

# La cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo



Silvia Calderón<sup>1</sup>, Pablo Núñez<sup>2</sup> y Salvador Gil<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Instituto Superior del Profesorado J. V. González, Rivadavia 3570 –Buenos Aires.

<sup>2</sup> Instituto de Industrias de la Universidad Nacional de Gral. Sarmiento, Buenos Aires;  
Instituto San José de Morón, Buenos Aires.

<sup>3</sup> Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, M. de Irigoyen 3100,  
San Martín (1650), San Martín Buenos Aires.

**E-mail:** sgil@unsam.edu.ar

(Recibido el 6 de Octubre de 2008; aceptado el 22 de Diciembre de 2008)

## Resumen

En este trabajo presentamos un ejemplo de cómo una cámara digital o WebCam puede usarse como un instrumento de medición en el laboratorio para estudiar el movimiento de cuerpos en dos dimensiones. En particular discutimos el caso del tiro oblicuo cuando los efectos de roce del aire pueden despreciarse y también cuando éstos son significativos. En el primer caso, la descripción teórica es la que comúnmente se discute en los textos básicos de física. Cuando el roce con el aire es importante, se requiere de la resolución numérica de las ecuaciones de movimiento. Los resultados experimentales obtenidos en ambas situaciones concuerdan adecuadamente con los modelos teóricos propuestos. Este experimento muestra cómo una cámara digital puede convertirse en un instrumento de laboratorio útil y de bajo costo para estudiar diversos sistemas físicos, fácil de incorporar en laboratorios de física básica de universidades o en aulas y laboratorios de escuelas medias.

**Palabras clave:** Nuevas tecnologías (TICS), Cámara digital, tiro oblicuo, proyecto experimental, aprendizaje de la física.

## Abstract

We present a simple and inexpensive experiment that illustrates how a digital camera or WebCam can be used in the laboratory to carry out quantitative studies on the motion of a body in two dimensions. In particular, here we studied the case of projectile motion in two dimensions, when the effect of friction with the air is negligible and when it is not. In the first case, the results can be explained by the standard theory described in most basic texts of introductory physics. When the effect of friction with air is important, it is necessary to solve the equation of motion numerically. The experimental results in both cases can be successfully interpreted in terms of the corresponding theoretical models. These experiments show how a simple digital camera can be converted into a useful and inexpensive laboratory instrument to study several physical systems. This device can be used either in the context of a basic physics laboratory at university level or to carry out experiments in high school classrooms.

**Keywords:** New technologies (TICS) – Digital camera, projectile motion, experimental project, physics learning project.

**PACS:** 07.05.Hd, 07.05.Kf, 45.40.Gj

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

El objetivo principal del artículo es mostrar, mediante el ejemplo del estudio de un tiro oblicuo, cómo una cámara digital puede usarse como un instrumento de medición en el laboratorio.

El estudio de cinemática en una y dos dimensiones es un tema de tratamiento muy frecuente en muchos cursos de física básica. Pese al esfuerzo que dedicamos los profesores, diversos estudios han mostrado que muchos alumnos no comprenden claramente el significado físico de las ecuaciones, aun cuando las utilizan satisfactoriamente en la resolución de problemas [1].

En particular, respecto del movimiento en dos dimensiones, los estudiantes suelen presentar dificultades

para comprender que un movimiento real como el que realiza una pelota en tiro oblicuo, puede estudiarse como la superposición de dos movimientos imaginarios: uno hacia abajo con caída libre y otro en dirección horizontal. Esta dificultad se manifiesta cuando los alumnos responden erróneamente a cuestiones relacionadas con la comparación entre el tiempo de caída de dos cuerpos lanzados horizontalmente desde la misma altura o entre un cuerpo lanzado horizontalmente y otro que se deja caer verticalmente desde la misma altura [1]. Según las investigaciones la causa directa de los errores cometidos por los estudiantes está en considerar únicamente la distancia recorrida como factor a tener en cuenta para calcular el tiempo que tarda un cuerpo en llegar al suelo, olvidando el efecto de la velocidad.

Otro aspecto que presenta dificultades para los alumnos novatos es la comprensión y diferenciación de los gráficos de la trayectoria  $y = f(x)$  y de las ecuaciones horarias,  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$ .

