)}{2r^3} + B^+ \frac{\exp(-\delta r)}{r^4} + \\ & + \delta^2 V_0 \frac{\exp(-\delta r)}{2r^2} - \delta V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^3} - V_0^2 \frac{\exp(-2\delta r)}{r^4} \\ & + \frac{\delta\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^2} - \frac{\delta\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{2Mb^2} \frac{\exp(-6\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^3} \\ & - \frac{\delta A\Lambda_{nk}^p}{2Mb^2} \frac{\exp(-2\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))} - \frac{\delta A\Lambda_{nk}^p}{2Mb^2} \frac{\exp(-4\delta r)}{r(1-\exp(-2\delta r))^2} + \frac{k(k-1)}{r^4} \mathbf{L}_p\mathbf{\Theta} + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (42)$$

For spin symmetry, we first consider Eq. (35), which contains the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials in the deformation of Dirac theory symmetries. It can be solved exactly only for $k=0$ and $k=-1$ in the absence of tensor interactions $V_0=0$, since the two centrifugal terms (proportional to $k(k+1)r^{-2}$ and $k(k+1)r^{-4}$) vanish. In the case of arbitrary k , an appropriate approximation needs to be employed on the centrifugal terms. We apply the following new approximation which was applied by Greene and Aldrich [99]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\delta^2 e^{-2\delta r}}{(1-e^{-2\delta r})^2} = \frac{4\delta^2 z}{(1-z)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{r} \approx \frac{2\delta e^{-\delta r}}{1-e^{-2\delta r}} = \frac{2\delta z^{\frac{1}{2}}}{1-z}. \quad (43)$$

For p-spin symmetry, we now consider Eq. (36) and will follow similar steps with the spin symmetry case in the deformation of Dirac theory symmetries. Same as before, Eq. (31) cannot be solved exactly for $k=0$ and $k=1$ without tensor interaction, since the two centrifugal terms (proportional to $k(k-1)r^{-2}$ and $k(k-1)r^{-4}$). Applying the approximations Eq. (43) to the centrifugal terms of Eqs. (41) and (42), the general form of the additive potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(z)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(z)$ will be as follows:

$$\begin{aligned} \Sigma_{mr}^{pert}(z) = & (\chi_{nk}^{1s} \frac{z^2}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{2s} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{3s} \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} + \chi_{nk}^{4s} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} \\ & + \chi_{nk}^{5s} \frac{z^3}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{6s} \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{7s} \frac{z^2}{(1-z)^4}) \mathbf{L}\mathbf{\Theta} + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (44)$$

and

$$\begin{aligned} \Delta_{mr}^{pert}(z) = & (\chi_{nk}^{1p} \frac{z^2}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{2p} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{3p} \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} + \chi_{nk}^{4p} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} \\ & + \chi_{nk}^{5p} \frac{z^3}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{6p} \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{7p} \frac{z^2}{(1-z)^4}) \mathbf{L}_p\mathbf{\Theta} + O(\theta^2), \end{aligned} \quad (45)$$

with

$$\left\{ \begin{aligned} \chi_{nk}^{1s} &= 4\delta^4(B^- - V_0), \chi_{nk}^{1p} = 4\delta^4(B^+ + V_0) \\ \chi_{nk}^{2s} &= 16\delta^4 B^-, \chi_{nk}^{2p} = 16\delta^4 B^+, \\ \chi_{nk}^{3s} &= -\left(2\delta^4 V_0 + \frac{\delta^2 A\Lambda_{nk}^s}{Mb^2}\right), \chi_{nk}^{3p} = 2\delta^4 V_0 - \frac{\delta^2 A\Lambda_{nk}^p}{Mb^2}, \\ \chi_{nk}^{4s} &= \frac{2\delta^2\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^s}{Mb^2} - 8\delta^4 V_0^2 - \frac{\delta^2 A\Lambda_{nk}^s}{Mb^2}, \\ \chi_{nk}^{4p} &= \frac{2\delta^2\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{Mb^2} - 8\delta^4 V_0^2 - \frac{\delta^2 A\Lambda_{nk}^p}{Mb^2}, \\ \chi_{nk}^{5s} &= \chi_{nk}^{5p} = -16\delta^4 V_0^2, \\ \chi_{nk}^{6s} &= -\frac{2\beta\delta^2(\beta-1)\Lambda_{nk}^s}{2Mb^2}, \chi_{nk}^{6p} = -\frac{2\beta\delta^2(\beta-1)\Lambda_{nk}^p}{2Mb^2}, \\ \chi_{nk}^{7s} &= 16\delta^4 k(k+1), \chi_{nk}^{7p} = 16\delta^4 k(k-1). \end{aligned} \right. \quad (46)$$

Furthermore, using the unit step function (also known as the Heaviside step function $\theta(x)$ or simply the theta function) to rewrite the global induced two potentials $\Sigma_{t,mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{t,mr}^{pert}(r)$ for spin and pseudospin symmetries corresponding to upper and lower components ($F_{nk}^s(s)$ and $G_{nk}^s(s)$) and ($F_{nk}^p(s)$ and $G_{nk}^p(s)$), respectively as:

$$\begin{aligned} \Sigma_{t,mr}^{pert}(r) &= \Sigma_{mr}^{pert}(r)\theta(|E_{nc}^{mr-s}|) - \Sigma_{mr}^{pert}(r)\theta(-|E_{nc}^{mr-s}|) \\ &= \begin{cases} \Sigma_{mr}^{pert}(r) & \text{for Uc of spin symmetry,} \\ -\Sigma_{mr}^{pert}(r) & \text{for Lc of spin symmetry,} \end{cases} \end{aligned} \quad (47)$$

and

$$\begin{aligned} \Delta_{t,mr}^{pert}(r) &= \Delta_{ts}^{pert}(r)\theta(|E_{nc}^{mr-p}|) - \Delta_{mr}^{pert}(r)\theta(-|E_{nc}^{mr-p}|) \\ &= \begin{cases} \Delta_{mr}^{pert}(r) & \text{for Uc of p-pin symmetry,} \\ -\Delta_{mr}^{pert}(r) & \text{for Lc of p-spin symmetry.} \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

Where the step function $\theta(x)$ is given by:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (49)$$

Notably, the results yielded by the Greene and Aldrich approximation, for small values $\delta r \ll 1$, are in good agreement with those obtained using other methods. We have replaced the terms $k(k+1)r^{-4}$ and $k(k-1)r^{-4}$ with the approximation in Eq. (37). The combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials are extended by including new additive potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ expressed to the radial terms $\frac{z^2}{(1-z)^3}$, $\frac{z^{5/2}}{(1-z)^4}$, $\frac{z^{3/2}}{(1-z)^2}$, $\frac{z^{5/2}}{(1-z)^3}$, $\frac{z^3}{(1-z)^4}$, $\frac{z^{7/2}}{(1-z)^4}$ and $\frac{z^2}{(1-z)^4}$ to become the newly combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials in 3D-RNCQS symmetries. The generated new two effective potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ are also proportional to the infinitesimal vector $\mathbf{\Theta}$. This allows us to consider the new additive parts of the effective potential $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ as perturbation potentials compared with the main potentials $\Sigma_{mr}^s(r)$ and $\Delta_{mr}^p(r)$ which are also known with the parent potential operator in the symmetries of 3D-RNCQS, that is, the two inequalities $\Sigma_{mr}^{pert}(r) \ll \Sigma_{mr}^s(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r) \ll \Delta_{mr}^p(r)$ have become achieved. That is all physical justifications for applying the time-independent perturbation theory become satisfied to calculate the expectation values of previous radial terms. This allows

us to give a complete prescription for determining the energy level of the generalized $(n, l, s, l_p, s_p, m, m_p)^{th}$ excited states.

B. The expectation values under the NCMRYPs in the 3D-RNCQS for spin symmetry

In this subsection, we want to apply the perturbative theory, in the case of deformation Dirac theory symmetries, we find the expectation values $M_{1(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^2}{(1-z)^3} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$, $M_{2(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{5/2}}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$, $M_{3(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$, $M_{4(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$, $M_{5(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^3}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$, $M_{6(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$ and $M_{7(nlms)}^{s-mr} \equiv \left\langle \frac{z^2}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nlms)}^{s-mr}$ for the spin symmetry taking into account the unperturbed upper component $F_{nk}^s(r)$ which we have seen previously in Eq. (23). Thus after straightforward calculations, we obtain the following results:

$$M_{1(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-2} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.1)$$

$$M_{2(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+5/2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.2)$$

$$M_{3(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+3/2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-1} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.3)$$

$$M_{4(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+5/2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-2} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.4)$$

$$M_{5(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+3} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.5)$$

$$M_{6(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+7/2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr, \quad (50.6)$$

and

$$M_{7(nlms)}^{s-mr} = C_{nk}^{ns2} \int_0^{+\infty} z^{2\nu_{nk}^1+2} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dr. \quad (50.7)$$

We have used useful abbreviations $\langle R \rangle_{(nlms)}^{s-mr}$ instead to average values $\langle n, l, m | R | n, l, m \rangle$ to avoid the extra burden of writing equations. Furthermore, we have applied the property of the spherical harmonics, which has the form

$$\int Y_l^m(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Introducing the change of variable $z = \exp(-2\delta r)$. This maps the region $0 \leq r < \infty$ to $0 \leq z \leq 1$ and allows us to obtain $r = -1/2 \frac{dz}{\delta z}$, and transform Eqs. (50, $i = \overline{1,7}$) into the following form:

$$M_{1(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-2} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.1)$$

$$M_{2(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+5/2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.2)$$

$$M_{3(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+3/2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-1} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.3)$$

$$M_{4(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+5/2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-2} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.4)$$

$$M_{5(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+3-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.5)$$

$$M_{6(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+7/2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz, \quad (51.6)$$

and

$$M_{7(nlms)}^{s-mr} = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} \int_0^1 z^{2\nu_{nk}^1+2-1} (1-z)^{\zeta_{nk}^1-3} [2F_1(-n, n+2\nu_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1 + 1; 1+2\nu_{nk}^1, z)]^2 dz. \quad (51.7)$$

We can evaluate the above integrals either in a recurrence way through the physical values of the principal quantum number ($n = 0, 1, \dots$) and then generalize the result to the general $(n, l, s, l_p, s_p, m, m_p)^{th}$ excited state or we use the method proposed by Dong *et al.* [100] and applied by Zhang [101], to obtain the general excited state directly. We calculate the integrals in Eqs. (43, $i = \overline{1,7}$) with the help of the special integral formula:

$$\int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta} [{}_2F_1(-n, n+\beta+\alpha-2; 2\alpha+1, z)]^2 dz = n! \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1) \sum_{q=0}^n \frac{(-1)^q (n+\alpha+\beta)_q}{(q+\alpha) \Gamma(n-q)! q! \Gamma(q+\alpha+\beta+1)} {}_3F_2(-n, q+\alpha, n+\alpha+\beta; \alpha+1, q+\alpha+\beta; 1), \quad (52)$$

here ${}_3F_2(c_1, c_2, \zeta; c_3, \tau; \xi; 1)$ equal to $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c_1)_n (c_2)_n (\xi)_n}{(c_3)_n n! (\tau+\xi)_n}$, the symbol $(n+\alpha+\beta)_q$ denotes the rising factorial or Pochhammer symbol $\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+q)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}$ while $\Gamma(\xi)$ denoting the usual Gamma function. By identifying Eqs.(51, $i = \overline{1,7}$) with the integrals in Eqs. (52), we obtain the following results:

$$M_{1(nlms)}^{s-mr} =$$

$$\sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^1 (-1)^q (n + K_{nk})_q}{(q + v_{nk}^1 + 2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + 1)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 2, n + K_{nk}, 2v_{nk}^1 + 3; q + K_{nk} + 1; 1), \quad (53.1)$$

$$M_{2(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^2 (-1)^q (n + K_{nk} - 1/2)_q}{(q + 2v_{nk}^1 + 5/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + 1/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 5/2, n + K_{nk} - 1/2, 2v_{nk}^1 + 7/2; q + K_{nk} + 1/2; 1), \quad (53.2)$$

$$M_{3(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^3 (-1)^q (n + K_{nk} + 1/2)_q}{(q + 2v_{nk}^1 + 3/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + 3/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 3/2, n + K_{nk} + 1/2, 2v_{nk}^1 + 5/2; q + K_{nk} + 3/2; 1), \quad (53.3)$$

$$M_{4(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^4 (-1)^q (n + K_{nk} + 1/2)_q}{(q + 2v_{nk}^1 + 5/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + 3/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 5/2, n + K_{nk} + 1/2, 2v_{nk}^1 + 7/2; q + K_{nk} + 3/2; 1), \quad (53.4)$$

$$M_{5(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^5 (-1)^q (n + K_{nk})_q}{(q + 2v_{nk}^1 + 3)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + 1)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 3, n + K_{nk}, 2v_{nk}^1 + 4; q + K_{nk} + 1; 1), \quad (53.5)$$

$$M_{6(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^6 (-1)^q (n + K_{nk} + \frac{1}{2})_q}{(q + 2v_{nk}^1 + \frac{7}{2})(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk} + \frac{1}{2})} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + \frac{7}{2}, n + K_{nk} + \frac{1}{2}, 2v_{nk}^1 + \frac{9}{2}; q + K_{nk} + \frac{1}{2}; 1), \quad (53.6)$$

and

$$M_{7(nlms)}^{s-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^7 (-1)^q (n + K_{nk} - 1)_q}{(q + 2v_{nk}^1 + 2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk})} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nk}^1 + 2, n + K_{nk} - 1, 2v_{nk}^1 + 3; q + K_{nk}; 1), \quad (53.7)$$

with

$$\begin{cases} K_{nk} = 2v_{nk}^1 + \zeta_{nk}^1, \\ \beta_{nk}^1 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 3) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 1), \\ \beta_{nk}^2 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 7/2) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 2), \\ \beta_{nk}^3 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 5/2) \Gamma(\zeta_{nk}^1), \\ \beta_{nk}^4 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 7/2) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 1), \\ \beta_{nk}^5 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 4) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 2), \\ \beta_{nk}^6 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 9/2) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 2), \\ \beta_{nk}^7 = \frac{C_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nk}^1 + 3) \Gamma(\zeta_{nk}^1 - 2). \end{cases} \quad (54)$$

and

$$\begin{cases} (n + K_{nk})_q = \frac{\Gamma(n + K_{nk} + q)}{\Gamma(n + K_{nk})}, \\ (n + K_{nk} \pm 1/2)_q = \frac{\Gamma(n + K_{nk} \pm 1/2 + q)}{\Gamma(n + K_{nk} \pm 1/2)}, \\ (n + K_{nk} - 1)_q = \frac{\Gamma(n + K_{nk} - 1 + q)}{\Gamma(n + K_{nk} - 1)}. \end{cases} \quad (55)$$

C. The expectation values under the NCMRYPs in the 3D-RNCQS for p-spin symmetry

In this subsection, we want to apply the perturbative theory, in the case of deformation Dirac theory symmetries, we find

the expectation values $M_{1(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv \left\langle \frac{z^2}{(1-z)^3} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$,

$M_{2(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{5/2}}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$, $M_{3(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv$

$\left\langle \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$, $M_{4(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv \left\langle \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$,

$M_{5(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv \left\langle \frac{z^3}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$, $M_{6(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv$

$\left\langle \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$ and $M_{7(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \equiv \left\langle \frac{z^2}{(1-z)^4} \right\rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$ for p-

spin symmetry with tensor interaction taking into account the wave function which we have seen previously in Eq. (24). By examining the two expressions of the upper and lower components ($F_{nk}^s(r)$ and $G_{nk}^p(r)$) shown in Eqs. (23) and (24), we note that there is a possibility to move from the unperturbed upper component $F_{nk}^s(r)$ to the other lower component $G_{nk}^p(r)$ by making the following substitutions:

$$C_{nk}^{ns} \Leftrightarrow C_{nk}^{np}, v_{nk}^1 \Leftrightarrow v_{pnk}^1 \text{ and } \zeta_{nk}^1 \Leftrightarrow \zeta_{pnk}^1. \quad (56)$$

This allows us to obtain the expectation values for p-spin symmetry from Eqs. (45, $i = 1, 7$) without re-calculation, as follows:

$$M_{1(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p1} (-1)^q (n + K_{nk}^p)_q}{(q + v_{pnk}^1 + 2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk}^p + 1)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{pnk}^1 + 2, n + K_{nk}^p, 2v_{pnk}^1 + 3; q + K_{nk}^p + 1; 1), \quad (57.1)$$

$$M_{2(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p2} (-1)^q (n + K_{nk}^p - 1/2)_q}{(q + 2v_{pnk}^1 + 5/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk}^p + 1/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{pnk}^1 + 5/2, n + K_{nk}^p - 1/2, 2v_{pnk}^1 + 7/2; q + K_{nk}^p + 1/2; 1), \quad (57.2)$$

$$M_{3(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p3} (-1)^q (n + K_{nk}^p + 1/2)_q}{(q + 2v_{pnk}^1 + 3/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nk}^p + 3/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{pnk}^1 + 3/2, n + K_{nk}^p + 1/2, 2v_{pnk}^1 + 5/2; q + K_{nk}^p + 3/2; 1), \quad (57.3)$$

$$M_{4(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} =$$

$$\sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p4}(-1)^q(n+K_{nk}^p+1/2)_q}{(q+2\nu_{pnk}^1+5/2)(n-q)!q!\Gamma(q+K_{nk}^p+3/2)} {}_3F_2(-n, q+2\nu_{pnk}^1+5/2, n+K_{nk}^p+1/2, 2\nu_{pnk}^1+7/2; q+K_{nk}^p+3/2; 1), \quad (57.4)$$

$$M_{5(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p5}(-1)^q(n+K_{nk}^p)_q}{(q+2\nu_{pnk}^1+3)(n-q)!q!\Gamma(q+K_{nk}^p+1)} {}_3F_2(-n, q+2\nu_{pnk}^1+3, n+K_{nk}^p, 2\nu_{pnk}^1+4; q+K_{nk}^p+1; 1), \quad (57.5)$$

$$M_{6(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p6}(-1)^q(n+K_{nk}^p+1/2)_q}{(q+2\nu_{pnk}^1+7/2)(n-q)!q!\Gamma(q+K_{nk}^p+1/2)} {}_3F_2(-n, q+2\nu_{pnk}^1+7/2, n+K_{nk}^p+1/2, 2\nu_{pnk}^1+9/2; q+K_{nk}^p+1/2; 1), \quad (57.6)$$

and

$$M_{7(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nk}^{p7}(-1)^q(n+K_{nk}^p-1)_q}{(q+2\nu_{pnk}^1+2)(n-q)!q!\Gamma(q+K_{nk}^p)} {}_3F_2(-n, q+2\nu_{pnk}^1+2, n+K_{nk}^p-1, 2\nu_{pnk}^1+3; q+K_{nk}^p; 1), \quad (57.7)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{nk}^p = 2\nu_{pnk}^1 + \zeta_{pnk}^1, \\ \beta_{nk}^{p1} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+3) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-1), \\ \beta_{nk}^{p2} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+7/2) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-2), \\ \beta_{nk}^{p3} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+5/2) \Gamma(\zeta_{pnk}^1), \\ \beta_{nk}^{p4} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+7/2) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-1), \\ \beta_{nk}^{p5} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+4) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-2), \\ \beta_{nk}^{p6} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+9/2) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-2), \\ \beta_{nk}^{p7} = \frac{C_{nk}^{np2}}{2\delta} n! \Gamma(2\nu_{pnk}^1+3) \Gamma(\zeta_{pnk}^1-2). \end{array} \right. \quad (58)$$

and

$$\left\{ \begin{array}{l} (n+K_{nk}^p)_q = \frac{\Gamma(n+K_{nk}^p+q)}{\Gamma(n+K_{nk}^p)}, \\ (n+K_{nk}^p \pm 1/2)_q = \frac{\Gamma(n+K_{nk}^p \pm 1/2+q)}{\Gamma(n+K_{nk}^p \pm 1/2)}, \\ (n+K_{nk}^p-1)_q = \frac{\Gamma(n+K_{nk}^p-1+q)}{\Gamma(n+K_{nk}^p-1)}. \end{array} \right. \quad (59)$$

D. New energy for NCMRYPs in 3D-RNCQS symmetries

The main objective underlined in this subsection is to find the contribution resulting from topological properties based on our strategy which we have successfully applied in previous works and which we try to develop in every new work. We can say that the global relativistic energy in the perspective of 3D-RNCQS symmetries produced with NCMRYPs model as a result of a major contribution to relativistic energy known in the literature under the combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials model in usual Dirac theory and

which we paved for through a quick look for the spin(p-spin)-symmetry in Eqs. (20) and (21), while the new contribution is produced from the topological properties under space-space deformation, which can be evaluated through several contributions, we will address three of them. The first one is generated from the effect of the perturbed spin-orbit effective potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ corresponds to spin symmetry and pseudospin symmetry. These perturbed effective potentials are obtained by replacing the coupling of the angular momentum (L and L_p) operators and the NC vector Θ with the new equivalent couplings ($\Theta \mathbf{L} \mathbf{S}$ and $\Theta \mathbf{L}_p \mathbf{S}_p$) for spin and p-spin-symmetry, respectively (with $\Theta^2 = \Theta_{12}^2 + \Theta_{23}^2 + \Theta_{13}^2$). This degree of freedom comes considering that the infinitesimal NC vector Θ is arbitrary. We have oriented the two spin- s and spin- s_p of the fermionic particles to become parallels to the vector Θ which interacted with new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials. Additionally, we substitute the previous new spin-orbit couplings with the corresponding new physical form $(\Theta/2)\mathbf{G}^2$ and $(\Theta/2)\mathbf{G}_p^2$, with $\mathbf{G}^2 = \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2$ and $\mathbf{G}_p^2 = \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}_p^2 - \mathbf{S}_p^2$ for a spin (p-spin)-symmetry, respectively. It is well known that the operators ($\mathbf{H}_{mc}^{mr}$, $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{L}^2$, $\mathbf{S}^2$ and $\mathbf{J}_z$) form a complete set of conserved physics quantities, the eigenvalues of the operators G^2 and G_p^2 are equal to the values:

$$F(j, l, s) = \frac{[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]}{2}, \quad \text{for } |l-s| \leq j \leq |l+s|$$

and

$$F(j, l_p, s_p) = \frac{[j(j+1) - l_p(l_p-1) - s_p(s_p+1)]}{2}, \quad \text{for } |l_p-s_p| \leq j \leq |l_p+s_p|$$

that corresponding to the spin and p-spin-symmetry, respectively. Consequently, the partially corrected energies $\Delta E_{mr}^{so-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \eta, j, l, s) \equiv \Delta E_{mr}^{so-s}$ and $\Delta E_{mr}^{so-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \eta, j, l_p, s) \equiv \Delta E_{mr}^{so-p}$ due to the perturbed effective potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ produced for the $(n, l, s, l_p, s_p)^{th}$ excited state, in 3D-RNCQS symmetries, as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta E_{mr}^{so-s} = \Theta F(j, l, s) \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0), \\ \Delta E_{mr}^{so-p} = \Theta F(j, l_p, s_p) \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0). \end{array} \right. \quad (60)$$

The global two expectation values $\langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0)$ and $\langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0)$ for a spin(p-spin)-symmetry, respectively are determined from the following expressions:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu s} M_{\mu(nlms)}^{s-mr}, \\ \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu p} M_{\mu(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}, \end{array} \right. \quad (61)$$

where $\beta_{nk}^{\mu s}$ and $\beta_{nk}^{\mu p}$ ($\mu = \overline{1,7}$) are determined from Eqs. (46) while $M_{\mu(nlms)}^{s-mr}$ and $M_{\mu(nl_p m_p s_p)}^{p-mr}$ are determined from Eqs. (53, $i = \overline{1,7}$) and Eqs. (57, $i = \overline{1,7}$), respectively. The second main part is obtained from the magnetic effect of the perturbative effective potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ under the NCMRYPs model in 3D-RNCQS symmetries. These effective potentials are achieved when we replace both $(\mathbf{L}\Theta$ and $\mathbf{L}_p\Theta)$ by $(\lambda\aleph L_z$ and $\lambda\aleph L_z^p)$, respectively, and Θ_{12} by $\lambda\aleph$, here ($\aleph$ and λ) are present the intensity of the magnetic field induced by the effect of the deformation of space-space geometry and a new infinitesimal noncommutativity parameter, so that the physical unit of the original noncommutativity parameter Θ_{12} (length)² is the same unit of $\lambda\aleph$, we have also need to apply $\langle n', l', m' | L_z | n, l, m \rangle = m \delta_{m'm} \delta_{l'l} \delta_{n'n}$ and $\langle n', l'_p, m'_p | L_z^p | n, l_p, m_p \rangle = m_p \delta_{m'_p m_p} \delta_{l'_p l_p} \delta_{n'n} (-l'_p \leq m'_p \leq l_p$ and $-l \leq m \leq l)$ for spin(p-spin)-symmetry, respectively. All of these data allow for the discovery of the new energy shift $\Delta E_{mr}^{mg-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \lambda, j, l, m) \equiv \Delta E_{mr}^{mg-s}$ and $\Delta E_{mr}^{mg-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \lambda, j, l, m_p) \equiv \Delta E_{mr}^{mg-p}$ due to the perturbed Zeeman effect created by the influence of the NCMRYPs model for the $(n, l, s, l_p, s_p, m, m_p)^{th}$ excited state in 3D-RNCQS symmetries as follows:

$$\begin{cases} \Delta E_{mr}^{mg-s} = \lambda\aleph \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) m, \\ \Delta E_{mr}^{mg-p} = \lambda\aleph \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) m_p. \end{cases} \quad (62)$$

After we completed the self-energy additions resulting from the self-deformation generated by perturbed (spin/p-spin)-orbit interactions and the new modified Zeeman effect. We are now in the process of reviewing another addition that is no less important than the previous ones under the NCMRYPs model in 3D-RNCQS symmetries. This new physical phenomenon is generated automatically from the effect of perturbed effective potentials $\Sigma_{mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{mr}^{pert}(r)$ which we have seen in Eqs. (44) and (45). We consider the fermionic particles undergoing rotation with angular velocity ω . The features of this subjective phenomenon are determined by replacing the arbitrary vector Θ with $\gamma\omega$. Allowing us to replace the two couplings $(\mathbf{L}\Theta$ and $\mathbf{L}_p\Theta)$ with $(\gamma\mathbf{L}\omega$ and $\mathbf{L}_p\omega)$, respectively, as follows:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{L}_p \end{pmatrix} \Theta \rightarrow \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{L} \omega \text{ for spin-sy} \\ \mathbf{L}_p \omega \text{ for p-spin-sy} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Here, we consider γ is just an infinitesimal real proportional constant. We can express the effective potentials $\Sigma_{mr}^{mr-rot}(z)$ and $\Delta_{mr}^{mr-rot}(z)$ which induced the rotational movements of the fermionic particles as follows:

$$\Sigma_{mr}^{mr-rot}(z) = \gamma(\chi_{nk}^{1s} \frac{z^2}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{2s} \frac{z^2}{(1-z)^4} +$$

$$+ \chi_{nk}^{3s} \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} + \chi_{nk}^{4s} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{5s} \frac{z^3}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{6s} \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{7s} \frac{z^2}{(1-z)^4}) \mathbf{L}\omega + O(\Theta^2), \quad (64.1)$$

and

$$\Delta_{mr}^{mr-rot}(z) = \gamma(\chi_{nk}^{1p} \frac{z^2}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{2p} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{3p} \frac{z^{3/2}}{(1-z)^2} + \chi_{nk}^{4p} \frac{z^{5/2}}{(1-z)^3} + \chi_{nk}^{5p} \frac{z^3}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{6p} \frac{z^{7/2}}{(1-z)^4} + \chi_{nk}^{7p} \frac{z^2}{(1-z)^4}) \mathbf{L}_p\omega + O(\Theta^2). \quad (64.2)$$

To simplify the calculations without changing the physical content, by applying the same principle that we examined a short while ago, we choose the rotational velocity ω parallel to the (Oz) axis ($\omega = \omega e_z$). Thus, the above equation can be reduced to its simplified form as

$$\begin{aligned} & \gamma \left(\begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu s} M_{\mu(nlms)}^{s-mr} \end{pmatrix} \mathbf{L}\omega \right) \\ & \left(\sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu p} M_{\mu(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \right) \mathbf{L}_p\omega \\ & = \gamma\omega \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu s} M_{\mu(nlms)}^{s-mr} \end{pmatrix} L_z \\ \begin{pmatrix} \sum_{\mu=1}^7 \beta_{nk}^{\mu p} M_{\mu(nl_p m_p s_p)}^{p-mr} \end{pmatrix} L_z^p \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (65) \end{aligned}$$

All of this data permuted us to produce the corrected energies $\Delta E_{mr}^{rot-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \gamma, m)$ and $\Delta E_{mr}^{rot-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \gamma, m_p)$ due to the perturbed effective potentials $\Sigma_{mr}^{mr-rot}(z)$ and $\Delta_{mr}^{mr-rot}(z)$ which are generated automatically by the influence of the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials for the $(n, l, l_p, m, m_p)^{th}$ excited state in 3D-RNCQS symmetries as follows:

$$\begin{pmatrix} \Delta E_{mr}^{rot-s} \\ \Delta E_{mr}^{rot-p} \end{pmatrix} = \gamma\omega \begin{pmatrix} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) m \\ \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) m_p \end{pmatrix}. \quad (66)$$

It is worth noting that the authors of reference [102] studied rotating isotropic and anisotropic harmonically confined ultra-cold Fermi gas in a two and three-dimensional space at zero temperature, but in this study, the rotational term was added to the Hamiltonian operator, in contrast to our case, where in our recent study, the two rotation operators $\Sigma_{mr}^{mr-rot}(z)\mathbf{L}\omega$ and $\Delta_{mr}^{mr-rot}(z)\mathbf{L}_p\omega$ automatically appear due to the augmented symmetries resulting from the deformation of space-space under the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials. For fermionic particles with spin-1/2, the eigenvalues of the operators $\mathbf{G}^2$ and $\mathbf{G}_p^2$ are equal to the values:

$$\begin{cases} F(j, l, s) = \frac{[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}]}{2}, \\ F(j, l_p, s_p) = [j(j+1) - l_p(l_p-1) - \frac{3}{4}]/2. \end{cases} \quad (67)$$

The possible values of $\{j\}$ that corresponding spin-1/2 can be taken ($l \pm 1/2$ and $l_p \pm 1/2$) for spin symmetry and pseudospin symmetry, this allows us to reformulate Eq. (67) as follows:

$$F(j = l \pm 1/2, s = 1/2) = \frac{1}{2} \begin{cases} l \text{ Up polarity: } j = l + 1/2, \\ -(l+1) \text{ Down polarity: } j = l - 1/2. \end{cases} \quad (68)$$

and

$$F(j = l_p \pm 1/2, s_p = 1/2) = \frac{1}{2} \begin{cases} l_p \text{ Up polarity: } j = l_p + 1/2, \\ -(l_p+1) \text{ Down polarity: } j = l_p - 1/2. \end{cases} \quad (69)$$

The global relativistic energy $E_{nc}^{mr-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \eta, \lambda, \gamma, j, l, s, m)$ and $E_{nc}^{mr-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \eta, \lambda, \gamma, j, l_p, s, m_p)$ for the case of spin-1/2 with new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials, in the framework of 3D-RNCQS symmetries, corresponding to the generalized $(n, l, s, l_p, s_p, m, m_p)^{th}$ excited with Up polarity (Up) with $j = l + 1/2$ and down polarity (Dp) with $j = l - 1/2$ as

$$\begin{aligned} & E_{nc}^{mr-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \theta, \lambda, \gamma, j, l, s, m) \\ &= E_{nk}^s(n, \delta, \beta, A, V_0) + \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \left[(\lambda \aleph \right. \\ & \left. + \gamma \omega) m + \frac{\theta}{2} \begin{cases} l \text{ for Up with } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) \text{ for Dp with } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

and

$$\begin{aligned} & E_{nc}^{mr-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \theta, \lambda, \gamma, j, l_p, s_p, m_p) \\ &= E_{nk}^p(n, \delta, \beta, A, V_0) \\ &+ \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \\ & \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m_p + \frac{\theta}{2} \begin{cases} l_p \text{ for Up with } j = l_p + \frac{1}{2} \\ -(l_p+1) \text{ for Dp with } j = l_p - \frac{1}{2} \end{cases} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

Where E_{nk}^s and E_{nk}^p are usual relativistic energies under combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials obtained from equations of energy in Eqs.(20) and (21). We can now generalize our obtained energies E_{g-nc}^{mr-s} and E_{g-nc}^{mr-p} under the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials which are produced with the globally induced two potentials $\Sigma_{t,mr}^{pert}(r)$ and $\Delta_{t-mr}^{pert}(r)$ for spin and pseudospin symmetries corresponding to the upper and lower components

($F_{nk}^s(s)$ and $G_{nk}^s(s)$) and ($F_{nk}^p(s)$ and $G_{nk}^p(s)$), respectively as:

$$\begin{aligned} E_{g-nc}^{mr-s} &= E_{nc}^{mr-s} \theta(|E_{nc}^{mr-s}|) - E_{nc}^{mr-s} \theta(-|E_{nc}^{mr-s}|) \\ &= \begin{cases} E_{nc}^{mr-s} \text{ for Uc of spin symmetry} \\ -E_{nc}^{mr-s} \text{ for Lc of spin symmetry} \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

and

$$\begin{aligned} E_{g-nc}^{mr-p} &= E_{nc}^{mr-p} \theta(|E_{nc}^{mr-p}|) - E_{nc}^{mr-p} \theta(-|E_{nc}^{mr-p}|) \\ &= \begin{cases} E_{nc}^{mr-p} \text{ for UC of p-pin symmetry} \\ -E_{nc}^{mr-p} \text{ for Lc of p-pin symmetry} \end{cases} \end{aligned} \quad (73)$$

I. IV. THE NEW COMBINED MANNING-ROSEN AND YUKAWA TENSOR INTERACTION IN 3D-NRNCQS SYMMETRIES

In order to study and analyze the nonrelativistic limit, in three-dimensional nonrelativistic noncommutative quantum mechanics (3D-3D-NRNCQS) symmetries of the new combined Manning-Rosen potential, two steps must be applied, the first step corresponds to the nonrelativistic limit, in usual nonrelativistic quantum energy. This is done by applying the following steps, we replace:

$$(C_{ES}, C_{PS}, V_0) \rightarrow (0,0,0), E_{nk}^s + M \rightarrow 2\mu, E_{nk}^s - M \rightarrow E_{nl}^{nr}, k(k+1) \rightarrow l(l+1).$$

This allows us to obtain the nonrelativistic energy levels as:

$$E_{nl}^{nr} = -\frac{1}{2\mu} \left[\delta \frac{2\delta^2 A - l(l+1) - n(n+1)\Lambda(l, \beta, \delta)}{n + \frac{1}{2} + \Lambda(l, \beta, \delta)} \right]^2. \quad (74)$$

Here $\Lambda(l, \beta, \delta)$ equal to $\sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1) - 2\delta^2\beta(\beta-1)}$. Now, the second step corresponds to the transformation of the relativistic coefficients $\chi_{nk}^{\mu s}(\mu = \overline{1,7})$ under the previous correspondence to the new nonrelativistic coefficients $\varepsilon_{nl}^{\mu}(\mu = \overline{1,7})$ of the nonrelativistic expectations values are given by:

$$\begin{cases} \varepsilon_{nl}^1 = \varepsilon_{nl}^2 = \varepsilon_{nl}^5 = 0, \\ \varepsilon_{nl}^3 = -\frac{2\delta^2 A}{b^2}, \\ \varepsilon_{nl}^4 = \frac{4\delta^2\beta(\beta-1)}{b^2} - \frac{2\delta^2 A}{b^2}, \\ \varepsilon_{nl}^6 = -\frac{2\beta\delta^2(\beta-1)\Lambda}{b^2}, \\ \varepsilon_{nl}^7 = 16\delta^4 l(l+1). \end{cases} \quad (75)$$

Allows us to reexport the relativistic expectation values $\langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0)$ of spin symmetry in Eq. (61) from the corresponding nonrelativistic expectation values $\langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0)$ as:

$$\langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \sum_{\mu=3}^7 \varepsilon_{nl}^{\mu} M_{\mu(nlms)}^{nr-mr} \quad (76)$$

with

$$M_{3(nlms)}^{nr-mr} =$$

$$\sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nl}^{nr3} (-1)^q (n + K_{nl}^{nr} + 1/2)_q}{(q + 2v_{nl}^{nr1} + 3/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nl}^{nr} + 3/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nl}^{nr1} + 3/2, n + K_{nl}^{nr} + 1/2, 2v_{nl}^{nr1} + 5/2; q + K_{nl}^{nr} + 3/2; 1), \quad (77.1)$$

$$M_{4(nlms)}^{nr-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nl}^{nr4} (-1)^q (n + K_{nl}^{nr} + 1/2)_q}{(q + 2v_{nl}^{nr1} + 5/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nl}^{nr} + 3/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nl}^{nr1} + 5/2, n + K_{nl}^{nr} + 1/2, 2v_{nl}^{nr1} + 7/2; q + K_{nl}^{nr} + 3/2; 1), \quad (77.2)$$

$$M_{6(nlms)}^{nr-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nl}^{nr6} (-1)^q (n + K_{nl}^{nr} + 1/2)_q}{(q + 2v_{nl}^{nr1} + 7/2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nl}^{nr} + 1/2)} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nl}^{nr1} + 7/2, n + K_{nl}^{nr} + 1/2, 2v_{nl}^{nr1} + 9/2; q + K_{nl}^{nr} + 1/2; 1), \quad (77.3)$$

and

$$M_{7(nlms)}^{nr-mr} = \sum_{q=0}^n \frac{\beta_{nl}^{nr7} (-1)^q (n + K_{nl}^{nr} - 1)_q}{(q + 2v_{nl}^{nr1} + 2)(n - q)! q! \Gamma(q + K_{nl}^{nr})} {}_3F_2(-n, q + 2v_{nl}^{nr1} + 2, n + K_{nl}^{nr} - 1, 2v_{nl}^{nr1} + 3; q + K_{nl}^{nr}; 1), \quad (77.4)$$

with

$$\begin{cases} K_{nl}^{nr} = 2v_{nl}^{nr1} + \zeta_{nl}^{nl1}, \\ \beta_{nl}^{nr3} = \frac{c_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(v_{nl}^{nr1} + 5/2) \Gamma(\zeta_{nl}^{nl1}), \\ \beta_{nl}^{nr4} = \frac{c_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nl}^{nr1} + 7/2) \Gamma(\zeta_{nl}^{nl1} - 1), \\ \beta_{nl}^{nr6} = \frac{c_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nl}^{nr1} + 9/2) \Gamma(\zeta_{nl}^{nl1} - 2), \\ \beta_{nl}^{nr7} = \frac{c_{nk}^{ns2}}{2\delta} n! \Gamma(2v_{nl}^{nr1} + 3) \Gamma(\zeta_{nl}^{nl1} - 2). \end{cases} \quad (78)$$

and

$$\begin{cases} (n + K_{nl}^{nr} + 1/2)_q = \frac{\Gamma(n + K_{nl}^{nr} + 1/2 + q)}{\Gamma(n + K_{nl}^{nr} + 1/2)}, \\ (n + K_{nl}^{nr} - 1)_q = \frac{\Gamma(n + K_{nl}^{nr} - 1 + q)}{\Gamma(n + K_{nl}^{nr} - 1)}. \end{cases} \quad (79)$$

This permuted expressing the nonrelativistic correction energy $\Delta E_{nc-nr}^{mr}(n, \delta, V_0, A, \eta, \lambda, \gamma, j, l, s, m)$ produced by the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials as

$$\begin{aligned} \Delta E_{nc-nr}^{mr}(n, \delta, V_0, A, \eta, \lambda, \gamma, j, l, s, m) \\ = \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) (\lambda \aleph + \gamma \omega) m \\ + \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \frac{\theta}{2} \left\{ \begin{array}{l} l \text{ Up: } j = l + 1/2, \\ -(l + 1) \text{ Dp: } j = l - 1/2. \end{array} \right. \quad (80) \end{aligned}$$

The global nonrelativistic energy $E_{nc-nr}^{mr}(n, \delta, V_0, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l, s, m)$ produced with the new Manning-Rosen potential in 3D-NRNCQS symmetries as a result the topological properties of the deformation space-space is the sum of usual energy E_{nl}^{mr} in Eq. (74) under combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials in

3D-NRNCQS symmetries and the obtained correction $\Delta E_{nc-nr}^{mr}(n, \delta, V_0, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l, s, m)$ in Eq. (80) as follows:

$$\begin{aligned} E_{nc-nr}^{mr}(n, \delta, V_0, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l, s, m) \\ = -\frac{1}{2\mu} \left[\delta \frac{2\delta^2 A - l(l + 1) - n(n + 1) \Lambda(l, \beta, \delta)}{n + \frac{1}{2} + \Lambda(l, \beta, \delta)} \right]^2 \\ + \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m + \right. \\ \left. \frac{\theta}{2} \left\{ \begin{array}{l} l \text{ Up: } j = l + 1/2 \\ -(l + 1) \text{ Dp: } j = l - 1/2 \end{array} \right\} \right]. \quad (81) \end{aligned}$$

Now, considering composite systems such as molecules made of $N = 2$ particles of masses $m_n (n = 1, 2)$ in the frame of NC algebra, it is worth taking into account the features of the descriptions of the systems in the nonrelativistic case, it was obtained those composite systems with different masses are described with different NC parameters [48, 49, 50]:

$$[q_\mu^{(s,h,i)}, q_\nu^{(s,h,i)}]_* = i\theta_{\mu\nu}^c, \quad (82)$$

where the noncommutativity parameter $\theta_{\mu\nu}^c$ is determined from:

$$\theta_{\mu\nu}^c = \sum_{n=1}^2 \mu_n^2 \delta_{\mu\nu}^{(n)}, \quad (83)$$

with $\mu_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ and $\mu_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$, and $\delta_{\mu\nu}^{(n)}$ is the parameter of non-commutativity, corresponding to the mass particle of mass μ_n . Note that in the case of a physical system composed of two identical particles $\mu_1 = \mu_2$ such as the diatomic O_2 , I_2 , N_2 , H_2 , and Ar_2 molecules under the effect of the new Manning-Rosen potential, the parameter $\delta_{\mu\nu}^{(n)} = \delta_{\mu\nu}$. Thus, the three parameters η , λ , and γ which appear in Eq. (81) are changed to become as follows:

$$\mathcal{E}^c = \left(\sum_{n=1}^2 \mu_n^2 \mathcal{E}_{12}^{(n)} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^2 \mu_n^2 \mathcal{E}_{23}^{(n)} \right)^2 + \left(\sum_{n=1}^2 \mu_n^2 \mathcal{E}_{13}^{(n)} \right)^2, \quad (84)$$

with $\mathcal{E}^c = (\theta^c, \lambda^c, \gamma^c)$. As mentioned above, in the case of a system of two particles with the same mass $\mu_1 = \mu_2$, we have $\eta_{\mu\nu}^{(n)} = \eta_{\mu\nu}$, $\lambda_{\mu\nu}^{(n)} = \lambda_{\mu\nu}$ and $\gamma_{\mu\nu}^{(n)} = \gamma_{\mu\nu}$. Finally, we can generalize our obtained nonrelativistic total energy $E_{nc-nr}^s(n, \delta, \eta, A, \eta^c, \lambda^c, \gamma^c, j, l, s, m)$ under the new Manning-Rosen potential considering that composite systems with different masses are described with different NC parameters for the HCl, CH, LiH, CO, and NO diatomic molecules as:

$$\begin{aligned} E_{nc-nr}^{mr} = -\frac{1}{2\mu} \left[\delta \frac{2\delta^2 A - l(l + 1) - n(n + 1) \Lambda(l, \beta, \delta)}{n + \frac{1}{2} + \Lambda(l, \beta, \delta)} \right]^2 \\ + \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr} \left[(\lambda^c \aleph + \gamma^c \omega) m + \right. \\ \left. \frac{\theta^c}{2} \left\{ \begin{array}{l} l \text{ Up } j = l + 1/2 \\ -(l + 1) \text{ Dp: } j = l - 1/2 \end{array} \right\} \right]. \quad (85) \end{aligned}$$

V. STUDY OF IMPORTANT RELATIVISTIC AND NON-RELATIVISTIC CASES IN THE CONTEXT OF 3D-NRNCQS SYMMETRIES

In this section, we are about to examine some particular cases regarding the new relativistic bound state energy eigenvalues in Eqs. (70) and (71) and the nonrelativistic bound state energy eigenvalues in Eq. (81). We could derive some particular potentials, useful for other physical systems, by adjusting relevant parameters of the NCMRYPs model in 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries, such as the new s-wave cases and both the new Dirac and Schrödinger-Manning-Rosen problems in 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries.

