

# Estudio cinemático del movimiento de cuerpos que ruedan por un plano inclinado



Silvia Calderón<sup>1</sup>, Pablo Núñez<sup>2</sup>, y Salvador Gil<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Instituto Superior del Profesorado J.V. González, Rivadavia 3570 –Buenos Aires.

<sup>2</sup>Instituto de Industria de la Universidad Nacional de Gral. Sarmiento, Buenos Aires; Instituto San José de Morón, Buenos Aires.

<sup>3</sup>Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, M. de Irigoyen 3100, San Martín (1650), San Martín Buenos Aires.

E-mail: [sgil@unsam.edu.ar](mailto:sgil@unsam.edu.ar)

(Recibido el 28 de Noviembre de 2008; aceptado el 9 de Enero de 2009)

## Resumen

En este trabajo estudiamos experimentalmente la cinemática de cuerpos rígidos que ruedan sin resbalar por un plano inclinado. Nuestro objetivo es estudiar cómo, para un dado ángulo de inclinación del plano, la distribución de masa de los cuerpos afecta su aceleración. Para este estudio utilizamos una cámara digital en modo video. El experimento es de muy bajo costo y susceptible de reproducirse en el aula, sin necesidad de contar con un laboratorio especial. Los resultados pueden explicarse adecuadamente con modelos simples.

**Palabras clave:** Experimentos de bajo costo, nuevas tecnologías, rotación de cuerpos rígidos.

## Abstract

Here we study the kinematics of rigid bodies that roll down an inclined plane without slipping. This work is divided in two parts. Our objective is to study how, for a given angle of inclination of the plane, the mass distribution of the body affects its acceleration. To carry out this study we make use of a digital camera in video mode. The experiment is very low cost, and can be carried out in a classroom, without the need of a special laboratory and equipment. The result can be explained very well with simple models.

**Keywords:** Low cost experiments, new technology, rigid body rotation.

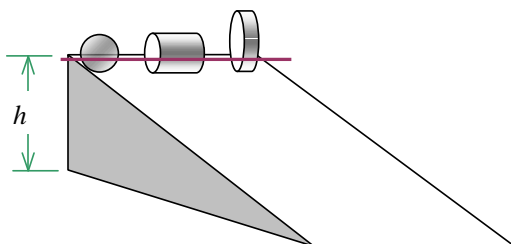
PACS: 01.50.Lc, 01.50.My, 07.05.Hd, 45.20.Dd, 45.40.Cc

ISSN 1870-9095

## I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de un cuerpo rígido que rueda sin deslizar puede estudiarse descomponiendo su movimiento en: traslación de su centro de masa (c.m.) y en rotación del cuerpo alrededor de un eje que pasa por dicho centro.

Una característica de un cuerpo que rueda sin deslizar por un plano inclinado es que los puntos en contacto con el plano, definen una línea que se encuentra instantáneamente en reposo (eje instantáneo). Dado que la fuerza de roce entre el plano y el cuerpo, actúa en dichos puntos de contacto, el rozamiento no realiza trabajo. Por lo tanto, cuando los cuerpos ruedan sin deslizar sobre la superficie se conserva la energía mecánica [1].



**FIGURA 1.** Si caen simultáneamente diferentes cuerpos por un plano inclinado no llegan a la base todos en el mismo instante.

Debido a la conservación de la energía mecánica y considerando que cada cuerpo parte del reposo, la conservación de la energía conduce a:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \quad (1)$$

donde  $M$  es masa del cuerpo,  $v$  es velocidad del centro de masa,  $h$  la altura del plano inclinado y  $\omega$  la velocidad angular del cuerpo respecto del centro de masa. Aquí  $I$  es el momento de inercia respecto del eje de rotación que pasa por el c.m.

La condición de rodar sin resbalar conduce a:

$$v = \omega R, \quad (2)$$

donde  $R$  el radio del cuerpo.

La altura desde donde cae el cuerpo puede expresarse en función del ángulo de inclinación del plano inclinado,  $\alpha$ , como:

$$h = l \sin \alpha, \quad (3)$$

donde  $l$  representa la longitud del plano.

El momento de inercia puede expresarse como:

$$I = kMR^2 \quad (4)$$

donde  $k$  es un número comprendido entre 0 y 1, que depende de la distribución de masa del cuerpo respecto al eje que pasa por su c.m.