Sobre la base de las consideraciones presentadas, nuestra propuesta consiste en utilizar una cámara digital en modo video para estudiar el movimiento de tiro oblicuo. El experimento consiste en filmar el movimiento en dos dimensiones de una pelota (tiro oblicuo) con la cámara digital. El video así adquirido tiene una serie de imágenes digitales tomadas en una secuencia conocida de tiempo, por ejemplo 30 cuadros por segundo (30 fps). En cada una de las imágenes digitales que forma el video, es simple determinar la posición de cualquier objeto relativa a un sistema de referencia [2,3]. Si se visualiza una imagen digital en una computadora utilizando programas como Photoedit (©Microsoft) o Corel Draw (©Corel) se pueden obtener las coordenadas en píxel de la posición del puntero del “mouse” [4]. Por lo tanto si en la imagen se introduce un objeto de dimensión conocida, es posible transformar las coordenadas en píxel a coordenadas convencionales. De este modo, observando el video cuadro a cuadro, podemos conocer la posición del objeto en cada instante de tiempo. Esto permite reconstruir la cinemática del cuerpo. Existen varios programas comerciales y sharewares que permiten reconstruir la cinemática de un objeto a partir de un video tal como *Videopoint Capture II* [5] comercializado por la firma Pasco y *Logger Pro 3* de la empresa Vernier [6]. Entre los de uso libre se encuentran Data Point [7], Physics Toolkit [8] y Tracker [9].

El trabajo consta de dos partes: la primera, cuando los efectos de roce con el aire son despreciables y la segunda, cuando dicho efecto es relevante. En el primer caso el planteo del problema es simple y se implementó con éxito en dos cursos de física destinado a estudiantes del profesorado de química y física y también con alumnos de escuelas de nivel medio. El segundo caso, cuando los efectos de roce son importantes, excede el nivel pretendido para un curso inicial de Física y se desarrolló en un taller para profesores de escuelas medias y en cursos de los primeros años de ingeniería.

En el primer caso se utiliza una esfera de un desodorante “roll-on” y en el segundo, una pelotita de ping pong. La diferencia fundamental entre estos dos proyectiles está en las energías cinéticas iniciales que, con un lanzador simple, adquieren ambos objetos y como se comparan las mismas con las pérdidas de energía por roce con el aire. En el caso de la bolilla del “roll-on”, las pérdidas de energía por roce con el aire son despreciables frente a la energía cinética inicial. En el caso de la pelotita de ping pong ocurre lo contrario. Experimentalmente encontramos que lanzando la bolilla de “roll-on” con un alcance aproximado de 1,50 m su movimiento puede estudiarse considerando despreciable el rozamiento con el aire y al lanzar una pelotita de ping-pong con un alcance aproximado de 4 m es necesario incluir el efecto del roce. Ambos experimentos son de bajo costo y de fácil implementación.

Cuando la fuerza de roce con el aire es importante y no puede despreciarse, la descripción teórica del movimiento se encuentra a través de la resolución numérica de integrales que no tienen solución analítica sencilla. La

propuesta consiste en integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento para pequeños intervalos de tiempo.

## A. Movimiento de un proyectil sin roce con el aire

En este caso el problema tiene una solución simple que se discute en la mayoría de los textos de física básica [10, 11, 12]. Las ecuaciones horarias se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 \cos \theta_0 t \\ y(t) &= y_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $(x_0, y_0)$  son las coordenadas del móvil a  $t=0$ ,  $v_0$  es la velocidad inicial de proyectil disparado con un ángulo  $\theta_0$  con la horizontal (eje  $x$ ).