A. New s-wave under deformed (Dirac-Schrödinger) equations with NCMRYPs model and Manning-Rosen problem

If we consider $l = 0$ and $l_p = 0$ ($k = -1$ and $k = +1$ for spin and p-spin symmetry, respectively), we obtain directly the s-wave. The new corresponding relativistic energy eigenvalue equations in 3D-RNCQS symmetries reduce to:

$$E_{nc}^{mr-s}(n, \delta, \beta, A, V_0, \theta, \lambda, \gamma, j, l = 0, s, m) = E_{n(-1)}^s + \langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m + \frac{\theta}{2} \begin{cases} 0 & \text{for Up with } j = 1/2 \\ -1 & \text{for Dp with } j = -1/2 \end{cases} \right] \quad (86)$$

and

$$E_{nc}^{mr-p}(n, \delta, \beta, A, V_0, \theta, \lambda, \gamma, j, l_p = 0, s_p, m_p) = E_{n1}^p + \langle X_p \rangle_{(n0m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m_p + \frac{\theta}{2} \begin{cases} 0 & \text{for Up with } j = 1/2 \\ -1 & \text{for Dp with } j = 1/2 \end{cases} \right] \quad (87)$$

with $E_{n(-1)}^s$ and E_{n1}^p are given by [13]:

$$M^2 - E_{n,-1}^{s2} - C_{ES}(M - E_{n,-1}^s) = 4\delta^2 \left[\frac{A(M + E_{n,-1}^s - C_{SE}) - n(n+1)\Lambda_{-1}^s}{2n+1+2\Lambda_{-1}^s} \right]^2 \quad (88)$$

and

$$M^2 - E_{n1}^{p2} + C_{PS}(M + E_{n1}^p) = 4\delta^2 \left[\frac{A(M - E_{n1}^p - C_{PS}) - n(n+1)\Lambda_1^s}{2n+1+2\Lambda_1^s} \right]^2 \quad (89)$$

While the new corresponding nonrelativistic energy eigenvalue in Eq. (81) reduces to:

$$E_{nc}^{mr-nr}(n, \delta, V_0, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l = 0, s, m) = -\frac{1}{2\mu} \left[\delta \frac{2\delta^2 A - n(n+1)\Lambda(0, \beta, \delta)}{n + \frac{1}{2} + \Lambda(0, \beta, \delta)} \right]^2$$

$$+ \langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m + \frac{\theta}{2} \begin{cases} 0 & \text{Up: } j = \frac{1}{2} \\ \mp 1 & \text{Dp: } j = -\frac{1}{2} \end{cases} \right] \quad (90)$$

Here Λ_{-1}^s , Λ_1^s and $\Lambda(0, \beta, \delta)$ are equals to $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta(\beta-1)(M+E_{n,-1}^s-C_{SE})}{2M}}$, $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\beta(\beta-1)(M-E_{n1}^p-C_{PS})}{2M}}$ and $\sqrt{\frac{1}{4} - 2\delta^2\beta(\beta-1)}$ respectively. The new expectations values $\langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr}$, $\langle X_p \rangle_{(n0m_p s_p)}^{mr}$ and $\langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0)$ are determined from:

$$\begin{cases} \langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \lim_{l \rightarrow 0} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0), \\ \langle X_p \rangle_{(n0m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \lim_{l_p \rightarrow 0} \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0), \\ \langle X \rangle_{(n0ms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0) = \lim_{l \rightarrow 0} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0). \end{cases} \quad (91)$$

B. Deformed (Dirac-Schrödinger) new Manning-Rosen problems:

If we consider $V_0 = 0$, our studied potential turns to the new Manning-Rosen potential, and the new energy eigenvalue, in 3D-RNCQS symmetries, for the spin and p-spin symmetry becomes as:

$$E_{nc}^{m-s}(n, \delta, \beta, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l, s, m) = E_{nk}^{ms} + \langle X \rangle_{(nlms)}^m(n, \delta, \beta, A) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m + \frac{\theta}{2} \begin{cases} l & \text{for Up with } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & \text{for Dp with } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \right] \quad (92)$$

and

$$E_{nc}^{m-p}(n, \delta, \beta, A, \theta, \lambda, \gamma, j, l_p, s_p, m_p) = E_{nk}^{mp} + \langle X_p \rangle_{(nl_p m_p s_p)}^m(n, \delta, \beta, A) \left[(\lambda \aleph + \gamma \omega) m_p + \frac{\theta}{2} \begin{cases} l_p & \text{for Up with } j = l_p + \frac{1}{2} \\ -(l_p+1) & \text{for Dp with } j = l_p - \frac{1}{2} \end{cases} \right] \quad (93)$$

with E_{nk}^{ms} and E_{nk}^{mp} are given by [13]:

$$M^2 - E_{nk}^{ms2} - C_{ES}(M - E_{nk}^{ms}) = 4\delta^2 \left[\frac{\frac{A\Lambda_{nk}^{ms}}{2M} - k(k+1) - n(n+1)\sqrt{\frac{1}{4} + k(k+1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^{ms}}{2M}}}{2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4} + k(k+1) + \frac{A\Lambda_{nk}^{ms}}{2M}}} \right]^2 \quad (94)$$

and

$$M^2 - E_{nk}^{mp2} + C_{PS}(M + E_{nk}^{mp}) = 4\delta^2$$

$$\left[\frac{A\Lambda_{nk}^{mp} - k(k-1) - n(n+1)}{2M} \sqrt{\frac{1}{4} + k(k-1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^{mp}}{2M}} \right]^2$$

$$2n+1+2\sqrt{\frac{1}{4} + k(k-1) + \frac{\beta(\beta-1)\Lambda_{nk}^{mp}}{2M}} \quad (95)$$

While the new corresponding nonrelativistic energy eigenvalue in Eq. (81) reduces to:

$$E_{nc-nr}^m = -\frac{1}{2\mu} \left[\delta \frac{2\delta^2 A - l(l+1) - n(n+1)\Lambda(l, \beta, \delta)}{n + \frac{1}{2} + \Lambda(l, \beta, \delta)} \right]^2$$

$$+ \langle X \rangle_{(nlms)}^{m-nr} \left[(\lambda N + \gamma\omega)m + \frac{\theta}{2} \begin{cases} l & \text{Up } j = l + \frac{1}{2} \\ -(l+1) & \text{Dp: } j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \right], \quad (96)$$

here Λ_{nk}^{ms} and Λ_{nk}^{mp} are equals to $(M + E_{nk}^{ms} - C_{SE})$ and $(M - E_{nk}^p - C_{PS})$ respectively. The new expectations values $\langle X \rangle_{(nlms)}^m(n, \delta, \beta, A)$, $\langle X_p \rangle_{(nlpm_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A)$ and $\langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A)$ are determined from:

$$\begin{cases} \langle X \rangle_{(nlms)}^m(n, \delta, \beta, A) = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0), \\ \langle X_p \rangle_{(nlpm_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A) = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \langle X_p \rangle_{(nlpm_p s_p)}^{mr}(n, \delta, \beta, A, V_0), \\ \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A) = \lim_{V_0 \rightarrow 0} \langle X \rangle_{(nlms)}^{mr-nr}(n, \delta, \beta, A, V_0). \end{cases} \quad (97)$$

It is crucial to highlight that using perturbation theory to find second-order corrections under the new combined MR and Yukawa tensor potentials is ineffective because we have only used first-order corrections of infinitesimal parameters $(\theta, \lambda, \gamma)$. Therefore, all the energetic corrections resulting from the deformation of space-space are of the first order of $(\theta, \lambda, \gamma)$ according to the postulates we adopted in our current research in Eqs. (4.2) and (7), this is one of the most important new results of this research. Worthwhile it is better to mention that for the three- simultaneous limits $(\theta, \lambda, \gamma) \rightarrow (0,0,0)$, we recover the equations of energy for the spin symmetry and the p-spin symmetry, under the combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials which are treated in Refs. [13, 17]. Through our theoretical study of the new MR potential including Yukawa-like tensor interactions in 3D-RNCQS symmetries based on the study of researchers, (Ahmadov *et al.* and Ortakaya *et al.*) who clearly showed that shown that tensor interaction removes the degeneracy between two states in the pseudospin and spin doublets in usual 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries, and through our current study, we found that the effect of deformation of space-space on energy is proportional to three infinitesimal parameters $(\theta, \lambda, \gamma)$. This means that the new energy is slightly offset from its counterpart in the literature. This confirms the conclusion reached by the researchers in Refs. [13, 17] remains valid and confirmed in our current research.

VI. SUMMARY AND CONCLUSIONS

In this paper, we have obtained the new approximate solutions of the deformed Dirac equation in three-dimensional relativistic noncommutative quantum mechanics, for the new Manning-Rosen potential including a tensor Yukawa interaction within the framework of pseudospin and spin symmetry limits. Bopp's shift and perturbation theory methods were used to solve the deformed Dirac equation analytically. We have obtained the global energy eigenvalues in terms of the quantum numbers $(j, k, l/l_p, s/s_p, m/m_p)$, the potential depths (β, A, V_0) of the studied potentials, the range of the potentials δ , and noncommutativity parameters $(\theta, \lambda, \gamma)$. We have analyzed the nonrelativistic solutions of the Manning-Rosen potential. Furthermore, we have applied our results to the composite systems such as diatomic molecules HCl, CH, LiH, CO, NO, O₂, I₂, N₂, H₂, and Ar₂. By altering parameters (β, A, V_0) , we have obtained specific potentials which is helpful for other physical systems such as the s-wave of the new combined Manning-Rosen and Yukawa tensor potentials and the new Manning-Rosen problem in 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries. It is worth mentioning that, in all cases, to make the three simultaneous limits $(\theta, \lambda, \gamma) \rightarrow (0,0,0)$, the ordinary physical quantities are recovered in Refs. [13, 17].

ACKNOWLEDGEMENTS

This work has been partly supported by the Algerian Ministry of Higher Education and Scientific Research and DGRST and by the Laboratory of Physics and Material Chemistry at the University of M'sila. The author is grateful to the reviewers.

REFERENCES

- [1] Manning, M. F., Rosen, N., *Minutes of the Middletown meeting*. Physical Review **44**, 951-954 (1933).
- [2] Falaye, B. J., Oyewumi, K. J., Ibrahim, T. T., Punyasena, M. A., Onate, C.A., *Bound state solutions of the Manning-Rosen potential*, Canadian Journal of Physics **91**, 98-104 (2013). <https://doi.org/10.1139/cjp-2012-0330>
- [3] Wang, P. Q., Zhang, L. H., Jia, C. S., Liu, J. Y., *Equivalence of the three empirical potential energy models for diatomic molecules*, Journal of Molecular Spectroscopy **274**, 5-8 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.jms.2012.03.005>
- [4] Wei, G. F., Dong, S. H., *Approximately analytical solutions of the Manning-Rosen potential with the spin-orbit coupling term and spin symmetry*. Physics Letters A **373**, 49-53 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.10.064>
- [5] Chen, T., Liu, J.Y., Jia, C.S., *Approximate analytical solutions of the Dirac-Manning-Rosen problem with the spin symmetry and pseudo-spin symmetry*, Physica Scripta **79**, 055002 (2009). <https://doi.org/10.1088/0031-8949/79/05/055002>
- [6] Eshghi, M., Mehraban, H., *Eigen spectra for Manning-Rosen potential including a Coulomb-like tensor interaction*, International Journal of Physical Sciences **6**, 6643-6652 (2011). <https://doi.org/10.5897/IJPS11.625>
- [7] Aydoğdu, O., Sever, R., *The Dirac-Yukawa problem in view of pseudospin symmetry*, Physica Scripta **84**, 025005 (2011). <https://doi.org/10.1088/0031-8949/84/02/025005>

- [8] Aguda, E. V., *Solutions of the Dirac equation with an improved expression of the Rosen–Morse potential energy model including Coulomb-like tensor interaction*, Canadian Journal of Physics **91**, 689-695 (2013). <https://doi.org/10.1139/cjp-2013-0109>
- [9] Jia, C. S., Dai, J. W., Zhang, L. H., Liu, J. Y., Peng, X. L., *Relativistic energies for diatomic molecule nucleus motions with the spin symmetry*, Physics Letters A **379**, 137-142 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2014.10.034>
- [10] Yanar, H., Havare, A., *Spin and Pseudospin Symmetry in Generalized Manning-Rosen Potential*. Advances in High Energy Physics **2015**, 915796 (2015). <http://dx.doi.org/10.1155/2015/915796>
- [11] Wei, G. F., Long, C. Y., Qin, S. J., Zhang, X., *Analytical approximations to the arbitrary l-wave bound state solutions of the Klein-Gordon equation for the Manning-Rosen potential*, Acta Phys. Sin. **57**, 6730-6735 (2008). <https://doi.org/10.7498/aps.57.6730>
- [12] Taşkın, F., *Approximate solutions of the Dirac equation for the Manning-Rosen potential including the spin-orbit coupling term*, International Journal of Theoretical Physics **48**, 1142-1149 (2009). <https://doi.org/10.1007/s10773-008-9887-7>
- [13] Ahmadov, A. I., Nagiyev, S. M., Aydin, C. O. Ş. K. U. N., Tarverdiyeva, V. A., Orujova, M. S., Badalov, S. V., *Bound state solutions of Dirac equation: spin and pseudo-spin symmetry in the presence of the combined Manning–Rosen and Yukawa tensor potentials*, The European Physical Journal Plus **137**, 1075 (2022). <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03255-9>
- [14] Pamungkas, O. R., Ma'arif, M., *Analytical Solution of Dirac Equation for Hyperbolic Manning-Rosen-like Potential Using Hypergeometric Method for Exact Spin Symmetry*, In Journal of Physics: Conference Series IOP Publishing **1127**, 012010 (2019). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1127/1/012010>
- [15] Asgarifar, S., Goudarzi, H., *Exact solutions of the Manning–Rosen potential plus a ring-shaped like potential for the Dirac equation: spin and pseudospin symmetry*, Physica Scripta **87**, 025703 (2013). <https://doi.org/10.1088/0031-8949/87/02/025703>
- [16] Ikot, A. N., Hassanabadi, H., Obong, H. P., et al. *Approximate arbitrary κ -state solutions of Dirac equation with Schiöberg and Manning-Rosen potentials within the coulomb-like Yukawa-like and generalized tensor interactions*, Phys. Part. Nuclei Lett. **12**, 498–515 (2015). <https://doi.org/10.1134/S1547477115040159>
- [17] Ortakaya, S., Hassanabadi, H., Maghsoodi, E., *Scattering phase shifts of Dirac equation with Manning-Rosen potential and Yukawa tensor interaction*, Indian Journal of Physics **89**, 307-316 (2015). <https://doi.org/10.1007/s12648-014-0592-5>
- [18] Maireche, A., *Approximate arbitrary (k,l) states solutions of deformed Dirac and Schrödinger equations with new generalized Schiöberg and Manning–Rosen potentials within the generalized tensor interactions in 3D-EQM symmetries*, Int. J. Geo. Met. Mod. Phys. **20**, 2350028 (2023). <https://doi.org/10.1142/S0219887823500287>
- [19] Maireche, A., *New bound-state solutions of the deformed klein–gordon and Schrödinger equations for arbitrary l-state with the modified equal vector and scalar manning-rozen plus a class of Yukawa potentials in RNCQM and NRNCQM symmetries*, Journal of Physical Studies **25**, 4301 (2021). <https://doi.org/10.30970/jps.25.4301>
- [20] Maireche, A., *A theoretical study of the modified equal scalar and vector Manning-Rosen potential within the deformed Klein-Gordon and Schrödinger in RNCQM and NRNCQM symmetries*, Rev. Mex. Fis. **67**, 050702 1-18 (2021). <https://doi.org/10.31349/revmexfis.67.050702>
- [21] Maireche, A., *A New Theoretical Investigation of the Modified Equal Scalar and Vector Manning–Rosen Plus Quadratic Yukawa Potential Within the Deformed Klein–Gordon and Schrödinger Equations Using the Improved Approximation of the Centrifugal Term and Bopp's Shift Method in RNCQM and NRNCQM Symmetries*, Spin J **11**, 2150029-31 (2021). <https://doi.org/10.1142/S2010324721500296>
- [22] Maireche, A., *The investigation of approximate solutions of Deformed Klein-Fock-Gordon and Schrödinger Equations under Modified Equal Scalar and Vector Manning-Rosen and Yukawa Potentials by using the Improved Approximation of the Centrifugal term and Bopp's shift Method in NCQM Symmetries*, Latin-American Journal of Physics Education **15**, 2310-1 (2021).
- [23] NHO, P. M., Kao, H. C., *Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory*, Physical Review Letters **88**, 151602 (2002). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.151602>
- [24] Connes, A., Douglas, M. R., Schwarz, A., *Noncommutative geometry and matrix theory*, Journal of High Energy Physics **1998**, 003 (1998). <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1998/02/003>
- [25] Capozziello, S., Lambiase, G., Scarpetta, G., *Generalized uncertainty principle from quantum geometry*. Int. J. Theor. Phys. **39**, 15 (2000). <https://doi.org/10.1023/A:1003634814685>
- [26] Doplicher, S., Fredenhagen, K., Roberts, J. E., *Spacetime quantization induced by classical gravity*, Physics Letters B **331**, 39-44 (1994). [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(94\)90940-7](https://doi.org/10.1016/0370-2693(94)90940-7)
- [27] Witten, E., *Reflections on the fate of spacetime*. Physics today **49**, 24-30 (1996). <https://doi.org/10.1063/1.881493>
- [28] Kempf, A., Mangano, G., Mann, R. B., *Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation*, Physical Review D **52**, 1108 (1995). <https://doi.org/10.1103/physrevd.52.1108>
- [29] Adler, R. J., Santiago, D. I., *On gravity and the uncertainty principle*, Modern Physics Letters A **14**(20), 1371-1381 (1999). <https://doi.org/10.1142/s0217732399001462>
- [30] Kanazawa, T., Lambiase, G., Vilasi, G., Yoshioka, A., *Noncommutative Schwarzschild geometry and generalized uncertainty principle*, The European Physical Journal C **79**, 95 (2019). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6610-1>
- [31] Scardigli, F., *Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment*, Physics Letters B **452**, 39-44 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00167-7](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00167-7)
- [32] Snyder, H. S., *Quantized space-time*, Physical Review **71**, 38 (1947). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.71.38>
- [33] Snyder, H. S., *The electromagnetic field in quantized space-time*, Physical Review **72**, 68 (1947). <https://doi.org/10.1103/PhysRev.72.68>
- [34] Connes, A., *Noncommutative Geometry* (ISBN-9780121858605) (1994).
- [35] Connes, A., Lott, J., *Particle models and noncommutative geometry*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B** 29 (1991).
- [36] Seiberg, N., Witten, E., *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **1999**, 032 (1999). <https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/032>
- [37] Nicolini, P., *Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review*, International Journal of Modern Physics A **24**, 1229-1308 (2009). <https://doi.org/10.1142/s0217751x09043353>
- [38] Maireche, A., *Nonrelativistic treatment of Hydrogen-like and neutral atoms subjected to the generalized perturbed Yukawa potential with centrifugal barrier in the symmetries of noncommutative Quantum mechanics*, Int. J. Geo. Met. Mod. Phys. **17**, 2050067 (2020). <https://doi.org/10.1142/S021988782050067X>
- [39] N'Dolo, E. E., Samary, D. O., Ezinvi, B., Hounkonnou, M. N., *Noncommutative Dirac and Klein–Gordon oscillators in the background of cosmic string: Spectrum and dynamics*, Int. J. Geo. Met. Mod. Phys. **17**, 2050078 (2020). <https://doi.org/10.1142/s0219887820500784>
- [40] Maireche, A., *Modified unequal mixture scalar vector Hulthén–Yukawa potentials model as a quark–antiquark interaction and*

neutral atoms via relativistic treatment using the improved approximation of the centrifugal term and Bopp's shift method, *Few-Body Systems* **61**, 30 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00601-020-01559-z>.

[41] Gnatenko, K. P., *Composite system in noncommutative space and the equivalence principle*, *Physics Letters A* **377**, 3061-3066 (2013).

<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2013.09.036>

[42] Maireche, A., *Bound-state solutions of Klein-Gordon and Schrödinger equations for arbitrary l-state with linear combination of Hulthén and Kratzer potentials*, *Afr. Rev Phys.* **15**, 003 19 (2020).

[43] Djemai, A. E. F., Smail, H., *On quantum mechanics on noncommutative quantum phase space*, *Communications in Theoretical Physics* **41**, 837 (2004).

<https://doi.org/10.1088/0253-6102/41/6/837>

[44] Maireche, A., *Bound-state solutions of the modified Klein-Gordon and Schrödinger equations for arbitrary l-state with the modified Morse potential in the symmetries of noncommutative quantum mechanics*, *J. Phys. Stud.* **25**, 1002 (2021).

<https://doi.org/10.30970/jps.25.1002>

[45] Maireche, A., *A new approach to the approximate analytic solution of the three-dimensional Schrödinger equation for hydrogenic and neutral atoms in the generalized Hellmann potential model*, *Ukrainian journal of physics* **65**, 987 (2020).

<https://doi.org/10.15407/ujpe65.11.987>

[46] Bertolami, O., Rosa, J. G., De Aragao, C. M. L., Castorina, P., Zappala, D., *Scaling of variables and the relation between noncommutative parameters in noncommutative quantum mechanics*, *Modern Physics Letters A* **21**, 795-802 (2006).

<https://doi.org/10.1142/s0217732306019840>

[47] Maireche, A., *A Theoretical Model of Deformed Klein-Gordon Equation with Generalized Modified Screened Coulomb Plus Inversely Quadratic Yukawa Potential in RNCQM Symmetries*, *Few-Body Syst* **62**, 12 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00601-021-01596-2>

[48] Gnatenko, K. P., Tkachuk, V. M., *Composite system in rotationally invariant noncommutative phase space*, *International Journal of Modern Physics A* **33**, 1850037 (2018).

<https://doi.org/10.1142/s0217751x18500379>

[49] Vacaru, S. I., *Exact solutions with noncommutative symmetries in Einstein and gauge gravity*, *Journal of Mathematical Physics* **46**, 042503 (2005). <https://doi.org/10.1063/1.1869538>

[50] Maireche, A., *Heavy quarkonium systems for the deformed unequal scalar and vector Coulomb-Hulthén potential within the deformed effective mass Klein-Gordon equation using the improved approximation of the centrifugal term and Bopp's shift method in RNCQM symmetries*, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **18**, 2150214 (2021).

<https://doi.org/10.1142/S0219887821502145>

[51] Maireche, A., *A model of modified klein-gordon equation with modified scalar-vector Yukawa potential*, *Afr. Rev Phys.* **15**, 1 (2020).

[52] Maireche, A., *Improved energy spectra of the deformed Klein-Gordon and Schrödinger equations under the improved Varshni plus modified Kratzer potential model in the 3D-ERQM and 3D-ENRQM symmetries*, *Indian J Phys* **97**, 3567-3579 (2023).

<https://doi.org/10.1007/s12648-023-02681-4>

[53] Bertolami, O., Rosa, J. G., De Aragao, C. M. L., Castorina, P., Zappala, D., *Noncommutative gravitational quantum well*, *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology* **72**, 025010 (2005). <https://doi.org/10.1103/physrevd.72.025010>

[54] Zhang, J., *Fractional angular momentum in non-commutative spaces*, *Physics Letters B* **584**, 204-209 (2004).

<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2004.01.049>

[55] Chaichian, M., Sheikh-Jabbari, M. M., Tureanu, A., *Hydrogen atom spectrum and the Lamb shift in noncommutative QED*, *Physical Review Letters* **86**, 2716 (2001).

<https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.2716>.

[56] Abreu, E. M. C., Neves, C., Oliveira, W., *Noncommutativity from the symplectic point of view*, *International Journal of Modern Physics A* **21**, 5359-5369 (2006).

<https://doi.org/10.1142/s0217751x06034094>

[57] Abreu, E. M. C., Ananias Neto, J., Mendes, A. C. R., Neves, C., Oliveira, W., Marcial, M. V., *Lagrangian formulation for noncommutative nonlinear systems*, *International Journal of Modern Physics A* **27**, 1250053 (2012).

<https://doi.org/10.1142/s0217751x12500534>

[58] Aghababaei, S., Rezaei, G., *Energy level splitting of a 2D hydrogen atom with Rashba coupling in non-commutative space*, *Communications in Theoretical Physics* **72**, 125101 (2020).

<https://doi.org/10.1088/1572-9494/abb7cc>

[59] Connes, A., *Noncommutative geometry and reality*, *Journal of Mathematical Physics* **36**, 6194-6231 (1995).

<https://doi.org/10.1063/1.531241>

[60] Cuntz, J., Connes, A., Rieffel, M. A., *Noncommutative geometry*, *Oberwolfach Reports* **4**, 2543-2608 (2008).

<https://doi.org/10.4171/OWR/2007/43>

[61] Connes, A., Cuntz, J., Rieffel, M. A., Yu, G., *Noncommutative Geometry*, *Oberwolfach Reports* **10**, 2553 (2013).

<https://doi.org/10.4171/OWR/2013/45>

[62] Ho, P. M., Kao, H. C., *Noncommutative quantum mechanics from noncommutative quantum field theory*, *Physical Review Letters* **88**, 151602 (2002). <https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.151602>

[63] Mirza, B., Mohadesi, M., *The Klein-Gordon and the Dirac oscillators in a noncommutative space*, *Communications in Theoretical Physics* **42**, 664 (2004). <https://doi.org/10.1088/0253-6102/42/5/664>

[64] Douglas, M. R., Nekrasov, N.A., *Noncommutative field theory*, *Reviews of Modern Physics* **73**, 977 (2001).

<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.73.977>

[65] Gouba, L., *A comparative review of four formulations of noncommutative quantum mechanics*, *International Journal of Modern Physics A* **31**, 1630025 (2016).

<https://doi.org/10.1142/s0217751x16300258>

[66] Bopp, F., *La mécanique quantique est-elle une mécanique statistique classique particulière?*, In *Annales de l'institut Henri Poincaré* **15**, 81-112 (1956).

[67] Mezincescu, L., *Star Operation in Quantum Mechanics*, 2000. <https://arxiv.org/abs/hep-th/0007046>.

[68] Gamboa, J., Loewe, M., Rojas, J. C., *Noncommutative quantum mechanics*, *Physical Review D* **64**, 067901 (2001).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.64.067901>.

[69] Curtright, T., Fairlie, D., Zachos, C., *Features of time-independent Wigner functions*, *Physical Review D* **58**, 025002 (1998).

<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.58.025002>

[70] Maireche, A., *Noncommutative Dirac and Schrödinger equations in the background of the new generalized Morse potential and a class of Yukawa potential with the improved Coulomb-like tensor potential as a tensor in 3D-ERQM and 3D-ENRQM symmetries*, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics* **20**, 2350162 (2023).

<https://doi.org/10.1142/S0219887823501621>

[71] Maireche, A., *A theoretical investigation of nonrelativistic bound state solution at finite temperature using the sum of modified Cornell plus inverse quadratic potential*, *Sri Lankan J. of Phys.* **21**, 11 (2020).

<https://doi.org/10.4038/sljp.v21i1.8069>

[72] Maireche, A., *The Influence of Deformation Phase-Space on Spectra of Heavy Quarkonia in Improved Energy Potential at Finite Temperature Model of Shrodinger Equation Via the Generalized Boob's Shift Method and Standard Perturbation Theory*, *East European Journal of Physics* **2023**, 28-43 (2023).

<https://doi.org/10.26565/2312-4334-2023-1-03>

- [73] Maireche, A., *The Effects of Noncommutativity on the Energy Spectra for Mass-Dependent Klein-Gordon and Schrödinger Equations with Vector Quark-Antiquark Interaction and Harmonic Oscillator Potential: Application to HLM Systems*, Bulg. J. Phys. **50**, 054 (2023). <https://doi.org/10.55318/bgjp.2023.50.1.054>
- [74] Maireche, A., *Relativistic symmetries of bosonic particles and antiparticles in the background of the position-dependent mass for the improved deformed Hulthen plus deformed type-hyperbolic potential in 3D-EQM symmetries*, East European Journal of Physics **2022**, 200-212 (2022). <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2022-4-21>
- [75] Maireche, A., *The Relativistic and Nonrelativistic Solutions for the Modified Unequal Mixture of Scalar and Time-Like Vector Cornell Potentials in the Symmetries of Noncommutative Quantum Mechanics*, Jordan J. Phys. **14** (1) 59 (2021). <https://doi.org/10.47011/14.1.6>
- [76] Maireche, A., *Solutions of Klein-Gordon equation for the modified central complex potential in the symmetries of noncommutative quantum mechanics*, Sri Lankan J. of Phys. **22**, 1-19 (2021). <https://doi.org/10.4038/sljp.v22i1.8079>
- [77] Maireche, A., *The Klein-Gordon equation with modified Coulomb plus inverse-square potential in the noncommutative three-dimensional space*, Modern Physics Letters A **35**, 2050015 (2020). <https://doi.org/10.1142/s0217732320500157>
- [78] Motavalli, H. O. S. S. E. I. N., Akbarieh, A.R., *Klein-Gordon equation for the Coulomb potential in noncommutative space*, Modern Physics Letters A **25**, 2523-2528 (2010). <https://doi.org/10.1142/s0217732310033529>
- [79] Darroodi, M., Mehraban, H., Hassanabadi, S., *The Klein-Gordon equation with the Kratzer potential in the noncommutative space*, Modern Physics Letters A **33**, 1850203 (2018). <https://doi.org/10.1142/s0217732318502036>
- [80] Maireche, A., *A new theoretical study of the deformed unequal scalar and vector Hellmann plus modified Kratzer potentials within the deformed Klein-Gordon equation in RNCQM symmetries*, Modern Physics Letters A **36**, 2150232 (2021). <https://doi.org/10.1142/S0217732321502321>
- [81] Yi, Y., Kang, L., Jian-Hua, W., Chi-Yi, C., *Spin-1/2 relativistic particle in a magnetic field in NC phase space*, Chinese Physics C **34**, 543 (2010). <https://doi.org/10.1088/1674-1137/34/5/005>
- [82] Maireche, A., *Diatomic Molecules with the Improved Deformed Generalized Deng-Fan Potential Plus Deformed Eckart Potential Model through the Solutions of the Modified Klein-Gordon and Schrödinger Equations within NCQM Symmetries*, Ukrainian Journal of Physics **67**, 183 (2022). <https://doi.org/10.15407/ujpe67.3.183>
- [83] Maireche, A., *The Investigation of Approximate Solutions of Deformed Klein-Gordon and Schrödinger Equations Under Modified More General Exponential Screened Coulomb Potential Plus Yukawa Potential in NCQM Symmetries*, Few-Body Syst **62**, 66 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00601-021-01639-8>
- [84] Maireche, A., *On the interaction of an improved Schiöberg potential within the Yukawa tensor interaction under the background of deformed Dirac and Schrödinger equations*, Indian J Phys **97**, 519-532 (2023). <https://doi.org/10.1007/s12648-022-02433-w>
- [85] Maireche, A., *Deformed Dirac and Schrödinger Equations with Improved Mie-Type Potential for Diatomic Molecules and Fermionic Particles in the Framework of Extended Quantum Mechanics Symmetries*, Ukrainian Journal of Physics **67**, 485 (2022). <https://doi.org/10.15407/ujpe67.7.485>
- [86] Maireche A., *New relativistic and nonrelativistic model of diatomic molecules and fermionic particles interacting with improved modified Mobius potential in the framework of noncommutative quantum mechanics symmetries*, YJES **18**, 10-32 (2021). <https://doi.org/10.53370/001c.28090>
- [87] Maireche, A., *Diatomic molecules and fermionic particles with improved Hellmann-generalized Morse potential through the solutions of the deformed Klein-Gordon, Dirac and Schrödinger equations in extended relativistic quantum mechanics and extended nonrelativistic quantum mechanics symmetries*, Rev. Mex. Fis. **68**, 020801 (2022). <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.68.020801>
- [88] Maireche, A.; *Approximate k-state solutions of the deformed Dirac equation in spatially dependent mass for the improved Eckart potential including the improved Yukawa tensor interaction in ERQM symmetries*, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics **19**(06), 2250085 (2022). <https://doi.org/10.1142/S0219887822500852>
- [89] Maireche, A., *A new study of relativistic and nonrelativistic for new modified Yukawa potential via the BSM in the framework of noncommutative quantum mechanics symmetries: An application to heavy-light mesons systems*, YJES **19**, 78-94 (2022). <https://doi.org/10.53370/001c.39615>
- [90] Maireche, A., *Relativistic symmetries of the deformed dirac equation through the improved hulthén plus a class of Yukawa potential including a Coulomb-like tensor interaction in deformation quantum mechanics*, J. Phys. Stud. **26**, 2001 (2022). <https://doi.org/10.30970/jps.26.2001>
- [91] Saidi, A., Sedra, M. B., *Spin-one (1+ 3)-dimensional DKP equation with modified Kratzer potential in the non-commutative space*, Modern Physics Letters A **35**, 2050014 (2020). <https://doi.org/10.1142/s0217732320500145>
- [92] Houcine, A., Abdelmalek, B., *Solutions of the Duffin-Kemmer Equation in Non-Commutative Space of Cosmic String and Magnetic Monopole with Allowance for the Aharonov-Bohm and Coulomb Potentials*, Phys. Part. Nuclei Lett. **16**, 195-205 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1547477119030038>
- [93] Maireche, A., *Non-commutative phase-space of Schrödinger equation in the background of ISMK-CYP model: spectrum and thermodynamic properties*, Quantum Stud. Math. Found. **11**, 589 (2024). <https://doi.org/10.1007/s40509-024-00339-2>
- [94] Maireche, A., *A new model describing improved bound-state and statistical properties in the framework of deformed Schrödinger equation for the improved Coshine Yukawa potential in 3D-NR(NCPS) symmetries*, Modern Physics Letters A **39**, 2450156 (2024). <https://doi.org/10.1142/S0217732324501566>
- [95] Maireche, A., *New bound-state solutions and statistical properties of the IMK-GIQYP and IMSK-IQYP models in 3D-NRNCPS symmetries*, Modern Physics Letters A **39**, 2450029 (2024). <https://doi.org/10.1142/S0217732324500299>
- [96] Maireche, A., *New bound-state energy of double magic number plus one nucleon nuclei with a relativistic and non-relativistic mean-field approach in 3D-RNCQS and 3D-NRNCQS symmetries*, Indian Journal of Physics **98**, 803 (2024). <https://doi.org/10.1007/s12648-023-02867-w>
- [97] Maireche, A., *New approximate solutions of the Schrödinger equation with improved energy-dependent screened Coulomb potential in 3D-NCPS symmetries*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **18**, 2302-1 (2024).
- [98] Maireche, A., *Noncommutative of Klein-Gordon and Schrödinger equations in the background of the improved Hua plus modified Eckart potential model in 3D-(R/NR)NCQS symmetries: Spectrum and thermodynamic properties*, Int. J. Geom. Met. Mod. Phys. **22**, 2450256 (2025). <https://doi.org/10.1142/S0219887824502566>
- [99] Greene, R. L., Aldrich, C., *Variational wave functions for a screened Coulomb potential*, Physical Review A **14**, 2363 (1976). <https://doi.org/10.1103/physreva.14.2363>

- [100] Dong, S. H., Qiang, W.C., Sun, G.H., Bezerra, V.B., *Analytical approximations to the l-wave solutions of the Schrödinger equation with the Eckart potential*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **40**, 10535 (2007).
<https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/34/010>
- [101] Zhang, Y., *Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation with scalar and vector Eckart potentials*, Physica

Scripta **78**, 015006 (2008).

<https://doi.org/10.1088/0031-8949/78/01/015006>

- [102] Medjedel, S., Bencheikh, K., *Exact analytical results for density profile in Fourier space and elastic scattering function of a rotating harmonically confined ultra-cold Fermi gas*, Phys. Lett. A **383**, 1915-1921 (2019).

<https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.03.021>

Variability of geomagnetic field at Langkawi, south-east asia during the ascending phase of solar cycle 24



ISSN 1870-9095

Mustapha Abbas^{1, *}, Arzika Yusuf Koko^{1, 4}, Mukhtar Mohammad², Mukhtar Ibrahim Furfuri^{1, 3}, Aminu Muhammad¹, Asabe Ibrahim Audu², Mohammed Bello Kaoje¹

¹*Department of Physics, Kebbi State University of Science and Technology, Aliero, Nigeria.*

²*Department of Physics, Federal University of Agriculture, Zuru, -Kebbi State, Nigeria.*

³*Department of Physics, Federal College of Education Technical, Gusau, Zamfara State, Nigeria.*

⁴*Department of Physics, Federal University of Education, Kotangora, Niger State, Nigeria.*

E-mail: mapjysik@yahoo.com

(Received 4 August 2025, accepted 11 November 2025)

Abstract

The magnetic records obtained at low latitude geomagnetic observatory of Langkawi for the period of 3 years was used to study the diurnal and monthly-mean variation of the horizontal, H, and vertical, Z, geomagnetic field intensities during quiet and disturbed conditions. Results revealed that quiet SqH and SqZ with their corresponding disturbed variations (SdH and SdZ) shows minimum values at nighttime (19:00-05:00) LT hrs that are lower than the pre-sunrise (06:00-07:00) LT hrs. On quiet conditions, the SqH shows remarkable daytime linear increase from 155 nT in 2011 to 160 and 162 nT in 2012 and 2013. The disturbed period exhibit irregular variation trend with highest values 227, 215 and 237 nT in 2011, 2012 and 2013 respectively. The daytime maximum MSqH values increase from ~125 nT in 2011 to 135 nT in October 2013, in contrast to MSdH that decrease progressively from 166 nT in September 2011 to 145 nT in March 2013. The reduced MSdH magnitude with increasing solar activity seems to indicate weakening effect of the disturbance dynamo mechanism. The daytime maximum SqZ and SdZ with their monthly-mean (MSqH and MSdH) readily conform to those amplitudes variation pattern with lesser magnitudes. The daytime SqH maximum with their MSqH were observe to occur around (10:00-12:00) LT hrs and shifted to 14:00 LT during disturbed period indication of possible modification of equatorial electrojet during disturbed period. The greater seasonal SSqH magnitude at the equinoctial season may likely be due to the fact that the sun is directly towards the equator around this season. The increase in ASqH and ASdH with solar activity can be likened to the effect of solar activity on the ionospheric conductivity.

Keywords: Ionosphere, Solar quiet current, magnetic field, magnetosphere.

Resumen

Los registros magnéticos obtenidos en el observatorio geomagnético de baja latitud de Langkawi durante un período de 3 años se utilizaron para estudiar la variación media diurna y mensual de las intensidades del campo geomagnético horizontal (H) y vertical (Z) en condiciones tranquilas y perturbadas. Los resultados revelaron que las SqH y SqZ en condiciones tranquilas, con sus correspondientes variaciones perturbadas (SdH y SdZ), muestran valores mínimos durante la noche (19:00-05:00) horas de luz solar, inferiores a los valores de la hora de luz solar antes del amanecer (06:00-07:00). En condiciones tranquilas, el SqH muestra un notable aumento lineal diurno de 155 nT en 2011 a 160 y 162 nT en 2012 y 2013. El período perturbado exhibe una tendencia de variación irregular con los valores más altos de 227, 215 y 237 nT en 2011, 2012 y 2013 respectivamente. Los valores máximos diurnos de MSqH aumentan de ~125 nT en 2011 a 135 nT en octubre de 2013, en contraste con MSdH que disminuye progresivamente de 166 nT en septiembre de 2011 a 145 nT en marzo de 2013. La magnitud reducida de MSdH con el aumento de la actividad solar parece indicar un efecto de debilitamiento del mecanismo dinamo-dinamo de perturbación. Los máximos diurnos de SqZ y SdZ, con sus medias mensuales (MSqH y MSdH), se ajustan fácilmente a estos patrones de variación de amplitud con magnitudes menores. Se observó que el máximo diurno de SqH con su MSqH se produjo alrededor de las 10:00-12:00 horas locales (LT) y se desplazó a las 14:00 horas locales (LT) durante el período de perturbación, lo que indica una posible modificación del electrochorro ecuatorial durante dicho período. La mayor magnitud estacional de SSqH en la estación equinoccial probablemente se deba a que el sol se encuentra directamente hacia el ecuador en esta estación. El aumento de ASqH y ASdH con la actividad solar puede compararse con el efecto de la actividad solar en la conductividad ionosférica.