Reemplazando en (1) las expresiones (2), (3) y (4) tenemos:

$$glsen\alpha = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}kv^2 \quad (5)$$

de donde:

$$v^2 = 2 \frac{gsen\alpha}{1+k} l \quad (6)$$

Por tratarse de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado,  $v^2 = 2al$  y la aceleración es:

$$a = \frac{gsen\alpha}{1+k} \quad (7)$$

Como  $k$  depende de la geometría del cuerpo, la expresión (7) muestra que diferentes cuerpos que ruedan sin resbalar por el plano inclinado caen con diferente aceleración. Esto significa que si se sueltan simultáneamente diferentes cuerpos desde la misma posición, llegará primero el de mayor aceleración, o sea el de menor  $k$  [1].

La expresión (7) también indica que la aceleración no depende de la masa del cuerpo. Por lo tanto, si se dejan caer en el mismo instante dos esferas de diferentes materiales y tamaño, llegarán simultáneamente a la base del plano.

La relación entre las aceleraciones de dos cuerpos con diferente distribución de masa es independiente de la inclinación del plano inclinado:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1+k_2}{1+k_1} \quad (8)$$

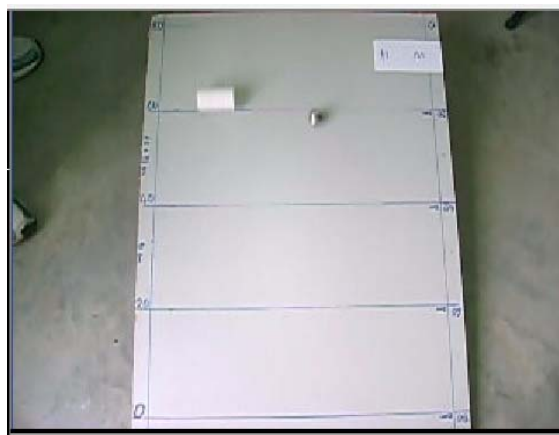
Algunos valores de  $k$  para cuerpos de geometría sencilla son:

- esfera :  $k = 2/5$ ,
- cilindro hueco de paredes delgadas:  $k = 1$ ,
- cilindro macizo  $k = 1/2$ .

## II. MÉTODO EXPERIMENTAL

Como plano inclinado se utiliza una tabla de madera de 20 mm de espesor con un recubrimiento laminado de fórmica que se apoya en el piso elevada por uno de los lados. Sobre la superficie se traza una cuadrícula de dimensiones conocidas para fijar una referencia y utilizarla como escala en la determinación de las posiciones. Esta escala nos permite convertir las coordenadas en píxeles de los fotogramas obtenidos con una cámara digital en longitudes

estándares [2, 3]. Se dejan caer diferentes cuerpos de a dos, para visualizar cuál llega primero a la base. Los cuerpos usados son: esfera de metal, esfera de madera, cilindro macizo, cilindro hueco de metal y cilindro hueco de PVC.



**FIGURA 2.** Fotograma que muestra el movimiento de un cilindro hueco (izquierda) y una esfera (derecha). Los cuerpos se sueltan simultáneamente desde la misma posición. Se visualiza que la esfera desciende más rápido que el cilindro.

Es posible asimismo utilizar cuerpos que en principio no rotan, como por ejemplo un prisma rectangular, colocando dos círculos de igual tamaño pegados a cada una de sus bases, por ejemplo dos discos de CD's. De este modo podemos ampliar aun más la variedad de cuerpos a utilizar con distintas distribuciones de masa. Claramente en este caso, el radio  $R$  que aparece en la Ec. (2), es el radio de los discos pegados en las bases del cuerpo.

Se colocan los cuerpos sobre el plano cuidando que los centros de masa estén sobre la misma línea de largada o sea, estén a igual distancia del extremo inferior del plano. Se filma el movimiento de los cuerpos al soltarlos. Se utilizó una cámara digital Sony Cyber-shot DSC - S500 que filma 30 cuadros por segundo.