Eliminando el tiempo  $t$  de las Ecs. (1) obtenemos la expresión de la trayectoria:

$$y(x) = y_0 + \tan \theta_0 (x - x_0) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} (x - x_0)^2 \quad (2)$$

## B. Movimiento de un proyectil considerando la fuerza de roce

Cuando un objeto se mueve en el seno de un fluido, en general está sometido a una fuerza de roce o arrastre que tiene una dirección opuesta a la velocidad. La característica de esta fuerza de arrastre depende de la forma de objeto y del régimen en el que se mueve a través del medio. A bajas velocidades, el régimen del movimiento del fluido es laminar y la fuerza de arrastre está dominada por los efectos viscosos que es proporcional a la velocidad del objeto. A mayores velocidades, el régimen de movimiento del fluido es turbulento y la fuerza de arrastre está dominada por efectos inerciales. En este caso la dependencia de esta fuerza es cuadrática en la velocidad. El número de Reynolds ( $R_e$ ) caracteriza el tipo de régimen de un fluido.  $R_e$  es un número adimensional y representa el cociente entre las fuerzas inerciales y las viscosas en el fluido [13, 14, 15].  $R_e$  se define como:

$$R_e = \frac{v d \delta}{\eta} \quad (3)$$

donde  $v$  es velocidad del objeto con relación al fluido,  $d$  es una dimensión lineal característica del objeto,  $\delta$  la densidad del fluido y  $\eta$  el coeficiente de viscosidad dinámica del fluido. Si  $R_e$  es menor que 2000 el flujo alrededor del objeto es esencialmente laminar. Cuando el flujo es laminar y  $R_e \leq 1$  la fuerza de rozamiento o arrastre es proporcional a la velocidad, esto es:

$$F_r = k v \quad (4)$$

La magnitud  $k$  depende del tamaño y forma del objeto y de la viscosidad del fluido. En particular si el objeto es

esférico y  $Re \leq 1$  la fuerza de roce está dada por la fórmula de Stokes:

$$F_r = 6\pi r\eta v \quad (5)$$

A números de Reynolds altos,  $Re > 3000$ , el régimen de fluido es turbulento, en estos casos una aproximación razonable de la fuerza de rozamiento o arrastre viene dada por [14, 16, 17, 18]:

$$F_r = \frac{1}{2} C_D \delta A v^2 \quad (6)$$

donde  $C_D$  es un coeficiente numérico cuyo valor depende de  $Re$  y de la forma del objeto,  $A$  es el área transversal del cuerpo ( $\pi r^2$  para una esfera),  $\delta$  la densidad del fluido y  $v$  la velocidad del objeto. Es interesante notar que la mayoría los textos de física básica, cuando discuten problemas de movimientos de péndulos, pelotas de ping pong o fútbol, describen el roce con el aire como si el régimen fuese laminar [18]. Esto es, consideran que la fuerza de roce con el aire viene descrita por una expresión proporcional a la velocidad,  $F_r = k v$ . Sin embargo, en la mayoría de los casos corrientes o normales de laboratorio, este tipo de movimiento ocurre en régimen turbulento, donde la fuerza de roce viene descrita por la expresión (6).

Las ecuaciones de movimiento de un cuerpo que incluyen una fuerza de roce proporcional a  $v^2$  no tienen en general resolución analítica sencilla. Pero sí es posible encontrar una solución numérica de la ecuación de movimiento.

En el caso del tiro oblicuo, si el proyectil se mueve con velocidad  $v$ , sobre el mismo actúa la fuerza gravitatoria y la de roce. Eligiendo la dirección de eje  $y$  vertical, tenemos:

$$F_x = m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x |v| = -k v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (7)$$

$$F_y = m \frac{dv_y}{dt} = -mg - k v_y |v| = -mg - k v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (8)$$

Aquí  $mg$  es el peso del cuerpo y hemos supuesto que la fuerza de roce viene dada por  $F_r = k v^2$ .

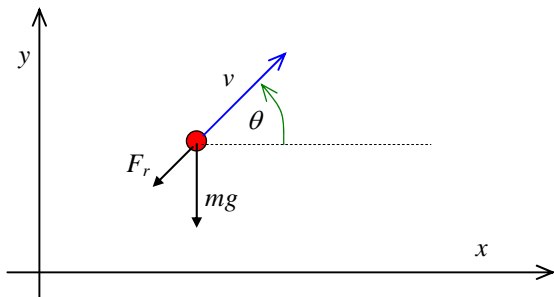


FIGURA 1. Objeto que se mueve con velocidad  $v$ . Su peso es  $mg$  y la fuerza de roce  $F_r$  tiene sentido contrario al de la velocidad  $v$ .