Palabras clave: Ionosfera, Corriente Solar Quieta, Campo Magnético, Magnetosfera.

I. INTRODUCTION

The regional and global monitoring of the Earth's magnetic field reveal outstanding changes that are regular in some days and irregular at other times. These changes in geomagnetic field are linked to two different physical phenomena: the regular variations which are observed only during magnetically quiet days are sometimes referred to as geomagnetic daily variations or simply solar quiet (Sq) variations e.g., [1]. These variations generated by overhaed current flowing in the E-region of the ionosphere. The irregular variations are mostly related to the response of the magnetospheric activities and are mostly referred to as solar disturbed (Sd) variations. These variations are generated during ionospheric disturbance dynamo mechanism in combine effect with current of non-ionospheric origin [2].

Various current systems flow in the upper region of the atmosphere and thus establish electric and magnetic fields at the ground surface of the Earth. The field at a specific point is dependent on location, latitude, local time, season and phase of the solar cycle. At the magnetic equator, there exist two current systems, The World Solar quiet (WSq) current that flows eastward at an altitude height of 113 ± 7 Km and the EEJ current flowing either eastward or westward at low altitude layer of 107 ± 8 Km [3, 4, 5].

The superposition of these currents at the magnetic equator generates the intensified solar daily geomagnetic field variations. Studie has shown that both the solar quiet Sq and solar disturbed Sd variations exhibit significant day-to-day variability that vary in their amplitudes, phase and focal latitudes from one day to another, e.g., [2, 5, 6, 7]. The variations in both strength and phase of the Sq and Sd is largely attributed to significant changes in ionospheric dynamo mechanism which in-turn is dependent on ionospheric conductivity and tidal winds [2, 8].

The enhanced solar disturbed H-field SdH during magnetic disturbances is caused by leakages of the high latitude to low latitudes. [9] observed that during disturbance periods, there are times Sd amplitudes are enhanced while at other times it is decreased. The SqZ and SdZ during quiet and disturbed periods have been widely reported to represent very closely the temporal gradient of the SqH and SdH fields [3, 4, 8]. The characteristics of the regular and irregular variations of the H-field over India, Africa and American sectors have been carried out [3, 4, 6, 10]. The result revealed that during disturbed days, the daily variations of the H-field SdH shows lower values relative to the quiet-time SqH. This has been explined as due to the dominance of the westward disturbances current, e.g., [4].

The above literatures highlights some of the studies conducted on the variabilities of Sq and Sd from other regions of the world. To the best of our knowledge no detail report on the daily variations of Sq and Sd have been made over the Malaysian latitude knowing well that geomagnetic field changes with location, and time scale. Hence, this paper is set to investigate the solar daily variations of geomagnetic field H and Z component during quiet and disturbed conditions.

II. DATA AND METHOD OF ANALYSIS

The study was carried out using magnetic field records of the horizontal and vertical components of the Earth obtained from Magnetic Data Acquisition System (MAGDAS) network at Langkawi (geographic latitude: 6.3°N , geographic longitude: 99.68°N , geomagnetic latitude: -2.32°S geomagnetic longitude: 171.29°) for a period of 3 years (2011, 2012 and 2013). These years are during the ascending phase of the solar cycle 24. The magnetometer fluxgate records seconds and minute data and only the minute data waere engaged in this study. The data composed of 1mins averages were binned to hourly average and this reduced the data to 24 hourly values of each particular day considered in the study. This was carried out throughout the years under investigation. The baseline was defined as the average of four flanking local midnight (00:00 LT, 01:00 LT, 22:00 LT and 23:00 LT) respectively. This is represented by the equation:

$$H_b = \frac{H_{00:00} + H_{01:00} + H_{22:00} + H_{23:00}}{4}, \quad (1)$$

$$Z_b = \frac{Z_{00:00} + Z_{01:00} + Z_{22:00} + Z_{23:00}}{4}. \quad (2)$$

Where, $H_{00:00}$, $H_{01:00}$, $H_{22:00}$ and $H_{23:00}$ and $Z_{00:00}$, $Z_{01:00}$, $Z_{22:00}$ and $Z_{23:00}$ represent the hourly values of the H and Z component at 01:00, 02:00, 23:00 and 24:00 LT hours. The midnight baseline values were further subtracted from the hourly values to get the hourly departures from the midnight for same particular day, this relation is expressed as;

$$\Delta H = H_t - H_b, \quad (3)$$

$$\Delta Z = Z_t - Z_b. \quad (4)$$

Where t is the time in hours and ranged from 01:00 to 24:00 LT. H_t and Z_t are the hourly values of the two components H and Z. The hourly departure is further corrected for non-cyclic variation a phenomenon where the difference between the value of a field at the 24th LT hour of a particular day and the 1st LT hour of that same day is eliminated according to [11] This is achieved by making linear adjustment on the daily hourly values of the Sq using the following relation:

$$\Delta_k = \frac{M_1 - M_{24}}{23}. \quad (5)$$

Where M_1 , M_2 ... M_{24} represent the hourly values of ΔH and ΔZ at 01:00 LT, 02:00 LT...24:00 LT. The linear adjusted value for each hour is given as:

$$M_1 + 0\Delta_k, M_2 + 1\Delta_k, \dots M_{24} + 23\Delta_k. \quad (6)$$

The linearly adjusted values are expressed in the relation below;

$$\Delta H_t (M) = M_t + (t - 1)\Delta_t. \quad (7)$$

Hence, the corrected non-cyclic hourly departures gives the solar daily variation of H and Z components. This solar daily variation is approximately equal to solar quiet daily H-field (SqH) and its corresponding vertical component as SqZ and the solar disturbed daily H-field is represented as SdH and its vertical component as SdZ. To thoroughly explore the geomagnetic field in terms of solar terrestrial activity, 3 years data are utilized. These data were selected from two categories of group from each month obtained from Geosciences Australia catalogue at http://www.ga.gov.au/oracle/geomag/iqd_form.jsp. The first category consist of 10 group of days which are called the 10 international quiet days that depict when the geomagnetic variations are minima in each month and the other category are 5 international disturbed days that shows the extent of magnetic disturbance in each month. The monthly mean are obtained by averaging all the quiet and disturbed days under a particular month for both elements. The seasonal variation is grouped into three seasons in accordance to Llyord with equinoctial season comprising of (March, April, September and October), June solstice (May, June, July and August), December solstice (November, December, January and February). Each season is deduced by taking average of all monthly mean values of each hour under a particular season for both elements (H and Z) during quiet and disturbed periods.

III. RESULTS AND DISCUSSION

A. Diurnal variations of solar quiet (Sq) and solar disturbed (Sd)

Figures. 1-4 illustrate the diurnal variations of solar quiet daily variation, Sq, and solar disturbance daily variation Sd of the horizontal, H, and vertical, Z, component during quiet and disturbed periods. It is obvious from Figure. 1a and 1b that SqH exhibit day-to-day variability which is large particularly during the equinoctial months (March, April, September and October). The Figure also demonstrates the presence of night-time (19:00-05:00) LT hrs magnitudes with highest value (~ 20 nT) around 19:00 LT hrs in April 2011. It maintained this maximum value (~ 20 nT) through 2012 but shifted to February. The night-time magnitudes dropped to 15 nT around 19:00 LT in June 2013. These night-time SqH magnitudes demonstrates ionospheric conductivity is not completely zero but exhibit some substantial amount of current do flow. Besides these night-time magnitudes SqH are possessed by consistent minimum pre-sunrise (06:00-07:00) LT hrs positives magnitudes with maximum value (~ 39 nT) in May 2011. In 2012, the magnitude had decreased to ~ 35 nT seen in June. With increase in solar activity, these magnitudes were observed to further drop to ~ 30 nT as depicted in June 2013. The day-time SqH magnitudes were observed to vary and reached their peak values differently from one day to another. For example, SqH daytime maximum amplitudes fluctuate between ~ 40 and 155 nT in May and April 2011. In 2012, it oscillates in the range between ~ 45 and 160 nT seen in November and September. In 2013, the amplitudes had not

changed much it ranged between ~ 50 and 162 nT also seen in November and September.

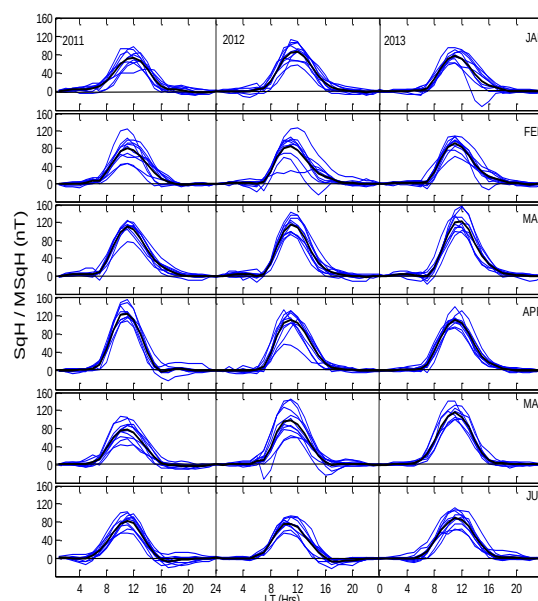


Figure 1a. Diurnal variations of SqH during quiet days from January to June.

From all the graphs, it can be seen that, SqH continue to rise steeply during the sunrise (06:00-07:00) LT to reach its peak values mostly around (11:00-12:00) LT. This feature is in accordance to the day-to-day variation pattern of Sq earlier reported by several researchers' e.g., [2, 8, 9, 12]. The decrease in SqH was rather gentle and reaches its base level mostly at sunset. Apart from these maxima, SqH are characterized by minimum depression lasting for 2-3 LT hrs particularly during the pre-sunrise and the pre-sunset hours. The minimum depression occasionally have values below the night-time baseline values indicated by a horizontal black line and are known as counter equatorial electrojet (CEJ), [13]. These minimum SqH below the baseline are consequences of the reversal of the eastward current during the daytime [3, 5, 6].

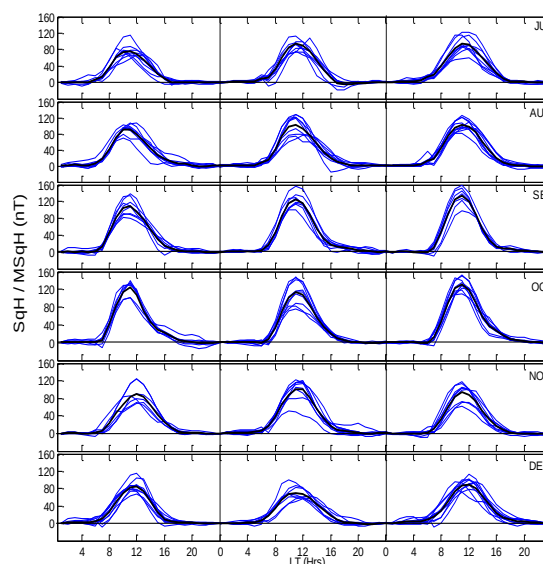


Figure 1b. As in Figure 1^a but for July to December.

During CEJ events, the magnitudes of the westward current in SqH were observed to be highest (~ 21 nT) around 17:00 hrs LT in June 2011. The negative amplitude increase to ~ -32 nT around 07:00 hrs LT in May 2012 with further increase in 2013 to ~ -33 nT around 15:00 LT hrs seen in January. The CEJ events were observed to be more frequent during the summer months (May, June, July and August). Figure 2a and 2b shows the variations of the vertical Z-component during quiet days SqZ. The variability of SqZ also shows the presence of night-time (19:00-05:00) LT hrs magnitudes that are generally low with highest value (~ 25 nT) seen in July 2011. The night-time magnitude is observed to decrease to ~ 20 nT in August 2012. Year 2013 is not exception to these night-time magnitudes with maximum value (~ 15 nT) recorded in July. The day-time variability of SqZ shows highest value (~ 60 nT) in November 2011 and later dropped to ~ 59 nT in March 2012. The highest day-time SqZ magnitudes (70 nT) was observed in September 2013.

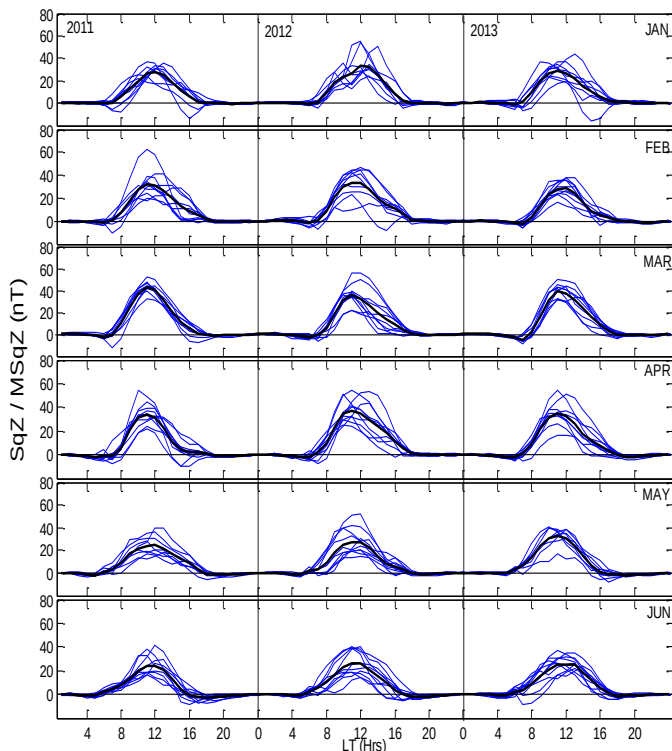


Figure 2a. Diurnal variations of SqZ during quiet days from January to June.

Generally, SqZ shows daytime variation pattern similar to SqH for it rises at sunrise (0:600-07:00) LT hrs, reached its peak mostly around noon (10:00-12:00) LT hrs and decrease afterwards. Similar variations have earlier been reported by [3, 4, 8]. These day-time positive magnitudes of SqZ are in accordance to chapman's model of a typical station on the southern edge of the magnetic equator. The enhanced positive variation of SqZ are seen to continuously reduced in the months of May, June, July, August and September 2011. Similar scenario are also seen in the months of May, June, July and August 2012 and 2013. These reduced SqZ amplitudes were observed to be in the negative range

around (10:00-12:00) LT in the months of August and September 2011.

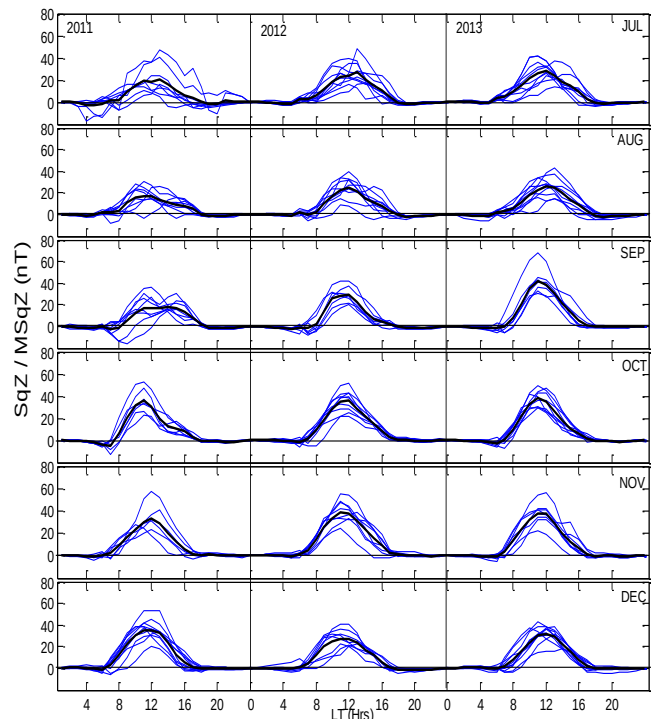


Figure 2b. Diurnal variations of SqZ during quiet days from July to December.

The continuous reduction of daytime SqZ magnitude is an evidence of gradual weakening of direct ionospheric sheet current due to low solar intensity and the slowly effect of induced current from the Earth surface which become stronger in August and September 2011 resulting to practical cancellation of the direct ionospheric sheet current [14]. Similar negative amplitude of SqZ has been earlier reported by [16] and attributed it to induced current from the solid Earth surface. Hence, we infer that the solar daily variation of SqZ over the Malaysia is not just the effect of direct ionospheric current but a combined effect of the eastward ionospheric current in the E-region of the ionosphere and the induced current from the solid Earth surface. Irrespective of the day, the variability of SqH are generally seen to be larger than those of SqZ. Their greater magnitudes are direct effect of ionospheric current system. Figure. 3a and 3b shows the behavior of H-fiel during disturbed period (SdH). As can be observed, SdH are possessed by night-time magnitudes with highest amplitude value ~ 110 nT in September 2011 and decreased to ~ 90 nT in February 2012 and ~ 70 nT in December 2013. The SdH is also observed to increase sluggishly at sunrise to peak values around (10:00-14:00) LT and decreases slowly even after dusk, indication of likely modification of the normal eastward current during day-time hours over the Malaysian sector [8].

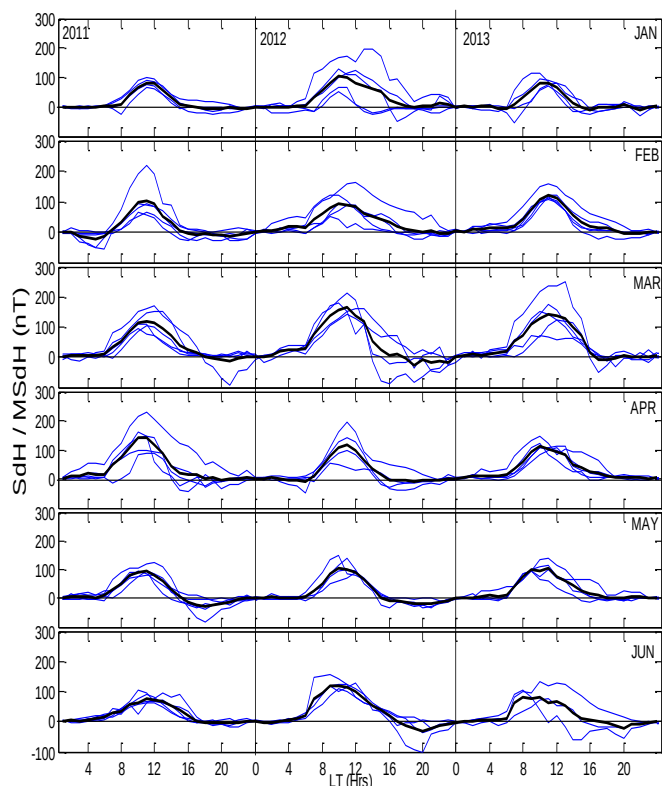


Figure 3a. Diurnal variations of SdH during disturbed days from January to June.

From Figure 3a and 3b, the daytime SdH magnitude attained highest value (259 nT) in September 2011 and dropped to 220 nT in November 2012. These amplitudes were observed to increase to 260 nT in March 2013. Some of the day-time diurnal amplitudes of SdH were observed to be very low which are more noticeable in the months of June and September 2011 with similar occurrence in January, February, March, April, September and November 2012. Year 2013 is not exception to these reduced magnitudes, seen in January, March, May, June August, October and December. These lower values of SdH with negative range during day-time arise from stronger influence of westward current over the EEJ zone.

Figure 3a and 3b shows prominent westward current during the pre-sunrise and (06:00-07:00) LT and pre-sunset to nighttime (14:00-18:00) LT hours. The magnitudes of the westward current in SdH reaches highest value -100 nT around 21:00 LT in March 2011 and decreased to -90 nT also in June 2012. In 2013, the amplitude had decreased to -80 nT still in June. These negative amplitudes of SdH are stronger evidences of the westward disturbance equatorial current effect [4, 6, 8]. Generally, the day-time magnitudes of SqH and SdH were observed to be greater than their night-time magnitudes in all the years.

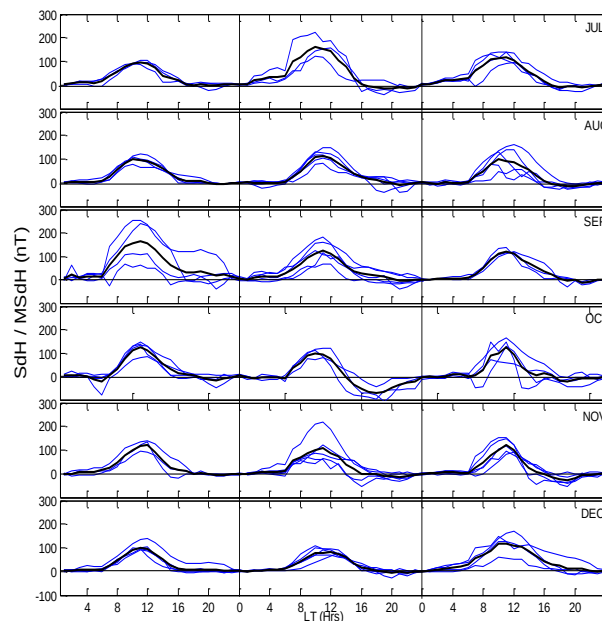


Figure 3b. Diurnal variations of SdH during disturbed days from July to December.

In Figure 4 (a and b), the SdZ also shows night-time variations with lower magnitudes compared to corresponding SqZ. The maximum amplitude (15 nT) is observed in September 2011 which decrease to ~10 nT seen in March 2012 and January 2013. In SdZ, the highest value (60 nT) occurred in February 2011 and dropped to 59 nT in April 2012 with a sharp increase to about 62 nT in January 2013. During disturbed period, SdZ shows weak amplitudes in the months of May, June, August and September across all the years. These weaker amplitudes were further observed to be negative particularly in the months of August 2011, June and July 2012 with similar occurrence in July 2013. We infer that these weaker amplitudes are direct consequences of induced current from the solid Earth in combine effect with the disturbed external currents.

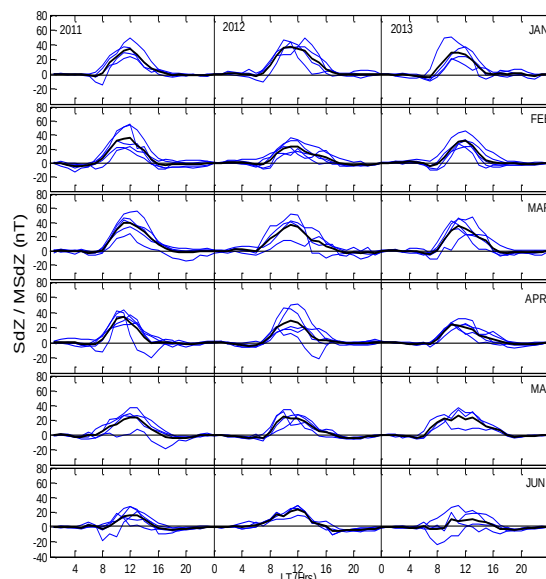


Figure 4a. Diurnal variation of SdZ during disturbed days from January to June.

IV. MONTHLY DIURNAL VARIATIONS

From Figure 1a and 1b, the monthly diurnal variations of MSqH which are represented by thick black curve shows a smooth appearance that start to build up during the sunrise (06:00-07:00) LT hrs with peak values mostly around noon (11:00-12:00) LT hrs and decay afterwards. The range in day-time MSqH magnitudes were observed to vary from one month to another. For example, the range in daytime MSqH Magnitudes in 2011 were found to be between 75 and 125 nT seen in July and October. In 2012, the amplitudes had increased to a range between 70 and 125 nT in December and September. In 2013, the amplitudes oscillate between 78 and 135 nT in January and October.

From Figure. 2a and 2b, the MSqZ denoted by thick black curve, shows positive variation that start to build-up around (06:00-07:00) LT hrs. Exception to these early ionizations are the months of July, August and September seen at 08:00 hrs LT. These months exhibit MSqZ variations with broad phase which extend towards the night-time. Similar features are observed for the months of May, June, July and August in 2012 and 2013 respectively. This characteristics is not common and may be due to combine effect of ionospheric current sheet and induced current from the Earth surface in the presence of weak thermal heating of the upper atmosphere around these periods [15]. The daytime MSqZ magnitudes fluctuate between the range 17 and 44 nT visible in August and March 2011. It oscillates between 25 and 39 nT seen in November and December 2012. It stayed on this minimum range through 2013 but shifted to July while it maximum value (42 nT) is recorded in September. In Figure 3 (a and b), MSdH amplitudes ranged between 76 and 166 nT in June and September 2011 and further fluctuate in the range between 81 and 164 nT seen in December and March 2012. In 2013, the amplitudes oscillate between 81 and 145 nT in June and March. The salient feature to note here is the linear decrease in the maximum range of MSdH with solar activity, indication of slowly build-up of westward current over the equatorial region. The day-time MSdH variability were observed to reach their peak values mostly around (10:00-11:00) LT hrs in 2011. These peak shifted to around (12:00-14:00) LT hrs in 2012 and 2013 suggesting changes in the electric field during disturbed period. From Figure 4a and 4b, MSdZ amplitudes ranged between 17 and 45 nT in June and November 2011. In 2012, the amplitudes are seen in the range between ~19 and 38 nT in July and November and decreases in 2013 to a range between ~11 and 37 nT obvious in June and November. They show maximum amplitudes mostly around (11:00-14:00) LT hrs. Our results show that MSdH and MSdZ exhibit weak amplitudes values in the winter months (May, June, July and August) with highest values in the other months. Generally, the variability of MSqH and MSdH for any of the months through the years is greater than their corresponding MSqZ and MSdZ Variations. Their great magnitudes are attributed to stronger ionospheric current effect to which H-component is more susceptible.

V. SEASONAL VARIATIONS OF Sd AND Sq

Figure 5 shows that the day-to-day variability of Sq and Sd exhibit significant seasonal variations for both quiet and disturbed conditions. The black, red and blue curves represent December solstice, equinox season and June solstice during quiet periods while their corresponding dash line with asterisks depict their disturbed variations.

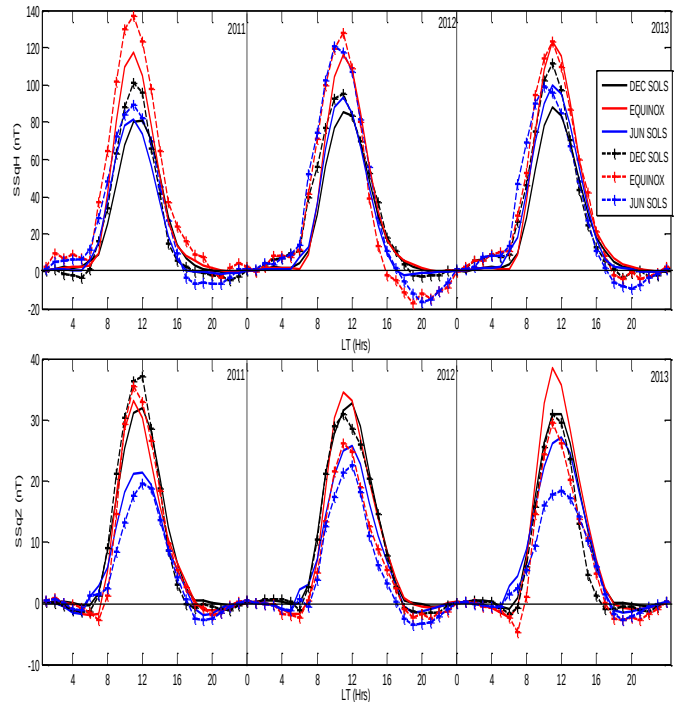


Figure 5. seasonal variations of SqH, SdH, SqZ and SdZ.

It is readily seen that seasonal variations shows systematic increase for both elements (H and Z). For example, regardless of the year the seasonal variations of H-field, SSqH increased linearly from ~80, 80 and 120 nT In June solstice, December solstice and equinox season in 2011 to peak amplitudes values ~90, 100 and 130 nT seen in 2013, indication of possible influence of solar activity on the seasonal variations. Similar equinoctial maxima have earlier been reported by [3, 14, 16, 17]. Thus greater SSqH magnitude at the equinoctial season may likely be due to the fact that the sun is directly towards the equator around this season and thus increase the ionospheric conductivity that resulted to higher MSqH magnitudes around these periods. Similar behavior is observed in SSqZ with peak values ~20, 32 and 33 nT in June solstice, December solstice and equinoctial season in the year 2011. These magnitudes were observed to increase ~28, 33 and 37 nT in 2013.

Our seasonal variations show lower values in solstices and higher values in equinoctial season resulting to semi-annual variations pattern. [18] reported semi-annual variation in equatorial electrojet to be due to a decrease at the solstices rather than increase at the equinoxes. [5, 19], Suggested variability of equatorial electrojet current (EEJ) on the horizontal component of the Earth magnetic field could be responsible for the observed semi-annual variation

of SqH. During disturbed period, SSdH does not show any linear increment with increase in solar activity but rather a decrease was observed particularly in the equinox season from 138 nT observed in 2011 to 133 and 128 nT in 2012 and 2013 respectively. This linear decrease in SSdH with solar activity at the equinoctial season is evidence of weakening of disturbance effect with solar activity. Similar decrease is also seen in SSdZ during December solstice from 38 nT in 2011 to 29 and 30 nT in 2012 and 2013. The June solstice for both SSdH and SSdZ shows peaks values that are lesser than those of equinox and December solstice. The overall seasonal variation shows peak values around (11:00-12:00) LT hrs, with greater magnitudes during magnetically disturbed period than their counterpart quiet periods. Their greater magnitudes may likely be that extra energy is imputed in the eastward direction mainly during daytime.

A. Yearly mean solar daily variations

Figure. 6 shows the average yearly mean daily variations for the two elements (H and Z) for both quiet and disturbed conditions. The annual mean (ASqH) of SqH is represented by red dash line and their disturbed variation (ASdH) is denoted in red dash line with asterisks. Similarly, the black curve represent the annual mean solar variation of SqZ (ASqZ) while their disturbed variation (ASdZ) are represented by black dash line with asterisks. For both conditions, the increase in ASqH and ASdH occurred before 05:00 LT hrs LT with pronounced magnitudes in ASdH particularly in the year 2012 and 2013. These magnitudes (few nT) in ASdH were observed to subside with incoming solar radiation around (05:00-06:00) LT and further increase immediately during the sunrise (06:00-07:00) LT hrs period, indication of different mechanism responsible for their source. The pronounced magnitudes in ASdH before pre-sunrise are evidences of current effect outside ionospheric influence.

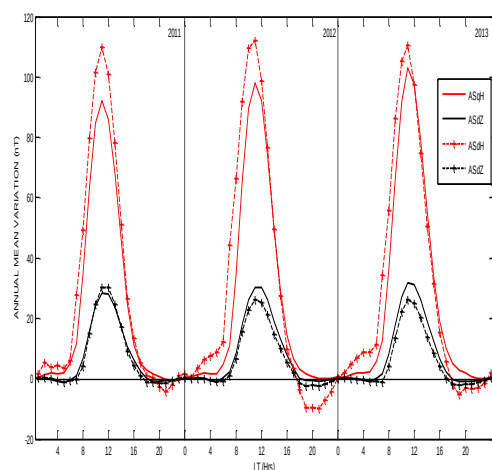


Figure 6. Yearly average solar daily variations of Sq and Sd.

The variations of ASqH were observed to increase linearly with solar activity to reach peak values 92, 98 and 103 nT in

2011, 2012 and 2013. ASdH shows similar increment with peak values 110, 115 and 117 nT seen in 2011, 2012 and 2013 respectively. The decrease in ASqH and ASdH with increasing solar activity can be likened to the effect of solar activity on the ionospheric ductivity, [20]. The variability of ASqH and ASdH were observed to reach their peak values at 11:00 hrs LT. Another feature to note here is that the annual mean solar variation during disturbed period (ASdH) exhibit significantly larger values compared with the corresponding values for quiet periods over the Malaysian ionosphere. Our findings are in contrast to the Indian and American observation by [4] that found greater magnitudes of annual mean solar variation during quiet days relative to the disturbed period. The increase in ASdH in our result may likely be due to modification of the normal eastward current or arises from the increase in strength and width of the equatorial electrojet current intensity during magnetically disturbed period. Also from Figure 6, the ASqZ shows variation pattern similar to ASqH, it steeply increase to peak amplitude values 28, 30 and 32 nT in 2011, 2012 and 2013. During disturbed period, ASdZ attained maximum value 30, 26 and 27 nT in 2011, 2012 and 2013. This non-linear increment in ASdZ might likely result from the combined effect of the disturbed ionospheric current in the E-region of the ionosphere and induced current from the Earth surface. Beside these maxima, the ASdH are characterized by depression that fluctuate in the range between -1 and -5 nT in 2011 and 2012 around 18:00 hrs LT indication of westward current around these periods. The vertical component readily respond to these westward current with lesser magnitudes compared to the ones in ASdH.

VI. CONCLUSIONS

1. The daytime SqH magnitudes increases from 45 nT in September 2011 to 162 nT in September 2013 and the SdH sluggishly increased from 259 nT in September 2011 to about 261 nT in March 2013. Irrespective if the day, the variability of SqH and SdH are generally observed to be larger than those of the SqZ and SdZ and the SdH are about twice or more greater than the SqH magnitudes.
2. Evidence of counter-equatorial electrojet (CEJ) and westward current are eminent in SqH and SdH magnitudes indication of the reversal of the eastward current and the dominant effect of the disturbance dynamo processes.
3. The SdH sluggishly increase at sunrise to reach their peaks values around (10:00-14:00) LT hrs and slowly decreases even after dusk, indication of possible modification of the current system.
4. The negative SdH magnitudes are stronger evidence of the westward disturbed equatorial current effect.
5. Both the SqZ and SdZ depict night-time variations and their daytime magnitudes does not show any appreciable differences.
6. The SqH and SqZ demonstrate the presence of night-time to pre-sunrise magnitudes that decreases with solar activity

7. The sluggish increase in SdH at sunrise to peak values mostly around (10:00-14:00 LT) and the gradual decrease even after dusk are evidences of likely modification of the normal eastward current during perturbed conditions over the Malaysian sector
8. We infer that the solar daily variations of SqZ over the Malaysian region is not just the effect of direct ionospheric current but a combined effect of the eastward current from the E-region and the induced current from the solid Earth.
9. During disturbed period, the seasonal SSqH and SSdH dose not show any linear increment with increase in solar activity, rather a decrease was observed especially during the equinox season.
10. The annual increase of ASqH and AsdH with solar activity can be likened to the effect of solar activity on the ionospheric conductivity.

ACKNOWLEDGEMENTS

We wish to acknowledge the MAGDAS Team at Kyushu Japan and the Host of Langkawi MAGDAS data for keeping record of the magnetic data used in the study.

REFERENCES

- [1] Mazaudier, C., Blanc, M., *Electric currents above Saint-Santin*, 2, Model. J. Geophys. Res. **87**, 2465 (1982).
- [2] Chen, G. X., Xu, W. Y., Du, A. M., Wu, Y. Y., Chen, B., & Liu, X. C., *Statistical characteristics of the day-to-day variability in the geomagnetic Sq field*, Journal of Geophysical Research: Space Physics **112**(A6), (2007).
- [3] Rastogi, R. G., *On the simultaneous existence of eastward and westward flowing equatorial electrojet current*, Proc., Ind., Acad., Sci. **81A**, 80-92 (1975).
- [4] Rastogi, R. G., *Disturbance daily variation of equatorial electrojet current*, Current Science **74**, 457-460 (1998).
- [5] Bolaji, O. S., Adimula, I. A., Adeniyi, J. O., Yumoto, K., *Variability of horizontal magnetic field intensity over Nigeria during low solar activity*, Earth Moon Planet **110**, 91-103 (2013).
- [6] Rabiou, A. B., Nagarajan, N., Okeke, F. N., Ariyibi, E. A., Olayanju, G. M., Joshua, E. O., & Chukwuma, V. U., *A study of day to day variability in geomagnetic field variations at the electrojet zone of Addis Ababa, East Africa*, AJST **8**, 55 (2007).
- [7] Abbas, M., Zaharadeen, Y. J., Joshua, B., Mohammed, S., *Geomagnetic field variations at low latitudes along 96° magnetic meridian*, Int. J. Mar. Atmos. Earth Sci. **1**, 96-109 (2013).
- [8] Okeke F., N., Onwumechili, C., A. and Babatunde, A. R., *Day-to-day variability of geomagnetic hourly amplitudes at low latitudes*, Geophys. J. Int. **134**, 484-500 (1998).
- [9] Stening, R. J., Reztsova, T., Minh, L. H. *Day-to-day changes in the latitudes of the foci of the Sq current system and their relation to equatorial electrojet strength*, J. Geophys. Res. **110** (A10308), 1-6 (2005).
- [11] Matsushita, S. and Campbell, W. H., *Physics of Geomagnetic Phenomena*, (Academic press, New York, vol. 1, 302, 1398p. 1967).
- [12] Yamazaki, Y. & Maute, A., *Sq and EEJ—a review on the daily variation of the geomagnetic field caused by ionospheric dynamo currents*, Space Science Reviews **206**, 299-405 (2017).
- [13] Gouin, P. and Mayaud, P. N., *A propos des existence possible d'un contre electrojet aux latitudes magnetiques equatoriales*, Ann. Geophys. **23**, 41-47 (1967).
- [14] Chapman, S. and Raja Rao, K. S., *The H and Z variations along and near the equatorial electrojet in India, Africa and the Pacific*, J., Atmos., Terr., Phys. **27**, 559-581 (1965).
- [15] Rastogi, R. G., *Disturbance daily variation of electrojet current at Indian longitude sector*, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics **62**, 695-700 (2000).
- [16] Yamazaki, Y., KHäusler, K. and Wild, J. A., *Day-to-day variability of midlatitude ionospheric currents due to magnetospheric and lower atmospheric forcing*, J. Geophys. Res. Space Phys. **121**, 7067-7086 (2016).
- [17] Obiekezie, T. N. and Obiadazie, S. C. *The variability of H component of geomagnetic field at the African sector*, Phys. Rev. Res. Int. **3**, 154-160 (2013).
- [18] Stening, R. J., *An investigation of solar activity effects in Australian radiosonde data*, Journal of atmospheric and terrestrial physics **56**, 545-553 (1994).
- [19] Abbas, M., Abidin, Z. Z., Jusoh, M. H., Bolaji, O. S. & Yoshikawa, A., *Features of horizontal magnetic field intensity over northern island of Malaysia*, Indian Journal of Physics **93**, 1247-1257 (2019).
- [20] Anad, F., Amory-Mazaudier, C., Hamoudi, M., Bourouis, S., Abtout, A. & Yizengaw, E., *Sq solar variation at Medea Observatory (Algeria), from 2008 to 2011*, Advances in Space Research **58**, 1682-1695 (2016).

Visión innovadora de la asignatura Cromatografía de Capa delgada y de Papel dentro del proceso de aprendizaje en los planes de estudios universitarios y de postgrado

EDVCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Luis. E. Jiménez Rodríguez^{1,3}, Eduardo. R. Besada Maribona^{2,3}, Nancy Martínez Alfonso³

¹Instituto Nacional de Higiene, Epidemiología y Microbiología, INHEM, MINSAP,

Infanta No.1158 entre Clavel y Santo Tomás, Centro Habana, CP 10300, La Habana, Cuba.

²Empresa Lab. Farmacéutico "Roberto Escudero", Biocubafarma, Ave. 20 de mayo, No. 540 esquina a Marta Abreu, Cerro, La Habana, Cuba.

³Dpto. Química Analítica, Facultad de Química de la Universidad de la Habana, Zapata s/n y Carlitos Aguirre, CP 10400, Vedado, La Habana, Cuba.

E-mail: enrijim@infomed.cu

(Recibido el 17 de octubre de 2025, aceptado el 13 de diciembre de 2025)

Resumen

Se muestran los resultados obtenidos con los estudiantes del Curso de Cromatografía, aplicándose la teoría recibida en clase en el análisis por Cromatografía Plana (CP) de dos colorantes: pirocatecol y eosina, sobre una placa cromatográfica recubierta con silicagel, donde la composición de la Fase Móvil (FM) empleada fue: (Etanol: agua) (90:10) obteniéndose R_fs de: 0,30 para el Pirocatecol y 0,80 para la eosina, contribuyendo así a formar una personalidad integral, desarrollada a través de clases teóricas donde se combina de forma simultánea, la teoría estudiada con la práctica del laboratorio, creando hábitos y capacidades relacionados con la constancia en el estudio, el trabajo científico, una actitud crítica ante el resultado de su trabajo y la presentación del mismo, fruto de una actividad independiente y correctamente organizada, demostrándose la visión innovadora de la asignatura Cromatografía Plana dentro del proceso de aprendizaje en los planes de estudios universitarios y de postgrado.

Palabras clave: Cromatografía Plana, Fase Móvil.

Abstract

The results obtained with the students of the Chromatography Course are shown, applying the theory received in class in the analysis by Planar Chromatography (PC) of two dyes: pyrocatechol and eosin, on a chromatographic plate coated with silica gel, where the composition of the Mobile Phase (MP) used was: (Ethanol: water) (90:10) obtaining R_fs of: 0.30 for Pyrocatechol and 0.80 for eosin, thus contributing to the formation of an integral personality, developed through theoretical classes where the theory studied is combined simultaneously with laboratory practice, creating habits and capabilities related to perseverance in the study, scientific work, a critical attitude towards the result of their work and the presentation of the same, fruit of an independent and correctly organized activity, demonstrating the innovative vision of the subject Planar Chromatography within the learning process in university and postgraduate courses.

Key words: Planar Chromatography, Mobile Phase.

I. INTRODUCCIÓN

Los procesos cromatográficos en la Cromatografía Plana (CP) tienen lugar como resultado de un proceso físico, de repetidas atracciones y repulsiones por interacciones de carácter electrostático entre moléculas, durante el cual se producen adsorciones y desorciones durante el movimiento de los componentes de la muestra a lo largo del lecho estacionario, alcanzándose la separación gracias a las diferencias en los coeficientes de distribución de los analitos.

El término lecho estacionario se aplica en general para denominar cualquiera de las diferentes formas en que puede usarse la fase estacionaria, que puede estar empaquetada en

una columna o extendida en forma de capa uniforme sobre un soporte. La Fase Móvil puede ser gaseosa o líquida.