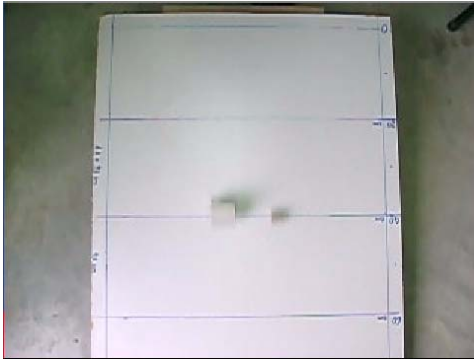
Los datos se analizaron con los programas Data Point [4] y Physics ToolKit [5]. Éste último disponible libremente en <http://www.physicstoolkit.com>. En las Refs. [2, 3] se discute en más detalle el uso de una cámara digital para determinar la posición de los móviles en función del tiempo.

Para el cálculo de la incerteza experimental de la aceleración se utilizaron los métodos estándares de cuadrados mínimos para el caso de ajustes polinómicos [6,7] presentes en diversos programas comerciales como Origin (®OriginLab) o Matlab (® The MathWorks).

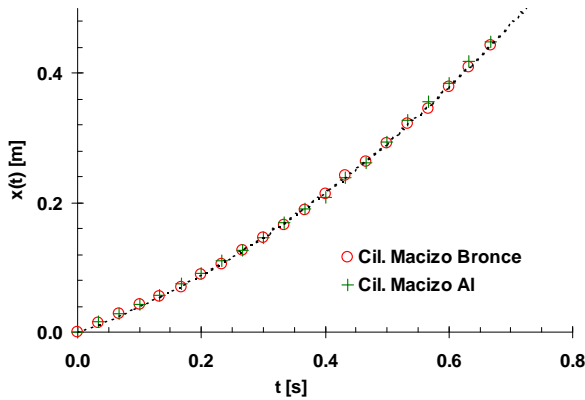
## III. RESULTADOS OBTENIDOS

Usando la técnica experimental descrita más arriba, se realizaron una serie de mediciones soltando dos cuerpos a la vez. En las Fig. 3 se observa un fotograma del video obtenido para el caso de dos cilindros diferentes cayendo por el plano inclinado. En la Fig. 4 se muestra la posición de ambos cuerpos como función del tiempo. En esta

misma figura se observa la predicción obtenida usando la aceleración descrita por la Ec. (7).

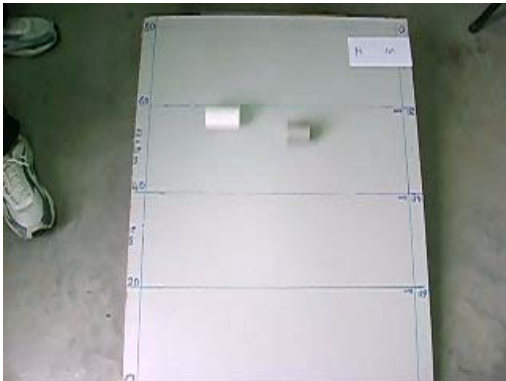


**FIGURA 3.** Fotograma correspondiente al movimiento de los dos cilindros macizos donde se visualiza que ambos tienen igual posición en cierto instante.

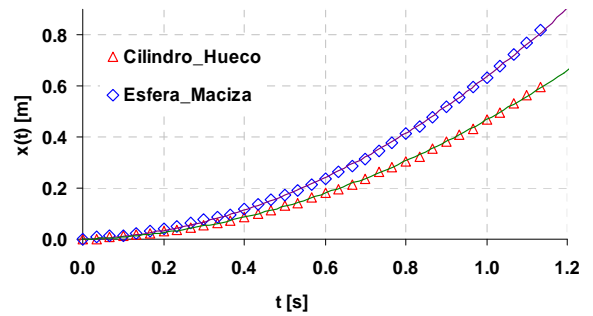


**FIGURA 4.** Los círculos rojos representan la posición del cilindro macizo de bronce. Las cruces verdes, el cilindro macizo de aluminio. Dentro de los errores de medición, la posición en función del tiempo es la misma para ambos cuerpos. La línea continua de puntos es la predicción teórica

En la Fig. 5 se muestra un fotograma de un video obtenido para el caso de un cilindro hueco (izquierda) y uno macizo (derecha).