Si  $\theta$  es el ángulo que forma la velocidad  $v$  con la dirección horizontal, tenemos:

$$F_x = -F_r \cos \theta = -F_r \frac{v_x}{v} \quad (9)$$

$$F_y = -F_r \sin \theta - mg = -F_r \frac{v_y}{v} - mg \quad (10)$$

Por lo tanto:

$$a_x = -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_x \quad (11)$$

$$a_y = -\frac{k}{m} \sqrt{v_x^2 + v_y^2} v_y - g \quad (12)$$

La aproximación utilizada consiste en suponer que en un pequeño  $\Delta t$ , el cuerpo se desplaza:

$$\Delta x = v_x \Delta t \quad \text{y} \quad \Delta y = v_y \Delta t \quad (13)$$

Usando la aproximación de Euler, se puede obtener una aproximación aceptable de los datos con un  $\Delta t \approx 0.01s$ , aunque utilizando el método de Runge-Kutta se obtiene una mejor aproximación para el mismo  $\Delta t$ . A partir de las expresiones (11) y (12) se obtienen los valores de  $v_x$  y  $v_y$  para cada  $\Delta t$ :

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t) \Delta t \quad (14)$$

$$v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y(t) \Delta t \quad (15)$$

Iterando este procedimiento es posible encontrar  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $x(t)$  y  $y(t)$ . El proceso descrito por las Ecs.(11-15) puede ser implementado fácilmente en cualquier hoja de cálculo. [19]

## II. MÉTODO EXPERIMENTAL

El método experimental hace uso de una cámara digital en modo video y un lanzador de proyectil de fabricación "casera" como se muestra en la figura 2. El dispositivo está formado por dos tubos, uno dentro de otro. El de mayor diámetro tiene un pequeño tajo transversal por donde pasa una banda elástica a fin de sostener la pelota antes del disparo. Otra banda elástica, hace que el segundo tubo, que funciona como émbolo, golpee la pelota al soltarlo.

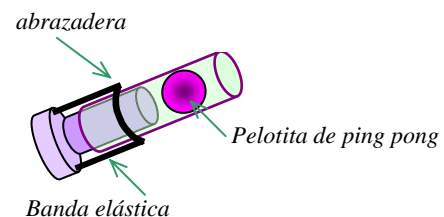


FIGURA 2. Esquema del disparador. El tubo usado es un trozo de caño de desagüe de 2".

Se filmó el evento con una cámara digital en modo video (Sony Cyber-shot DCS-S500) que filma a 30 cuadros por

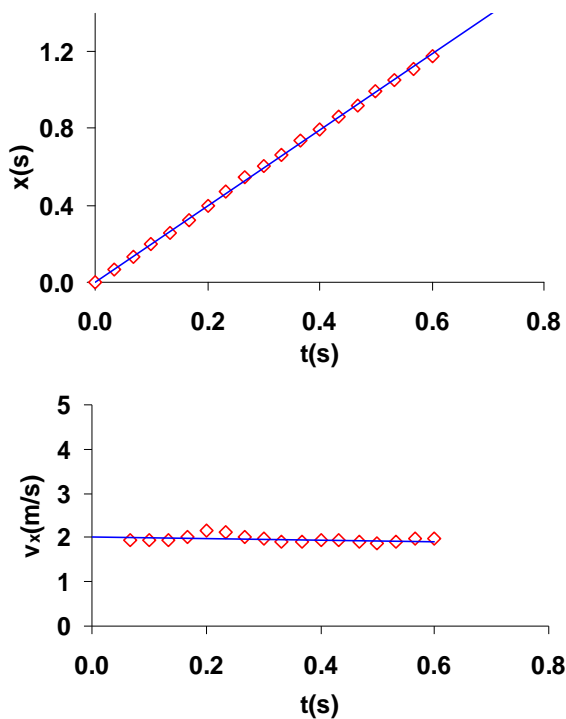
segundos. El análisis de los videos se realizó con el programa Data Point [7], que permite en forma muy simple determinar la posición ( $x, y$ ) de la pelota en cada cuadro del video. La posición real del objeto se obtuvo calibrando la escala en píxel con un objeto cuya dimensión real era conocida. Esto se logra introduciendo algún objeto de dimensiones conocidas en el fotograma.

Se utilizaron dos proyectiles de diámetros similares y distinta masa, una pelotita de “roll-on” y una de ping pong.