Dentro del plan de clases de la asignatura se encuentra el desarrollo del Laboratorio, donde entre sus contenidos está la preparación de los medios y las aplicaciones en Cromatografía de Capa Delgada y de papel.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

Para realizar el laboratorio de Cromatografía Plana (CP) se dispone de un aula climatizada, acondicionada con los medios necesarios para efectuar el ensayo de Cromatografía de Capa

Delgada (CCD) y de Papel. Además, el aula está provista de video beam, pizarra con plumones de varios colores para escribir en pizarra acrílica. Los recursos adicionales para la actividad innovadora son: cámara cromatográfica para la CCD, cámara cromatográfica para la Cromatografía de Papel, placas previamente activadas y recubiertas con silicagel G, mezclas de colorantes (eosina y pirocatecol), papel de filtro, etanol clase A y agua destilada.

III. RESULTADOS

En los ensayos realizados para el análisis por Cromatografía Plana (CP) de dos colorantes: pirocatecol y eosina, sobre una placa cromatográfica recubierta con silicagel, la composición de la FM empleada fue: (Etanol: agua) (90:10) obteniéndose Rfs de: 0,30 para el Pirocatecol y 0,80 para la eosina. Para mejorar la separación de los colorantes pirocatecol y eosina en un análisis por CP, se consideran varias estrategias, principalmente modificar la composición de la fase móvil (FM), recomendándose las siguientes acciones:

- Ajustar la polaridad. La fase móvil actual es etanol: agua (90:10), es relativamente polar, por lo que si los Rf están muy cercanos (por ejemplo: 0,30 y 0,80), primero se prueba con una mezcla de polaridad intermedia.
- Al disminuir la polaridad, aumentando la proporción de etanol, por ejemplo: 95:5, se reduce la polaridad de la fase móvil lográndose aumentar el Rf del pirocatecol (menos polar) y disminuir el Rf de la eosina (más polar).
- Al aumentar la polaridad, disminuyendo la proporción de etanol, por ejemplo: 80:20, se incrementa la polaridad de la fase móvil, disminuye el Rf del pirocatecol y aumenta el Rf de la eosina.
- Otro factor importante para una mejor separación es la activación de la placa, para garantizar que la placa esté correctamente activada, secada en horno antes de su uso a 105°C durante 1 hora, dejando luego a temperatura ambiente en una de desecadora con sulfato de sodio como descante para para lograr una buena separación.
- Para la aplicación de la muestra en la placa se utiliza un capilar o una micropipeta.
- Posteriormente, para el desarrollo de la placa se sumerge la misma en el sistema de solventes elegido (FM) dejando que el solvente migre a través de la Silica gel para separar los componentes de la muestra.
- La humedad ambiental puede afectar la actividad de la Silica gel, por lo que es importante trabajar en un ambiente lo más seco posible.
- El tiempo de activación puede variar dependiendo de la humedad ambiental y la calidad de la Silica gel.

De acuerdo a lo anterior, puede asegurarse que la placa cromatográfica de Silica gel está adecuadamente activada y lista para proporcionar resultados confiables en los experimentos de CCD. Los alumnos realizan las aplicaciones de forma individual tanto en la cromatografía de papel como en la de capa delgada, así como el proceso de separación en las cámaras cromatográficas, para posteriormente efectuar las

mediciones individuales aplicando la fórmula para el cálculo de los Rf en cromatografía Plana donde se considera que el Rf (Retention factor) que es un valor adimensional calcula experimentalmente.

$$Rf = \text{Distancia recorrida por la mancha} / \text{Distancia recorrida por el frente del solvente}.$$

Dónde se señala a los estudiantes lo siguiente:

- Un valor de Rf cercano a 0 indica que la mancha está muy cerca del punto de aplicación (poco movimiento).
- Un valor de Rf cercano a 1 indica que la mancha está muy cerca del frente del solvente (máximo movimiento).



FIGURA 1. Se muestra una imagen de la clase con las corridas cromatográficas de placas y de papel realizadas por los alumnos.

IV. CONCLUSIONES

1. Se demuestra que los alumnos pueden realizar las aplicaciones individualmente tanto en la Cromatografía de Papel como en la de Capa Delgada, así demostrado durante el proceso de separación en las cámaras cromatográficas, logrando posteriormente efectuar las mediciones individuales, aplicando la fórmula para el cálculo de los Rf en Cromatografía Plana (Capa Delgada y Papel) a través del Rf (Retention factor), demostrándose la visión innovadora de la asignatura Cromatografía Plana dentro del proceso de aprendizaje en los planes de estudios universitarios y de postgrado.
2. Los estudiantes reafirman así los conocimientos adquiridos al demostrar el cumplimiento de las leyes físicas de atracción-repulsión electrostática durante el proceso de separación de los diferentes analitos.

V. RECOMENDACIONES

Se sugiere aplicar esta experiencia de forma sistemática en ésta y en otras asignaturas donde sea factible simultanear la actividad docente puramente teórica con la práctica del laboratorio, a fin de asentar los conocimientos motivando en los estudiantes a continuar profundizando en los mismos con vistas a su desenvolvimiento futuro en tareas afines.

REFERENCIAS

- [1] Braithwaite, A. and Smith, F. J., *Chromatographic Methods* 5th Edition (Ed. Chapman and Hall, USA, 1996).
- [2] *Clases de Pregrado de Cromatografía*, Dpto. Química Analítica, Facultad de Química de la Universidad de la Habana (2025).
- [3] Jiménez Rodríguez, L. E., *Curso de Postgrado de Cromatografía*, INHEM, (2025).
- [4] Valcárcel Cases, M. y Gómez Hens., A., *Técnicas Analíticas de Separación*, (Editorial Reverté SA, España, 1988), pp. 389-436.
- [5] Rafael Cela. Rosa A. Lorenzo. Ma. Del Carmen Casais, *Técnicas de separación en Química analítica*, (Editorial Síntesis, La Habana, 2002), pp. 502-517.

The Disk Paradox of Feynman

Sepand Khosravi, Houshyar Noshad

Department of Physics and Energy Engineering, Amirkabir University of Technology, No. 424 Hafez Ave., Tehran, Iran.

E-mail: sepandkhosravi1@gmail.com

EDVCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

(Received 14 October 2025, accepted 11 December 2025)

Abstract

Special functions play a fundamental role in physics and engineering. In this work, we employ Legendre functions to analyze Feynman's disk paradox and demonstrate their utility in classical electrodynamics. The paradox concerns a non-conducting ring carrying a uniform charge distribution, placed in an external magnetic field. As the magnetic field is gradually reduced, the ring begins to rotate, seemingly violating angular momentum conservation. We show, however, that the electromagnetic field itself carries angular momentum. When the ring is stationary, this angular momentum is stored in the field; as the magnetic field decreases, it is transferred to the ring, ensuring that total angular momentum is conserved. This analysis not only resolves the paradox but also highlights the pedagogical and computational value of Legendre functions in electrodynamics.

Keywords: Legendre Functions, Feynman's Disk Paradox, Electromagnetic angular momentum.

Resumen

Las funciones especiales desempeñan un papel fundamental en la física y la ingeniería. En este trabajo, empleamos funciones de Legendre para analizar la paradoja del disco de Feynman y demostrar su utilidad en la electrodinámica clásica. La paradoja se refiere a un anillo no conductor con una distribución de carga uniforme, situado en un campo magnético externo. A medida que el campo magnético se reduce gradualmente, el anillo comienza a girar, aparentemente violando la conservación del momento angular. Sin embargo, demostramos que el propio campo electromagnético posee momento angular. Cuando el anillo está estacionario, este momento angular se almacena en el campo; a medida que el campo magnético disminuye, se transfiere al anillo, garantizando la conservación del momento angular total. Este análisis no solo resuelve la paradoja, sino que también destaca el valor pedagógico y computacional de las funciones de Legendre en electrodinámica.

Palabras clave: Funciones de Legendre, Paradoja del Disco de Feynman, Momento angular electromagnético.

I. INTRODUCTION

Several methods have been proposed to resolve Feynman's disk paradox. Ma and Chiang [1] calculated the angular momentum stored in the electromagnetic field using direct integration. Torres del Castillo [2] argued that conservation can be established by a careful definition of angular momentum without explicit field calculations. Pantazis and Perivolaropoulos [3] considered a more realistic system with finite solenoid and charged cylinder. In contrast, the present work employs a Legendre polynomial expansion of the potential, which provides a systematic and symmetry-based approach.

The system studied in this work consists of a uniformly charged insulating ring of radius R placed in the x - y plane, which generates an electric field, together with a point magnetic dipole located in the same plane, providing the magnetic field. As the magnetic field is gradually reduced, the ring begins to rotate, which at first seems to challenge conservation of angular momentum. We show that the

electromagnetic field itself carries angular momentum, which is transferred to the ring as the field decreases, ensuring total angular momentum is conserved [4].

II. ELECTRIC POTENTIAL OF THE CHARGED RING

We consider the charged ring of total charge Q located in the x - y plane. The electric potential at a point $\vec{r}$ is given by [5]:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1)$$

where ϵ_0 denotes the vacuum permittivity (8.85×10^{-12} F/m).

We use the Legendre polynomial expansions [6]:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \frac{r'^l}{r^{l+1}}, & r > r' \\ \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \frac{r^l}{r'^{l+1}}, & r < r' \end{cases} \quad (2)$$

where P_l are the Legendre polynomials and γ is the angle between $\vec{r}$ and $\vec{r}'$.

The addition theorem for spherical harmonics [6] allows us to expand the Legendre polynomials:

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta', \varphi'), \quad (3)$$

where $Y_{l,m}$ are the spherical harmonics and the star denotes complex conjugation.

A. Electric Potential Outside the Charged Ring ($r > r'$)

We substitute Eq. (2) into the potential integral (Eq. (1)); then, by applying the addition theorem for spherical harmonics (Eq.(3)) and using $dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi'$ and $\theta' = \frac{\pi}{2}$ (since the ring lies in the x-y plane), we have:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') \frac{r'^l}{r^{l+1}} \lambda R d\varphi'. \quad (4)$$

Note that, during the integration, all terms vanish for all $m \neq 0$, so only $m = 0$ contributes. Consequently, the sum over m is removed.

For points outside the ring ($r > R$), by integrating over the ring, we obtain:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(0). \quad r > R \quad (5)$$

It can be seen that, because the integration is carried out from 0 to 2π , $r' = R$.

B. Electric Potential Inside the Charged Ring ($r < r'$)

For points inside the charged ring ($r < R$) we use the expansion from (2), substitute it into the potential integral, apply the addition theorem for spherical harmonics, and use $dq = \lambda dl = \lambda R d\varphi'$; then we have:

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} Y_{l,m}(\theta, \varphi) Y_{l,m}^*(\theta', \varphi') \frac{r^l}{r'^{l+1}} \lambda R d\varphi', \quad (6)$$

by integrating over φ' from 0 to 2π as in the previous section, and using $r' = R$, we obtain:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(0). \quad r < R \quad (7)$$

III. ELECTRIC FIELD OF THE CHARGED RING

The electric field is obtained from the electric potential using [5]

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \hat{\theta}, \quad (8)$$

where the φ component vanishes due to azimuthal symmetry.

Using the results of Eqs. (5) and (7), we find the following components:

$$E_r = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)R^l}{r^{l+2}} P_l(\cos \theta) P_l(0), & r > R \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l r^{l-1}}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta) P_l(0), & r < R \end{cases} \quad (9)$$

$$E_{\theta} = \begin{cases} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R^l}{r^{l+1}} P_l^1(\cos \theta) P_l(0), & r > R \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^l}{R^{l+1}} P_l^1(\cos \theta) P_l(0), & r < R \end{cases} \quad (10)$$

where P_l and P_l^1 are the Legendre polynomials and associated Legendre functions, respectively.

Thus, the electric field of the charged ring is expressed analytically in terms of Legendre functions, valid for both the inside and outside regions.

IV. MAGNETIC FIELD OF THE DIPOLE

The system consists of a charged ring in the x-y plane, and a point magnetic dipole located at its center. The dipole is assumed to be sufficiently small compared to the ring, so that the magnetic dipole approximation is valid. Its magnetic moment is aligned along the z axis ($\vec{\mu} = \mu \hat{z}$).

In spherical coordinates, the unit vector along z is $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$ [5], hence:

$$\vec{\mu} = \mu(\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}). \quad (11)$$

We use the standard expression for a magnetic dipole [5]:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{-\vec{\mu} + 3(\vec{\mu} \cdot \hat{r}) \hat{r}}{r^3} \right], \quad (12)$$

where μ_0 denotes the vacuum permeability ($4\pi \times 10^{-7}$ H/m).

By substituting Eq. (11) into (12), the resulting magnetic field is [4]:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \left[\frac{2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}}{r^3} \right]. \quad (13)$$

V. ANGULAR MOMENTUM OF THE ELECTRO-MAGNETIC FIELD

The electromagnetic momentum density is [5]:

$$\vec{P}_v = \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} , \quad (14)$$

and the corresponding angular-momentum density is [5]:

$$\vec{L}_v = \vec{r} \times \vec{P}_v . \quad (15)$$

For the present geometry (the charged ring in the x-y plane and a point magnetic dipole at the ring center according to Eq. (11)), the electric and magnetic fields are azimuthally symmetric and have no φ components. Consequently, only the $\hat{\varphi}$ component of $\vec{P}_v$ is nonzero:

$$\vec{P}_v = \epsilon_0 (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \hat{\varphi} , \quad (16)$$

hence,

$$\vec{L}_v = -r P_v \hat{\theta} = r \epsilon_0 (E_\theta B_r - E_r B_\theta) \hat{\theta} . \quad (17)$$

We write $\hat{\theta}$ in Cartesian components and integrate over φ from 0 to 2π , it shows that the components of the angular momentum is zero in x and y direction, therefore the total field angular momentum $L_z = \epsilon_0 \int (\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})) \cdot \hat{z}$ points along z, which is represented as follows:

$$L_z = 2\pi \epsilon_0 \int_0^\infty r^3 dr \int_0^\pi (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \sin^2 \theta \, d\theta . \quad (18)$$

We split the radial integral into the inner region ($0 < r < R$) and the outer region ($r > R$):

$$L_z = L_z^{(<)} + L_z^{(>)} , \quad (19)$$

where,

$$L_z^{(<)} = 2\pi \epsilon_0 \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (20)$$

$$L_z^{(>)} = 2\pi \epsilon_0 \int_R^\infty r^3 dr \int_0^\pi (E_r B_\theta - E_\theta B_r) \sin^2 \theta \, d\theta . \quad (21)$$

A. The inner contribution of the angular momentum

The inner contribution of the angular momentum $L_z^{(<)}$ is evaluated by defining:

$$a = \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi E_r B_\theta \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (22)$$

$$b = \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi E_\theta B_r \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (23)$$

Hence $L_z^{(<)} = 2\pi \epsilon_0 (a - b)$. We substitute electric and magnetic field components from Eqs. (9), (10), and (13) into Eqs. (22) and (23) and we have

$$a = -\frac{Q\mu_0\mu}{(4\pi)^2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l P_l(0)}{R^{l+1}} \int_0^R dr r^{l-1} \int_0^\pi P_l(\cos\theta) \sin^3 \theta \, d\theta , \quad (24)$$

$$b = -\frac{2Q\mu_0\mu}{(4\pi)^2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(0)}{R^{l+1}} \int_0^R dr r^{l-1} \int_0^\pi P_l^1(\cos\theta) \cos\theta \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (25)$$

then we evaluate the angular integrals using the orthogonality relations for Legendre polynomials and associated Legendre functions (Eqs. (26) and (27)) [6]:

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m} , \quad (26)$$

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l'} . \quad (27)$$

It should be emphasized that in Eq. (24), only $l = 0$ and $l = 2$ terms survive the angular integral and in Eq.(25) only $l = 2$ terms survives.

After that, we perform the radial integrals and we have:

$$a = -\frac{2\mu_0 Q\mu}{15(4\pi)^2\epsilon_0 R} , \quad (28)$$

$$b = -\frac{6\mu_0 Q\mu}{15(4\pi)^2\epsilon_0 R} , \quad (29)$$

note that in Eq.(24), the radial integral is zero for $l = 0$ and therefore we only used $l = 2$ for the result.

By substituting Eqs.(28) and (29) into Eq.(20) we have:

$$L_z^{(<)} = \frac{2}{15} \frac{\mu_0 Q\mu}{4\pi R} . \quad (30)$$

B. The outer contribution of the angular momentum

Similarly, the outer contribution $L_z^{(>)}$ is obtained by defining:

$$c = \int_R^\infty r^3 dr \int_0^\pi E_r B_\theta \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (31)$$

$$d = \int_R^\infty r^3 dr \int_0^\pi E_\theta B_r \sin^2 \theta \, d\theta , \quad (32)$$

therefore $L_z^{(>)} = 2\pi\epsilon_0(c - d)$. By substituting electric and magnetic field components from Eqs. (9), (10), and (13) into Eqs.(31) and (32) we have:

$$c = \frac{Q\mu_0\mu}{(4\pi)^2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)R^l P_l(0) \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^{l+2}} \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) \sin^3\theta d\theta, \quad (33)$$

$$d = -\frac{2Q\mu_0\mu}{(4\pi)^2\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(0)R^l \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^{l+2}} \int_0^{\pi} P_l^1(\cos\theta) \cos\theta \sin^2\theta d\theta, \quad (34)$$

by evaluating the integrals in Eqs. (33) and (34), similar to the previous subsection, we obtain:

$$c = \frac{22Q\mu_0\mu}{15(4\pi)^2\epsilon_0 R}, \quad (35)$$

$$d = -\frac{4Q\mu_0\mu}{15(4\pi)^2\epsilon_0 R}, \quad (36)$$

by substituting Eqs. (35) and (36) into (21) we have:

$$L_z^{(>)} = \frac{13}{15} \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R}. \quad (37)$$

C. The total angular momentum

By adding $L_z^{(<)}$ from Eq. (30) and $L_z^{(>)}$ from Eq. (37), we can have the total angular momentum of the electromagnetic field:

$$L_z = \frac{2}{15} \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R} + \frac{13}{15} \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R} = \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R}. \quad (38)$$

VI. MECHANICAL ANGULAR MOMENTUM OF THE CHARGED RING

In this section, we reduce the magnetic dipole moment and, consequently, the magnetic field, and evaluate the mechanical angular momentum transferred to the charged ring as the magnetic field vanishes. To this end, we first calculate the magnetic flux passing through the ring. By using Faraday's law of induction, we obtain the induced electric field due to the time-varying magnetic field. This induced field produces a torque on the charged ring, from which the transferred mechanical angular momentum is determined.

A. Magnetic Flux Through the Ring

The magnetic flux through the ring is expressed as [5]:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B_z dA = 2\pi \int_0^R B_z r dr. \quad (39)$$

Here, dA is the surface element of the ring. Since the ring lies in the x-y plane, the normal vector is along the z axis. From

the spherical representation of the dipole magnetic field (Eq. (13)), the z component is given by [4]:

$$B_z = \cos\theta B_r - \sin\theta B_{\theta} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} (3\cos^2\theta - 1), \quad (40)$$

using the Legendre polynomial relation $P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ [6], Eq. (40) can be written as:

$$B_z = \frac{\mu_0\mu}{2\pi} \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}. \quad (41)$$

Since the ring lies in the plane $\theta = \frac{\pi}{2}$, we have $P_2(0) = -\frac{1}{2}$. Substituting into Eq. (39) yields:

$$\Phi_B = -\frac{\mu_0\mu}{2} \int_0^R \frac{dr}{r^2}. \quad (42)$$

The integral in Eq. (43) diverges as $r \rightarrow 0$, which is the consequence of approximating the source as a point dipole located at the origin. To overcome this difficulty, we note that the total magnetic flux of a dipole through an infinite plane is zero. Thus, the flux through the inner region can be obtained as the negative of the flux through the exterior region [4]:

$$\int_R^{\infty} B_z (2\pi r) dr = - \int_0^R B_z (2\pi r) dr, \quad (43)$$

evaluating the left-hand side gives by substituting B_z from Eq. (41) by using $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_R^{\infty} B_z (2\pi r) dr = -\frac{\mu_0\mu}{2R}. \quad (44)$$

Therefore, the magnetic flux through the ring is:

$$\Phi_B = \frac{\mu_0\mu}{2R}. \quad (45)$$

B. Mechanical Angular Momentum of the Ring

The reduction of the magnetic dipole moment induces an electric field according to Faraday's law Eq.(46) [5],

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}. \quad (46)$$

Since the induced field is azimuthal:

$$E_{\varphi}(2\pi r) = -\frac{\mu_0}{2R} \frac{d\mu}{dt} \rightarrow E_{\varphi} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2} \frac{d\mu}{dt}. \quad (47)$$

This induced field exerts a force on the charged ring [5]:

$$\vec{F} = Q\vec{E} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi R^2} \frac{d\mu}{dt} \hat{\phi}, \quad (48)$$

which produces a torque as follows [5]:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \xrightarrow{\vec{r}=R\hat{r}} \vec{\tau} = \frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \frac{d\mu}{dt} \hat{\theta}, \quad (49)$$

note that $\hat{\theta}$ is the unit vector in the spherical coordinates [5]:

$$\hat{\theta} = \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z}, \quad (50)$$

since the ring is located in the x-y plane $\theta = \frac{\pi}{2}$, therefore from Eqs. (49) and (50) we have:

$$\vec{\tau} = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \frac{d\mu}{dt} \hat{z}. \quad (51)$$

The mechanical angular momentum transferred to the ring is obtained from [4]:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{mech}}{dt} \rightarrow \vec{L}_{mech} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{\tau} dt = -\frac{\mu_0 Q}{4\pi R} \int_{\mu}^0 d\mu \hat{z}, \quad (52)$$

which yields:

$$L_{mech,z} = \frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R}. \quad (53)$$

It should be noted that the reduction of the magnetic field must occur sufficiently slowly so that the system remains within the quasi-magnetostatic regime and radiation effects can be neglected.

VII. CONCLUSION

In this work, we calculated the electromagnetic field generated by a charged, non-conducting ring and a point magnetic dipole, and from this we obtained the angular momentum of the electromagnetic field (Eq. (38)). By gradually reducing the magnetic dipole moment, we

demonstrated that the charged ring starts to rotate. The mechanical angular momentum acquired by the ring after the dipole moment vanishes (Eq. (53)) is exactly equal to the angular momentum of the electromagnetic field given in Eq. (38), namely $\frac{\mu_0 Q \mu}{4\pi R}$.

This indicates that there is no inconsistency: the apparent violation of angular momentum conservation is resolved once the angular momentum stored in the electromagnetic field is properly taken into account. Furthermore, when $\mu = 0$, the magnetic field vanishes according to Eq. (13), and therefore the electromagnetic angular momentum also becomes zero. This confirms that the entire angular momentum is transferred to the ring.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work is based on the undergraduate thesis of Sepand Khosravi at Amirkabir University of Technology, completed under the supervision of Dr. Houshyar Noshad. The authors gratefully acknowledge the academic environment and resources provided by Department of Physics and Energy Engineering.

REFERENCES

- [1] Ma, E. and Chiang, T., *Field angular momentum in Feynman's disk paradox*, *Am. J. Phys.* **54**, 949–953 (1986).
- [2] Torres del Castillo, G. F., *On Feynman's paradox*, *Rev. Mex. Fís. E* **19**, 020208 (2023).
- [3] Pantazis, G. and Perivolaropoulos, L. A., *A general realistic treatment of the disk paradox*, *Am. J. Phys.* **84**, 791–799 (2016).
- [4] McDonald, K. T., *PH501: Electrodynamics Problem Set 5*, (Princeton University, UK, 1994), available at <http://kirkmcd.princeton.edu/>.
- [5] Griffiths, D. J., *Introduction to Electrodynamics*, 4th ed. (Pearson, Boston, USA, 2013), 624 pp.
- [6] Noshad, H., *Special Functions in Science and Engineering*, 1st ed. (Amirkabir University of Technology Press, Tehran, 2020), 378 pp.

Numerical Solutions of the Lane-Emden Equation and Stellar Density Profiles

EDVCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Sepand Khosravi

*Department of Physics and Energy Engineering, Amirkabir University of Technology,
No. 424 Hafez Ave., Tehran, Iran.*

E-mail: sepandkhosravi1@gmail.com

(Received 3 November 2025, accepted 18 December 2025)

Abstract

We present numerical solutions of the Lane-Emden equation for selected polytropic indices using a fourth order Runge-Kutta integrator with series expansion initial conditions. The method is validated against the analytical cases $n = 0$ and $n = 1$, then applied to the astrophysically relevant indices $n = 1.5$ and $n = 3$. The computed first zeros are $\xi_1 \approx 3.654$ ($n = 1.5$) and $\xi_1 \approx 6.897$ ($n = 3$), and the resulting density profiles show that increasing n produces more extended, less centrally concentrated models. The $n = 3$ polytropic model yields a solar radius of the correct order of magnitude, showing that even a simplified pressure-density relation can capture the essential structural scaling of real stars like the Sun.

Keywords: Lane-Emden equation, Polytopes, Stellar structure.

Resumen

Presentamos soluciones numéricas de la ecuación de Lane-Emden para índices politrópicos seleccionados utilizando un integrador Runge-Kutta de cuarto orden con condiciones iniciales de expansión en serie. El método se valida frente a los casos analíticos $n = 0$ y $n = 1$, y posteriormente se aplica a los índices astrofísicamente relevantes $n = 1.5$ y $n = 3$. Los primeros ceros calculados son $\xi_1 \approx 3.654$ ($n = 1.5$) y $\xi_1 \approx 6.897$ ($n = 3$), y los perfiles de densidad resultantes muestran que al aumentar n se obtienen modelos más extendidos y con menor concentración central. El modelo politrópico $n = 3$ proporciona un radio solar del orden de magnitud correcto, lo que demuestra que incluso una relación presión-densidad simplificada puede capturar la escala estructural esencial de estrellas reales como el Sol.

Palabras clave: Ecuación de Lane-Emden, Politropos, Estructura estelar.

I. INTRODUCTION

One of the most fundamental equations describing stellar structure is the Lane-Emden equation, which characterizes the dimensionless density profile of a spherically symmetric star in hydrostatic equilibrium with a pressure-density relation defined by a polytropic index [1, 2]. Hypothetical stellar models in which the pressure depends on the density in the form

$$P = K\rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (1)$$

are known as polytropes, where K is a constant and n is the polytropic index [1].

The starting point for deriving the Lane-Emden equation is the condition of hydrostatic equilibrium [1],

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{dM(r)\rho}{r^2}, \quad (2)$$

together with the mass continuity equation [1],

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (3)$$

where P is the pressure, ρ is the density, $M(r)$ is the mass enclosed within radius r , and G is the gravitational constant ($6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$).

Assuming the polytropic relation above and introducing the dimensionless variables [1]

$$\rho = \rho_c [D_n(\xi)]^n, \quad (4)$$

$$r = \lambda_n \xi, \quad (5)$$

where ρ_c is the central density, D_n is the dimensionless density, ξ is the dimensionless independent variable, and λ_n is a characteristic length scale defined by [1]

$$\lambda_n = \left[(n+1) \left(\frac{K\rho_c^{1-n/n}}{4\pi G} \right) \right]^{1/2}. \quad (6)$$

The equations of stellar structure (Eqs.(2) and (3)) can be combined to yield the Lane-Emden equation [1]:

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^2 \frac{dD_n}{d\xi} \right] + D_n^n = 0. \quad (7)$$

In this study, we numerically solve the Lane–Emden equation for selected values of the polytropic index n and analyze the corresponding dimensionless density distributions $D_n(\xi)$. Analytical solutions exist only for $n = 0, 1$, and 5 [1]; therefore, for other values of n , the equation must be solved numerically. The numerical solutions are obtained using a fourth-order Runge–Kutta method [3], and the resulting dimensionless density ratio $\rho/\rho_c = D_n^n$ is plotted as a function of the dimensionless radius $\xi = r/\lambda_n$. The results illustrate how the internal density structure and stellar radius depend on the polytropic index.

II. NUMERICAL METHOD

This section outlines the procedure for numerically solving the Lane–Emden equation (Eq. (7)).

In order to solve a differential equation, we need boundary and initial conditions. For this particular equation (Eq.(7)), the boundary conditions are given by Eqs. (8) and (9) [1]:

$$D_n(\xi_1) = 0, \quad (8)$$

where ξ_1 specifies the surface of the star,

$$\frac{dD_n}{d\xi} = 0 \text{ at } \xi = 0. \quad (9)$$

This condition is derived from the combination of Eqs. (1) and (2) at the center of the star.

Additionally, in order for ρ_c to represent the central density of the star, it is also necessary that [1]

$$D_n(0) = 1. \quad (10)$$

As has been mentioned before, in this study, the Lane–Emden equation was solved numerically using the fourth-order Runge–Kutta method.

To avoid the singularity at the stellar center ($\xi = 0$), the integration starts from a small, finite value ξ_0 , which is set equal to the step size h in the numerical implementation. At ξ_0 , the initial values of D_n and $dD_n/d\xi$ are approximated from the series expansion as [4]:

$$D_n(\xi_0) = 1 - \frac{\xi_0^2}{6}, \quad (11)$$

$$\frac{dD_n}{d\xi} = -\frac{\xi_0}{3}. \quad (12)$$

These expressions ensure that the physical boundary conditions (Eqs. (9) and (10)) are satisfied to first order, providing accurate starting values for the numerical integration. The numerical computations were performed in Python. The integration was carried out up to the first zero of $D_n(\xi)$, with a step size of $h = 0.001$ to ensure numerical stability and accuracy.

III. RESULTS AND DISCUSSION

In this section, the numerical solutions of the Lane–Emden equation are presented. The results for $n = 0$ and $n = 1$ are first compared with their analytical forms to validate the numerical method, followed by the analysis of the solutions for $n = 1.5$ and $n = 3$, which correspond to realistic stellar models.

A. Code verification

Before applying the numerical method to the cases that cannot be solved analytically, the code is first verified by comparing the numerical results with the analytical solutions of the Lane–Emden equation (Eq.(7)) for $n = 0$ and $n = 1$, for which the analytical solutions are available as follows [1]:

$$D_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}, \quad (13)$$

$$D_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (14)$$

Figure 1 shows a comparison between the numerical and analytical solution for $n = 0$, while Figure 2 shows the comparison for $n = 1$. Excellent agreement is observed in both cases, confirming the reliability of the numerical method and justifying its application to polytropic indices without analytical solutions.

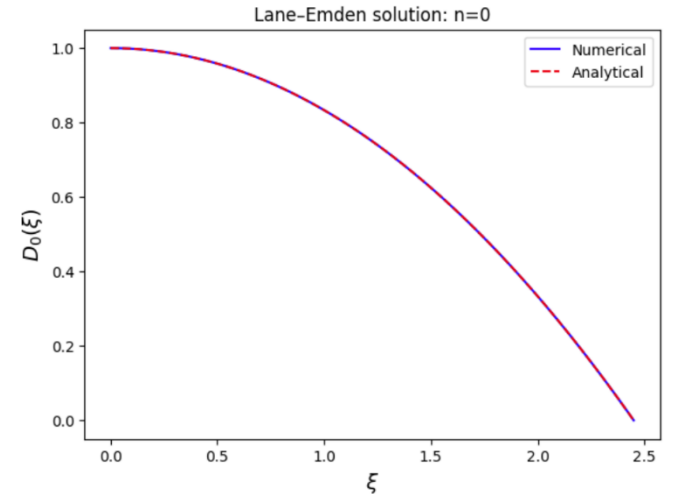


FIGURE 1. Comparison of analytical and numerical solutions for $n = 0$.

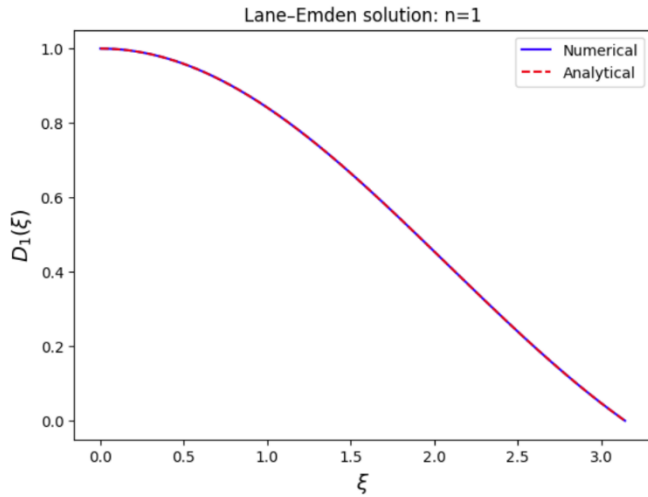


FIGURE 2. Comparison of analytical and numerical solutions for $n = 1$.

B. Density profiles for $n = 1.5$ and $n = 3$

The Lane–Emden equation has been solved numerically for two representative polytropic indices, $n = 1.5$ and $n = 3$, corresponding to distinct stellar configurations. The $n = 1.5$ polytrope characterizes stars supported by non-relativistic degenerate electron pressure, such as white dwarfs—extremely compact remnants in their final evolutionary stage. In contrast, the $n = 3$ polytrope represents stars in radiative equilibrium, where radiation pressure balances gas pressure and gravity, a condition typical of massive main-sequence or radiation-dominated stars [1].

The first zeros of the numerical solutions, which specify the stellar surface, are summarized in Table I. The results indicate that the $n = 1.5$ polytrope corresponds to a more compact configuration, while the $n = 3$ case exhibits a more extended stellar structure.

TABLE I. Dimensionless radii (ξ_1) corresponding to the first zeros of the Lane–Emden function for $n = 1.5$ and $n = 3$.

Polytropic index (n)	ξ_1
1.5	3.654
3	6.897

Figure 3 illustrates the variation of dimensionless density $\rho/\rho_c = D_n^n$ as a function of the dimensionless radius $\xi = r/\lambda_n$ for both values of n ($n = 1.5$ and $n = 3$). In both cases, the density decreases monotonically with increasing ξ . The point where $D_n(\xi)$ first reaches zero, denoted ξ_1 , defines the surface of the star, since beyond this point the density would become negative and thus physically meaningless.

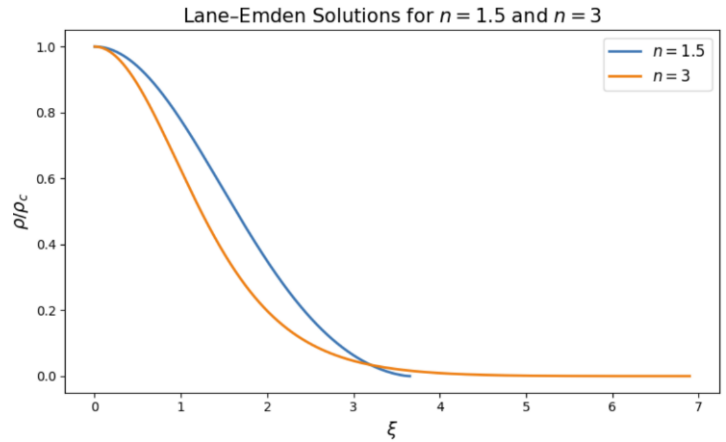


FIGURE 3. Dimensionless density $\rho/\rho_c = D_n^n$ versus dimensionless radius $\xi = r/\lambda_n$ for $n = 1.5$ and $n = 3$

As shown in Figure 3, the $n = 1.5$ density profile declines more steeply and reaches zero at a smaller ξ_1 , indicating a compact star with a centrally concentrated mass. However, the $n = 3$ profile decreases more gradually and extends farther out, representing a radiation-dominated star with a more diffuse structure.

IV. DIMENSIONAL ESTIMATE FOR THE SUN AND COMPARISON WITH OBSERVATIONS

To illustrate how the dimensionless Lane–Emden solution can be converted into a physical stellar radius, we use the $n = 3$ result together with estimates of the solar central pressure and density.

Starting from Eq. (1) and inserting $n = 3$ for the Sun [5] and using $P_c = 2.34 \times 10^{16}$ Pa [1] and $\rho_c = 1.5 \times 10^5$ kg/m³ [6] for the center of the Sun, we have:

$$K = 2.94 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1/3} \text{ s}^{-2}. \quad (15)$$

Afterwards, λ_n is calculated from Eq. (6) using ρ_c , $n = 3$, and the value of K from Eq. (15), yielding:

$$\lambda_3 = 7.05 \times 10^4 \text{ km}. \quad (16)$$

Subsequently, substituting calculated λ_3 from Eq. (16) and using ξ_1 from Table I for $n = 3$ in Eq. (5) gives the radius of the Sun as:

$$R_S = 4.87 \times 10^5 \text{ km}. \quad (17)$$

This estimate is of the correct order of magnitude when compared with the observed solar radius $R_\odot = 6.95 \times 10^5$ km [1]. The two-hundred-thousand-kilometre difference is expected given the highly simplified nature of the polytropic model and the approximations used to obtain K .

V. LIMITATIONS OF THE POLYTROPIC MODEL

The difference between the polytropic estimate and the observed solar radius arises from several well-known limitations and approximations:

A. Model assumptions

A single polytropic index n assumes a single power-law relation $P = K\rho^{n+1/n}$ (Eq. (1)) throughout the star. Real stars (including the Sun) are not perfectly polytropic: the inner radiative zone and the outer convective envelope are better represented by different effective indices [4] and by non-polytropic physics.

B. Equation of state simplification

For the Sun we approximated P_c using an ideal-gas relation in order to obtain K . In reality the equation of state varies with depth (partial ionization, radiation pressure, degeneracy in compact objects) [1], so a single K cannot capture the full stratification.

C. Neglected physics

The polytropic Lane–Emden model omits important ingredients: detailed energy generation (nuclear reactions), opacity variations, convective transport, and compositional gradients. These processes affect the pressure and temperature profiles and therefore the mapping between ρ_c , K , and the global radius.

D. Sensitivity to input values

The computed R depends sensitively on the adopted P_c and ρ_c . Small relative uncertainties in those central values produce larger relative changes in K and λ_n because of the power-law dependences.

VI. CONCLUSIONS

In this study, the Lane–Emden equation was numerically solved for several values of the polytropic index using a fourth-order Runge–Kutta method to investigate the internal structure of polytropic stellar models. The numerical solutions were first validated against analytical cases for $n = 0$ and $n = 1$, showing excellent agreement. For the

physically relevant indices $n = 1.5$ and $n = 3$, corresponding respectively to non-relativistic degenerate stars and radiation-dominated stars, the resulting dimensionless density profiles revealed distinct structural behaviors: the $n = 1.5$ polytrope exhibits a compact, centrally concentrated configuration, whereas increasing the polytropic index to $n = 3$ produces a more extended and less centrally condensed stellar model. This general trend reflects the fact that higher polytropic indices correspond to stars with weaker central concentration and broader density distributions.

Applying the $n = 3$ polytropic model to the Sun yielded a stellar radius of the correct order of magnitude compared with the observed value, confirming the usefulness of the Lane–Emden approach as an approximate but insightful tool for modeling stellar interiors. The discrepancies between the model and the actual solar parameters arise from simplifying assumptions in the polytropic equation of state and the neglect of detailed radiative, convective, and compositional effects. Overall, the results demonstrate that the Lane–Emden framework provides a valuable foundation for understanding how the polytropic index governs stellar structure and serves as a baseline for more realistic stellar evolution models.

ACKNOWLEDGEMENTS

The author gratefully acknowledges the academic environment and resources provided by Department of Physics and Energy Engineering.

REFERENCES

- [1] Carroll, B. W. and Ostlie, D. A., *An Introduction to Modern Astrophysics*, 2nd ed. (Pearson/Addison-Wesley, San Francisco, 2007), 1358 pp.
- [2] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure* (Dover Publications, New York, 1957), 509 pp.
- [3] Potter, D., *Computational Physics* (Wiley, New York, 1973), 361 pp.
- [4] Horedt, G. P., *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004), 410 pp.
- [5] Sedek, A., El Sherbini, M., and Osman, M., “Composite Polytropic Models of the Sun,” *ResearchGate Preprint* (2016). Available in: https://www.researchgate.net/publication/335276380_COMPOSITE_POLYTROPIC_MODELS_OF_THE_SUN.
- [6] NASA, “Sun Facts.” Available in: <https://science.nasa.gov/sun/facts/> (visited in October 31, 2025).

Problematização de aspectos conceituais, procedimentais e epistemológicos da lei de Arquimedes

EDUCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Winiston Ransdonner Cruvinel Ribeiro¹, Luanna S. de Pires Campos Alves¹,
Gustavo Quereza de Freitas¹, Tiago Clarimundo Ramos¹,
Ronivan Sousa da Silva Suttini², Salmon Landi Jr.¹

¹Instituto Federal Goiano, Rio Verde, GO, Brasil.

²Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, Três Lagoas, MS, Brasil.

E-mail: winiston.cruvinel@estudante.ifgoiano.edu.br

(Recibido el 25 de enero de 2025, aceptado el 3 de octubre de 2025)

Resumo

Frente aos desafios e problemas do século XXI, a Educação Científica contemporânea estabelece que os estudantes devam aprender não somente os conhecimentos conceituais e procedimentais nas aulas de Ciências, mas também construir sólidas visões epistemológicas que sejam consistentes com as perspectivas atuais da História, Filosofia e Sociologia da Ciência. Todavia, ainda hoje são frequentes aulas experimentais planejadas para os estudantes seguirem mecanicamente a roteiros dirigidos, que ignoram os conhecimentos prévios, a imaginação, a criatividade, a análise e a visão crítica de ciência. Diante dessa lacuna, este trabalho apresenta a análise acerca das possibilidades de utilização de dois aparatos experimentais referentes à lei de Arquimedes, sendo um inovador e outro relativamente conhecido na literatura em ensino de Ciências, elaborados com materiais de fácil acesso, que favorecem discussões e reflexões explícitas de aspectos conceituais, procedimentais e epistemológicos envolvidos em uma investigação científica.

Palabras clave: Aparatos Experimentais, Empuxo, Arquimedes, Ciência.

Abstract

Facing the challenges and problems of the 21st century, contemporary Science Education establishes that students should not only learn conceptual and procedural knowledge in Science classes but also build solid epistemological visions that are consistent with current perspectives in History, Philosophy, and Sociology of Science. However, even today, experimental classes planned for students to follow mechanically to guided scripts, which ignore previous knowledge, imagination, creativity, analysis, and critical view of science, are still common. Given this gap, this work presents an analysis of the possibilities of using two experimental devices concerning Archimedes' law, one being innovative and the other relatively well-known in the literature on science teaching, prepared with easily accessible materials. Which favor discussions and explicit reflections of conceptual, procedural and epistemological aspects involved in a scientific investigation.

Keywords: Experimental Apparatus, Buoyancy, Archimedes, Science.

