# La contracción de Lorentz en relatividad especial

**C. Zagoya, M. Fernández Guasti**
*Lab. de Óptica Cuántica, Depto. De Física, Universidad A. Metropolitana Iztapalapa, 09340 México, D.F., Ap. postal 55-534, México.*

**E-mail:** mfg@xanum.uam.mx

(Recibido el 17 de Octubre de 2008; aceptado el 18 de Diciembre de 2008)

**Resumen**
Se obtiene la contracción de Lorentz por medio de la medición de la longitud de una barra tomando en cuenta la distancia recorrida mientras se realizan las mediciones. Las derivaciones usuales encontradas en los textos corresponden a un caso especial de esta derivación, en el cual se miden los extremos de la barra al mismo tiempo. Se muestra que la condición de simultaneidad, contrario a lo que se piensa, no es necesaria para exhibir el fenómeno de contracción espacial. Así también, se analizan otros ejemplos que ilustran el uso de esta derivación.

**Palabras clave:** Relatividad especial, contracción espacial, simultaneidad.

**Abstract**
The Lorentz length contraction for a rod in uniform motion is derived performing two measurements at arbitrary times. This alternative derivation, in contrast with the one found in most textbooks, does not invoke the simultaneous measurement of two events. It thus avoids uncomfortable superluminal relationships. An example of a space contraction measurement from the same rest position in the observer frame illustrates the procedure.

**Keywords:** Special relativity, space contraction, simultaneity.

**PACS:** 03.30.+p 01.40.-d 01.55.+b **ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La contracción de Lorentz junto con la dilatación del tiempo son los dos fenómenos fundamentales que dan origen a varios efectos en relatividad espacial. La adición relativista de velocidades, el corrimiento al rojo de objetos recedientes o la contracción relativista de objetos acelerados [1, 2] son algunos ejemplos que pueden ser entendidos en términos de contracción espacial y dilatación temporal. Sin embargo, la contracción de Lorentz ha sido cuestionada debido a la existencia de algunas paradojas [3], así como a la dificultad de percibirla directamente [4]. Existen muchas discusiones concernientes a la realidad de la contracción de Lorentz [5, 6. 7. 8]. Por un lado, la contracción es considerada únicamente como una consecuencia de un cambio de coordenadas. Por otro lado, se piensa que la contracción de Lorentz es un cambio real en la forma del objeto, debido a las fuerzas electromagnéticas que varían con el movimiento del objeto.

La contracción espacial usualmente se obtiene de las transformaciones de Lorentz imponiendo como necesaria la condición de simultaneidad [9, 10, 11, 12, 13, 14]. En la derivación que aquí se presenta se considera la medición de los extremos de un objeto a tiempos arbitrarios. Para obtener la deformación espacial se utilizan las transformaciones de Lorentz tomando en cuenta el tiempo transcurrido entre las medidas. Este acercamiento es mucha más claro desde un punto de vista didáctico y hace evidente que la condición de simultaneidad es innecesaria. La correspondencia con el cálculo Galileano permite establecer claramente las similitudes y diferencias entre el caso clásico y el relativista.

## II. LAS TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

Consideremos el marco de referencia de un laboratorio y el de un objeto, a los cuales denotaremos como *lab* y *obj*, respectivamente. Supongamos que se mueven con velocidad relativa constante $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ en dirección arbitraria. Los cuadrivectores en estos marcos de referencia son $\boldsymbol{r}_{lab} = (ct_{lab}, x_{lab}, y_{lab}, z_{lab})$ y $\boldsymbol{r}_{obj} = (ct_{obj}, x_{obj}, y_{obj}, z_{obj})$. Las transformaciones de Lorentz [11, ch. V-5. p. 127] [15, p. 517], entre ambos sistemas, en términos de las componentes paralelas y perpendiculares al movimiento relativo son

$$ct_{lab} = \gamma\left(ct_{obj} + \frac{v \cdot r_{obj}}{c}\right),$$

$$r_{lab\parallel} = \gamma(r_{obj\parallel} + vt_{obj}) \,, \tag{1}$$

y $\boldsymbol{r}_{lab\perp} = \boldsymbol{r}_{obj\perp}$, donde $v = |\boldsymbol{v}|, \gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ y los subíndices $\parallel$ y $\perp$ se usan para distinguir las componentes paralelas y perpendiculares. Puesto que las transformaciones no alteran las coordenadas transversales, es suficiente considerar únicamente la dimensión espacial en la dirección de la velocidad relativa entre ambos sistemas.