### III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

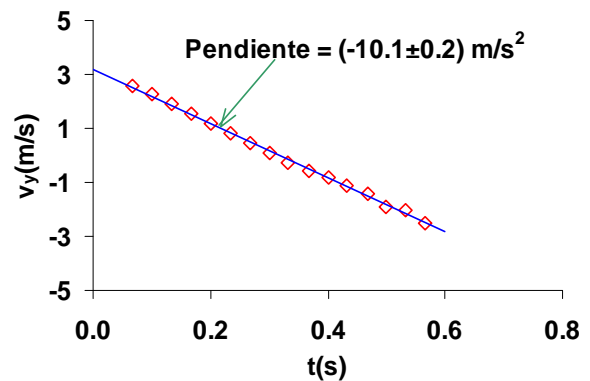
En las figuras 3 y 4 se muestran los resultados obtenidos para el caso de la pelota de “roll-on”. Estas figuras sugieren que el movimiento de este objeto puede ser descrito adecuadamente por un modelo que ignora por completo el roce con el aire. En particular la Fig. 3, indica que la componente horizontal de la velocidad es prácticamente constante en todo el movimiento. La Fig. 4 muestra la variación de la componente vertical de la velocidad en función de tiempo. La pendiente de la recta que ajusta los datos experimentales nos dan una aceleración consistente con el valor de  $g$ .

Por su parte, las figuras 5 y 6, muestran los resultados obtenidos con la pelotita de ping pong. En este caso el modelo sin roce es inadecuado ya que la componente horizontal de la velocidad disminuye monótonamente. Se puede observar asimismo que el modelo que incorpora el roce con el aire brinda una descripción excelente de los resultados experimentales. Estas figuras convalidan el modelo descrito por las Ecs. (11) a (15).

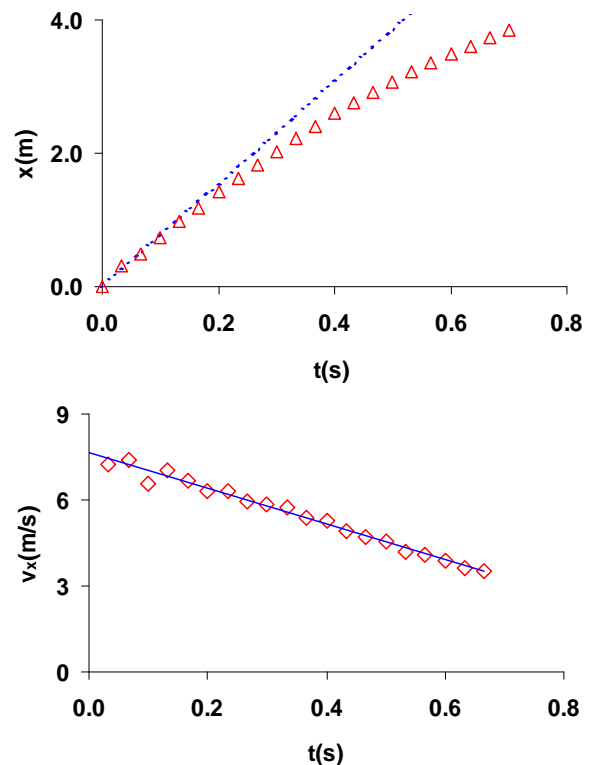


**FIGURA 3.** En el panel superior presentamos la posición horizontal  $x$ , como función del tiempo para la bolita de “roll-on”. En el panel inferior presentamos la componente horizontal de la

velocidad en función del tiempo. Los símbolos son los resultados experimentales, la línea continua es un ajuste lineal a los datos.

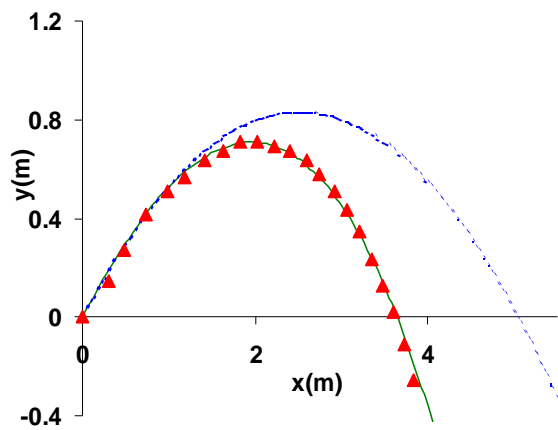


**FIGURA 4.** Variación de la componente vertical de la velocidad en función del tiempo para la pelota de roll-on. Los símbolos son los resultados experimentales, la línea continua es un ajuste lineal a los datos.