I. INTRODUÇÃO

Gaston Bachelard (1884–1962) [1], em seu livro “A Formação do Espírito Científico”, publicado em 1938, adverte que muitas vezes os professores ignoram os conhecimentos de e sobre a Ciência já consolidados pelos estudantes anteriormente às suas aulas, argumentando que uma aula prática não se trata, na verdade, dos estudantes adquirirem uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental e de superar obstáculos epistemológicos já enraizados pela vida cotidiana. Utilizando a lei de Arquimedes como exemplo, o referido autor afirmou que

[...] o equilíbrio dos corpos flutuantes é objeto de uma intuição habitual que é um amontoado de erros. De modo mais ou menos claro, atribui-se uma atividade ao corpo que flutua, ou, melhor, ao corpo que nada. Se tentarmos com a mão afundar um pedaço de pau na água, ele resiste. Não é costume

atribuir-se essa resistência à água. Assim, é difícil explicar o princípio de Arquimedes, de tão grande simplicidade matemática, se antes não for criticado e desfeito o impuro complexo de intuições primeiras. Em particular, sem essa psicanálise dos erros iniciais, não se conseguirá explicar que o corpo que emerge e o corpo completamente imerso obedecem à mesma lei ([1], 1996, p. 23).

Hoje, quase 80 anos depois, frente aos desafios e problemas do século XXI, a Educação Científica contemporânea corrobora as ideias de Gaston Bachelard e advoga em prol de uma formação crítica para o exercício da cidadania plena, na qual o letramento científico torna-se componente indispensável [2]. Para além do esforço em desenvolver habilidades e competências, o conceito de “letramento científico” pressupõe-se que os estudantes necessitam aprender não somente os conhecimentos conceituais e procedimentais nas aulas de disciplinas científicas (Física, Química e Biologia), mas também construir sólidas visões

epistemológicas que sejam consistentes com as perspectivas atuais da História, Filosofia e Sociologia da Ciência. Trata-se de colocar em prática um novo papel para os professores de Física, sobretudo no sentido de propiciar momentos de discussão e reflexão, de forma explícita e integrada com conteúdo conceitual, sobre aspectos da chamada “Natureza da Ciência” (NdC) [3].

Outrossim, há na literatura diversos estudos com relevantes contribuições de múltiplas abordagens e estratégias de ensino para a inserção de aspectos da NdC no ensino de Ciências, quer sejam em controvérsias sociocientíficas, episódios históricos [4, 5, 6, 7, 8, 9]; temas contemporâneos [10, 11, 12]; júri simulado [13]; leitura de fontes primárias [14, 15]; textos jornalísticos [16]; e de divulgação científica [17]; análises de vídeos (filmes e documentários) [18]; e jogos didáticos [19].

São poucos, porém, os trabalhos que têm considerado o uso de aulas experimentais para o desenvolvimento de visões epistemológicas mais bem-informadas sobre o processo de construção do conhecimento científico [20, 21]. Com efeito, não raramente, as propostas de abordagens experimentais têm como objetivo educacional unicamente a aprendizagem conceitual e/ou procedimental, prevalecendo concepções pedagógicas de planejamento nas quais os estudantes necessitam seguir roteiros excessivamente dirigidos [22, 23].

Tais concepções pedagógicas implicam em três prejuízos imediatos ao processo de ensino e aprendizagem. Em primeiro lugar, levam os professores a ignorarem os conhecimentos prévios, a imaginação, a criatividade, a capacidade de análise crítica de informações dos estudantes. Em segundo lugar, ao desconsiderar ou “se esquecer” de seu potencial para o favorecimento de discussões e reflexões epistemológicas, não problematizam a recorrente e ingênua visão empírico-indutivista dos estudantes sobre as práticas científicas. E por último, não despertam os professores para tomadas de consciência sobre a necessidade de engajamento com outras práticas problematizadoras, que corroborem com a desconstrução dessa visão empírico-indutivista sobre os métodos, processos e produtos da Ciência.

É nesta perspectiva e a partir dessas considerações que se apresenta este trabalho com o objetivo de analisar as possibilidades de utilização de dois aparatos experimentais referentes à lei de Arquimedes, sendo um inovador e outro relativamente conhecido na literatura em ensino de Ciências, elaborados com materiais de fácil acesso, que favorecem discussões e reflexões explícitas sobre aspectos conceituais, procedimentais e epistemológicos envolvidos em uma investigação científica.

II. A LEI DE ARQUIMEDES

Brincadeiras em águas calmas, como em lagos ou piscinas, exemplificam o quanto é mais leve segurar uma pessoa, mesmo que apenas parcialmente mergulhada, do que se a tentativa for feita fora da água. Estas simples experiências, contudo, podem ser úteis para o professor introduzir uma discussão com os estudantes a fim de problematizar, em contextos próximos de suas vivências, a existência de uma

força, supostamente na vertical para cima, exercida pela água sobre o corpo que nela submerge. É pertinente destacar que esta força, denominada por força de empuxo (ou simplesmente empuxo), é responsável pela sustentação de embarcações [24], pela ascensão dos balões de ar quente [25], além de influenciar o movimento vertical de peixes, principalmente daqueles que possuem uma estrutura designada bexiga natatória – órgão que atua como regulador da flutuação do peixe [26].

Ao contrário dos peixes que conseguem controlar a sua flutuabilidade mediante a captação/liberação de gases dissolvidos na água, os golfinhos, por sua vez, necessitam armazenar em seus pulmões o ar extraído da atmosfera. Este fato provoca um aumento da força de empuxo sobre o golfinho em decorrência do aumento de seu volume, conforme discutido a seguir, e consequentemente dificuldade para caçar, já que o seu alimento pode estar localizado em águas profundas, por exemplo, a 300 m abaixo da superfície da água. Nestes casos, uma redução do volume de sua caixa torácica, que resulta numa redução da força de empuxo, é responsável por facilitar o movimento de descida destes animais, tão importante durante a procura por refeição [27].

Com o intuito de promover o trabalho em equipe e o protagonismo dos estudantes em sua jornada de aprendizagem, professores de uma escola organizaram uma competição envolvendo a construção de barcos feitos com papelão, que deveriam suportar dois estudantes, para a problematização do ensino sobre o empuxo [28]. Após a construção, executada exclusivamente pelos estudantes, a corrida de barcos foi realizada numa piscina e a classificação final levou em consideração não apenas a ordem de chegada dos participantes, mas também o conhecimento dos cálculos envolvendo a profundidade máxima que o barco afunda com a respectiva dupla dentro do barco e o peso máximo que o barco é capaz de suportar, bem como a animação da dupla e até mesmo a decoração dos barcos. Os resultados corroboram com diversos trabalhos que apontam que os estudantes são motivados a aprender quando são desafiados a resolverem problemas práticos e, sobretudo, quando são envolvidos ativamente no processo de ensino-aprendizagem [29, 30].

Uma discussão potencialmente instigante também relacionada com embarcações é realizada por Dishaw [31]. O autor utiliza como exemplo os navios de guerra, em especial o encouraçado Arizona, para explicar como a força de empuxo da água do mar equilibra o peso da embarcação. Além disso, a partir de um modelo geométrico simplificado para o casco, um prisma triangular, o referido autor demonstra que os navios desta magnitude precisam de um porto de águas profundas para atracar.

Admitindo-se que a pressão hidrostática exercida por um fluido de densidade constante d_f aumenta linearmente com a profundidade, resultado conhecido como lei de Stevin, pode-se demonstrar a seguinte expressão para o módulo da força de empuxo (F_E) sobre o objeto colocado nesse fluido:

$$F_E = d_f \cdot g \cdot V_s, \quad (1)$$

em que g é o módulo da aceleração gravitacional local e V_s o volume do objeto (também denominado de volume de fluido

deslocado) que está submerso. Os detalhes da derivação deste resultado podem ser consultados, por exemplo, em [32].

A equação (1), frequentemente designada por princípio [33, 34, 35] ou lei [35] de Arquimedes, também pode ser obtida a partir de considerações a respeito da energia mecânica do sistema [36], bem como por meio do aumento da pressão exercida pelo fluido com imersão do objeto [37] ou ainda usando a ideia dos deslocamentos virtuais [38].

III. PROPOSTAS E APARATOS PRÁTICOS

O primeiro aparato possibilita obter o módulo da força de empuxo em função do volume submerso de um objeto colocado em contato com três diferentes fluidos (água da torneira, água salgada e álcool). Enquanto o segundo permite ao professor demonstrar uma exceção envolvendo o enunciado tradicional da lei de Arquimedes, habitualmente encontrado em livros didáticos de Física: “seu módulo nem sempre é igual ao do peso do volume de fluido deslocado”.

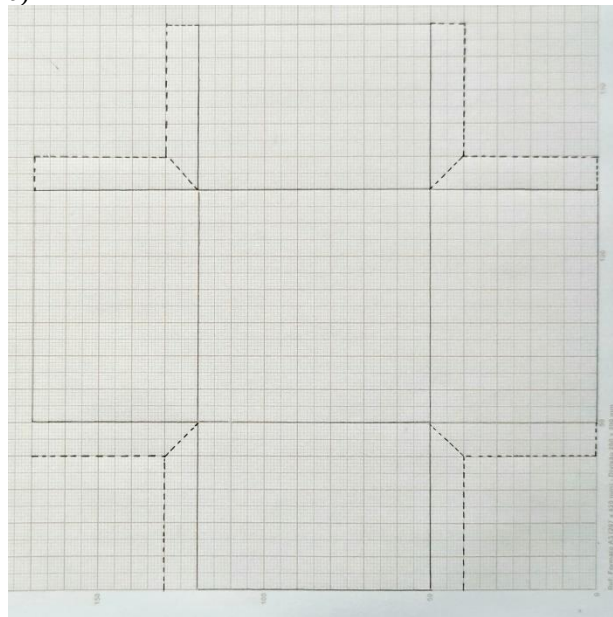
A. Empuxo versus volume submerso

Para o estudo do empuxo em função do volume submerso, confeccionou-se um aparato experimental no formato de um poliedro com cinco faces. Primeiramente, em uma folha de papel milimetrado, desenhou-se um quadrado de lado 7,00 cm e em cada lado retângulos de 7,00 cm x 5,00 cm, como demonstra a Figura 1a. Entre os retângulos foram adicionadas bordas, região pontilhada na Figura 1a, para facilitar a colagem dos retângulos. Em seguida, o papel milimetrado foi plastificado com papel contact transparente, cortado e dobrado de maneira que as bordas dos retângulos contíguos pudessem ser unidas com fita adesiva, formando uma caixinha de papel. Esta, por sua vez, se manteve estável e resistente mediante a fixação de uma caixinha de acrílico com dimensões 6,50 cm x 6,50 cm x 4,00 cm e massa igual a 31,22 g em seu interior (Figura 1b).

O conjunto apresentado na Figura 1b, denominado “barquinho”, ao flutuar em um fluido de interesse, permite a leitura do volume submerso quando uma carga é introduzida em seu interior. A critério do professor, a caixinha de acrílico pode ser substituída por uma embalagem de leite condensado ou creme de leite, por exemplo.

Posteriormente, inseriu-se o barquinho em um recipiente contendo determinados fluidos (água de torneira, água salgada, ou álcool 90%), a fim de proceder com as experiências: flutuação do barquinho com carga variável em seu interior. Antes, porém, posicionou-se duas moedas no interior da caixa de acrílico com o intuito de contribuir para estabilidade do barquinho. Com o auxílio de uma seringa de 10 mL, adicionou-se diferentes quantidades de água no interior do barquinho e mediu-se o respectivo valor da profundidade submersa com o papel milimetrado localizado em suas laterais.

a)



b)

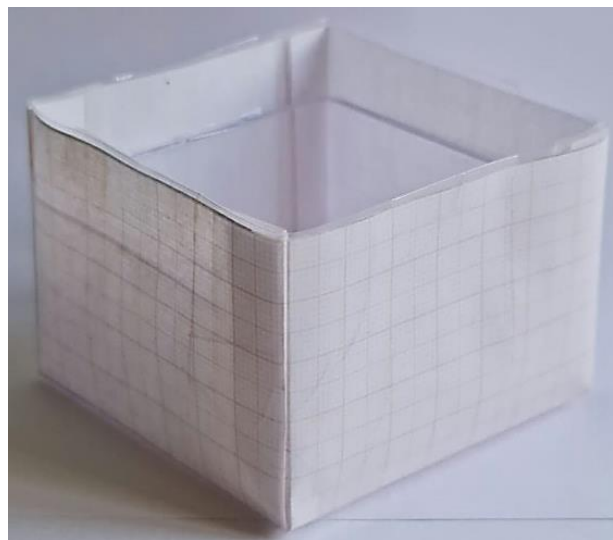


FIGURA 1. a) Molde desenhado em papel milimetrado, b) dispositivo construído para o estudo da intensidade da força de empuxo em função do volume submerso. O papel milimetrado permite obter o volume submerso com boa precisão, já a caixa de acrílico contribui para a estabilidade do sistema.

B. Módulo do empuxo versus peso do fluido deslocado

A partir de materiais de muito fácil acesso, propôs-se uma atividade para demonstrar que o enunciado tradicional da lei de Arquimedes, comumente encontrado em livros-texto de Física: “todo corpo mergulhado num fluido sofre uma força vertical para cima cujo módulo corresponde ao peso do fluido por ele deslocado”, não é válido em todas as circunstâncias. Para este propósito, utilizou-se uma seringa (20 mL), uma garrafa de água mineral vazia (500 mL e diâmetro em torno

de 6,5 cm) e uma embalagem de detergente vazia (500 mL e diâmetro em torno de 6,0 cm).

Inicialmente, cortou-se, perpendicularmente ao seu eixo de simetria, ambas embalagens mencionadas de forma que a distância entre a base de cada uma e o corte foi de 10,5 cm para a garrafa de água (Fig. 2a) e 11,5 cm para a embalagem de detergente (Fig. 2b). Com um “copo” dentro do outro, adicionou-se 100 mL de água dentro do “copo” proveniente da embalagem de detergente. Posteriormente, adicionou-se cuidadosamente água dentro do “copo” externo até perceber a flutuação do “copo” interno.

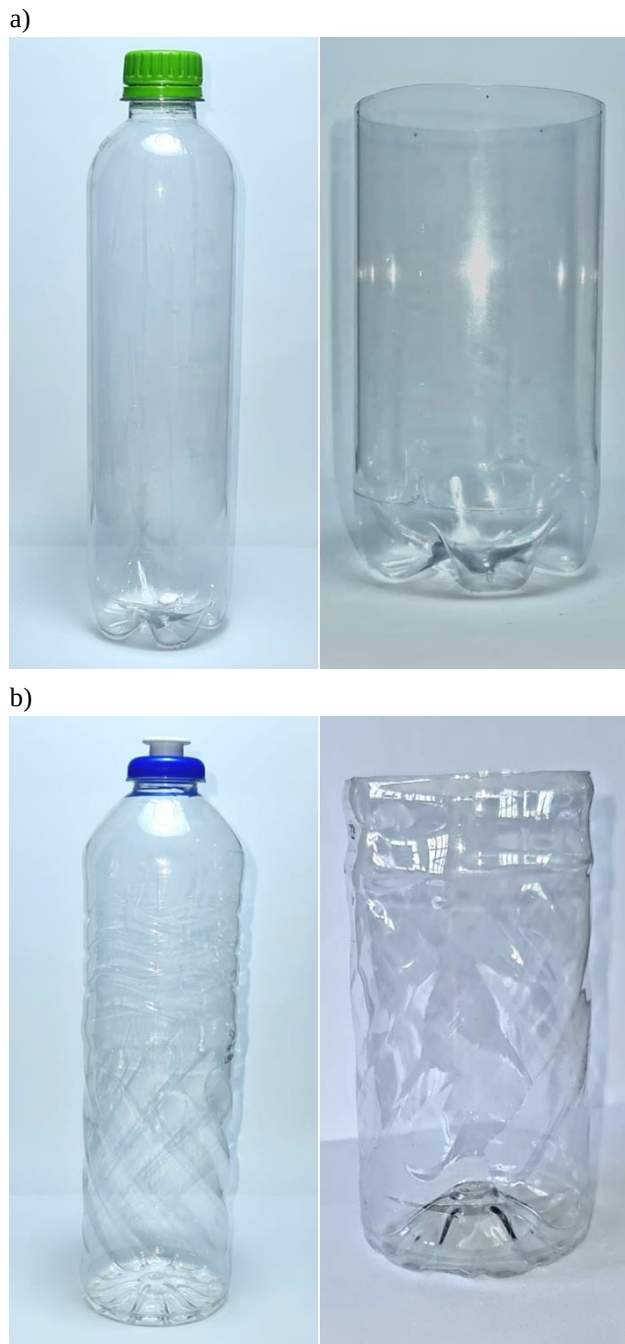


FIGURA 2. a) Garrafa de água mineral (500 mL e 6,5 cm de diâmetro) cortada a uma altura de 10,5 cm da base, b) embalagem de detergente (500 mL e 6,0 cm de diâmetro) cortada a uma altura de 11,5 cm da base.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A. Densidade dos fluidos

Os resultados das experiências envolvendo a adição de diferentes quantidades de água no interior do barquinho permitem a construção de um gráfico com os valores do módulo da força de empuxo (que corresponde ao módulo do peso do barquinho, das moedas e da água em seu interior) em função do volume submerso (área da base vezes a profundidade submersa). Nestas experiências, admitiu-se que cada 1 mL de água vertida para o interior da caixa de acrílico possui exatamente 1 g, o que corresponde a uma diferença percentual em relação ao valor aceito (0,998 g) de, aproximadamente, 0,2%.

Logo, à luz da equação (1), que afirma que o módulo do empuxo é proporcional ao volume submerso, procedeu-se com um ajuste linear dos dados experimentais, isto é, F_E versus $g \cdot V_s$, utilizando o software Origin (Figura 3). Ou seja, adotou-se como eixo das abscissas os valores do volume submerso multiplicado pelo módulo da aceleração gravitacional. Desta forma, o coeficiente angular da reta de ajuste corresponde à densidade do fluido sobre o qual flutua o barquinho. Os valores obtidos estão apresentados na primeira coluna da Tabela 1.

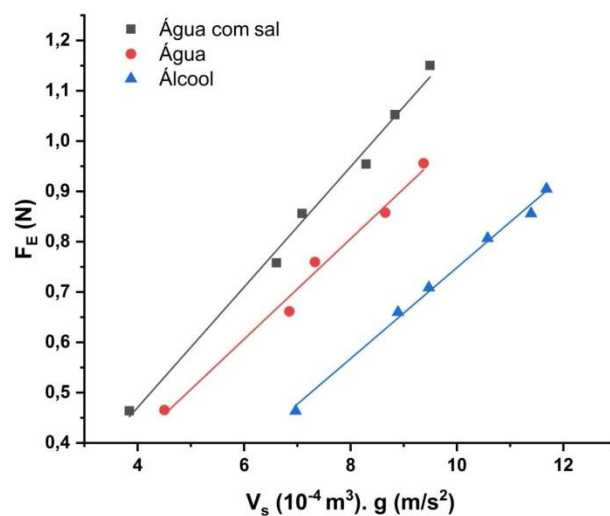


FIGURA 3. Módulo da força de empuxo em função do volume submerso vezes 9,81 m/s² para diferentes fluidos (água de torneira com sal de cozinha, água de torneira e álcool 90%).

Para efeitos de comparação, obteve-se a densidade dos fluidos por meio de ajustes lineares a partir de um gráfico envolvendo a massa e o volume de cada fluido. Nestes ensaios, utilizou-se uma balança com precisão de quatro casas decimais, um béquer de 30 mL e uma seringa de 5 mL. Com o auxílio da seringa, adicionou-se 10 medidas de 5 mL de cada fluido no béquer, anotando-se as suas respectivas massas (Figura 4). De posse dos valores obtidos e do conceito de densidade, utilizou-se novamente o software Origin para efeitos de obtenção da densidade dos fluidos por meio de ajustes lineares. Os valores obtidos por este procedimento estão apresentados na segunda coluna da Tabela 1.

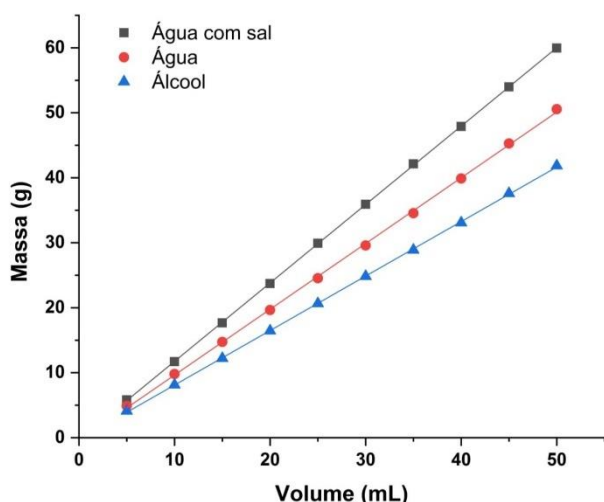


FIGURA 4. Massa em função do volume para os diferentes líquidos utilizados neste estudo.

TABELA I. Valores da densidade dos diferentes fluidos a 20 °C.

Fluido	Densidade ^a (kg/L)	Densidade ^b (kg/L)	Densidade ^c (kg/L)
Água com sal	1,196 ± 0,021	1,207 ± 0,002	1,205 [40]
Água de torneira	0,998 ± 0,006	1,012 ± 0,006	0,998 [40]
Álcool 90%	0,900 ± 0,003	0,839 ± 0,003	0,789 [40]

^a Determinada a partir do coeficiente angular da reta de ajuste considerando os dados apresentados na Figura 3.

^b Determinada a partir do coeficiente angular da reta de ajuste considerando os dados apresentados na Figura 4.

^c Valores obtidos na literatura.

[...] está longe de ser óbvio, de um ponto de vista lógico, haver justificativa no inferir enunciados universais de enunciados singulares, independentemente de quão numerosos sejam estes; com efeito, qualquer conclusão colhida desse modo sempre pode revelar-se falsa; independentemente de quantos cisnes brancos possamos observar, isso não justifica a conclusão de que todos os cisnes são brancos [41].

Nesse cenário, os professores podem problematizar, por exemplo, o “mito do método científico universal” frequentemente divulgado em muitos livros didáticos. Este mito reforça uma concepção inadequada e empírico-indutivista sobre a NdC, pressupondo equivocadamente que as investigações científicas se originam a partir de uma surpreendente – algumas vezes acidental – “observação” sobre algum fenômeno do mundo natural.

Recentemente, Hidalgo, Queiroz e Oliveira [42] analisaram o episódio histórico envolvendo o conteúdo da lei de Arquimedes nos livros didáticos de Física do Plano Nacional do Livro Didático [42]. Segundo as conclusões dos autores, a recorrente visão empírico-indutivista sobre esse

De um modo geral, os valores apresentados na Tabela 1 sugerem que o aparato construído pode ser útil para que o professor proponha atividades experimentais de baixo custo que permitem uma análise quantitativa do problema. Vários barquinhos, conforme a Figura 1, foram construídos e utilizados, no Brasil, em turmas de Engenharia Civil e Engenharia Química do Instituto Federal Goiano – Campus Rio Verde. Em todos os casos, o erro relativo percentual obtido foi inferior a 5%.

A Figura 3 possibilita observar que para cada fluido obteve-se pontos experimentais aproximadamente alinhados, conforme a equação (1). É fato que o pesquisador pode realizar medições acuradas em situações envolvendo diferentes fluidos e objetos nele submersos. Contudo, as conclusões obtidas de casos particulares não têm a capacidade de conduzi-lo à “descoberta” da equação que quantificaria o empuxo [39]. Ou seja, a equação (1), como qualquer outro caso geral, não deve ser apresentada aos aprendizes como algo que decorre de um modo imediato da evidência experimental, mas que – após a sua proposição – demanda sempre uma atitude de submissão à prova.

assunto já há muito tempo evidenciada na literatura em ensino de Ciências, retratada por pseudo-histórias e narrativas descontextualizadas e inadequadas como a “descoberta do empuxo”, ainda são frequentes nos atuais livros didáticos. Dentre os 12 livros analisados, há somente dois exemplos de transposição didática coerente com a historiografia moderna da Ciência para o contexto do Ensino Médio, explicitamente apoiados em trabalhos acadêmicos.

B. Volume deslocado x Volume submerso

Acerca das experiências mencionadas na seção IIIB, observou-se que um volume de, aproximadamente, 48 mL de água foi suficiente para promover a flutuação do “copo” com 100 mL de água (Figura 5). O instante no qual o “copo” com 100 mL de água passa a flutuar, tem-se que o módulo do empuxo necessariamente vale um pouco mais do que 100 gf, correspondendo ao valor do peso da água e do “copo” interno.

Por outro lado, de acordo com o enunciado tradicional da lei de Arquimedes, o módulo do empuxo equivale ao módulo do peso de água deslocado. Recorda-se que o volume adicionado de água ao “copo” externo que fez o interno flutuar foi de 48 mL. Assim, de acordo com o referido

enunciado, o valor do empuxo não poderia sequer atingir 48 gf – situação hipotética em que todo o volume de água seria deslocado. Esta atividade experimental demonstra, portanto, que o enunciado tradicional se encontra em pleno desacordo com a situação observada. Ou seja, há casos em que os módulos das forças peso do fluido deslocado e empuxo são notoriamente diferentes.

a)



b)



FIGURA 5. a) Embalagem de detergente cortada contendo 100 ml de água flutuando em uma embalagem de água mineral

cortada com 48 ml de água. B) provetas com os volumes de água envolvidos nesta atividade.

A Figura 6 representa a situação inicial de um recipiente contendo um determinado fluido, bem como a sua configuração final quando um determinado corpo flutua em seu interior. Nota-se que as alturas h e H da superfície do líquido contido no recipiente são tomadas em relação a posição final da base do corpo que foi inserido. Neste sentido, a Figura 6 ilustra, portanto, o modelo que será utilizado para analisar o resultado mostrado na Figura 5a. É sabido que a força de empuxo que sustenta o peso do corpo flutuante provém do somatório das forças devido à pressão aplicada pela água e/ou pelo ar em cada ponto da superfície do corpo. Consequentemente, o módulo do empuxo corresponde à diferença de pressão entre a base e o topo do corpo flutuante vezes a área de sua seção reta (a), ou seja,

$$F_E = P_{hid} a, \quad (2)$$

em que $P_{hid} = d_f \cdot g \cdot H$, pela lei de Stevin, é a pressão hidrostática imediatamente abaixo do corpo que flutua. Portanto,

$$V = Ha, \quad (3)$$

é o volume que fornece o valor correto para a força de empuxo capaz de suportar o peso do corpo inserido no fluido.

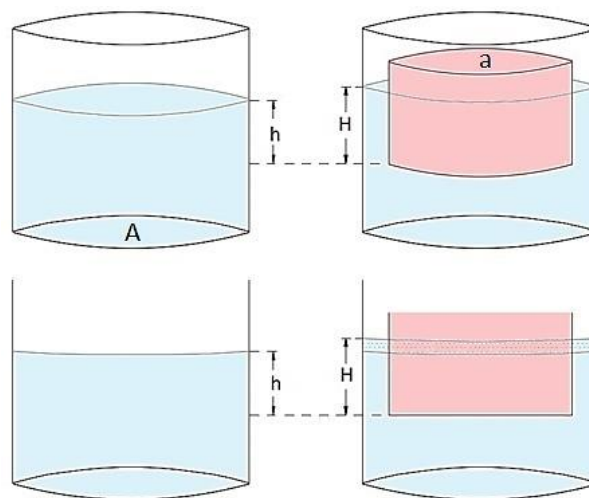


FIGURA 6. Recipiente com um determinado fluido antes (à esquerda) e após (à direita) a inserção de um corpo flutuante. Todos os pontos da base do corpo que flutua estão a uma mesma profundidade H . Nota-se que h e H correspondem, respectivamente, às alturas da superfície do fluido em contato com a atmosfera antes e após a imersão do corpo flutuante, ambas tomadas em relação à posição da base do corpo que flutua.

Por outro lado, o volume de fluido que é efetivamente deslocado (V_d), devido à inserção do corpo flutuante, pode ser determinado pelas seguintes expressões:

$$V_d = ha, \quad (4)$$

$$V_d = (H - h)(A - a), \quad (5)$$

em que A é a área da seção reta do recipiente que contém o fluido. Comparando-se a equação (3) com a (4) e observando-se que $h < H$, conclui-se que a intensidade do peso do volume de fluido deslocado ($d_f gha$), neste caso, não conduz à equação correta para o módulo do empuxo ($d_f gHa$), contrariando o enunciado tradicional da lei de Arquimedes. Além disso, isolando H a partir da equação (3), h a partir da equação (4) e substituindo ambos na equação (5), obtém-se, reorganizando os termos, que

$$V_d = \frac{A - a}{A} V. \quad (6)$$

A equação (6) demonstra que, para o caso investigado, o volume de fluido deslocado corresponde ao volume V apenas quando $A \gg a$, o que significa dizer que, $H \rightarrow h$ e, assim, o módulo do empuxo pode ser calculado a partir do peso do volume deslocado. Isso também ocorre quando o recipiente se encontra completamente cheio, conforme pode ser facilmente demonstrado pelo leitor, seguindo o mesmo raciocínio apresentado anteriormente. Ou seja, o módulo do empuxo equivale ao do peso do fluido deslocado somente quando o nível da superfície livre do fluido não é alterado pela imersão do objeto no fluido. Esta foi exatamente a situação considerada por Arquimedes [43], mas que, evidentemente, não é o caso da experiência apresentada na Figura 5. Neste sentido, espera-se que os estudantes percebam que o enunciado tradicional (sobre o empuxo ter o mesmo valor do peso do fluido deslocado) não é adequado para a situação aqui discutida e que V corresponde, de fato, ao volume submerso do objeto.

Uma vez que a investigação científica é guiada por uma “questão de pesquisa” a ser respondida, com base em um modelo teórico subjacente, os cientistas, inevitavelmente, possuem expectativas quanto à coleta de “dados” e à construção de “evidências” disponíveis. Diante do estabelecimento de uma reconhecida “anomalia”, cada cientista pode tomar uma decisão particular, por exemplo: (i) rejeitá-la e continuar buscando as fontes do erro experimental; (ii) aceitá-la como suficiente para provocar uma mudança (periférica ou central) no modelo teórico; (iii) deixá-la de lado ou em “modo de espera” de alguma explicação ainda com base no modelo teórico vigente.

Aqui, a exceção à lei de Arquimedes se mostra bastante frutífera para contextualizar essa discussão. Ao contrário da imagem inadequada propagada pela visão empírico-indutivista – ou pela visão falsificacionista ingênua – essas diferentes possibilidades de escolhas dos cientistas mostram que um resultado experimental “anômalo” ou inconsistente com o modelo teórico vigente não é suficiente para a refutação deste modelo. Todas as três escolhas elencadas anteriormente são válidas. Ainda de acordo com o Kuhn [44], “essa [liberdade de escolha individual] é talvez a maneira que a comunidade científica encontrou para distribuir os riscos e assegurar o sucesso do seu empreendimento a longo prazo”.

V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É pertinente reiterar que, no presente trabalho, propôs-se um aparato prático inovador que pode ser confeccionado e experienciado pelos próprios estudantes (do Ensino Médio ou do Superior), e que permitiu determinar a densidade de líquidos (água com sal, água e álcool 90%) em excelente concordância com os valores esperados. Ademais, um segundo aparato, construído com materiais comumente descartados, possibilitou considerar uma exceção envolvendo o enunciado tradicional da lei de Arquimedes. De modo geral, as atividades experimentais propostas possibilitaram avanços para além da aprendizagem dos conceitos de empuxo e densidade e de conhecimentos procedimentais, mormente pelo engajamento dos professores e estudantes com as questões epistemológicas que envolvem a desconstrução da perspectiva indutivista das investigações científicas.

Deseja-se, que as ponderações apresentadas nas análises de dados sirvam para despertar entre aqueles que recorrem ao laboratório didático de Física, um ensino mais conectado à dimensão reflexiva de construção do conhecimento científico. Mesmo porque, conforme apontado pelo professor e pesquisador Marco Antônio Moreira, o conhecimento científico é construído a partir de modelos que buscam idealizar fenômenos de interesse, tais modelos podem “evoluir teórica e matematicamente até chegar a uma teoria, cuja aceitação (que é sempre provisória), refutação (que pode ser definitiva) ou revisão (introdução de modificações para melhorá-la) depende da experimentação” [45].

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem as sugestões dos professores Alexandre Divino de Souza e Thiago Milograno de Carvalho do IF Goiano - Campus Morrinhos.

REFERÊNCIAS

- [1] Bachelard, G., *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*, 5º ed. (Rio de Janeiro, 1996).
- [2] Ministério da educação, “Base nacional comum curricular: educação é a base”, Brasil. Acessado: 12 de novembro de 2022. [Online]. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf
- [3] S. F. A. Americans, *A Project 2061 report on literacy goals in science, mathematics, and technology*, vol. 10. Washington: American Association for the Advancement of Science, (1989).
- [4] Arthury, L. H. M. e Terrazzan, E. A., A Natureza da Ciência na escola por meio de um material didático sobre a Gravitação, *Revista Brasileira de Ensino de Física* 40, nº 3, fev. 2018, doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2017-0233.
- [5] M. D. Cordeiro e L. O. Q. Peduzzi, “Aspectos da natureza da ciência e do trabalho científico no período inicial de

desenvolvimento da radioatividade”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 33, nº 3, p. 3601–3611, 2011.

[6] B. A. MOURA, “O que é natureza da Ciência e qual sua relação com a História e Filosofia da Ciência?”, *Revista Brasileira de História da Ciência*, vol. 7, nº 1, p. 32–46, 2014.

[7] R. A. de Oliveira, A. F. P. Martins, e A. P. B. da Silva, “Temas de Natureza da Ciência a partir de episódios históricos: os debates sobre a natureza da luz na primeira metade do século XIX”, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, vol. 37, nº 1, p. 197–218, abr. 2020, doi: 10.5007/2175-7941.2020v37n1p197.

[8] D. Ortega e B. A. Moura, “Uma abordagem histórica da reflexão e da refração da luz”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 42, 2020, doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2019-0114.

[9] E. Sales Teixeira, O. Freire Jr, e C. Niño El-Hani, “A influência de uma abordagem contextual sobre as concepções acerca da natureza da ciência de estudantes de física”, *Ciência & Educação*, vol. 15, nº 3, p. 529–556, 2009.

[10] G. F. de C. Catarino e J. C. de O. Reis, “A pesquisa em ensino de ciências e a educação científica em tempos de pandemia: reflexões sobre natureza da ciência e interdisciplinaridade”, *Ciência & Educação (Bauru)*, vol. 27, 2021, doi: 10.1590/1516-731320210033.

[11] T. R. G. Hilário, “A discussão de controvérsias sociocientíficas na formação de professores”, Mestrado em educação, Universidade de Lisboa, 2009.

[12] D. A. Magalhães, “Aquecimento global: Uma abordagem para o ensino de física”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 36, nº 4, p. 4502–4509, 2014, [Online]. Disponível em: www.sbfisica.org.br

[13] V. F. de Melo e R. D. Vieira, “Uma proposta de critérios avaliativos para atividades de Júri Simulado no Ensino de Ciências”, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, vol. 39, nº 2, p. 298–326, ago. 2022, doi: 10.5007/2175-7941.2022.e81050.

[14] L. Jorge e L. O. Q. Peduzzi, “A exemplificação da não neutralidade da observação científica por meio dos desenhos lunares retratados no século XVII”, *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, vol. 11, nº 2, p. 179–200, 2018.

[15] S. Luiz, B. Boss, e J. J. Caluzi, “Os conceitos de eletricidade vítrea e eletricidade resinosa segundo Du Fay”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, nº 4, p. 635–644, 2007, [Online]. Disponível em: www.sbfisica.org.br

[16] D. Cardoso, A. Noronha, G. Watanabe, e I. Gurgel, “Texto Jornalístico sobre Ciência: Uma Análise do Discurso sobre a Natureza da Ciência”, *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 8, nº 3, p. 229–251, 2015, doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1982-5153.2015v8n3p229>.

[17] C. A. dos Santos e L. L. da Silva, “A história que o filme Radioactive não conta e a percepção de alunos de licenciatura em física”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 43, p. 1–18, 2021, doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2021-0037.

[18] W. Gomes Schmiedeck e P. A. Porto, “A história da ciência e a divulgação científica na TV: subsídios teóricos para uma abordagem crítica dessa aproximação no ensino de

ciências”, *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, vol. 15, nº 3, 2015.

[19] A. Bagdonas, J. Zanetic, e I. Gurgel, “Quem descobriu a expansão do universo? Disputas de prioridade como forma de ensinar cosmologia com uso da história e filosofia da ciência”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 39, nº 2, jan. 2017, doi: 10.1590/1806-9126-rbef-2016-0257.

[20] N. H. Azevedo e D. L. Scarpa, “Revisão Sistemática de Trabalhos sobre Concepções de Natureza da Ciência no Ensino de Ciências”, *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências*, p. 579–619, ago. 2017, doi: 10.28976/1984-2686rbpec2017172579.

[21] L. A. Heidemann, I. S. Araujo, e E. A. Veit, “Atividades experimentais com enfoque no processo de modelagem científica: Uma alternativa para a ressignificação das aulas de laboratório em cursos de graduação em física”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 38, nº 1, p. 1504–1515, 2016, doi: 10.1590/S1806-11173812080.

[22] V. C. Barbosa e A. M. S. Breitschaft, “Um aparato experimental para o estudo do princípio de Arquimedes”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 28, nº 1, p. 155–122, 2006.

[23] J. Nelson e J. B. Nelson, “Buoyancy Can-Can”, *Phys Teach*, vol. 53, nº 5, p. 281–281, maio 2015, doi: 10.1119/1.4917433.

[24] V. L. B. De Jesus, C. Marlasca, e A. Tenório, “Ludião versus princípio do submarino”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 29, nº 4, p. 599–603, 2007, [Online]. Disponível em: www.sbfisica.org.br

[25] C. Gianino, “A bizarre application of Archimedes’ law”, *Phys Educ*, vol. 42, nº 2, p. 185–188, mar. 2007, doi: 10.1088/0031-9120/42/2/009.

[26] C. da Cruz-Landim e M. A. da Cruz-Hofling, “Diferenças ultra-estruturais entre bexigas natatórias de peixes teleósteos de respiração aquática e respiração aérea facultativa”, *ACTA Amazônia*, vol. 9, nº 2, p. 317–323, 1979.

[27] D. A. A. Taniguchi, J. Rohr, S. Ridgway, e K. Schulz, “Two Beakers, Five E’s, Twenty Pennies, and Archimedes’ Principle”, *Phys Teach*, vol. 57, nº 3, p. 138–141, mar. 2019, doi: 10.1119/1.5092468.

[28] P. T. Vo, “Archimedes in Action”, *Phys Teach*, vol. 51, nº 8, p. 498–499, nov. 2013, doi: 10.1119/1.4824950.

[29] S. Fraiha, W. Paschoal, S. Perez, C. E. S. Tabosa, J. P. da S. Alves, e C. R. Silva, “Atividades investigativas e o desenvolvimento de habilidades e competências: um relato de experiência no curso de Física da Universidade Federal do Pará”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 40, nº 4, 2018, doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0052.

[30] A. V. Gomes, E. M. de S. Amaral, e R. J. Prado, “Determinação da densidade de líquidos imiscíveis pelo princípio de Stevin”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 41, nº 3, 2019, doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0313.

[31] J. P. Dishaw, “Battleship Buoyancy”, *Phys Teach*, vol. 48, nº 4, p. 242–242, abr. 2010, doi: 10.1119/1.3361992.

[32] W. J. González-Espada e B. S. Jones, “Betting on Better Buoyancy? Be Careful What You Wish For”, *Phys Teach*, vol. 58, nº 6, p. 413–415, set. 2020, doi: 10.1119/10.0001861.

- [33] S. W. Hughes, “Archimedes revisited: a faster, better, cheaper method of accurately measuring the volume of small objects”, *Physics Education*, vol. 40, nº 5, p. 468–474, 2005, [Online]. Disponível em: <http://iopscience.iop.org/0031-9120/40/5/008>
- [34] M. Nazareth e S. Montanheiro, “Demonstre em aula: Determinação da densidade de sólidos e líquidos pelo princípio de Arquimedes”, *Cad. Cat. Ens. Fís*, vol. 7, nº 2, p. 157–160, 1990, doi: <https://doi.org/10.5007/%25x>.
- [35] F. M. S. Lima, “Using surface integrals for checking Archimedes’ law of buoyancy”, *Eur J Phys*, vol. 33, nº 1, p. 101–113, jan. 2012, doi: [10.1088/0143-0807/33/1/009](https://doi.org/10.1088/0143-0807/33/1/009).
- [36] K. L. Goh, “Archimedes’ Principle Using Energy Considerations”, *Phys Teach*, vol. 56, nº 9, p. 616–617, dez. 2018, doi: [10.1119/1.5080579](https://doi.org/10.1119/1.5080579).
- [37] P. Mohazzab, “Archimedes’ Principle Revisited”, *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 05, nº 04, p. 836–843, 2017, doi: [10.4236/jamp.2017.54073](https://doi.org/10.4236/jamp.2017.54073).
- [38] R. E. Vermillion, “Derivations of Archimedes’ principle”, *Am J Phys*, vol. 59, nº 8, p. 761–762, ago. 1991, doi: [10.1119/1.16763](https://doi.org/10.1119/1.16763).
- [39] A. F. Chalmers, *O que é ciência afinal?* ? Brasiliense, 1993.
- [40] R. W. Fox, A. T. McDonald, e P. J. Pritchard, *Introdução à mecânica dos fluidos*, 7º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [41] K. R. Popper, *A Lógica da Pesquisa Científica*, 12º ed. São Paulo: Cultrix, 1934.
- [42] J. M. Hidalgo, D. de M. Queiroz, e M. C. J. de Oliveira, “A História da Ciência no PNLD 2018: o Princípio de Arquimedes como estudo de caso”, *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, vol. 38, nº 2, p. 1251–1281, set. 2021, doi: [10.5007/2175-7941.2021.e76199](https://doi.org/10.5007/2175-7941.2021.e76199).
- [43] A. K. T. Assis, “Sobre os corpos flutuantes, tradução comentada de um texto de Arquimedes”, *Revista da SBHC*, vol. 16, p. 69–80, 1996.
- [44] T. S. Kuhn, *A estrutura das revoluções Científicas*, 12º ed, vol. 12. São Paulo: Perspectiva, 2013.
- [45] M. A. Moreira, “Desafios no ensino da física”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, vol. 43, p. 1–8, 2021, doi: [10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0451](https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2020-0451).

Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para o estudo da Evolução Estelar no Ensino Médio

EDUCATIO PHYSICORVM



ISSN 1870-9095

Paulo Moreira Veiga¹, Glauco Cohen Ferreira Pantoja¹

¹Programa de pós-graduação em educação na Amazônia, Universidade Federal do Oeste do Pará, Av. Marechal Rondon S/N Santarém, Pará, Brasil.