## III. PROCEDIMIENTO GALILEANO

Supongamos una barra o varilla moviéndose con velocidad constante en dirección $x$ positiva con respecto al marco del laboratorio. Al sistema que se mueve junto con la varilla lo nombraremos $obj$. La transformación de coordenadas entre el sistema de referencia del laboratorio y del objeto es

$$x_{lab} = x_{obj} + vt. \qquad (2)$$

En este caso clásico, el tiempo no cambia bajo esta transformación y por lo tanto no necesita ser distinguido en los distintos marcos de referencia; esto es, un observador en reposo mide el mismo intervalo de tiempo que un observador moviéndose junto con la varilla. Evaluemos los intervalos espaciales $\Delta x_{lab} = x_{lab}(b) + x_{lab}(a)$,$\Delta x_{obj} = x_{obj}(b) - x_{obj}(a)$ y un intervalo temporal $\Delta t = t(b) - t(a)$, donde $x_{lab}(a), x_{lab}(b)$ son las coordenadas de los extremos, $a\, y\, b$ de la varilla medidos en el sistema del laboratorio en tiempos $t(a) y\, t(b)$, como se muestra en la figura 1. El intervalo espacial en el sistema del laboratorio puede ser escrito como

$$\Delta x_{lab} = \Delta x_{obj} + v\Delta t. \qquad (3)$$

Es claro que $\Delta x_{lab}$ no es la longitud de la varilla, ya que los extremos de la varilla $a, b$ han sido medidos a diferentes tiempos[1]. Para obtener la longitud, es necesario sustraer la distancia que la varilla se desplazó durante el tiempo entre las mediciones

$$\Delta x_{lab}\,(barra) = \Delta x_{lab} - (v\Delta t).$$

Si se sustituye este resultado en (3) se encuentra la longitud de la varilla medida en el marco del laboratorio

$$\Delta x_{lab}(barra) = \Delta x_{obj},$$

esto es, en el caso Galileano, la varilla en el sistema del laboratorio mide la misma longitud que el observador en el marco de referencia del objeto.

## IV. CONTRACCIÓN DE LORENTZ

Consideremos una varilla en reposo a lo largo del eje $x$ de un marco de referencia, como se muestra en la figura 1. Supongamos que este sistema se mueve con velocidad constante $v$ en la dirección positiva $x$ con respecto al marco de referencia del laboratorio. Las transformaciones de Lorentz para los intervalos espaciales y temporales son

$$\Delta x_{lab}\,(barra) = \gamma(\Delta x_{obj} + v\Delta t_{obj}), \qquad (4)$$

$$\Delta t_{lab} = \gamma(\Delta t_{obj} + \tfrac{v}{c^2}\Delta x_{obj}). \qquad (5)$$

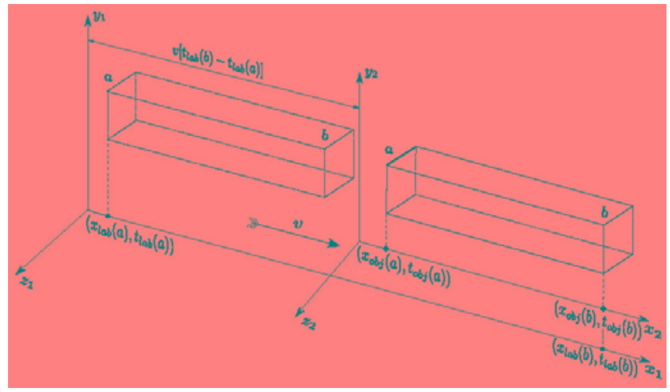


**FIGURA 1.** Una barra moviéndose a lo largo de la dirección $x$ con velocidad constante $v$ relativa al laboratorio. El subíndice 1 corresponde al marco de referencia del laboratorio y el subíndice 2 corresponde al sistema de referencia del objeto. Las mediciones de las coordenadas de los extremos de la varilla fueron realizadas a tiempos diferentes $t_{lab}\,(a) \neq t_{lab}(b)$.