**FIGURA 5.** En el panel superior presentamos la posición horizontal  $x$ , como función del tiempo para la pelotita de ping pong. Los símbolos son los resultados experimentales y la línea continua es un ajuste lineal a los datos. En el panel inferior presentamos la componente horizontal de la velocidad en función del tiempo.

En la Fig. 6 se muestra en líneas de punto la trayectoria esperada si los efectos de roce son despreciados.



**FIGURA 6.** Trayectoria de la pelotita de ping pong. Los símbolos triangulares corresponden a los valores experimentales. La línea de puntos azul, representa el movimiento sin rozamiento. La línea de color verde muestra la trayectoria del movimiento con rozamiento según el modelo propuesto.

#### IV. APROXIMACIÓN PARA UN CURSO DE FÍSICA BÁSICA

Con una pelotita de “roll-on” y alcance menor a 2 m, su movimiento puede estudiarse despreciando el rozamiento con el aire, como ilustra la Fig. 3. En este caso la trayectoria es una parábola, la componente de la velocidad según la dirección horizontal es constante y la componente de la velocidad en la dirección vertical varía linealmente en el tiempo con una aceleración de valor igual a  $g$ . Dadas estas características del movimiento, la experimentación con la pelotita de “roll-on” puede ser usada adecuadamente en un curso de física básica.

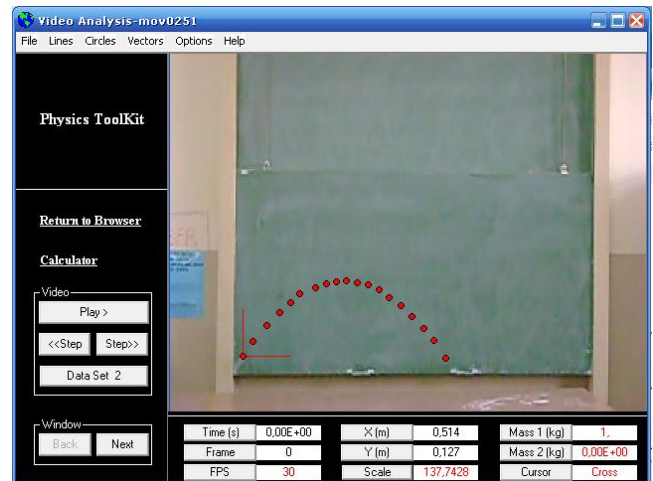
La actividad que fue ensayada en contextos educativos reales, consintió en filmar el movimiento de una bolilla de “roll-on” en el aula. Utilizando un software para analizar los videos, se obtuvieron los valores  $(t, x, y)$ . Se propuso a los estudiantes determinar:

- la variación de la coordenada  $x$  en función del tiempo,
- la variación de la coordenada  $y$  en función del tiempo.

A partir de los datos experimentales, se propuso que los estudiantes determinaran las componentes verticales y horizontales de la velocidad. Una vez obtenida esta información experimental, se propone que los alumnos ajusten sus resultados experimentales con los modelos teóricos pertinentes según las ecuaciones (1) y (2). En estas ecuaciones, los únicos parámetros no conocidos son la velocidad inicial  $v_0$  del proyectil y el ángulo que forma con la horizontal  $\theta_0$ . Estos parámetros se pueden variar hasta obtener un ajuste adecuado con los datos experimentales. Este procedimiento es muy simple de implementar en una hoja de cálculo [19]. El objetivo es lograr un ajuste adecuado de las velocidades  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$  e  $y(x)$ .

Alternativamente, una vez logrado un ajuste adecuado de los datos experimentales con el modelo teórico, este

*Cámara digital como instrumento de laboratorio: estudio del tiro oblicuo*  
 procedimiento se puede considerar como un método experimental para conocer y medir:  $v_x(0)$ ,  $v_y(0)$  y  $\theta_0$ .