E-mail: paulo.moreira.veiga@prof.am.gov.br

(Recibido el 29 de octubre de 2025, aceptado el 17 de diciembre de 2025)

Resumo

Este estudo investigou o desenvolvimento de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o ensino do conteúdo de Evolução Estelar no ensino médio, tendo como principal objetivo avaliar sua efetividade nessa temática. Diante das dificuldades conceituais frequentemente associadas ao tema, a pesquisa buscou responder à seguinte questão norteadora: a UEPS pode favorecer a aprendizagem significativa do conteúdo proposto? Como referencial teórico, utilizou-se a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, com contribuições de Moreira. Metodologicamente, o estudo adotou uma abordagem qualitativa para avaliar os resultados de aprendizagem decorrentes da aplicação de uma UEPS em uma turma do ensino médio de uma escola pública da cidade de Manaus-AM. Os dados foram coletados por meio de questionários, sendo analisados com base na Análise de Conteúdo de Bardin. A partir da análise dos resultados, concluiu-se que a UEPS contribuiu para a promoção da aprendizagem significativa do conteúdo.

Palavras-chave: UEPS. Física. Evolução Estelar.

Abstract

This study investigated the development of a Potentially Meaningful Teaching Unit (PMTU) for teaching Stellar Evolution in high school, with the primary objective of evaluating its effectiveness on this topic. Given the conceptual challenges often associated with this topic, the research sought to answer the following guiding question: Can the PMTU promote meaningful learning of the proposed content? Ausubel's Theory of Meaningful Learning, with contributions from Moreira, was used as a theoretical framework. Methodologically, the study adopted a qualitative approach to evaluate the learning results carried out of the implementation of a PMTU to a high school class at a public school in the city of Manaus, Amazonas. Data were collected through questionnaires and analyzed using Bardin's Content Analysis. Based on the analysis of the results, it was concluded that the contributed to promoting meaningful learning of the content.

Keywords: UEPS. Phisycal. Stellar Evolution.

I. INTRODUÇÃO

Na atualidade, é fundamental que os estudantes tenham contato com conhecimentos sobre a origem e a evolução do universo, incluindo a formação das estrelas, das galáxias e dos buracos negros. O estudo desses temas amplia a compreensão da imensidão cósmica, desperta a curiosidade científica e estimula o pensamento crítico, contribuindo para uma visão mais aprofundada da natureza. Nesse sentido, Trevisan e Queiroz [1] destacam que:

“O ensino de Astronomia é elemento estimulador para o aprendizado em Ciências, capaz de ampliar, viabilizar e colaborar para a apresentação e compreensão de conhecimentos científicos, possibilitando uma formação crítica e reflexiva para a plena participação do cidadão na sociedade em que vive”[1].

Com base nesse cenário, este trabalho busca investigar se a utilização de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) pode contribuir para a aprendizagem do

conteúdo “Evolução Estelar” no Ensino Médio. A escolha dessa abordagem justifica-se não apenas por seu valor científico, mas também por apresentar uma proposta metodológica para o ensino dessa temática.

Entretanto, observa-se que o ensino, muitas vezes, ainda é estruturado de forma a priorizar a memorização para avaliações, em detrimento do desenvolvimento de uma compreensão profunda e contextualizada dos conteúdos. Nesse contexto, Moreira [2] aponta que, “[...] a aprendizagem que mais ocorre na escola é outra: a aprendizagem mecânica, aquela praticamente sem significado, puramente memorística, que serve para as provas e é esquecida, apagada, logo após” (p.31-32).

Assim, torna-se necessário que o ensino esteja orientado para a aprendizagem significativa, em oposição à abordagem mecânica, já que, nesse processo, o novo conhecimento integra-se aos saberes prévios do aluno, atribuindo-lhes significado e favorecendo sua assimilação.

Dessa forma, o ensino desse conteúdo em sala de aula fundamenta-se nas teorias de Ausubel [3] e Moreira [2] sobre aprendizagem significativa, considerando que esse modelo favorece uma compreensão mais sólida e duradoura, em contraste com a aprendizagem mecânica, ainda bastante presente no contexto escolar. Segundo Ausubel [3], a aprendizagem mecânica se caracteriza pela memorização isolada de informações, sem uma relação direta com conhecimentos já adquiridos, enquanto a aprendizagem significativa possibilita a assimilação dos novos conteúdos de maneira integrada à estrutura cognitiva do estudante.

Diante disso, esta pesquisa tem como objetivo investigar se a aplicação de uma UEPS no ensino do conteúdo “Evolução Estelar” pode favorecer a promoção da aprendizagem significativa dos alunos, analisando o impacto dessa abordagem em seu processo de aprendizagem.

Para obter um panorama geral sobre os trabalhos já realizados na área, foi realizada uma pesquisa no Periódico da CAPES sobre a aplicação das UEPS no ensino do conteúdo “Evolução Estelar”, entre os anos de 2016 e 2025. Esse levantamento revelou 34 trabalhos que utilizaram as UEPS para o ensino de Física, distribuídos da seguinte forma: 9 em Mecânica, 3 em Termodinâmica, 1 em Óptica, 4 em Ondulatória, 4 em Eletromagnetismo, 6 em Física Moderna, 6 em Física Contemporânea e apenas 1 em Astrofísica. No entanto, esse único estudo teve como foco a formação continuada de professores de Física na Educação Básica.

Portanto, os resultados deste trabalho podem contribuir para a elucidação do potencial das UEPS como estratégia de ensino voltada à promoção da aprendizagem significativa, além de indicar caminhos para aprimorar o ensino e a aprendizagem do conceito de evolução estelar.

II. REFERÊNCIAL TEÓRICO

Este trabalho adota a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel [3] como referencial teórico, pois parte do pressuposto de que a construção do conhecimento é mais eficaz quando os novos conceitos são integrados aos conhecimentos previamente existentes na estrutura cognitiva do indivíduo. Segundo Ausubel [3] “os novos significados são o produto de uma interação activa e integradora entre novos materiais de instrução e ideias relevantes da estrutura de conhecimentos existente do aprendiz” (p. 43).

Na aprendizagem significativa, o novo conhecimento é incorporado de maneira substantiva e não arbitrária ao conhecimento prévio do aluno. Esse conhecimento preexistente é denominado subsunçor, que pode assumir diferentes formas, como um símbolo, um conceito, uma proposição, um modelo mental, uma concepção, uma representação ou qualquer outro conhecimento já existente na estrutura cognitiva do indivíduo, conforme afirma Ausubel [3]:

“A essência do processo de aprendizagem significativa, tal como já se verificou, consiste no facto de que novas ideias expressas de forma simbólica (a tarefa de aprendizagem) se relacionam àquilo que o aprendiz já sabe (a estrutura cognitiva deste numa determinada área de matérias), de forma não arbitrária e não literal, e que o produto desta interacção activa e integradora é o surgimento de um novo

significado, que reflecte a natureza substantiva e denotativa deste produto interactivo” [3].

Segundo o mesmo autor, para que a aprendizagem significativa ocorra, é necessário que duas condições sejam satisfeitas. A primeira é que o material de aprendizagem seja potencialmente significativo, ou seja, que se relacione de maneira não arbitrária e não literal à estrutura cognitiva do indivíduo. A segunda condição é que o aprendiz tenha predisposição para aprender, demonstrando interesse em relacionar os novos conhecimentos com sua estrutura cognitiva, de acordo com ele [3]:

“A aprendizagem significativa exige que os aprendizes manifestem um mecanismo de aprendizagem significativa (ou seja, uma disposição para relacionarem o novo material a ser apreendido, de forma não arbitrária e não literal, à própria estrutura de conhecimentos) e que o material que apreendem seja potencialmente significativo para os mesmos, nomeadamente relacional com as estruturas de conhecimento particulares, numa base não arbitrária e não literal” [3].

Na teoria da aprendizagem significativa, ocorrem dois processos essenciais: a diferenciação progressiva e a reconciliação integradora. Trata-se de princípios programáticos (de ensino) que também podem ser aplicados à estrutura cognitiva. Ausubel [3] afirma que na diferenciação progressiva “apresentam-se, em primeiro lugar, as ideias mais gerais e inclusivas da disciplina e, depois, estas são progressivamente diferenciadas em termos de pormenor e de especificidade” (p. 166). Já a reconciliação integradora envolve a reorganização das informações já adquiridas, permitindo que o aluno estabeleça conexões mais consistentes e abrangentes entre os conhecimentos prévios e os recém-aprendidos.

Nesse sentido, quando a diferenciação progressiva acontece, novos conhecimentos tendem a ser assimilados pelo estudante, resultando na ampliação e no aperfeiçoamento do seu subsunçor. Na reconciliação integradora, os conteúdos tendem a se articular de maneira mais coerente, permitindo ao aluno perceber relações, identificar semelhanças e diferenças significativas e resolver aparentes contradições.

Moreira [4], com o objetivo de desenvolver estratégias que promovam a aprendizagem significativa, elaborou a teoria das Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS). Fundamentadas em 16 princípios, as UEPS buscam estruturar o ensino de maneira que os novos conhecimentos sejam integrados à estrutura cognitiva dos alunos.

1. o conhecimento prévio é a variável que mais influencia a aprendizagem significativa (Ausubel);
2. pensamentos, sentimentos e ações estão integrados no ser que aprende; essa integração é positiva, construtiva, quando a aprendizagem é significativa (Novak);
3. é o aluno quem decide se quer aprender significativamente determinado conhecimento (Ausubel; Gowin);
4. organizadores prévios mostram a relacionabilidade entre novos conhecimentos e conhecimentos prévios;
5. são as situações-problema que dão sentido a novos conhecimentos (Vergnaud); elas devem ser criadas para

despertar a intencionalidade do aluno para a aprendizagem significativa;

6. situações-problema podem funcionar como organizadores prévios;
7. as situações-problema devem ser propostas em níveis crescentes de complexidade (Vergnaud)
8. frente a uma nova situação, o primeiro passo para resolvê-la é construir, na memória de trabalho, um modelo mental funcional, que é um análogo estrutural dessa situação (Johnson-Laird);
9. a diferenciação progressiva, a reconciliação integradora e a consolidação devem ser levadas em conta na organização do ensino (Ausubel);
10. a avaliação da aprendizagem significativa deve ser feita em termos de buscas de evidências; a aprendizagem significativa é progressiva;
11. o papel do professor é o de provedor de situações-problema, cuidadosamente selecionadas, de organizador do ensino e mediador da captação de significados de parte do aluno (Vergnaud; Gowin);
12. a interação social e a linguagem são fundamentais para a captação de significados (Vygotsky; Gowin);
13. um episódio de ensino envolve uma relação triádica entre aluno, docente e materiais educativos, cujo objetivo é levar o aluno a captar e compartilhar significados que são aceitos no contexto da matéria de ensino (Gowin);
14. essa relação poderá ser quadrática na medida em que o computador não for usado apenas como material educativo;
15. a aprendizagem deve ser significativa e crítica, não mecânica (Moreira);
16. a aprendizagem significativa crítica é estimulada pela busca de respostas (questionamento) ao invés da memorização de respostas conhecidas, pelo uso da diversidade de materiais e estratégias instrucionais, pelo abandono da narrativa em favor de um ensino centrado no aluno (Moreira). [4]

Uma UEPS segue uma abordagem organizada em oito passos, as quais orientam desde o planejamento até a aplicação e avaliação do ensino, garantindo que os conteúdos sejam trabalhados de forma a promover a aprendizagem significativa. Esses passos estão detalhados na Tabela I, evidenciando a sequência lógica e estruturada proposta para potencializar o aprendizado.

TABELA I. Aspectos sequenciais da construção de uma UEPS.

Passos	Descrição dos passos
1º passo	Definição do que vai ser ensinado
2º passo	Levantamento dos conhecimentos prévio dos alunos
3º passo	Apresentação de situações problema em nível introdutório
4º passo	Exposição do conteúdo do geral para o particular
5º passo	Aumentar a complexidade da exposição do conteúdo
6º passo	Retomar os principais conceitos de forma integradora
7º passo	Avaliação somativa individual
8º passo	Avaliação final da UEPS

No primeiro passo, Moreira [4] ressalta a relevância da seleção do conteúdo, enfatizando a necessidade de “definir o tópico específico a ser abordado, identificando seus aspectos declarativos e procedimentais tais como aceitos no contexto da matéria de ensino [...]” (p.3).

Já no segundo passo, o mesmo autor enfatiza a relevância de identificar os conhecimentos prévios dos alunos, uma vez que é a partir deles que o novo conteúdo poderá ser relacionado de forma significativa. Para isso, o autor sugere “criar/propor situação(ções) – discussão, questionário, mapa conceitual, mapa mental, situação-problema, etc. – que leve(m) o aluno a externalizar seu conhecimento prévio, [...]” [4] (p.3).

Em seguida, no terceiro passo, salienta a importância de elaborar situações-problema introdutórias, articuladas ao conhecimento prévio do aluno, de forma a criar as condições necessárias para a inserção do novo conteúdo: “propor situações-problema, em nível bem introdutório, levando em conta o conhecimento prévio do aluno, que preparem o terreno para a introdução do conhecimento (declarativo ou procedimental) que se pretende ensinar[...]” [4] (p.4).

Posteriormente, no quarto passo, Moreira [4] destaca que o conteúdo deve ser apresentado do geral para o específico, “[...] começando com aspectos mais gerais, inclusivos, dando uma visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino, mas logo exemplificando, abordando aspectos específicos [...]” (p.4).

Quanto ao quinto passo, o autor ressalta que o professor deve retomar os aspectos mais gerais do conteúdo em uma nova exposição, porém em um nível mais alto de complexidade:

“Em continuidade, retomar os aspectos mais gerais, estruturantes (i.e., aquilo que efetivamente se pretende ensinar), do conteúdo da unidade de ensino, em nova apresentação (que pode ser através de outra breve exposição oral, de um recurso computacional, de um texto, etc.), porém em nível mais alto de complexidade em relação à primeira apresentação” [4].

No sexto passo, Moreira [4] enfatiza a importância da reconciliação integradora no processo de aprendizagem: “concluindo a unidade, dar seguimento ao processo de diferenciação progressiva retomando as características mais relevantes do conteúdo em questão, porém de uma perspectiva integradora, ou seja, buscando a reconciliação integrativa” (p.4).

Já no sétimo passo, o autor explica como deve ocorrer o processo de avaliação dos alunos “A avaliação da aprendizagem através da UEPS deve ser feita ao longo de sua implementação, registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado; além disso, deve haver uma avaliação somativa individual” [4] (p.4).

Por fim, no oitavo passo, Moreira [4] descreve como verificar se a aplicação da UEPS foi bem-sucedida: “A UEPS somente será considerada exitosa se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa (captação de significados, compreensão, capacidade de explicar, de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema)” (p.5).

III. METODOLOGIA DA PESQUISA

Partindo das ideias de Ausubel [3] e Moreira [4], buscou-se estruturar, implantar e avaliar uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa para ensinar os conceitos de Evolução Estelar, que articulasse o professor, o aluno e o material, de modo a considerar o conhecimento prévio do aluno ao longo de todo o processo de ensino-aprendizagem.

O ensino desse conteúdo fundamenta-se nos pressupostos da BNCC [5] para o ensino de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, que em sua competência 2 afirma:

“Construir e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar decisões éticas e responsáveis” [5].

A habilidade que está diretamente relacionada à competência 2 da BNCC [5] a ser desenvolvida com os alunos é: “(EM13CNT201) Analisar e utilizar modelos científicos, propostos em diferentes épocas e culturas para avaliar distintas explicações sobre o surgimento e a evolução da Vida, da Terra e do Universo” (p. 543).

A aplicação deste trabalho ocorreu em uma turma de 29 alunos da terceira série do ensino médio da Escola Estadual Solon de Lucena, situada na cidade de Manaus. O desenvolvimento da UEPS foi realizado ao longo de 10 aulas de 48min.

Para a elaboração e organização da sequência dos conteúdos, utilizou-se como referência o livro *Astronomia para Leigos*, escolhido por apresentar, de maneira clara, simples e objetiva, os conceitos relacionados à evolução estelar. Além dessa obra, também foi consultado o documentário *The Universe: Life and Death of a Star*, produzido pelo canal History, que aborda como as estrelas nascem e morrem.

A primeira aula foi utilizada para realizar o levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos: Os estudantes responderam a um questionário composto por dez questões, elaborado com o objetivo de identificar seus conhecimentos prévios sobre o tema abordado.

TABELA II. Questionário de conhecimentos prévios.

1. O que você imagina que acontece para que uma estrela comece a brilhar?
2. O que você entende por nebulosa? O que você acha que ela tem a ver com o nascimento de estrelas?
3. O que você acha que ocorre quando uma estrela começa a brilhar pela primeira vez?
4. O que você sabe sobre o processo de fusão nuclear em uma estrela? Como você imagina que isso acontece?
5. O que você imagina que seja a sequência principal de uma estrela? Como ela muda ao longo do tempo?
6. Você já ouviu falar de uma gigante vermelha? O que acha que isso significa?
7. O que você entende por supernova? Como você acha que uma estrela pode explodir dessa forma?
8. Como você acha que uma estrela muito grande morre? O que pode acontecer com ela?
9. O que você acha que é uma estrela anã branca? Como ela se forma?

10. Você já ouviu falar de buracos negros? O que você imagina que seja e como eles podem se formar?

Essa etapa inicial foi fundamental para avaliar o nível de familiaridade dos estudantes com os conceitos a serem trabalhados ao longo da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS).

Na segunda aula, foram apresentadas situações-problema em nível introdutório: a) qual é o elemento químico mais abundante no universo? b) os elementos químicos podem se combinar para formar outro elemento químico? c) quais são as três partículas que formam o átomo? d) a gravidade é uma força atrativa ou repulsiva? e) a temperatura de um corpo tem alguma relação com sua pressão? f) dois corpos de mesmo tamanho possuem a mesma quantidade de matéria? As situações propostas foram discutidas em grande grupo, com a mediação do docente, sem a necessidade de se chegar a uma resposta definitiva.

Durante a terceira, quarta e quinta aulas, foi realizada a exposição do conteúdo de forma progressiva, do geral para o particular. Inicialmente, foram abordados os conceitos gerais sobre a evolução estelar, incluindo nebulosas, estrelas da sequência principal, anãs brancas, estrelas de nêutrons, supernovas e buracos negros. A apresentação desses temas foi realizada por meio de vídeos selecionados do YouTube, proporcionando uma abordagem visual e dinâmica para facilitar a compreensão dos alunos.

Após a exposição do conteúdo, os alunos se organizaram em pequenos grupos e tiveram a tarefa de elaborar um resumo que representasse os conceitos aprendidos. Em seguida, cada grupo trocou os resumos entre si, permitindo que analisassem e refletissem sobre diferentes interpretações do tema. Com a mediação do professor, os grupos apontaram possíveis melhorias nas produções, promovendo um processo colaborativo de aprendizado e reforçando a construção do conhecimento de maneira significativa.

Na sexta e na sétima aula, foi aumentada a complexidade da exposição do conteúdo. Para ampliar a complexidade da exposição dos conceitos estudados, o professor retomou os principais tópicos por meio de slides, revisando os conteúdos abordados anteriormente. Após essa retomada, os alunos foram convidados a elaborar resumos sobre a temática.

Já na oitava e nona aula foram retomados os principais conceitos de forma integradora: Nesta etapa, os alunos foram desafiados a produzir materiais didáticos para explicar a evolução estelar como forma de consolidar e integrar os principais conceitos aprendidos ao longo das aulas. A atividade permitiu que os alunos expressassem, de maneira articulada, as relações entre os temas estudados, demonstrando sua compreensão e capacidade de conexão entre os conteúdos.

Na décima aula, foi realizada uma avaliação somativa individual para medir o progresso dos alunos, nessa etapa foi aplicado novamente o mesmo questionário da avaliação diagnóstica realizada na primeira aula. O objetivo dessa etapa é verificar se houve avanço na compreensão dos conceitos abordados ao longo das aulas, permitindo uma análise comparativa do aprendizado. Portanto, essa avaliação possibilitou identificar quais aspectos foram assimilados pelos estudantes e quais ainda necessitam de reforço,

contribuindo para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem.

Para avaliar a eficácia da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), o professor analisou as produções realizadas ao longo das aulas pelos alunos e os resultados do questionário após a aplicação da metodologia para verificar se o objetivo da UEPS foi atingido. Essa etapa permitiu compreender o impacto da metodologia no aprendizado, identificar possíveis melhorias e ajustar futuras aplicações para otimizar o processo de ensino.

IV. METODOLOGIA DE ANÁLISE

Para analisar as respostas dos alunos nos pré e pós-testes, adotou-se a metodologia de análise de conteúdo proposta por Bardin [6], que permite sistematizar e interpretar os dados de forma criteriosa. Inicialmente, todas as respostas foram coletadas e organizadas em uma planilha, garantindo a preservação do conteúdo original para posterior avaliação.

Em seguida, procedeu-se à leitura exaustiva das respostas, com o objetivo de identificar padrões, ideias recorrentes, divergências e possíveis concepções prévias dos estudantes. Esse processo envolveu a identificação de unidades de análise, entendidas como trechos de texto que expressavam uma ideia completa ou relevante sobre o tema da evolução estelar.

A etapa seguinte consistiu na categorização das respostas. Para isso, foram estabelecidos quatro critérios principais:

- Categoria A – Respostas científicas: explicações que demonstram compreensão substancialmente adequada e fundamentada sobre o processo de evolução estelar, alinhadas com o conhecimento científico atual.
- Categoria B – Respostas parcialmente científicas: explicações que apresentam alguns conceitos corretos, mas ainda contêm lacunas ou imprecisões.
- Categoria C – Concepções alternativas: respostas baseadas em ideias equivocadas ou interpretações errôneas do conteúdo em relação ao conhecimento científico, muitas vezes associadas a concepções prévias arraigadas no senso comum.
- Categoria D – Respostas em branco ou sem relação com o tema: ausência de resposta ou respostas desconectadas da temática proposta.

Após a definição das categorias, cada resposta foi cuidadosamente atribuída a uma delas, considerando tanto a consistência das ideias apresentadas quanto a precisão científica. Em casos de dúvida ou respostas ambíguas, realizou-se uma segunda análise para assegurar a confiabilidade da categorização.

Após a categorização, foi realizada uma comparação entre as respostas do pré-teste e do pós-teste, com o intuito de verificar possíveis avanços conceituais dos alunos ao longo da aplicação da UEPS. Essa comparação permitiu observar se os estudantes migraram de categorias com concepções alternativas ou incompletas para categorias mais próximas do discurso científico.

Por fim, os dados obtidos possibilitaram avaliar se a proposta de ensino contribuiu para uma aprendizagem significativa, conforme os pressupostos teóricos de Ausubel, evidenciando mudanças qualitativas nas formas de compreender o conteúdo de Evolução Estelar.

V. ANÁLISE DOS QUESTIONÁRIOS

No total, 29 alunos participaram da aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) sobre evolução estelar. Entretanto, em virtude da infrequência escolar registrada ao longo do processo, apenas 15 discentes acompanharam integralmente todas as etapas propostas. Considerando que a participação contínua é condição essencial para que os dados obtidos possam refletir de maneira mais fidedigna o impacto da intervenção pedagógica, optou-se por restringir a análise aos resultados desse grupo.

Além disso, a fim de evitar que a exposição das respostas dos alunos se tornasse demasiadamente extensa e comprometesse a objetividade do trabalho, optou-se por apresentar, de maneira geral, os resultados obtidos pelos 15 estudantes participantes. Em seguida, foi feito um recorte mais detalhado a partir das respostas de um estudante específico, analisando-se o desempenho no pré e no pós-teste. A escolha desse caso se fundamentou no critério de maior evolução conceitual identificada, pois ele permite evidenciar de forma clara e consistente o potencial da UEPS para a promoção da aprendizagem significativa.

Após a aplicação do pré-teste, este foi analisado e as respostas foram classificadas, com base na análise de conteúdo de Bardin, em quatro categorias: **(A)** resposta científica, **(B)** resposta parcialmente científica, **(C)** concepções alternativas – respostas baseadas em ideias equivocadas ou interpretações errôneas do conteúdo, e **(D)** Respostas em branco ou sem relação com o tema.

Foram analisadas as respostas de 15 alunos no pré-teste, composto por 10 questões, totalizando **150 respostas**. Destas, **5 (3%)** foram classificadas como respostas científicas; **32 (21%)** como parcialmente científicas; **54 (36%)** como respostas com concepção alternativa; e **59 (40%)** ficaram em branco ou sem relação com o tema, conforme ilustrado na figura (1).

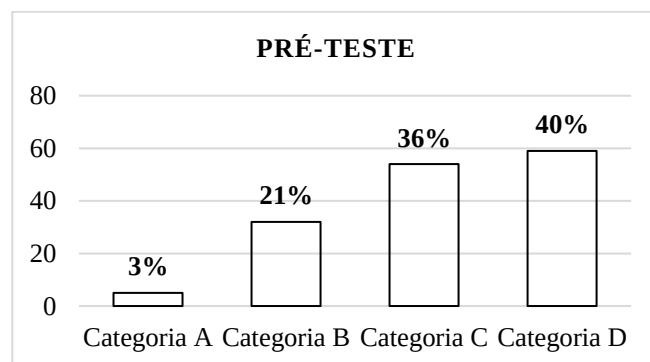


FIGURA 1. Gráfico do resultado do pré-teste.

Com base nos resultados do pré-teste, observa-se que **113 respostas (76%)** foram classificadas nas categorias C e D, o que evidencia que muitos conceitos relacionados à evolução estelar eram desconhecidos pelos alunos.

Após a aplicação da unidade de ensino potencialmente significativa, foram analisadas as 150 respostas dos estudantes no pós-teste. Do total, **63 (42%)** foram classificadas como respostas científicas, **26 (17%)** como parcialmente científicas, **19 (13%)** como concepções alternativas e **42 (28%)** ficaram em branco ou sem relação com o tema, conforme ilustrado no gráfico 2.

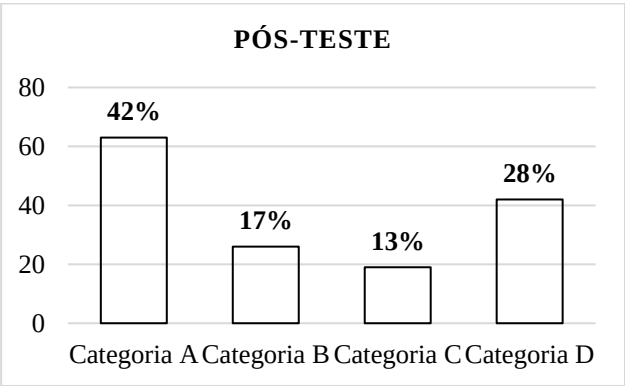


FIGURA 2. Gráfico do resultado do pós-teste.

A comparação entre os resultados do pré-teste e do pós-teste evidencia avanços significativos na aprendizagem significativa dos estudantes. No pré-teste, apenas **5 respostas (3%)** foram classificadas como científicas, enquanto no pós-teste esse número aumentou para **63 respostas (42%)**, indicando uma melhora expressiva na compreensão dos conceitos de evolução estelar. As respostas parcialmente científicas também apresentaram bom resultado, passando de **32 (21%)** para **26 (17%)**, mantendo-se em um patamar relevante de transição entre concepções alternativas e científicas.

Por outro lado, houve uma redução acentuada das respostas associadas a concepções alternativas, que caíram de **54 (36%)** no pré-teste para **19 (13%)** no pós-teste. Da mesma forma, o número de respostas em branco ou sem relação com o tema, que inicialmente era de **59 (40%)**, diminuiu para **42 (28%)**.

Esses dados, tomados isoladamente, não garante que os alunos desconstruíram suas concepções alternativas, mas indicam que é possível que nesse contexto possam ter tido algum grau de consciência sobre os limites de suas concepções no contexto de uma aula de Ciências.

Nesse sentido, é importante ressaltar que a consolidação de conceitos em um determinado conteúdo constitui um processo contínuo, longo e gradativo.

Verificou-se que diversos alunos apresentaram evolução conceitual ao longo do processo avaliativo, evidenciando avanços significativos em relação aos conteúdos trabalhados. Entre esses casos, destaca-se o desempenho da aluna identificada como T701, que obteve resultados expressivos no pós-teste, significativamente superiores aos registrados no pré-teste, conforme ilustrado nas tabelas 3 e 4.

TABELA III. Respostas do pré-teste (aluna T701).

Pré-teste	Q	Resposta	Cat.
	1	Inicia um processo que dá "vida" a uma estrela.	C
	2	Uma formação da "poeira" estelar que faz surgir as estrelas.	B
	3	Acho que é assim como elas surgem e são consideradas estrelas.	C
	4	Acho que é uma reação química/física de uma estrela ao entrar em contato com uma outra estrela ou corpo estelar na galáxia.	C
	5	Uma estrela nasce, brilha no espaço e morre	C
	6	Um corpo estelar de grande tamanho e vermelho.	B
	7	Talvez seja a expansão ou explosão de uma estrela por algum processo ou fase dela.	B
	8	Morre quando para de brilhar.	C
	9	Uma estrela mais pequena ou diferente das estrelas.	C
	10	Sim, acho que é um espaço vazio na galáxia que leva consigo tudo o que encontre no seu caminho.	C

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

A análise comparativa entre as respostas apresentadas no pré-teste e no pós-teste pela aluna T701 evidencia uma evolução conceitual significativa. No pré-teste, suas respostas demonstravam concepções simplificadas e, em alguns casos, próximas ao senso comum, situando-se predominantemente nas categorias B e C, o que indica compreensão inicial, mas ainda marcada por lacunas conceituais sobre a formação, a evolução e o ciclo de vida das estrelas.

TABELA IV. Respostas do pós-teste (aluna T701).

Pós-teste	Q	Resposta	Cat.
	1	Ocorre a fusão nuclear, que junta dois átomos, criando um novo elemento que libera energia que faz a estrela brilhar.	A
	2	A nebulosa é poeira estelar que, ao ser juntado pela gravidade, surgem as estrelas.	A
	3	Começa a brilhar pela energia que é liberada pela fusão nuclear.	A
	4	Quando dois átomos se juntam criando um novo elemento. Esse processo libera energia, fazendo a estrela brilhar.	A
	5	Ela nasce pela nebulosa, começa a brilhar pela fusão nuclear e finalmente morre ao ficar sem hidrogênio.	B
	6	Quando uma estrela (grande ou pequena) cresce devido a falta de hidrogênio)	B

7	É uma explosão que ocorre com as estrelas grandes, após estas entrar na fase de super gigante vermelha.	A
8	Uma estrela grande explode (supernova). Uma vez tenha acontecida essa explosão pode correr duas coisas: Se transforma em uma estrela de nêutrons ou se torna um buraco negro.	A
9	Uma anã branca é a última fase de uma estrela pequena. Ela cresce, virando uma gigante vermelha, só para virar uma Anã branca depois	B
10	Um buraco negro surge após uma supernova.	A

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

No pós-teste, observa-se um avanço substancial na qualidade das respostas. A aluna passou a utilizar explicações mais estruturadas, incorporando termos científicos adequados, como “fusão nuclear”, “supernova”, “anã branca” e “buraco negro”, além de relacionar corretamente os fenômenos físicos envolvidos na formação e no fim da vida estelar. Suas respostas migraram majoritariamente para a Categoria A, revelando compreensão mais consistente dos conceitos.

Esse progresso demonstra não apenas a apropriação de conceitos fundamentais da evolução estelar, mas também a efetividade da estratégia pedagógica empregada, reforçando o potencial da UEPS na promoção da aprendizagem significativa. A trajetória da aluna evidencia que a abordagem favoreceu a superação de concepções alternativas e a consolidação de uma visão científica mais próxima da explicação aceita pela comunidade acadêmica.

VI. ANÁLISE DAS PRODUÇÕES ELABORADOS PELOS ALUNOS DURANTE A APLICAÇÃO DA UEPS

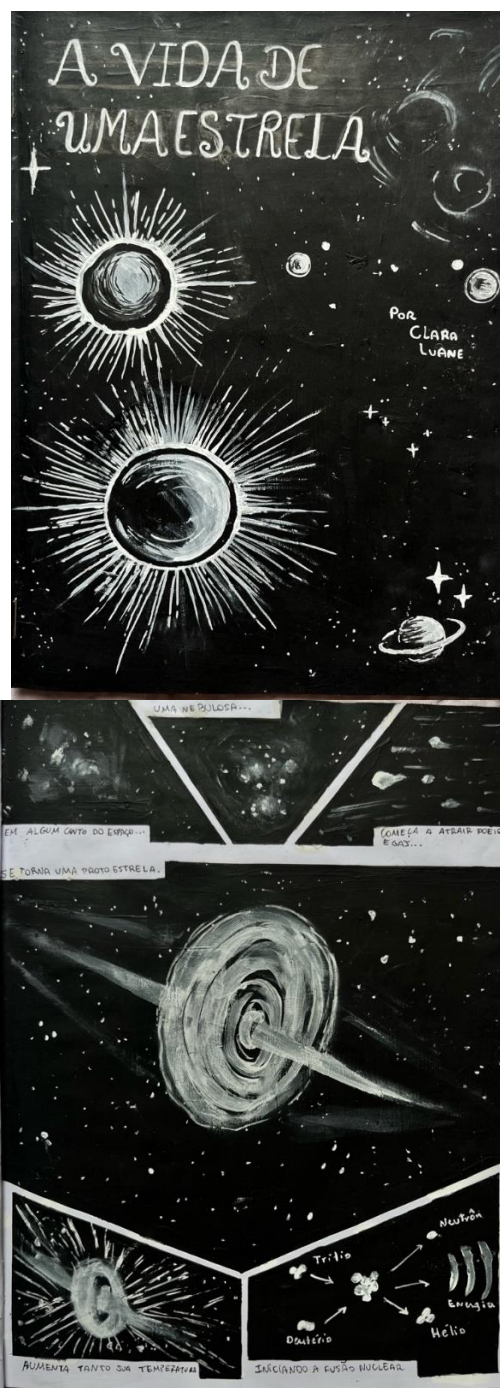
Moreira [4] ressalta que a avaliação dos alunos não deve se restringir ao caráter somativo, mas também contemplar o aspecto formativo: “a avaliação do desempenho do aluno na UEPS deverá estar baseada, em pé de igualdade, tanto na avaliação formativa (situações, tarefas resolvidas colaborativamente, registros do professor) como na avaliação somativa” (p.5). Nesse sentido, durante a aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), foram propostas aos alunos tarefas com o objetivo de verificar a compreensão dos conteúdos trabalhados.

O professor sugeriu diferentes tipos de tarefas — como maquetes, poesias, cartazes, apresentações digitais, mapas conceituais, experimentos, histórias em quadrinhos, entre outras, mas também concedeu aos alunos a liberdade de escolher outros recursos didáticos. Além disso, tiveram autonomia quanto à forma de realização da atividade, podendo optar pelo trabalho individual ou em grupos de até quatro integrantes.

A figura 3 apresenta o desenvolvimento de uma história em quadrinhos criada por uma aluna com o objetivo de explicar a evolução estelar. Essa produção evidencia, de

forma clara, que a aprendizagem foi alcançada de maneira significativa. Isso se confirma pelo fato de que a estudante conseguiu transpor o conteúdo assimilado para um novo contexto, diferente daquele em que foi inicialmente ensinado.

Ao utilizar uma linguagem visual e narrativa própria das histórias em quadrinhos, a aluna demonstra não apenas compreensão conceitual sobre o ciclo de vida das estrelas, mas também a habilidade de reorganizar e representar esse conhecimento de forma criativa. Essa capacidade de recontextualização é um indicativo importante de aprendizagem significativa, pois mostra que o conteúdo foi incorporado de modo estruturado à sua rede de conhecimentos prévios, permitindo sua mobilização em diferentes situações.



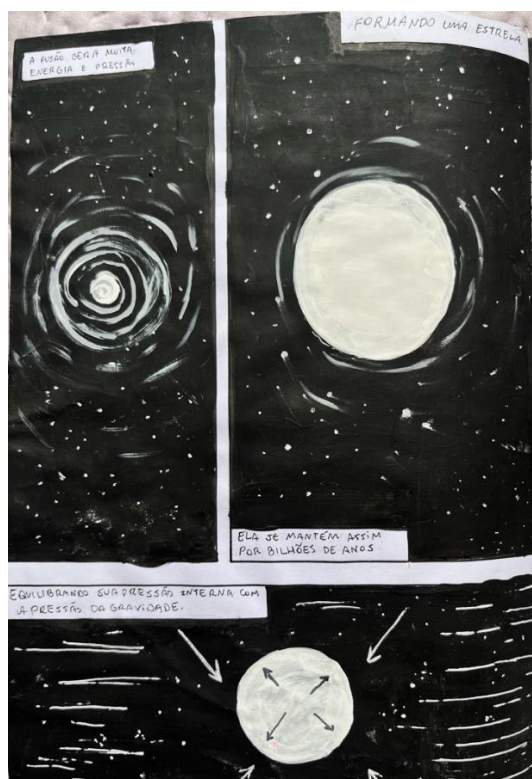


FIGURA 3. História em quadrinho para a explicação da evolução estelar.

A figura 4 apresenta a produção de uma poesia elaborada por um grupo de 4 alunos com a finalidade de explicar a evolução estelar. A atividade também evidencia que a aprendizagem foi alcançada de forma significativa, uma vez que os alunos foram capazes de reinterpretar e reorganizar as informações adquiridas em sala de aula, expressando-as por meio de uma linguagem poética. Ao utilizar metáforas, rimas e construções simbólicas, os estudantes mostram que compreenderam o ciclo de vida das estrelas e conseguiram integrá-los à sua estrutura cognitiva.

Esse tipo de transposição para um novo contexto no caso, o literário indica que o conhecimento não foi apenas memorizado, mas internalizado de maneira significativa. A poesia, assim, torna-se uma evidência concreta de que o conteúdo foi compreendido, ressignificado e comunicado.

Outro grupo desenvolveu uma maquete para representar a evolução estelar, conforme ilustrado na figura 5. O trabalho chama a atenção pela forma como combina elementos visuais e estruturais para explicar o ciclo de vida das estrelas.

Os estudantes utilizaram materiais simples para ilustrar as diferentes fases do processo estelar, do nascimento em nebulosas até o colapso final em anãs brancas, estrelas de nêutrons ou buracos negros. Mais do que uma representação física, a maquete evidencia a capacidade dos alunos de organizar, sintetizar e comunicar o conteúdo aprendido de forma coerente e didática.

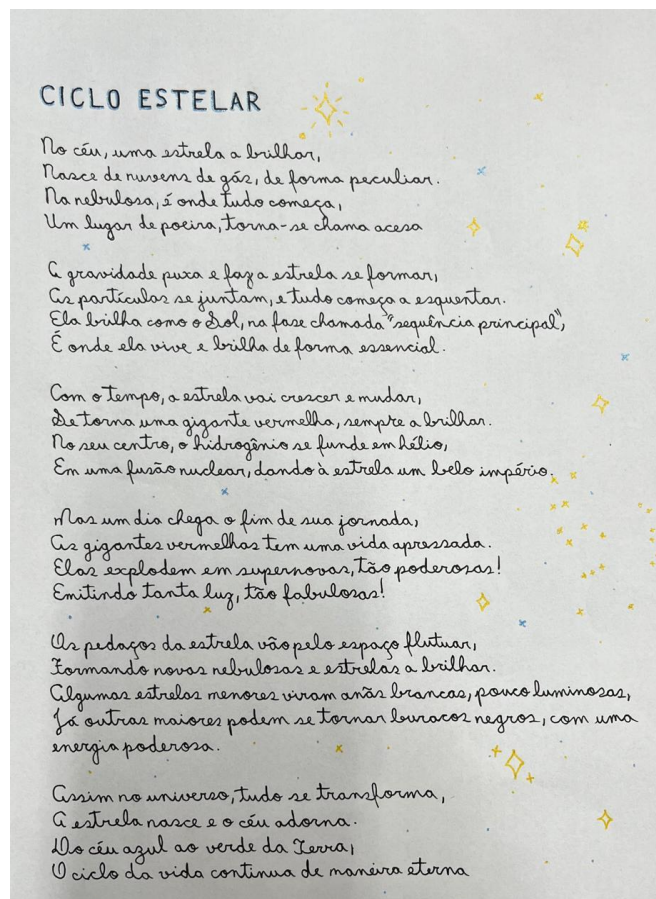


FIGURA 4. Explicação do ciclo de uma estrela por meio de poesia.

Essa atividade revela que a aprendizagem foi significativa, pois os alunos não apenas reproduzem informações, mas transformaram o conhecimento adquirido em uma representação concreta. A construção da maquete exigiu planejamento, compreensão das etapas do fenômeno e articulação entre teoria e prática, aspectos fundamentais para que o novo conteúdo se integrasse de forma duradoura à sua estrutura cognitiva.



FIGURA 5. Maquete para explicação da evolução estelar.

Já o último grupo elaborou um cartaz, conforme ilustra na figura 6, com o objetivo de explicar as fases da vida de uma estrela. O material foi dividido em seções visuais que retratam desde a formação estelar nas nebulosas até os estágios finais, como anã branca, supernova ou buraco negro.

A atividade serviu como uma forma de reforçar a aprendizagem, pois exigiu que os estudantes reinterpretassem o que haviam aprendido em sala e transformassem esse conhecimento em linguagem visual e explicativa. Esse tipo de transposição indica que a informação foi integrada à estrutura cognitiva dos alunos, permitindo uma compreensão mais profunda e duradoura.

Assim, o cartaz não apenas ilustra o conteúdo, mas confirma que a aprendizagem foi construída de maneira ativa e significativa, como propõe a teoria de Ausubel.

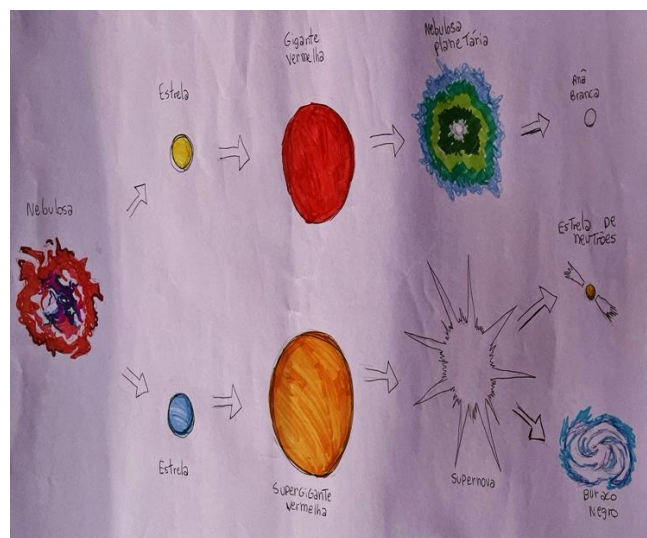


FIGURA 6. Cartaz para explicação da evolução estelar.