El intervalo espacial $\Delta x_{lab} = x_{lab}(b) - x_{lab}(a)$ es la diferencia de las coordenadas de los extremos $a$ y $b$ medidos en el sistema del laboratorio en tiempos $\Delta t_{lab} = t_{lab}(b) - t_{lab}(a)$; mientras que la longitud $\Delta x_{obj} = x_{obj}(b) - x_{obj}(a)$ en el marco de referencia del objeto es obtenido en un intervalo de tiempo $\Delta t_{obj} = t_{obj(b)} - t_{obj}(a)$.

Debido a que las mediciones fueron realizadas a distintos tiempos $t_{lab}(b)$ y $t_{lab}(a)$, la longitud de la varilla es igual al intervalo espacial $\Delta x_{lab}$ menos la distancia recorrida por la varilla durante el tiempo entre las mediciones[2]

$$\Delta x_{lab}(barra) = \Delta x_{lab} - v\Delta t_{lab}. \qquad (6)$$

La longitud de la barra en el marco de referencia del laboratorio en términos de las variables medidas en el sistema del objeto es obtenida sustituyendo $\Delta x_{lab}\, y\, \Delta t_{lab}$ de las transformaciones de Lorentz (4) y (5)

$$\Delta x_{lab}(barra) = \gamma\left(\Delta x_{obj} + v\Delta t_{obj}\right) - vr(\Delta t_{obj} + \tfrac{v}{c^2}\Delta x_{obj}).$$

Esta expresión se simplifica a la forma usual de la contracción de Lorentz

$$\Delta x_{lab}(barra) = \gamma\Delta x_{obj}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma}\Delta x_{obj}. \qquad (7)$$

Esta transformación espacial involucra al factor $\gamma^{-1}$. Debido a que la velocidad relativa entre los sistemas es siempre menor que la velocidad de la luz en el vacío $v < c$, esto implica $\gamma^{-1} \leq 1$. Así, por ejemplo, tenemos que un metro en el sistema del objeto $\left(\Delta x_{obj} = 1\text{m}\right)$ es

[1] Solamente si las coordenadas se detectarán simultáneamente $\Delta x_{lab}\,(barra) = \Delta x_{lab}$ .

[2] De manera análoga al procedimiento clásico aunque en este caso el tiempo en ambos marcos de referencia es distinto.

visto en el laboratorio como una distancia más corta ($\Delta x_{lab} < 1\text{m}$). El intervalo temporal puede ser escogido arbitrariamente pues no aparece explícitamente en la ecuación de la contracción (7).

**A. Mediciones realizadas en el mismo punto espacial**

Supongamos que frente a un observador en el laboratorio pasa un avión o un meteorito con cierta velocidad $v$ constante. Justo en el momento en que la parte frontal pasa enfrente, el observador registra este tiempo y espera en su mismo lugar hasta que el objeto pase por completo; cuando la parte trasera pasa frente a él, registra nuevamente otro tiempo. Puesto que las mediciones son realizadas en la misma posición del laboratorio, ahora el intervalo espacial en este sistema es cero $\Delta x_{lab} = 0$ y así, de las transformaciones de Lorentz (4)

$$\Delta x_{obj} = -v\Delta t_{obj}. \qquad (8)$$

La longitud del objeto está dada por la longitud medida menos la distancia recorrida en el intervalo temporal de medición (6). Por lo tanto, en este caso, $\Delta x_{lab}(barra) = -v\Delta t_{lab}$. Empleando la transformación temporal de Lorentz (5), se obtiene $\Delta x_{lab}(barra) = -v\gamma(\Delta t_{obj+\frac{v}{c^2}}\Delta x_{obj})$ y de la relación entre los intervalos espacial y temporal en el marco del objeto (8) resulta

$$\Delta x_{lab}(barra) = -v\gamma\left(-\frac{1}{v}\Delta x_{obj} + \frac{v}{c^2}\Delta x_{obj}\right) = \frac{1}{\gamma}\Delta x_{obj}.$$

Nótese que la expresión (8) es la expresión de la velocidad $-v$ con la que el marco inercial del objeto observa al laboratorio. El procedimiento de medición en este caso es sencillo pues involucra mediciones con un reloj al observar el principio y el final del objeto sin necesidad de que el observador se desplace.