**FIGURA 7.** Muestra de cómo se observa el resultado del análisis del video utilizando el programa Physics Toolkit.

#### V. CONCLUSIONES

En este trabajo se ilustra el uso de una cámara digital para estudiar el movimiento de objetos en dos dimensiones. En particular estudiamos el caso de un tiro oblicuo cuando el roce con el aire es despreciable y cuando no lo es. En ambos casos se comparan las predicciones teóricas con los resultados experimentales. Al usar una pelotita de ping pong como proyectil, los efectos de roce son importantes. Para comparar los resultados del modelo teórico con los datos, es necesario integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento. El acuerdo entre el modelo y los resultados es excelente.

Los resultados obtenidos son sencillos de analizar y el proyecto experimental se puede adaptar a cursos de distintos niveles de dificultad. La técnica usada permite estudiar el movimiento de cualquier objeto en dos dimensiones utilizando una tecnología de bajo costo y accesibles a diversas instituciones educativas de bajos recursos.

#### AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Asociación Física Argentina por la financiación del presente trabajo a través del Proyecto INVOFI. También agradecemos a Jorge A. Rubinstein por la atenta lectura del manuscrito y valiosos comentarios.

#### VI. REFERENCIAS

[1] Hierrezuelo, J. y Montero, A., *La ciencia de los alumnos. Su utilización en la didáctica de la Física y química*, (Elzevir, Granada- España, 1991).

- [2] Laws, P. y Pfister, H., *Using Digital Video Analysis in Introductory Mechanics Projects*, Phys. Teach. **36**, 282 (1998)
- [3] Gil, S.; Reisin, H. D., Rodríguez, E. (2006) *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768, 2006
- [4] xyExtract Graph Digitizer <http://www.gold-software.com/download5149.html>
- [5] Videopoint Capture II [www.Pasco.com](http://www.Pasco.com) . Consultado el 27/09/08
- [6] Logger Pro 3 from Vernier software [www.vernier.com](http://www.vernier.com). Consultado el 27/09/08
- [7] *Data Point*, disponible como shareware en <http://www.stchas.edu/faculty/gcarlson/physics/datapoint.htm>. Consultado en mayo/07 y en [http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft\\_sg.htm](http://www.fisicarecreativa.com/ajp/soft_sg.htm) . Consultado el 20/09/08
- [8] Physics ToolKit . Disponible en [www.physicstoolkit.com](http://www.physicstoolkit.com). Consultado el 20/09/08
- [9] Tracker, Disponible en <http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>. Consultado el 25/09/08
- [10] Giancoli, D. *Física* (Prentice-Hall Hispanoamericana, México, 1994. Original en inglés de 1980).
- [11] Sears, Zemansky, Young, Freedman, *Física Universitaria*, 9ª Edición, (Addison Wesley Longman, México, 1998. Original en inglés de 1996).
- [12] Tipler, P., *Física para la ciencia y la tecnología*, Vol 1. 4ª edición, (Ed. Reverté, España, 1999).
- [13] Frish, S. Timoreva, A. *Curso de Física General*, (Mir, URSS, 1973).
- [14] Munson, B. R., Young, D. F. and Okiishi, T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, (Wiley, New York, 1994).
- [15] Calderón, S. E., López, S. y Gil, S., *Determinación de la fuerza de roce con el aire usando nuevas tecnologías*, Revista de Enseñanza de la Física de la Asociación de Prof. de Física de Argentina **20**, 55-64 (2007).
- [16] Gil, S. y Rodríguez, E. *Física re-Creativa*, (Prentice Hall, Buenos Aires, 2001).
- [17] Parker, G., *Projectile motion with air resistance quadratic in the speed*, Am. J. Phys. **45**, 606 -610 (1977).
- [18] Takahashi, K. and Thompsom, D., *Measuring air resistance in a computerized laboratory*, Am. J. Phys. **67**, 709-711 (1999).
- [19] Ejemplos de archivos Excel que ilustran este tipo de cálculo pueden ser bajados de [www.fisicarecreativa.com](http://www.fisicarecreativa.com). En este sitio de Internet se publican proyectos experimentales desarrollados por estudiantes de diversas universidades de Argentina. Sitio consultado el 27/09/08