Além da apropriação conceitual, observou-se uma evolução na forma como os estudantes perceberam e vivenciaram o próprio processo de aprendizagem. As atividades propostas estimularam o desenvolvimento de competências como autonomia, criatividade, colaboração e capacidade de expressão em diferentes linguagens. Tais aspectos evidenciam que a metodologia adotada não apenas favoreceu a construção significativa do conhecimento, mas também contribuiu para a formação dos alunos, respeitando suas individualidades e incentivando a participação ativa no processo educativo.

VII. CONCLUSÃO

A aplicação da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) revelou-se uma metodologia eficaz para promover a aprendizagem significativa do conteúdo relacionado à evolução estelar. Ao articular conhecimentos prévios dos alunos com novas informações, a UEPS favoreceu não apenas a assimilação dos conceitos, mas também a sua reinterpretação em diferentes linguagens e formatos.

A análise dos dados obtidos por meio do questionário demonstrou que diversos alunos migraram das categorias de compreensão científica parcial (B), concepção alternativa (C) e resposta em branco ou fora do tema para a categoria de compreensão científica (A), indicando um avanço significativo na assimilação do conteúdo. Esse resultado evidencia a eficácia da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa como recurso didático para promover a aprendizagem significativa sobre a temática da evolução estelar.

Além disso, ao longo da aplicação da metodologia, os alunos produziram cartazes, maquetes, poesias e histórias em quadrinhos, o que permitiu identificar avanços concretos na compreensão conceitual dos conteúdos abordados. Esses resultados indicam que os estudantes foram capazes de integrar o novo conhecimento à sua estrutura cognitiva de forma não arbitrária e não literal, em consonância com os princípios da aprendizagem significativa propostos por Ausubel [3].

Dessa forma, conclui-se que a proposta metodológica adotada não apenas favoreceu o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, como também estimulou sua criatividade, autonomia e capacidade de expressão. A UEPS, nesse contexto, mostrou-se uma ferramenta relevante para o ensino de Física. Contudo, ressalta-se a necessidade de novas pesquisas sobre a temática, a fim de aprofundar a análise e verificar de maneira mais ampla sua validade e aplicabilidade.

Além disso, recomenda-se que o presente estudo seja ampliado para outros níveis de ensino, como o fundamental e o superior, a fim de investigar a eficácia da Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) em diferentes faixas etárias e contextos educacionais. Também é pertinente explorar sua aplicação em outras modalidades de ensino, como a educação de jovens e adultos (EJA), a educação profissional e técnica, e até mesmo em contextos de ensino remoto ou híbrido.

As revisões da literatura indicam que as Unidades de Ensino Potencialmente Significativas (UEPS) têm contribuído significativamente para o ensino de diversas áreas da Física. O presente estudo apoia essa ideia e fornece resultados relevantes sobre o ensino de Evolução Estelar mediado por uma UEPS no contexto do Ensino Médio.

REFERENCIAS

- [1] Queiroz, Vanessa; TREVISAN, Rute Helena. *Investigação dos conteúdos de Astronomia presentes nos registros de aula das séries iniciais do Ensino Fundamental*. In: Anais do Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências – ENPEC, 7, (2009), Florianópolis. Florianópolis: ABRAPEC, 2009. Disponível em: <https://fep.if.usp.br/~profis/arquivos/viiienpec/VII%20ENPEC%20-%202009/www.foco.fae.ufmg.br/cd/pdfs/872.pdf>. Acesso em: 22 set. 2025.
- [2] Moreira, M. A., *Aprendizagem Significativa: a teoria e textos complementares*, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2012).

- [3] Ausubel, D. P., *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*, (Editora Plátano, Lisboa, 2003).
- [4] Moreira, M. A., *Unidades de ensino potencialmente significativas – UEPS*, (Instituto de Física – UFRGS, Porto Alegre, 2011). Disponível em:

<https://www.if.ufrgs.br/~moreira/UEPSport.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2025.

- [5] Brasil, Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*, (MEC, Brasília, 2018).

- [6] Bardin, L., *Análise de conteúdo*, (Edições 70, Lisboa, 1977).

Aplicación de la ley de Lambert-Beer con fines docentes en método por espectrofotometría ultravioleta para vitamina A (retinol)

L. E. Jiménez Rodríguez

*Instituto Nacional de Higiene, Epidemiología y Microbiología, INHEM, MINSAP,
Infanta No.1158 entre Clavel y Santo Tomás, Centro Habana, CP 10300, La Habana,
Cuba*

ISSN 1870-9095

E-mail: enrijim@infomed.cu

(Recibido el 23 de octubre de 2025, aceptado el 16 de diciembre de 2025)

Resumen

Se describe un ejemplo de aplicación de la ley de Lambert-Beer con fines docentes a un procedimiento por espectrofotometría ultravioleta (UV) adaptado de la USP, para la cuantificación de vitamina A (retinol) en materias primas y estándares parcialmente degradados.

Palabras clave: ley de Lambert-Beer, vitamina A, espectrofotometría ultravioleta (UV).

Abstract

An example of the application of the Lambert-Beer law for teaching purposes is described, to an ultraviolet (UV) spectrophotometry procedure adapted from the USP, for the quantification of vitamin A (retinol) in raw materials and partially degraded standards.

Key words: Lambert-Beer law, vitamin A, ultraviolet spectrophotometry (UV).

I. INTRODUCCIÓN

En ocasiones se desconoce el principio del funcionamiento de los equipos con los que se cuenta en los laboratorios de ensayos físico químicos, como es el caso de los espectrofotómetros UV-Visible, donde los compuestos a analizar absorben luz ultravioleta (UV) o visible (Vis).

La espectrofotometría UV-visible es una técnica analítica que permite determinar la concentración de un compuesto en solución, utilizando un espectrofotómetro donde se puede seleccionar la longitud de onda de la luz que pasa por una solución y medir la cantidad de luz absorbida por la misma. Se basa en que las moléculas absorben las radiaciones electromagnéticas, teniendo en cuenta además, que la cantidad de luz absorbida debe presentar una correspondencia lineal con la concentración [1].

Si se dirige un haz de radiación monocromática de poder radiante P_0 a una solución de muestra, se efectúa la absorción del haz y al salir de la muestra tiene un poder radiante P .

$$P_0 \xrightarrow{b} \boxed{} \Rightarrow P$$

La cantidad de radiación absorbida puede ser medida de distintas formas:

Transmitancia, $T = P / P_0$

Dónde: % Transmitancia, $\%T = 100 T$.

O, como:

Absorbancia, $A = \log_{10} P_0 / P$.

Dónde: $A = \log_{10} 1 / T$.

Aplicando logaritmo, queda: $A = \log_{10} 100 / \%T$.

Equivalente a: $A = 2 - \log_{10} \%T$.

Así, si toda la luz pasa a través de una solución sin absorción, entonces la absorbancia es cero, y el por ciento de transmitancia es 100%. Si toda la luz es absorbida, entonces el porcentaje de transmitancia es cero, y la absorción es infinita.

La ley de Lambert-Beer se representa por la ecuación siguiente:

$$A = \epsilon bc.$$

Dónde:

A es la absorbancia, adimensional, puesto que

$$A = \log_{10} P_0 / P$$

ϵ es la absorptividad molar con unidades de $L \text{ mol}^{-1} \text{ cm}^{-1}$.

b es la longitud del paso óptico de la muestra, el espesor de la celda en que la muestra está contenida, expresado en centímetros.

c es la concentración del compuesto en solución, expresado en mol L^{-1} .

La absorptividad molar, ϵ , es la cantidad de luz absorbida por unidad de concentración, o la extinción causada por un mol de solución, teniendo en cuenta la concentración expresada en moles/L, lo que explica el nombre con que también se la conoce, coeficiente de extinción molar, siendo una constante para una sustancia particular.

En la figura 1 se muestran los cromóforos presentes de la vitamina A: dobles enlaces (dienos conjugados) presentes en su estructura química, responsables de la absorptancia característica a las longitudes de onda entre 310 y 334 nm en el espectro UV [2].

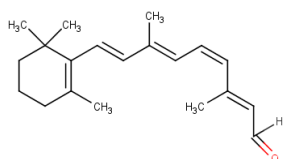


FIGURA 1. Vitamina A, Retinol.

El procedimiento analítico descrito debajo, se utiliza para la determinación de la vitamina A. Se ajusta a las disposiciones adoptadas en 1956 para uso internacional por la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada, IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) [3].

La valoración se debe realizar sin demora, tomando las precauciones a lo largo de todo el procedimiento para reducir al mínimo la exposición a la luz actínica, al oxígeno atmosférico y otros agentes oxidantes empleando preferentemente material de vidrio con protección actínica y una atmósfera de gas inerte. Se parte de una pesada de alrededor de 25 mg de vitamina A (retinol) en un frasco volumétrico de 100 mL, diluyendo con alcohol isopropílico, resultando una solución con alrededor de 0,25 mg/mL de vitamina A.

Se diluyen con alcohol isopropílico, 2 mL de la solución anterior en un volumétrico de 100 mL, resultando una solución de 0,005 mg/mL de vitamina A, lista para la lectura en el espectrofotómetro.

Finalmente, se determinan las absorptancias de la solución resultante a las longitudes de onda de: 310 nm, 325 nm y 334 nm, utilizando alcohol isopropílico como blanco.

II. MATERIALES Y MÉTODOS

A. Cristalería y reactivos

Matraces aforados ámbar, alcohol isopropílico

B. Equipos y condiciones instrumentales

— Balanza analítica

- Espectrofotómetro ultravioleta visible UV <857>
 - Longitudes de onda para las mediciones: 310, 325 y 334 nm.
 - Celda: 1 cm.

III. RESULTADOS

A. Análisis de la muestra

Para la cuantificación de vitamina A (retinol) en materias primas y estándares parcialmente degradados, se determinan las absorptancias de la solución resultante a las longitudes de onda de: 310 nm, 325 nm y 334 nm con un espectrofotómetro adecuado provisto con celdas de cuarzo idénticas, empleando alcohol isopropílico como blanco.

B. Cálculos

Se obtiene el contenido en mg de vitamina A, expresado como retinol ($C_{20}H_{30}O$) de la siguiente manera:

$$\text{Contenido (en mg)} = 0,549 A_{325} / LC.$$

donde:

A_{325} es la absorptancia observada a 325 nm; L es la longitud, en cm, de la celda de absorción; y C es la cantidad de muestra de ensayo expresada como g por cada 100 ml de la solución final en alcohol isopropílico, siempre que la Absorptancia de la muestra (A_{muestra}) tenga un valor que no sea menor de:

$$[A_{325}] / 1,030,$$

y que no sea mayor de:

$$[A_{325}] / 0,970,$$

donde:

$[A_{325}]$ es la absorptancia corregida a 325 nm dada por la ecuación:

$$[A_{\text{muestra}}] = 6,815 A_{325} - 2,555 A_{310} - 4,260 A_{334}.$$

Donde A se designa como la absorptancia a la longitud de onda indicada por el subíndice.

Cuando $[A_{325}]$ tiene un valor menor de $A_{325}/1,030$, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\text{Contenido (en mg)} = 0,549[A_{325}] / LC.$$

Donde, los valores son los definidos anteriormente. Cada mg de vitamina A (alcohol) representa 3333 Unidades USP de vitamina A.

C. Intervalo de Confianza

Es el intervalo de los límites de error, que indica la diferencia que se puede esperar en los resultados obtenidos entre

diferentes laboratorios; para una probabilidad P de 0,05 es aproximadamente $\pm 8\%$.

IV. CONCLUSIONES

Se muestra una forma de aprovechar los conocimientos teóricos adquiridos en los estudios de pregrado y de postgrado sobre Física Óptica junto a los de Química, para una mejor comprensión del funcionamiento de los equipos de ensayos, como es el caso de los espectrofotómetros, en este caso, para la cuantificación de vitamina A (retinol) en materias primas y estándares parcialmente degradados.

REFERENCIAS

- [1] Amézquita L. Fernando, Mendoza O. Diana Amézquita L. Fernando, *Fundamentos de la Espectroscopia Aplicada a la Instrumentación Química*, Segunda reimpresión de la cuarta edición, (Universidad de Guanajuato, México, 2007).
- [2] Skoog/West, (546 SKO), *Química Analítica*, 6ta. Edición, (McGraw-Hill, México, 1995).
- [3] Vitamin A assay <571>, Método Químico;
https://doi.org/10.31003/USPNF_M99330_01_01.

Efecto del tipo de partícula de carbono sobre las propiedades fotocatalíticas en películas TiO₂:C

Martínez González María Fernanda¹, Zapata Torres Martín Guadalupe¹, Cruz González Nadia¹, Valaguez Velazquez Enrique²

¹Instituto Politécnico Nacional, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada Unidad Legaria, Legaria 694 CP 11500, Ciudad de México.

²Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas, Av. IPN 2580 CP 07340, Ciudad de México.

E-mail: mmartinezg1414@alumno.ipn.mx

(Recibido el 16 de octubre de 2025, aceptado el 19 de diciembre de 2025)



ISSN 1870-9095

Resumen

Se crecieron películas gruesas de TiO₂, las cuales fueron modificadas con dos diferentes fuentes de carbón; carbón dots y carbón mesoporoso. Se estudió el efecto de estas fuentes de carbón en las propiedades estructurales, electroquímicas y de longitudes de onda de activación. Se encontró que el tipo de fuente de carbón está íntimamente relacionado con el tamaño de la partícula incorporada a la muestra y es determinante sobre estas propiedades. Se realizaron experimentos de fotodegradación de las muestras obtenidas sobre Rodamina B, encontrándose que el mejor material para esta aplicación es el TiO₂ con carbón dots.

Palabras clave: TiO₂:C, fotocátalisis solar, tratamiento de agua residual.

Abstract

TiO₂ thick films were grown, and there were modified with two different carbon sources: carbon dots and mesoporous carbon. The effect of these carbon sources on the structural, electrochemical, and activation wavelength were studied. It was found that the type of carbon source, which is closely related to the size of the particle incorporated into the sample, is decisive for these properties. Photodegradation experiments were carried out on the obtained samples using Rhodamine B as colorant, finding that the best material for this application is TiO₂ with carbon dots.

Keywords: TiO₂:C, solar photocatalysis, wastewater treatment.

I. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, el crecimiento de la población y el aumento de las actividades industriales han provocado la liberación al medio ambiente de numerosas sustancias químicas y biológicas responsables de la contaminación del aire, suelo y agua. Entre estos contaminantes se encuentran compuestos orgánicos como colorantes, pesticidas, productos farmacéuticos y químicos industriales que alteran los ecosistemas y representan un riesgo a la salud humana [1].

El incremento de estos compuestos en cuerpos de agua ha impulsado la búsqueda de estrategias de tratamientos más eficientes y amigables con el medio ambiente. Entre los métodos convencionales utilizados se encuentra la cloración, la ozonización y la irradiación con luz ultravioleta. Sin embargo, presentan limitaciones en su eficacia y sostenibilidad. Ante esta problemática, la fotocátalisis heterogénea ha sido ampliamente estudiada en la degradación de contaminantes orgánicos debido a su alta eficiencia, simplicidad, buena reproducibilidad, no tóxico y compatibilidad con el medio ambiente para eliminar contaminantes orgánicos presentes en el agua [2, 3].

La fotocátalisis, es un proceso de oxidación avanzada (POA), se basa en la reacción entre contaminantes orgánicos y radicales altamente oxidativos formados en la superficie del fotocatalizador. Al irradiar la superficie de un semiconductor con fotones cuya energía es igual o mayor que su energía gap, los electrones (e⁻) son excitados desde la banda de valencia (VB) hacia la banda de conducción (CB) del semiconductor, dejando una vacancia positiva o un hueco (h⁺) en la banda de valencia. Estos portadores de carga pueden migrar a la superficie del material para participar en reacciones de oxidación y reducción.

En general, el proceso de degradación fotocatalítica se puede dividir en cuatro etapas: 1) irradiación del catalizador, 2) generación de los portadores de carga, 3) separación y migración de los portadores de carga 4) reacciones de oxidación y reducción en la superficie del catalizador [4, 5].

Se han estudiado una amplia gama de materiales fotocatalíticos, incluyendo sistemas basados en metales nobles, óxidos y sulfuros de metales de transición, nitruros metálicos y perovskitas, cada uno con ventajas distintivas en la absorción de luz, la separación de cargas y el potencial redox.

El dióxido de titanio (TiO_2) es uno de los fotocatalizadores más estudiados y utilizados en catálisis heterogénea debido a su elevada actividad fotocatalítica, baja toxicidad, biocompatibilidad y capacidad para degradar y mineralizar contaminantes orgánicos e inorgánicos presentes en aguas residuales. Sin embargo, presenta limitaciones importantes: una rápida recombinación de los pares electrón-hueco fotogenerados, que reduce su eficiencia fotocatalítica, y una absorción restringida a la región UV del espectro solar, restringiendo su aprovechamiento a aproximadamente el 5% de la radiación incidente [6, 7].

El creciente interés para superar estas limitaciones ha impulsado el desarrollo de diferentes estrategias de modificación del TiO_2 , tales como el acoplamiento con semiconductores, metales y materiales de carbono, con el objetivo de extender su actividad a la región visible y reducir la recombinación de cargas. Entre estas alternativas, los materiales de carbono destacan por sus propiedades únicas: alta resistencia mecánica, excelente conductividad térmica y elevada movilidad de portadores de carga. Estas características favorecen el transporte de carga y disminuyen la recombinación de cargas fotogeneradas, aspectos fundamentales para incrementar la eficiencia del proceso fotocatalítico [8, 9].

En este artículo, se estudia la influencia de dos fuentes de carbono: carbón mesoporoso y carbón dots, en las propiedades de las películas de TiO_2 . Se utilizaron los materiales desarrollados en la degradación fotocatalítica de la rodamina B.

II. DETALLES EXPERIMENTALES

Todos los reactivos se utilizaron sin purificación previa. Ácido cítrico (Sigma Aldrich, 99,5%), Alcohol isopropílico (Sigma Aldrich, 99,5%), Etanol absoluto (J. Baker), Etilenglicol (Sigma Aldrich, 99,5%), Hexano (Sigma Aldrich, 95%), isopropóxido de titanio (Sigma Aldrich, 97%), nanopartículas de dióxido de titanio (PM25, sigma aldrich), carbon dots (sigma aldrich), carbon mesoporoso (sigma aldrich). La solución Pechini de TiO_2 se preparó a partir de isopropóxido de titanio, ácido cítrico y etilenglicol con relación molar de 1:4:16, respectivamente. En un matraz volumétrico se mezcló etilenglicol e isopropóxido de titanio, la mezcla se mantuvo a 85 °C bajo agitación magnética por 5 min. Posteriormente se añadió ácido cítrico en polvo, se mantuvo la temperatura y la agitación hasta obtener una solución transparente y se dejó enfriar a temperatura ambiente [10].

Las películas de dióxido de titanio con carbon dots ($\text{TiO}_2\text{:CD}$) se depositaron mediante la técnica de spin-coating, utilizando nanopartículas comerciales de TiO_2 (PM25) y carbon dots inmersas en solución Pechini de TiO_2 . Estos materiales se dispersaron en etanol durante 5 minutos. A esta dispersión se le añadió la solución Pechini con una relación volumétrica de 1000:1 (solución pechini:nanopartículas). Las películas de dióxido de titanio con carbón mesoporoso $\text{TiO}_2\text{:CM}$ se depositaron siguiendo el mismo procedimiento

descrito anteriormente, para aumentar la concentración de carbono se adicionó carbono mesoporoso con concentración atómica del 5%, estas fueron previamente dispersadas en etanol y se sometieron a ultrasónico durante 5 minutos. Posteriormente se incorporaron en la solución de Pechini con nanopartículas de TiO_2 .

Para obtener las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$, las soluciones se depositaron sobre sustratos de vidrio (VELAB) y sustratos de titanio (Sigma Aldrich, 99,7%) ambos sustratos con un área superficial de 2.5 x 2.5 cm, se depositaron tres capas sobre cada sustrato de 200 μl mediante la técnica de spin-coating, se secaron a una temperatura de 60°C entre capa y capa. Finalmente, se sometieron a tratamiento térmico durante una hora a 450°C en un horno tubular (LINDERG/BLUE) con atmósfera de aire extra seco.

Las películas de TiO_2 se sintetizaron mediante la técnica de dip-coating. La solución precursora se preparó mezclando isopropóxido de titanio, isopropanol y etanol con una relación volumétrica de 1:2:8, respectivamente. Primero, en un matraz volumétrico se adicionó isopropóxido de titanio e isopropanol bajo agitación magnética. Después de 10 minutos, se incorporó el etanol y se mantuvo la agitación por 5 minutos. Los sustratos de vidrio (VELAB) y sustratos de titanio (Sigma Aldrich, 99,7%) ambos con un área de 2.5 x 2.5 cm, se sumergieron en la solución durante 5 minutos y luego se secaron durante 10 minutos en un horno Brincker GmbH Bergstr 14D-78532 Tuttlingen a 100°C para eliminar los disolventes. Este proceso se repitió tres veces. Finalmente se secaron durante 2 horas y se sometieron a tratamiento térmico en un horno tubular (LINDERG/BLUE) durante 1 hora a 350°C [11].

Las imágenes de microscopía electrónica de barrido de emisión de campo (FE-SEM) se obtuvieron con un modelo Auriga de Zeiss, operando con un detector de electrones secundario de 1 KV. Los patrones de difracción de rayos X (DRX) se obtuvieron en un difractómetro de rayos X utilizando radiación $\text{CuK } \alpha$ a una velocidad de exploración (2 θ) de 5° a 80°. La medición de espectroscopía de fotoelectrones de rayos X (XPS) se analizó utilizando un instrumento científico de superficies X-probe, X-Ray000 400um-FG que emplea radiación Al K α .

Para determinar la longitud de onda de activación para cada muestra, se realizaron mediciones de fotocorriente vs longitud de onda (IW) usando una disposición convencional de dos electrodos en la celda electroquímica, se usó una malla de platino de 1 cm² como contraelectrodo y las muestras que se depositaron sobre sustratos de titanio se usaron como electrodos de trabajo (Ti/TiO_2 , $\text{Ti/TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{Ti / TiO}_2\text{:CM}$). Como fuente de luz se utilizó una lámpara de xenón (modelo 66901, Oriel Instruments) y su fuente de alimentación OPS-A500. El espectrómetro Spex 500 funcionó como un monocromador y se empleó el electrómetro Keithley 6517 para medir la fotocorriente generada.

Se realizó la caracterización de cronoamperometría con el objetivo de evaluar las variaciones en la fotocorriente bajo diferentes condiciones de iluminación. Las mediciones se llevaron a cabo utilizando un potenciostato/galvanostato VersaSTAT3 Autolab controlado mediante el software Versa

Studio®. Se empleó una configuración de celda electroquímica de dos electrodos, como contraelectrodo se utilizó una malla de platino de 1 cm^2 y las películas depositadas sobre sustratos de titanio se utilizaron como electrodos de trabajo (Ti/TiO_2 , $\text{Ti/TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{Ti/TiO}_2\text{:CM}$). Se utilizó 18 ml de electrolito, KOH, con una concentración de 0.1 M.

Como fuente de iluminación se utilizó una lámpara de xenón (modelo 66901, Oriel Instruments) Para simular el espectro de radiación solar, se colocó un filtro óptico AM1.5 entre la fuente de luz y la ventana de la celda electroquímica. Adicionalmente, se utilizó un filtro óptico, con un rango de longitud de onda a partir de 400 nm con el fin de eliminar la radiación ultravioleta del espectro solar.

La actividad fotocatalítica de $\text{TiO}_2\text{:CD}$, $\text{TiO}_2\text{:CM}$ y TiO_2 se evaluó mediante la degradación de 200 ml de una solución de rodamina B [5 mg/ml]. Se utilizaron las muestras depositadas sobre sustratos de vidrio y como fuente de irradiación se usó una lámpara halógena USHIO de 100 W la cual emite en un rango de 350 nm a 2500 nm. La distancia radial entre la lámpara y el fotocatalizador soportado se mantuvo en 3 cm. La solución se irradió durante 6 horas con agitación constante, la absorbancia de la solución se monitoreó en intervalos de una hora, se tomaron 3 ml de muestra y se midió la intensidad de la banda de en 552 nm utilizando un espectrómetro Ocean Optics. La concentración residual del colorante en la solución se determinó a partir de la curva de calibración entre la absorbancia y la concentración de rodamina B.

III. RESULTADOS Y DISCUSION

La estructura cristalina de las muestras se determinó mediante difracción de rayos X (DRX). En la Figura 1 se muestran los difractogramas correspondientes a las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$. Ambas muestras presentaron una estructura tetragonal característica de la fase anatasa del dióxido de titanio. Se identificaron máximos de difracción en 25.9° , 37° , 47° , 53.8° , 55° y 62.2° correspondientes a los planos cristalinos (101), (004), (200), (211), (105), y (204), respectivamente, de acuerdo con el PDF card n.º 731764 utilizado para la indexación.

En los difractogramas no se observaron señales atribuidas al carbón, a diferencia de lo reportado por Lim, Chaehun et. al. [12], lo cual puede atribuirse a la baja concentración del carbón en las muestras.

La morfología de las películas se analizó mediante microscopía electrónica de barrido (SEM). En la Figura 2 muestra la imagen de la película de $\text{TiO}_2\text{:CD}$, en ella se observan aglomeraciones formadas a partir de partículas de morfología predominantemente esféricas.

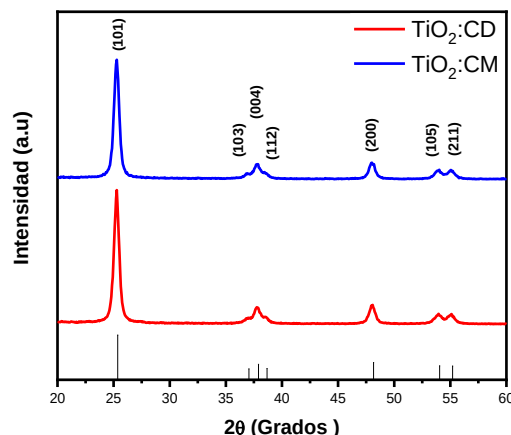


FIGURA 1. Patrones de difracción de rayos X de las muestras $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$, donde se identifican los planos cristalográficos correspondientes a la fase anatasa del TiO_2 .

Estas aglomeraciones presentan una distribución homogénea sobre la superficie, lo cual sugiere una buena dispersión durante las síntesis. El método Pechini favorece la formación de nanopartículas recubiertas por una matriz polimérica, lo que contribuye a la formación de aglomeración esférica [13]. En contraste, la figura 3 muestra la morfología de la película de $\text{TiO}_2\text{:CM}$. Se aprecia una disminución en el número de aglomerados esféricos y aumenta el tamaño de las partículas. Estos resultados sugieren que una fracción de las nanopartículas de TiO_2 podría estar ubicada debajo de las partículas de carbono mesoporosas [14].

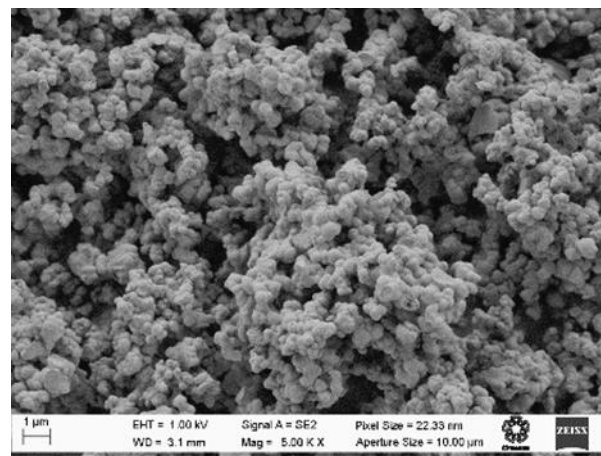


FIGURA 2. Micrografía SEM de las muestras $\text{TiO}_2\text{:CD}$ donde se observan aglomerados esféricos, la imagen fue adquirida a un aumento de 5.00 kX, con un voltaje de aceleración de 1.00 kV.

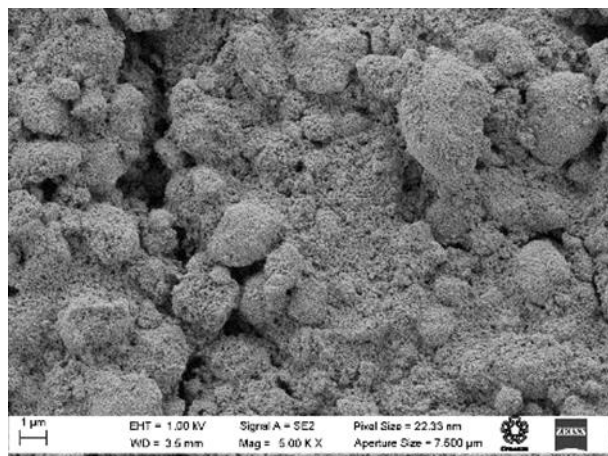
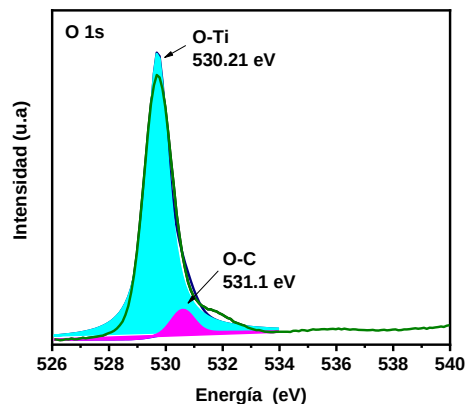


FIGURA 3. Micrografía SEM de las muestras $\text{TiO}_2\text{:CM}$, donde se observan una disminución de los aglomerados, la imagen fue adquirida a un aumento de 5.00 kX, con un voltaje de aceleración de 1.00 kV.

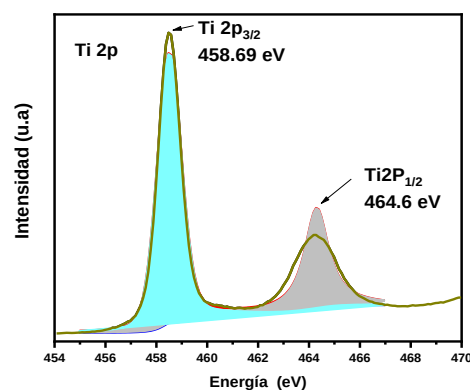
La composición química de la superficie de las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$ se estudió mediante espectroscopia fotoelectrónica de rayos X (XPS). Se detectó la presencia de Titanio, Oxígeno y Carbono.

El análisis de datos XPS se realizó con el software XPSpeak 4.1 [15]. Los valores de las energías de enlace del titanio, el oxígeno y el carbono se tomaron de la base de datos NIST-XPS [16]. Los espectros de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$ fueron similares. Para los espectros de O 1s, figura 4a, la intensidad del elemento oxígeno se observó en 530,21 eV, que se atribuye a enlaces Ti-O, y en 531,1 eV, atribuido a átomos de carbono con enlaces CO. El espectro de Ti 2p, figura 4b, exhibió dos picos de intensidad a 458.69 eV para Ti 2p_{3/2} y 464.59 eV correspondientes a Ti 2p_{1/2}, las áreas de señales tienen una relación 2:1, proporción que se utiliza en el ajuste de la curva. En particular, no hay intensidades de energía correspondientes a los enlaces carbono-titanio (Ti-C) a 282 eV, como se informa en el trabajo de Mel, A. A, Angleraud, B. [17] y Ming, Hai Zhang, [18] se encontraron dentro del espectro XPS. Esto muestra que el carbono no está unido al titanio, lo que confirma la presencia de carbono dentro de la muestra y su formación como material compuesto $\text{TiO}_2\text{:C}$.

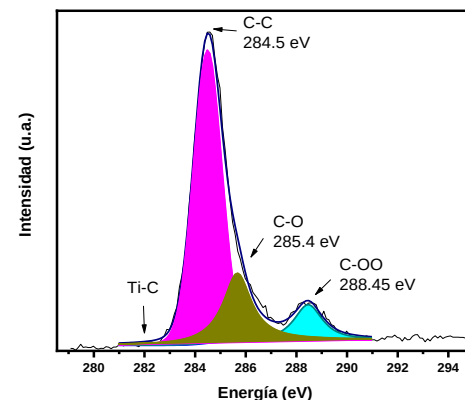
En la figura 4c, se muestra el espectro del carbono (C), que revela energías de enlace a 284,5 eV, 286 eV y 288 eV, correspondientes a enlaces amorfos de carbono, CO y C-OO, respectivamente. Este espectro confirma la presencia de carbono dentro de la muestra y su formación como material compuesto, los autores sugirieron que los residuos de carbono en las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ se formaron durante la calcinación del ácido cítrico como precursor de carbono [19, 20].



(a)



(b)



(c)

FIGURA 4. Se muestra los espectros XPS de alta resolución de la muestra: (a) O 1s, donde se identifican contribuciones de enlaces O-Ti (530.21 eV) y O-C (531.1 eV); (b) Ti 2p, mostrando el doblete característico de Ti^{4+} con picos Ti 2p_{3/2} (458.69 eV) y Ti 2p_{1/2} (464.6 eV); y (c) C 1s, con señales asociadas a enlaces C-C (284.5 eV), C-O (285.4 eV), C-OO (288.45 eV) y Ti-C.

Los resultados de las pruebas de cronoamperometría se muestran en la figura 5. En ellas se observan las respuestas de fotocorriente (μA)-voltaje (V) en función del tiempo de las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$, cuando se irradiaron con luz solar (a) o luz visible (b), la respuesta de ambas películas se comparó con la respuesta producida por la película de TiO_2 libre de carbón. En la figura 5a se observa que, al irradiar las películas con luz del espectro solar, todas ellas produjeron una respuesta de fotocorriente en la superficie del material, la fotocorriente generada por la película de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ fue de 45 (μA), más del doble de la fotocorriente generada por la muestra de TiO_2 (20 μA), este incremento puede atribuirse a la mejora de la absorción de luz y la supresión efectiva de la recombinación de carga. En contraste, la fotocorriente de $\text{TiO}_2\text{:CM}$ fue tan solo de 10 μA , lo que sugiere una deficiencia en la absorción de luz debido a la clase de las partículas de carbón utilizadas.

Para examinar y evaluar la respuesta de la fotocorriente únicamente por la irradiación de la luz visible y con ello observar el efecto de la clase de las partículas de carbón en las muestras; se utilizó un filtro de 400 nm para cortar toda la contribución de la energía UV, (figura 5b). Las películas de TiO_2 y $\text{TiO}_2\text{:CM}$ no generaron ninguna

iluminación con filtro de 400 nm, evidenciando su activación eficiente en la región visible.

fotocorriente, lo que explica su ausencia en el gráfico. Sin embargo, las películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ exhibieron una fotocorriente de 12 μA . Este incremento en el valor se atribuye a la presencia de carbón dots, ya que el TiO_2 se activa en longitudes de onda superiores a 387 nm [21]. Los resultados sugieren la que las diferentes formas de incorporación del tipo de carbón afectan en las propiedades electroquímicas, en la película $\text{TiO}_2\text{:CM}$ el tipo de carbón dentro de la muestra se encuentra en con tamaños de partícula de aproximadamente 10 μm , provocando una absorción muy alta a la radiación electromagnética, implicando una baja penetración de la misma en la muestra. En la película de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ algunos estudios recientes han demostrado la capacidad de los puntos de carbono para mejorar las propiedades fotocatalíticas, gracias a la propiedad de conversión ascendente, que consiste en la emisión de radiación de menor longitud de onda. tras la excitación con luz de mayor longitud de onda. Esta propiedad explica la fotocorriente generada en longitudes de onda superiores a 387 nm como se propone en el trabajo de Shen et al. en 2014 [22].

Para determinar la longitud de onda de activación para cada muestra, se realizaron mediciones de fotocorriente en función de la longitud de onda (IW). Como se muestra en la Figura 6, se observa que en las películas de TiO_2 y $\text{TiO}_2\text{:CM}$ la fotoactivación comienza a partir de 387 nm, alineándose con la longitud de onda de activación de TiO_2 . En particular, la película $\text{TiO}_2\text{:CD}$ inicia la fotoactivación actual a 450 nm. Estos hallazgos corroboran los observados mediante cronoamperometría, confirmando la incorporación de puntos de carbono en $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y su activación en la región visible del espectro.

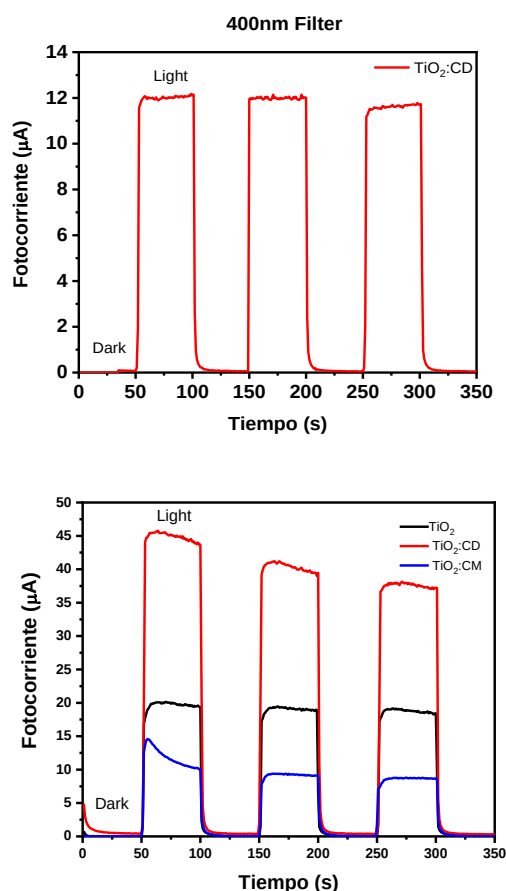


FIGURA 5. Respuesta de la fotocorriente en función del tiempo para películas de TiO_2 , $\text{TiO}_2\text{:CD}$ y $\text{TiO}_2\text{:CM}$ bajo ciclos de oscuridad e irradiación luminosa (a). El material $\text{TiO}_2\text{:CD}$ presenta la mayor fotocorriente bajo el Filtro AM1.5 (b) Fotocorriente de $\text{TiO}_2\text{:CD}$ bajo

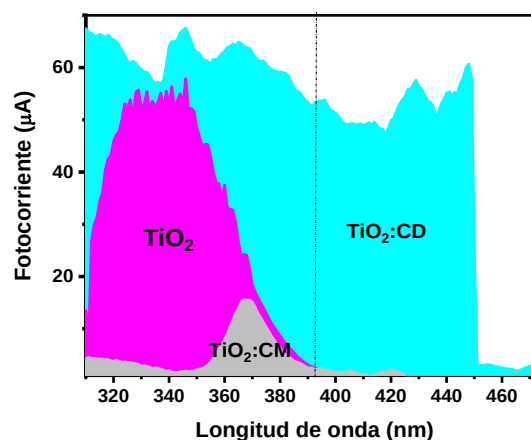


FIGURA 6. La figura muestra la respuesta de fotocorriente en función de la longitud de onda para películas basadas en TiO_2 , $\text{TiO}_2\text{:CM}$ y $\text{TiO}_2\text{:CD}$. En el eje horizontal se representa la longitud de onda (nm), mientras que en el eje vertical se muestra la fotocorriente generada (μA).

La actividad fotocatalítica de la películas de $\text{TiO}_2\text{:CD}$, $\text{TiO}_2\text{:CM}$ y TiO_2 se investigó monitorizando la intensidad de la

banda de absorción en 552 nm de la solución de rodamina B [5 mg/ml] bajo irradiación con luz visible, como se muestra en la figura 7. Después de 6 horas, el porcentaje de degradación para la película $\text{TiO}_2\text{:CD}$ fue de un 88.5%, la película de TiO_2 no superó el 50% de degradación y el desempeño de la película de $\text{TiO}_2\text{:CM}$ fue muy deficiente, degradando solo el 11% del contaminante. Esto es puede ser debido a que las partículas de carbón, dependiendo de su origen, distribución y tamaño tiene una alta influencia en la absorción de la radiación.

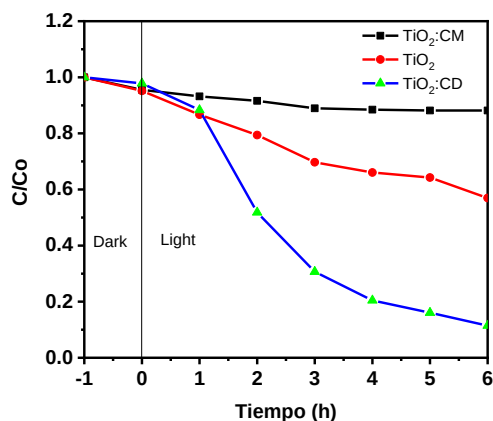


FIGURA 7. La figura muestra la variación de la concentración normalizada (C/C_0) en función del tiempo durante el proceso de degradación fotocatalítica para TiO_2 , $\text{TiO}_2\text{:CD}$, $\text{TiO}_2\text{:CM}$. En el eje horizontal se representa el tiempo de reacción (h), mientras que en el eje vertical se muestra la relación C/C_0 , donde C es la concentración en un tiempo determinado y C_0 la concentración inicial.

IV. CONCLUSIONES

La película $\text{TiO}_2\text{:CD}$ presentó una respuesta fotocatalítica significativamente mejorada en comparación con TiO_2 y $\text{TiO}_2\text{:CM}$. Los resultados experimentales muestran que la incorporación de carbono favorece la transferencia de electrones fotogenerados, inhibiendo su recombinación gracias al aumento en la movilidad de carga. La absorción óptica y el tamaño de las partículas de carbono son determinantes en el desempeño del fotocatalizador.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Instituto Politécnico Nacional (IPN) y al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada (CICATA), Unidad Legaria, por las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo. Asimismo, se agradece el apoyo del Laboratorio de Materiales Funcionales por el acceso a la infraestructura y equipos de caracterización.