**B. Mediciones simultáneas en el marco de referencia del laboratorio**

Supongamos ahora que el observador en el laboratorio ve pasar al mismo objeto pero con un dispositivo adecuado que ciertamente se antoja sofisticado, que le permite detectar las posiciones de los extremos del objeto al mismo tiempo. Posteriormente mide la distancia entre estas dos posiciones. Puesto que los extremos del objeto fueron detectados simultáneamente, el intervalo temporal en el laboratorio es cero $\Delta x_{lab} = 0$ y así, de las transformaciones de Lorentz (5)

$$\Delta t_{obj} = -\frac{v}{c^2}\Delta x_{obj}. \qquad (9)$$

La longitud del objeto de acuerdo al razonamiento presentado, está dado por (6), en este caso particular $\Delta x_{lab}(barra) = \Delta x_{lab}$ y de las transformaciones de Lorentz (4) se obtiene $\Delta x_{lab}(barra) = \gamma(\Delta x_{obj} + v\Delta t_{obj})$, pero también de (9) tenemos que $\Delta x_{lab}(barra) = \gamma\left(\Delta x_{obj} - \frac{v}{c^2}\Delta x_{obj}\right) = \frac{1}{\gamma}\Delta x_{obj}$, de manera que se obtiene la contracción de Lorentz. Éste procedimiento, en la cual se asumen mediciones simultáneas, es encontrado en la gran mayoría de los textos sobre relatividad [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Un inconveniente severo de la derivación es que el cociente $\frac{\Delta x_{obj}}{\Delta t_{obj}} = -\frac{c^2}{v}$ es superlumínico y para evitar una contradicción con el postulado relativista es necesario explicar que las mediciones no deben estar relacionadas causalmente.

## IV. CONCLUSIONES

La contracción espacial de Lorentz ha sido obtenida usando las transformaciones espaciales y temporales de Lorentz como punto de partida. El procedimiento involucra la observación de las coordenadas de los extremos de un objeto en movimiento a tiempos arbitrarios. Para obtener la longitud del objeto es necesario sustraer la distancia que el objeto recorrió durante el intervalo de tiempo entre las dos mediciones. Dicho intervalo entre mediciones puede ser seleccionado arbitrariamente. El intervalo temporal entre mediciones $\Delta t_{lab}$ se puede escoger de manera que todos los eventos sean causales ($\Delta t_{lab} > \Delta x_{lab}/c$) y por lo tanto no se obtengan relaciones superlumínicas en la derivación.

## REFERENCIAS


[1] Nikolic, H., *Relativistic contraction of an accelerated rod*, Am. J. Phys. **67**, 1007-1012 (1999).
[2] Tartaglia, A. and Ruggiero, M. L., *Lorentz contraction and accelerated systems*, Eur. J. Phys. **24**, 215-220 (2003).
[3] Manoukian, E. B. and Sukkhasena, S., *Projection of relativistically moving objects on a two-dimensional plane, the train paradox and the visibility of the Lorentz contraction*, Eur. J. Phys. **23**, 103-110 (2002).
[4] Terrel, J., *Invisibility of the Lorentz contraction*, Physical Review **116**, 1041-1045 (1959).
[5] Sorensen, R. A., *Lorentz contraction: A real change of shape*, Am. J. Phys. **63**, 413-415 (1995).
[6] Lorentz, H. A., *Simplified theory of electrical and optical phenomena in moving systems*, KNAW proceedings **1,** 427-442 (1989).
[7] Scott, G. D. and Viner M. R. *The geometrical appearance of large objects moving at relativistic speeds*, Am. J. Phys. **33**, 534-536 (1965).
[8] Field, J. H., *Two novel special relativistic effects: Space dilation and time contraction*, Am. J. Phys. **68**, 367-374 (2000).
[9] Born, M., *Einstein's theory of relativity*, (Dover Publ, USA, 1965).
[10] Stephani, H., *Relativity, An introduction to special and general relativity*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).

[11] Synge, J. L., *Relativity: The special theory*, (Holland Publ. Co., Amsterdam, 1972).
[12] Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H. and Weyl, H., *The Principle of Relativity*, (Dover Publ. Inc., Canada, 1952).
[13] Wheeler, J. A. and Taylor, E. F., *Spacetime Physics*, (W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1966).
[14] Krane, K. S., Resnick, R. and Halliday, D., *Physics*, (John Wiley and Sons, Inc., USA, 2002).
[15] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, (Wiley, USA, 1999).