**FIGURA 5.** Fotograma que muestra el movimiento de un cilindro hueco (izquierda) y otro macizo (derecha).



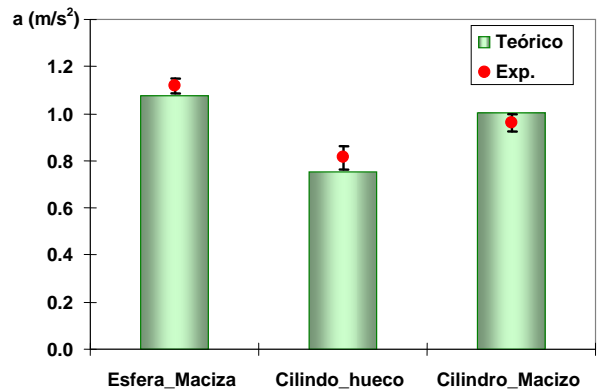
**FIGURA 6.** Posición en función del tiempo obtenida experimentalmente para un cilindro hueco (triángulos rojos) y una esfera (rombos azules) por un plano inclinado con  $\alpha=9^\circ$ . Las líneas continuas son ajustes teóricos a los datos experimentales.

En la Fig. 6 se muestra la posición de un cilindro hueco y una esfera en función del tiempo, junto con las expectativas teóricas, usando la aceleración descrita por la Ec. (7).

En la Fig. 7 y en la tabla I, se compararon los valores de aceleraciones obtenidas experimentalmente con las predicciones teóricas.

**TABLA I.** Aceleraciones de caída (teóricas y experimentales) de los diferentes cuerpos con sus correspondientes incertezas.

Cuerpo	Valor teórico	Valor experimental
	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$	$a \text{ (m/s}^2\text{)}$
Esfera	$1.077 \pm 0.009$	$1.12 \pm 0.02$
Cilindro macizo	$1.005 \pm 0.008$	$0.932 \pm 0.010$
Cilindro hueco	$0.754 \pm 0.006$	$0.815 \pm 0.009$



**FIGURA 7.** Representación gráfica de las aceleraciones de caída. Las columnas representan los valores teóricos y los puntos, los obtenidos experimentalmente con sus correspondientes errores de medición.

Como puede observarse el acuerdo entre las expectativas teóricas y los datos experimentales es muy bueno.

#### IV. CONCLUSIONES

Esta actividad ilustra un modo de estudiar cuantitativamente la caída de cuerpos que ruedan por un plano inclinado. Es de muy bajo costo y fácil de reproducir en el aula. Los resultados obtenidos ilustran claramente varios aspectos importantes de la roto-traslación y la importancia de la distribución de masa en la rotación. En particular, dado que el movimiento es uniformemente acelerado, pero con un valor mucho menor que la aceleración de la gravedad ( $g$ ), permite obtener el valor de esta aceleración con una precisión del orden del 1%. Los valores de posición en función del tiempo pueden compararse muy bien con los cálculos de los modelos teóricos. Además, comparando la caída de cuerpos de geometrías diferentes en un mismo plano inclinado, es posible comparar cuantitativamente los resultados experimentales con las respectivas teorías. Se observa claramente como la distribución de masa determina las aceleraciones de caída. Los cuerpos con distribución de masa concentrada cerca de su eje de giro (cilindro macizo) caen más rápido que aquellos cuya masa está más alejada del dicho eje (cilindro hueco). Esto se debe a que los cuerpos con distribución de masa alejada de su eje de giro, tienen una proporción mayor de su energía cinética comprometida en energía de rotación y por tanto la energía cinética de traslación es menor y demora más su caída.

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Asociación Física Argentina por la ayuda económica otorgada a través del Proyecto INVOFI, que sirvió para desarrollar este proyecto.

#### REFERENCIAS

- [1] Sears, Zemansky, Young, Freedman, *Física Universitaria*, (9ª Edición, Addison Wesley Longman México, 1998).
- [2] Calderón, S. y Núñez, P. y Gil, S. *Cámara digital como instrumento de laboratorio - estudio del tiro oblicuo*, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. **3** (1) Jan. 2009
- [3] Gil, S.; Reisin, H. D. y Rodríguez, E., *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768, (2006).
- [4] *Data Point*, disponible como shareware en <http://www.stchas.edu/faculty/gcarlson/physics/datapoint.htm>, consultado en mayo/07 y en [http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft\\_sg.htm](http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft_sg.htm), consultado el 20/09/08
- [5] Disponible en [www.physicstoolkit.com](http://www.physicstoolkit.com). Consultado el 20/09/08
- [6] Gil, S. y Rodríguez, E., *Física re-Creativa*, (Prentice Hall, Buenos Aires, 2001).
- [7] Bevington, P. and Robinson, D. K., *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, (2nd ed. McGraw Hill, New York, 1993).