REFERENCIAS

- [1] Krishnan, R. Y. et al., *Removal of emerging micropollutants originating from pharmaceuticals and personal care products (PPCPs) in water and wastewater by advanced oxidation processes: A review*, Environ Technol Innov **23**, 654 (2021).
- [2] Kishor, R. et al., *Ecotoxicological and health concerns of persistent coloring pollutants of textile industry wastewater and treatment approaches for environmental safety*, J Environ Chem Eng **9**, 105012 (2021), <https://doi.org/10.1016/j.jece.2020.105012>.
- [3] Zhu, D. & Zhou, Q., *Action and mechanism of semiconductor photocatalysis on degradation of organic pollutants in water treatment: A review*, Environmental Nanotechnology, Monitoring and Management **12**, 100255 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.enmm.2019>.
- [4] Rengifo-Herrera, J. A. & Pulgarin, C., *Why five decades of massive research on heterogeneous photocatalysis, especially on TiO_2 , has not yet driven to water disinfection and detoxification applications. Critical review of drawbacks and challenges*, Chemical Engineering Journal **477**, 146875 (2023), <https://doi.org/10.1016/j.ccej.2023.146875>.
- [5] Jari, Y. et al., *A comprehensive review on TiO_2 -based heterogeneous photocatalytic technologies for emerging pollutants removal from water and wastewater: From engineering aspects to modeling approaches*, Journal of Environmental Management **373**, 123703 (2025), Preprint at <https://doi.org/10.1016/j.jenvman.2024.123703>.
- [6] F.A. Filippin, E. Santos, L.B. Avale, *Semiconductor properties Titanium oxide formed on glass/ Ti/TiO_2 substrates in diluted acid solution*. Anales AFA Vol. **28**, 45-49 (2017).
- [7] Kumaravel, V., Mathew, S., Bartlett, J. & Pillai, S. C., *Photocatalytic hydrogen production using metal doped TiO_2 : A review of recent advances*, Applied Catalysis B: Environmental **244**, 1021–1064 (2019), <https://doi.org/10.1016/j.apcatb.2018.11.080>.
- [8] Kuldeep, A. R., Bhosale, A. S. & Garadkar, K. M., *Enhanced photocatalytic performance of TiO_2 -carbon nanocomposite*, Journal of Materials Science: Materials in Electronics **31**, 9006–9017 (2020).
- [9] Wu, J. C., Chuang, Y. H., Liou, S. Y. H., Li, Q. & Hou, C. H., *In situ engineering of highly conductive TiO_2 /carbon heterostructure fibers for enhanced electrocatalytic degradation of water pollutants*, J Hazard Mater **429**, 128328 (2022).
- [10] Souza, D. R., Neves, J. V. S., França, Y. K. S. & Malheiro, W. C., *TiO_2 Synthesis by the Pechini's Method and Application for Diclofenac Photodegradation*, Photochem Photobiol **97**, 32–39 (2021).
- [11] Kite, S. V., Sathe, D. J., Patil, S. S., Bhosale, P. N. & Garadkar, K. M., *Nanostructured TiO_2 thin films by chemical bath deposition method for high photoelectrochemical performance*, Mater Res Express **6**, 026411 (2019).
- [12] Lim, C. et al., *Carbon-titanium dioxide heterogeneous (photo)catalysts ($\text{C}-\text{TiO}_2$) for highly efficient visible light photocatalytic application*, Compos B Eng **241**, 109997 (2022).

- [13] Wiranwetchayan, O., Promnopat, S., Thongtem, T., Chaipanich, A. & Thongtem, S., *Effect of polymeric precursors on the properties of TiO₂ films prepared by sol-gel method*, Mater Chem Phys **240**, 122219 (2020).
- [14] Coromelci-Pastravanu, C., Ignat, M., Popovici, E. & Harabagiu, V., TiO₂-coated mesoporous carbon: Conventional vs. microwave-annealing process, J Hazard Mater **278**, 382–390 (2014).
- [15] <http://xpspeak.software.informer.com/4.1/>. Consultado el 5 de enero de 2025.
- [16] <https://srdata.nist.gov/xps/selEnergyType.aspx>. Consultado el 5 de enero de 2025.
- [17] El Mel, A. A., Angleraud, B., Gautron, E., Granier, A. & Tessier, P. Y., *XPS study of the surface composition modification of nc-TiC/C nanocomposite films under in situ argon ion bombardment*, Thin Solid Films **519**, 3982–3985 (2011).
- [18] Ming, H. et al., *Scanning transmission X-ray microscopy, X-ray photoelectron spectroscopy, and cyclic voltammetry study on the enhanced visible photocatalytic mechanism of carbon-TiO₂ nanohybrids*, Appl Surf Sci **258**, 3846–3853 (2012).
- [19.] Sakthivel, S. & Kisch, H., Daylight Photocatalysis by Carbon-Modified Titanium Dioxide, Angewandte Chemie - International Edition **42**, 4908–4911 (2003).
- [20] Górska, P. et al., TiO₂ photoactivity in vis and UV light: The influence of calcination temperature and surface properties, Appl Catal B **84**, 440–447 (2008).
- [21] Aliyeva, H. et al., Photo-anodes based on TiO₂ and carbon dots for photo-electrocatalytical measurements, Mater Lett **250**, 119–122 (2019).
- [22] Sendão, R. M. S., Esteves da Silva, J. C. G. & Pinto da Silva, L., Photocatalytic removal of pharmaceutical water pollutants by TiO₂ – Carbon dots nanocomposites: A review, Chemosphere **301**, (2022).

Aprender explicando: Impacto de los proyectos de exposición oral en el aprendizaje de la Física



ISSN 1870-9095

Miriam Marcela Scancich

*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura,
Universidad Nacional de Rosario, Santa Fe, Argentina.*

E-mail: scancich@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 5 de octubre de 2025, aceptado el 30 de noviembre de 2025)

Resumen

La exposición oral se destaca como un género académico frecuentemente empleado en la universidad. Esta es considerada una estrategia adecuada para la transmisión de conocimientos, el fortalecimiento de la formación de los estudiantes, la construcción de sentidos y la retroalimentación permanente de los procesos. Esta metodología favorece la toma de decisiones y fortalece aspectos académicos, cognitivos, sociales y comunicativos. En este trabajo se presenta una reflexión sobre la implementación de esta estrategia en cursos de Física básica universitaria de carreras de Ingeniería.

Palabras clave: Exposición oral, Física básica universitaria.

Abstract

Oral presentations stand out as a frequently used academic genre at universities. They are considered an appropriate strategy for transmitting knowledge, strengthening student learning, constructing meaning, and providing ongoing feedback on processes. This methodology facilitates decision-making and strengthens academic, cognitive, social, and communicative aspects. This paper presents a reflection on the implementation of this strategy in basic physics courses for Engineering programs.

Keywords: Oral presentation, Basic University Physics.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la competencia comunicativa oral se presenta como un desafío persistente dentro de los procesos formativos de la educación superior, particularmente en el ámbito de la ingeniería.

La implementación de proyectos basados en la exposición oral de temas de Física representa una estrategia pedagógica centrada en el estudiante, que promueve una participación activa en la construcción del conocimiento. Desde una perspectiva constructivista, esta modalidad permite que los estudiantes no solo incorporen contenidos conceptuales, sino que los resignifiquen a partir de su propia investigación, interpretación y comunicación. Esta estrategia puede generar un impacto significativo en el proceso de enseñanza y de aprendizaje de la Física en el nivel universitario. Esta práctica no solo permite a los estudiantes consolidar sus conocimientos disciplinares, sino que también promueve el desarrollo de competencias transversales esenciales para su formación integral. Según [1] desde el punto de vista didáctico y disciplinar, las habilidades de comunicación oral en el ámbito universitario, espacio en el que se promueven diversas prácticas relacionadas con el uso efectivo del lenguaje, son determinantes. Asimismo, pueden tenerse en cuenta algunas habilidades que el estudiante requiere desarrollar como parte

de su formación entre ellas las que se refieren a la indagación y búsqueda de información relevante para crecer en lo personal y en lo productivo [2]. En términos de aprendizaje significativo [3] los proyectos favorecen la conexión entre los nuevos conceptos físicos y los saberes previos, especialmente cuando los temas se relacionan con situaciones cotidianas, tecnologías cercanas o fenómenos observables. La necesidad de comunicar lo aprendido impulsa una apropiación más profunda de los contenidos, en contraste con estrategias de enseñanza exclusivamente expositivas o memorísticas. En este trabajo se presenta una reflexión acerca de las implicaciones y desafíos de la implementación de exposiciones orales, en la actividad curricular Física del ciclo básico de carreras de Ingeniería.

II. SOBRE LOS PROYECTOS DE EXPOSICIÓN ORAL

En el marco de la actividad curricular Física que se desarrolla en el ciclo básico de las carreras de Ingeniería de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Universidad Nacional de Rosario, Argentina, se implementó una estrategia basada en la elaboración y presentación de proyectos por parte de los estudiantes. Esta propuesta pedagógica buscó no solo facilitar la comprensión

de los conceptos fundamentales de la Física, sino también fomentar el aprendizaje activo, el trabajo colaborativo y el desarrollo de habilidades científicas y comunicativas.

Los proyectos consistieron en la selección, investigación y exposición de temas clave de la planificación de la actividad curricular en el área de la Mecánica, tales como Cinemática, Dinámica, Energía, Leyes de conservación, entre otros, abordados desde una mirada integradora y contextualizada. Los estudiantes trabajaron en grupos, explorando aplicaciones prácticas, proponiendo ejemplos concretos, y, en algunos casos, desarrollando pequeñas experiencias demostrativas o modelos explicativos.

Esta metodología promovió que los alumnos asumieran un rol activo en su proceso formativo: debieron indagar en diversas fuentes, contrastar información, organizar los contenidos con rigurosidad conceptual y comunicarlos de manera clara.

El uso de recursos digitales, simulaciones interactivas y visualizaciones gráficas fue particularmente relevante en el contexto de la enseñanza de la Física, ya que permitió representar fenómenos abstractos de manera más tangible y comprensible. Además, el trabajo en equipo incentivó el desarrollo de competencias interpersonales, como la coordinación, la responsabilidad compartida y la resolución de conflictos.

III. RESULTADOS

Durante las exposiciones, se generaron espacios de diálogo e intercambio, donde las preguntas y observaciones de docentes y compañeros favorecieron la reflexión crítica, uno de los pilares del enfoque constructivista. Además, el uso de recursos digitales y visuales permitió representar fenómenos abstractos de forma más accesible, en consonancia con estudios que destacan el valor de la visualización en la enseñanza de las ciencias [4].

En la figura 1 se muestran algunas instancias de exposición de diversos temas de la actividad curricular.



FIGURA 1. Estudiantes de Física presentando proyectos.

Desde el punto de vista actitudinal, se observó un aumento del interés y la motivación por la asignatura. El formato de exposición —ya sea oral, audiovisual o experimental— ofrece a los alumnos un espacio para expresarse, colaborar y aplicar la Física en contextos reales o simulados. Esta participación activa fomentó el sentido de pertenencia, el compromiso con el aprendizaje y el desarrollo de habilidades como la comunicación, el trabajo en equipo y la responsabilidad. Además, los proyectos permitieron abordar

objetivos de formación integral, al articular competencias científicas con capacidades críticas y creativas. La reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje y la retroalimentación entre pares fortaleció la autonomía intelectual y la capacidad de autoevaluación.

Al preparar una exposición, los estudiantes reorganizan, profundizan y resignifican los contenidos. Así, se vieron obligados a entender realmente los conceptos para poder explicarlos con claridad a otros. En este sentido ayudó a mejorar la comprensión conceptual. Se promovió claramente el paso de un aprendizaje memorístico a uno significativo. Intentaron explicar ciencia en lenguaje accesible, estructurar ideas y usar recursos visuales o experimentales. En algunos estudiantes se observó una mejora en la expresión oral, en el uso del vocabulario técnico y un aumento de la confianza al hablar en público. Los proyectos se llevaron a cabo en grupos, lo cual promovió habilidades de: cooperación, organización, resolución de conflictos y responsabilidad compartida. Al ser protagonistas del proceso, los alumnos se sintieron más involucrados y motivados, especialmente al tomar decisiones, investigar fuentes, sintetizar información y resolver problemas prácticos. Este enfoque activo despertó curiosidad, especialmente cuando hubo experimentos o situaciones reales. Esto impulsó una actitud más autónoma y reflexiva frente al conocimiento científico promoviendo el desarrollo de pensamiento crítico. Muchos alumnos pasaron de ver a la Física como algo abstracto o difícil, a considerarla al menos interesante, útil para entender el mundo de lo cotidiano.

IV. REFLEXIONES FINALES

Se observó que los estudiantes asumieron un rol activo en su proceso formativo: indagaron en diversas fuentes, organizaron los contenidos con rigurosidad conceptual y los comunicaron de manera clara. El trabajo en equipo incentivó competencias como la coordinación, la responsabilidad compartida y la capacidad de resolver problemas en conjunto.

En conclusión, los proyectos presentados en la asignatura Física demostraron ser una herramienta didáctica eficaz para fortalecer la comprensión conceptual, incrementar la motivación estudiantil y favorecer una enseñanza más participativa, dinámica y centrada en el estudiante.

Este estudio pone de relieve que la exposición oral, además de fortalecer los conocimientos que los estudiantes desarrollan a lo largo de su formación, constituye un recurso pedagógico que posibilita la comunicación y socialización de conceptos fundamentales de la Física.

Desde esta perspectiva, la estrategia posibilita al estudiante consolidar los saberes construidos y explorar diversas formas de transmisión del conocimiento que garanticen su comprensión por parte del interlocutor. Tal proceso es considerado valioso, en tanto promueve un desarrollo integral y un enriquecimiento significativo de la formación académica.

Sin embargo, y a pesar de su importancia para la promoción de aprendizajes, aún hay una tarea pendiente por resolver en lo que se refiere al uso de herramientas tecnológicas y a cómo realizar un mejor aprovechamiento de estas para la enseñanza de la oralidad en contextos presenciales y no presenciales. De acuerdo con [5], "*los procesos de incorporación de tecnología en el ámbito educativo son fenómenos complejos que traen aparejadas tensiones diversas generadas por una multiplicidad de variables intervinientes*" (p. 85). El fenómeno vinculado con las transformaciones educativas posteriores a la pandemia sigue generando incertidumbres y presentando nuevos retos. En este contexto, el docente se configura como un agente clave en la construcción de soluciones y en la implementación de estrategias eficaces que permitan afrontarlos, favoreciendo la práctica y el fortalecimiento de las habilidades orales mediante el uso de recursos digitales.

Finalmente, se reconoce un cambio positivo en la percepción de la Física como disciplina: los alumnos comienzan a verla como una herramienta para comprender el mundo, más allá de su dificultad técnica. Esta transformación en la actitud frente a la disciplina puede generar un impacto duradero en su disposición hacia el aprendizaje científico.

REFERENCIAS

- [1] Saimovna Sirazova, L., *The Perceived Influence of Self-Efficacy Concerning Oral Presentations*, Revista San Gregorio **36**, (2019).
<https://doi.org/10.36097/rsan.v0i36.1206>
- [2] Sarmiento González, D. M., *El Aprendizaje Activo como Estrategia Pedagógica para el Desarrollo de Competencias Tecnológicas en Estudiantes de Quinto Grado de la Institución Educativa María Auxiliadora de San Juan del Cesar, La Guajira (INEMAUX)*, Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar **8**, 11701-11718 (2024). DOI https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i1.10473
- [3] Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, (Editorial Trillas, México, 1983).
- [4] Manghi, D. y Haas, V., *Uso de imágenes en clases de Ciencias Sociales y Ciencias Naturales: enseñando a través del potencial semiótico visual*, Enunciación **20**, 248-260 (2015).
- [5] Monjelat, N., Peralta, N. & Martín, P. S., *Saberes y prácticas con TIC: ¿instrumentalismo o complejidad?*, Perfiles Educativos **43**, 171 (2021).
<https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2021.171.59225>

Comprobando la ley de variación de intensidad de la luz con la distancia por medio de sensores para Arduino



Pedro A. Willging, Carmen E. Lambrecht, Juan M. Distel, Mario G. Campo

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa,
Av. Uruguay 151, Santa Rosa, La Pampa, CP 6300, Argentina.*

E-mail: pedro@exactas.unlpam.edu.ar

ISSN 1870-9095

(Recibido el 18 de agosto de 2025, aceptado el 31 de octubre de 2025)

Resumen

En este trabajo se describe una experiencia de laboratorio para comprobar la variación de la intensidad de la luz respecto de la distancia a la fuente emisora. Ha sido llevada a cabo utilizando dispositivos de robótica educativa, con sensores y placa Arduino. Además de referenciar las leyes de la física que subyacen a la experiencia, se indica la manera en que se ha elaborado el dispositivo para la toma y registro de datos. Se incluye el análisis de los datos recolectados en una prueba experimental y se hacen consideraciones relacionadas con su utilización en las clases de física.

Palabras clave: robótica educativa, Arduino, prácticas de laboratorio.

Abstract

This paper describes a laboratory experiment to test the variation of light intensity with respect to the distance from the emitting source. It was carried out using educational robotics devices, sensors, and an Arduino board. In addition to referencing the laws of physics underlying the experiment, it describes how the device for data collection and recording was designed. It includes an analysis of the data collected in an experimental test and discusses considerations related to its use in physics classes.

Keywords: educational robotics, Arduino, lab practices.

I. INTRODUCCIÓN

La variación de la intensidad luminosa sobre una superficie con la distancia a la fuente de luz, representa una función matemática muy atrayente de estudiar en el nivel medio. Desde la práctica docente, se observa que los estudiantes tienden a pensar que la relación entre dos variables es lineal, cualquiera sea el fenómeno que esté ocurriendo.

El uso de una placa Arduino y un luxómetro, permiten construir un equipo de bajo costo para la medición de la intensidad de la luz de diferentes lámparas y así recolectar los datos necesarios para su posterior análisis, a fin de determinar la relación funcional entre las variables.

II. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA INVOLUCRADOS EN ESTA EXPERIENCIA

Para caracterizar como la luz ilumina a diferentes objetos, se utilizan varias magnitudes. Una de ellas es la iluminación E . Si se considera una fuente de luz pequeña en comparación con sus alrededores, esta emite luz que se propaga en forma rectilínea. Cuando esta luz alcanza una pantalla, la iluminación E que llega a ella depende de la intensidad de luz

de la lámpara I , de la distancia a la misma d , y del ángulo con la que el rayo de luz incide en dicha pantalla, medido respecto de una línea normal a la superficie (o de un versor unitario normal a la superficie, ver Figura 1) [1, 2].

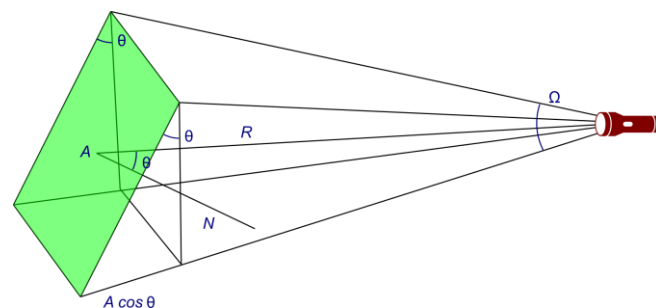


FIGURA 1. Fuente de luz, proyección sobre una pantalla y variables a considerar.

Matemáticamente, esta relación se expresa en la siguiente fórmula:

$$E = \frac{I \cos \theta}{d^2}. \quad (1)$$

Si la luz incide en forma perpendicular a la superficie, el ángulo es igual a cero, por lo que la iluminación:

$$E = \frac{I}{d^2} \quad (2)$$

En el sistema internacional (SI), la unidad de medida de la iluminación E es lux (lx) y la de la intensidad luminosa I es candela (cd). En el caso estudiado, la pantalla es el propio luxómetro y se considera que la luz llega en forma perpendicular a su superficie, por lo que el ángulo es nulo [3]. Otra magnitud utilizada es el flujo luminoso, que está relacionado con la cantidad total de luz visible emitida por una fuente luminosa. La unidad de medida del flujo es el lumen (lm). Pueden deducirse las relaciones entre lux, lumen y candelas y se ilustran en la Figura 2: 1 lumen = 1 candela $\times$ estereorradián (1 lm = 1 cd $\cdot$ sr). Por otro lado, 1 lux = 1 lumen por metro cuadrado (1 lx = 1 lm/m²) [4].

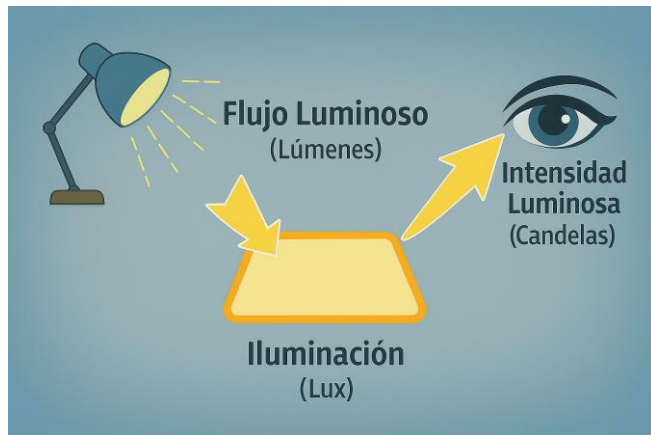


FIGURA 2. Relación entre distintas unidades fotométricas.

III. USO DE ROBÓTICA EDUCATIVA COMO RECURSO PARA EL APRENDIZAJE DE LAS CIENCIAS

En los cursos de ciencias experimentales, armar dispositivos para involucrar a las/os estudiantes de manera activa es un desafío que intenta superar los acercamientos teóricos desconectados de las experiencias tangibles. Quienes persiguen mejoras en la educación, están a la búsqueda de metodologías innovadoras y recursos de aprendizaje valederos para incorporar en la currícula escolar. Una de esas metodologías con potencial de mejorar la experiencia de aprendizaje es la robótica educativa [5]. Actualmente, la robótica educativa se está haciendo de un lugar en cursos de todos los niveles educativos, particularmente por su capacidad de integrar varias disciplinas, como la Mecánica, la Física, la Informática, la Biología, y la Química, entre otras. Otra ventaja del uso de la robótica, es que permite una experiencia real, tangible, donde las/os estudiantes pueden armar y explorar con el diseño de artefactos electrónicos, generar hipótesis sobre los mecanismos y sensores, para posteriormente verificar, validar o contraponer sus

suposiciones [6, 7]. Por otro lado, los costos de los dispositivos necesarios para crear un robot están ahora al alcance de un entusiasta de la electrónica. Sensores, partes mecánicas y plaquetas controladoras se consiguen en el mercado a costos accesibles aún para instituciones educativas con bajo presupuesto. Colaboran también con la proliferación de proyectos de robótica educativa, las iniciativas de software y hardware abierto que permiten la creación de artefactos de aprendizaje y recolección de datos innovadores.

Existen diversas motivaciones por las cuales la ciencia experimental moderna requiere de dispositivos automáticos de medición. Ya sea por lo peligroso de los materiales que se manipulen (como en el caso de experimentos de física nuclear), porque se necesita recolectar datos en lugares inaccesibles o durante períodos muy prolongados, o porque los parámetros a considerar son muy complejos con las técnicas tradicionales. Por ello, es muy conveniente introducir en las prácticas de laboratorio nuevos dispositivos automáticos que sean seguros, fácilmente programables y baratos. Este tipo de características deseables las reúnen los micro-controladores Arduino [8]. Para quienes no están familiarizados, una descripción detallada del funcionamiento del ambiente Arduino puede encontrarse en Organtini [9]. Hay varias experiencias de utilización de este tipo de recursos tecnológicos en el aula de física, que involucran distintas áreas, tales como la cinemática [10], termodinámica [11], electricidad [12] y otros conceptos fundamentales de la física [13]. En estas experiencias, se demuestra el valor didáctico del uso de esta metodología y recursos tecnológicos.

IV. METODOLOGÍA: ARMADO DEL DISPOSITIVO PARA RECOLECTAR LOS DATOS Y PROCEDIMIENTOS DE MEDICIÓN

Para el armado del dispositivo de medición, se utilizó una placa Arduino UNO y un luxómetro Bh1750 (voltaje de operación: 3 a 5 V, respuesta espectral similar a la del ojo humano, rango de medición 1-65535 lux, Figura 3). Al circuito se le agregó un interruptor permitiendo la toma de datos en lapsos de tiempo controlados por quien estaba a cargo del experimento. Se utilizaron dos fuentes de luz. Una de ellas es una linterna con 7 diodos led, y la otra fuente de luz es una lámpara led 5,5 W.

La Figura 4 muestra un esquema del dispositivo montado para realizar el experimento. En el mismo se observa la ubicación de la fuente de luz (**FL**) y el luxómetro (**L**) que está montado en la placa Arduino, ambos separados una distancia **d**, que se mide con una cinta métrica. En las Figuras 11 y 12, se ilustra por medio de fotos el montaje experimental implementado en el laboratorio. En el ambiente donde se realizó el experimento, se evitaron las fuentes de iluminación externas (ventanas), si bien no se logró una oscuridad completa, el espacio de trabajo quedó en semipenumbra.



FIGURA 3. Luxómetro Bh1750.

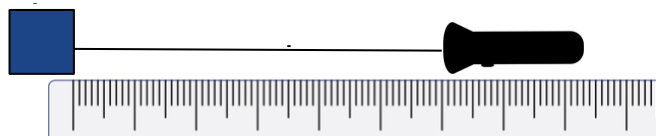


FIGURA 4. Esquema del montaje para la toma de datos.

Se varió la distancia de la fuente de luz al luxómetro y se recolectaron los datos de intensidad de luz utilizando un programa codificado en lenguaje Arduino (ver el Anexo), pudiendo hacer esa recolección de forma automática y también definiendo manualmente cuando comenzar o detener el registro. En la Figura 5 se muestra una captura de pantalla de los datos que se iban registrando por medio del programa informático. Estos datos se almacenan en archivos digitales que contienen las marcas de tiempos y las intensidades de luz captadas por el sensor. En la Figura 6, se muestra el esquema de conexión del luxómetro y la placa Arduino, con los otros componentes necesarios (interruptor, resistencia de 10k Ohm) para el funcionamiento y registro de datos experimentales. Este esquema ha sido realizado con el software provisto por la iniciativa abierta de Fritzing (<https://fritzing.org/>).

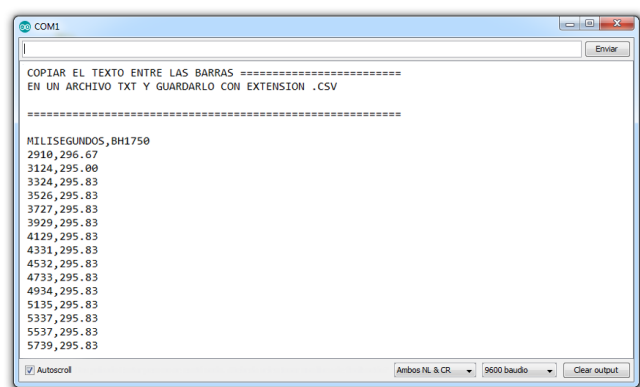


FIGURA 5. Captura de pantalla del registro de datos obtenidos con el dispositivo.

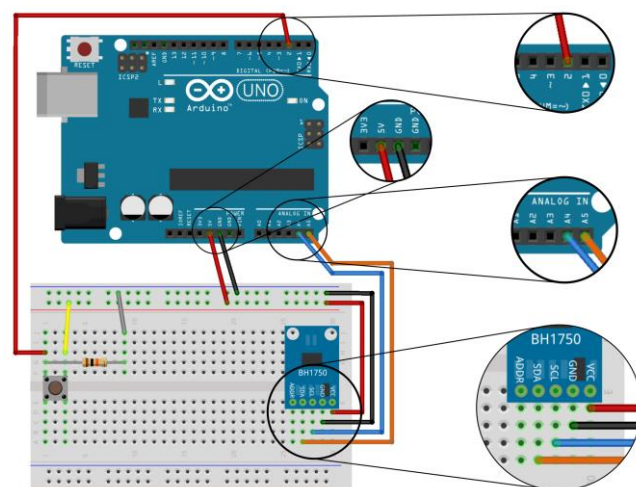


FIGURA 6. Esquema del circuito de conexión de las partes del dispositivo de medición.

V. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Se realizaron varias mediciones, a fines de comprobar la relación (2). Las Tablas I y II muestran los resultados obtenidos, utilizando dos fuentes de iluminación distintas. Además, se ha incluido una tercera columna en las tablas que muestra el cálculo de la inversa del cuadrado de la distancia, que permitirá el análisis de los resultados.

TABLA I. Datos para la fuente de luz 1.

d (m)	E (lx)	d^{-2} (m ⁻²)
0.10	14000	100
0.15	6800	44.44
0.20	3790	25
0.25	2380	16
0.30	1660	11.11
0.35	1200	8.163
0.40	910	6.25

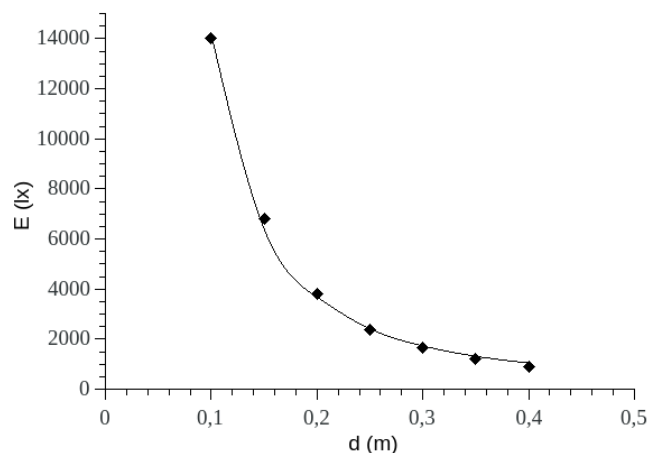


FIGURA 7. Iluminación en función de la distancia, fuente de luz 1.

El gráfico de la Figura 7 representa los datos de iluminación en función de la distancia para los datos de la Tabla I. Para analizar si la relación se corresponde con una función que depende de la inversa del cuadrado de la distancia, se grafica la iluminación en función del d^{-2} . En el gráfico de la Figura 8 puede observarse que se obtiene una función lineal, lo que demuestra que se comprueba la relación (2) y cuya ecuación permite determinar la intensidad de luz de la fuente de luz utilizada ($R^2 = 0.9981$). En este caso, el valor obtenido es de 140 lm.

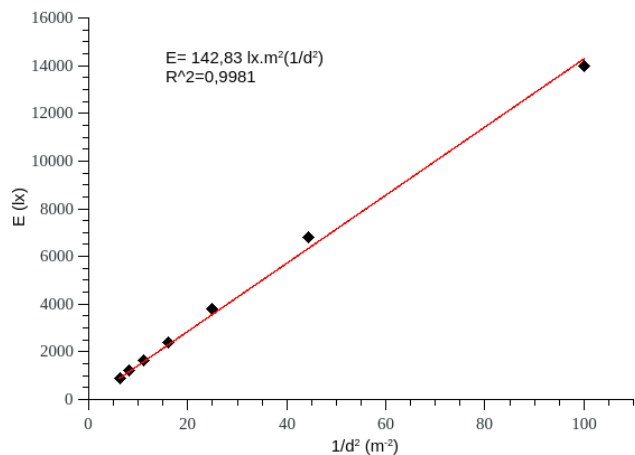


FIGURA 8. Iluminación en función de la inversa de la distancia para la fuente de luz 1.

En cuanto a la segunda fuente de luz utilizada, cuyos datos corresponden a la Tabla II, se realizó para el análisis de los mismos, el gráfico correspondiente a la iluminación en función de la distancia (Figura 9). Al igual que en el caso anterior, para verificar si se trata de una relación inversamente proporcional, se analizó la gráfica de la Figura 10, que permite comprobar nuevamente la relación para el rango de datos estudiado ($R^2 = 0.9983$). En este caso, la intensidad luminosa de la fuente de luz, se corresponde con un valor aproximado a los 40 lm.

TABLA II. Datos para la fuente de luz 2.

$d \text{ (m)}$	$E \text{ (lx)}$	$d^{-2} \text{ (m}^{-2}\text{)}$
0.15	1900	44.44
0.20	1055	25
0.25	716	16
0.30	528	11.11
0.35	414	8.16
0.40	350	6.25
0.45	280	4.94
0.50	270	4
0.60	222	2.77
0.70	188	2.04

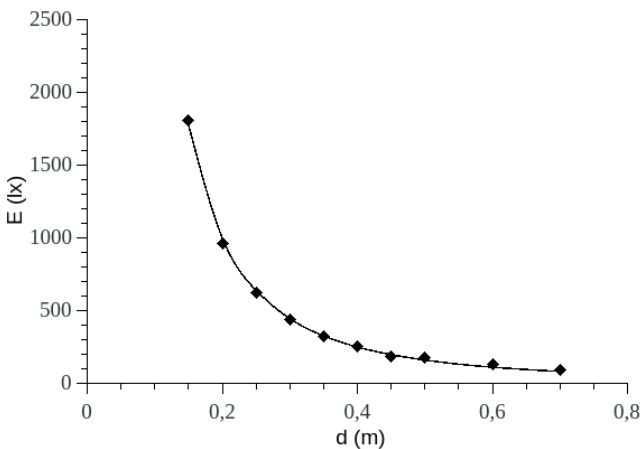


FIGURA 9. Iluminación en función de la distancia, fuente de luz 2.

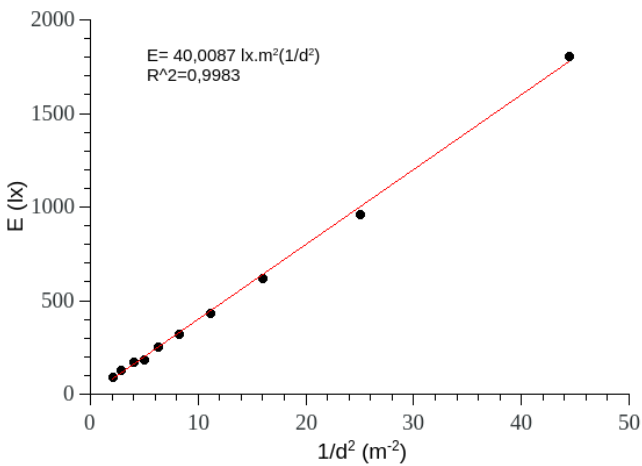


FIGURA 10. Iluminación en función de la inversa de la distancia para la fuente de luz 2.

VI. CONCLUSIONES

La experiencia realizada y los resultados obtenidos muestran que es posible comprobar experimentalmente la relación de la iluminación con la inversa del cuadrado de la distancia, utilizando un dispositivo experimental de bajo costo. El armado del equipo experimental para registrar los datos, puede realizarse con materiales que no son muy costosos, y obtenibles de manera relativamente sencilla. Es decir, que esta experiencia puede replicarse en distintos ámbitos educativos aun disponiendo de pocos recursos técnicos y económicos.

El código de programación necesario para el registro de los datos desde el sensor y su posterior almacenamiento, no tiene muchos requerimientos de espacio o memoria en la computadora y es totalmente configurable, ya que se hace con un lenguaje de código abierto (ver Anexo).

Quienes participan del experimento, particularmente si lo hacen desde su armado y puesta a punto, pueden ver todos los aspectos relacionados con el registro de los datos, la sensibilidad de los dispositivos empleados a las condiciones del laboratorio y su posterior procesamiento.

Este tipo de experiencias de laboratorio, utilizando elementos de robótica educativa, hardware y software libre, tienen la posibilidad de actualizar y dinamizar las prácticas habituales de las clases de física y otras ciencias experimentales, brindando oportunidades para desarrollar actividades en la modalidad de aprendizaje activo, con estudiantes motivados e involucrados en su aprendizaje.

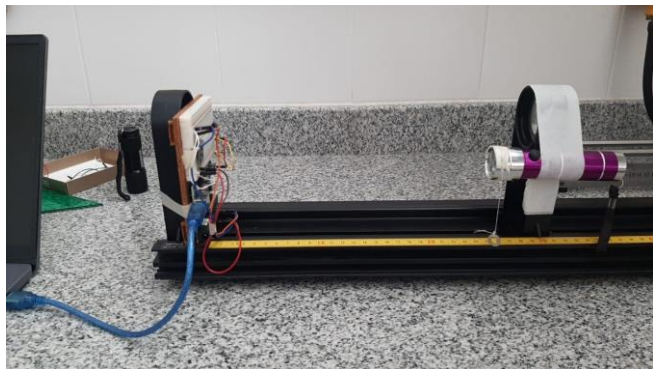


FIGURA 11. Montaje del dispositivo de medición.

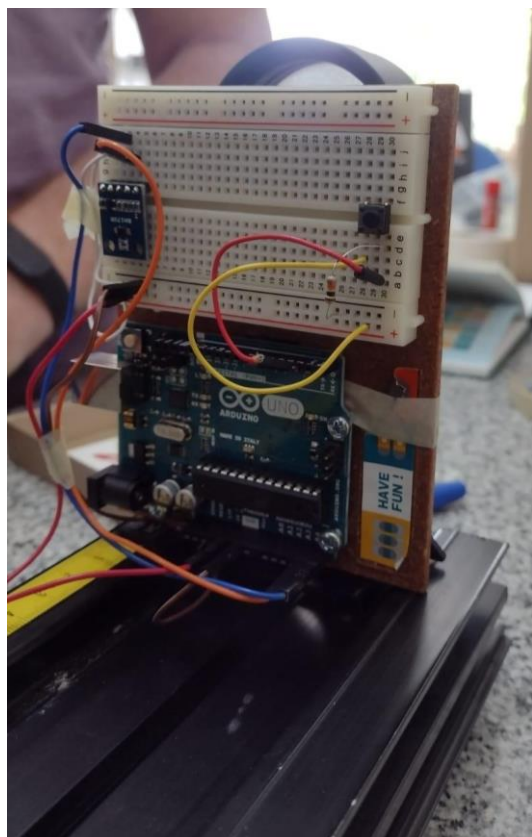


FIGURA 12. Placa Arduino con sensor para medir la iluminación.

REFERENCIAS

- [1] Tippens, P. E., *Física. Conceptos y aplicaciones*. Séptima edición, (McGraw-Hill Interamericana, México, 2007).
- [2] Zitzewitz, P. W. & Meff, R. F., *Física 2. Principios y problemas*, Primera Edición, (McGraw-Hill Interamericana, México, 1995).

- [3] Máximo, A. & Alvarenga, B., *Física general con experimentos*, Cuarta edición, (Oxford, México, 1998).
- [4] Gómez González, E. G., *Guía básica de conceptos de radiometría y fotometría*. Universidad de Sevilla: Sevilla, España. <https://www.electro-genesis.com/WebGenesisBiblio/Literatura/Articulos/Iluminacion/Web/Radiometria%20y%20Fotometria.pdf>
Consultado el 7 de julio de 2025.
- [5] Pujol López, F. A., et al., *Robótica educativa como herramienta de aprendizaje de tecnología*. En: Roig-Vila, Rosabel (coord.). *Redes de Investigación e Innovación en Docencia Universitaria*. Volumen 2020. Alicante: Universidad de Alicante, Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), 389-397 (2020).
- [6] Patiño, P. K. et al., *Using Robotics as a Learning Tool in Latin America and Spain*, IEEE Revista Iberoamericana de Tecnologías del Aprendizaje **9**, 144-150 (2014).
- [7] Weinberg, J. B. & Yu, X., *Robotics in education: Low-cost platforms for teaching integrated systems*, IEEE Robotics & automation magazine **10**, 4-6 (2003).
- [8] Lesteiro-Tejeda, J. A., Hernandez-Delfín, D. & Batista-Leyva, A. J. *Automatización de experimentos con Arduino*, Revista Cubana de Física **34**, 120-124 (2017).
- [9] Organtini, G., *Arduino as a tool for physics experiments*, Journal of Physics: Conference Series. Volumen **1076**. (2018). DOI: 10.1088/1742-6596/1076/1/012026
- [10] Barralaga, F., *Sensores Ultrasónicos y Arduino en Experiencias de Laboratorio de Cinemática*, Revista De La Escuela De Física **9**, 65–72 (2022).
- [11] Sari, U. & Kirindi, T., *Using Arduino in physics teaching: Arduino-based physics experiment to study temperature dependence of electrical resistance*, Journal of Computer and Education Research **7**, 698-710 (2019).
- [12] Souza, S. S. F. de, *Use of the Arduino platform in the teaching/learning process of electricity fundamentals in physics*, Research, Society and Development **13**, 3 (2024).
- [13] Kinchin, J., *Using an Arduino in physics teaching for beginners*, Physics Education **53**, 6 (2018).

ANEXO

Código para el funcionamiento y registro de los datos:

```
#include <Wire.h>
#include <BH1750.h>

BH1750 lightMeter;
float luxBH1750;
const int PinBoton = 2; //PIN DEL BOTÓN
const int PinLed = 13; //PIN DEL LED
INTEGRADO
int EstadoBoton = 0;
int midiendo = 0;
unsigned long milisegundos;

void setup(){
  // Inicializando Pines
  pinMode(PinLed, OUTPUT);
  pinMode(PinBoton, INPUT);
```

```

// Inicializando Consola
Serial.begin(9600);

// Inicializando el bus I2C
Wire.begin();

// Inicializando BH1750
lightMeter.begin();

Serial.println(F("Presione el botón
para comenzar a medir"));
}

void loop() {
  // leemos el estado del botón,
  verificamos nuevamente en 150 ms
  EstadoBoton = digitalRead(PinBoton);
  if (EstadoBoton == HIGH) {
    delay(150);
    if (EstadoBoton == HIGH) {
      if (midiendo == 1) {
        // Si ya estábamos midiendo,
        vamos a escribir en la consola el
        // separador final de texto.
        midiendo = 0;
        Serial.println("");
      }
    }
  }

  Serial.println("=====
  =====");
  Serial.println("");
  } else {
    // Si NO estábamos midiendo,
    escribimos en la consola el separador de
    // inicio y dejamos una
    separación al texto anterior, ya que no
    // podemos borrar el texto
    anterior de la consola.
    midiendo = 1;
    Serial.println("");
  }
}

```

```

Serial.println("");
Serial.println("");
Serial.println("");
Serial.println("");
Serial.println("");
Serial.println("COPIAR EL TEXTO
ENTRE LAS BARRAS=====");
Serial.println("EN UN ARCHIVO TXT
Y GUARDARLO CON EXTENSIÓN .CSV");
Serial.println("");

Serial.println("=====
=====");
Serial.println("");

Serial.println(F("MILISEGUNDOS,BH1750"));
}
}
if (midiendo == 1) {
  digitalWrite(PinLed, HIGH);

  // Tomamos la medida con el sensor
  BH1750
  luxBH1750 =
  lightMeter.readLightLevel();

  // Obtenemos los milisegundos desde
  el inicio de arduino.
  milisegundos = millis();

  Serial.print(milisegundos);
  Serial.print(",");
  Serial.println(luxBH1750);
} else {
  digitalWrite(PinLed, LOW);
}

delay(200);
}

```