Espacios de Einstein tipo N

Rubén Sánchez-Sánchez y César Mora
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Legaria 694, Col. Irrigación, C.P. 11500, México D. F., México.

E-mail: rsanchezs@ipn.mx

(Recibido el 10 de Octubre de 2009; aceptado el 17 de Diciembre de 2009)

Resumen
El siguiente artículo establece a los espacios de Einstein tipo N dentro de la clasificación estándar de Petrov. Para ello utiliza la descomposición tensorial del tensor de curvatura intrínseca o tensor de Weyl. Una vez hecho esto e identificando que componente espinorial del tensor se debe de conservar, establece una tetrada nula a partir de la cual se anteponen las condiciones diferenciales que deben de cumplir las funciones métricas de las cuales se componen sus cuatro covectores nulos.

Palabras clave: Gravedad tipo N**,** clasificación de Petrov, tetrada nula.

Abstract
The following article establishes the type N Einstein spaces within the standard classification of Petrov. It uses the tensor decomposition of the intrinsic curvature tensor or Weyl tensor. Once this is done and identifying which component spinor tensor must preserve, establishes a null tetrad, which are composed of four null convectors, from which the differential conditions that must meet the metric functions follows**.**

Keywords: Type N gravity, Petrov's clasification, null tetrad.

PACS: 04.20.Jb, 04.20.-q, 04.20.-k, 04.20.Cv **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en el vacío revisten especial interés dentro de la Física [1]. Gracias a algunas de ellas la teoría ha sido corroborada experimentalmente. De particular interés son las soluciones tipo N [2], las cuales pueden representar una perturbación del campo de gravedad en forma de onda del campo. De acuerdo a la propiedad de Peeling [3, 4] es el tipo N la clase de curvatura que se preserva en el tensor de Weyl [5, 6, 7] a grandes distancias de la fuente de la perturbación gravitatoria. El presente artículo expone las ecuaciones diferenciales de Cartan [8, 9] de una tétrada nula de Plebański [3, 10] para un campo de gravedad tipo N en el vacío. Primero vamos a clasificar en forma espinorial los diversos tipos algebraicos de solución y luego identificamos las condiciones que hacen posible que una solución exacta a las ecuaciones de Einstein en el vacío sea del tipo N. Para lograr alcanzar este propósito, cierta componente espinorial del tensor de curvatura de Weyl deberá de ser diferente de cero. La comprensión de este tipo de soluciones reviste especial interés tanto por la posibilidad de que puede representar físicamente radiación gravitacional como por la posible existencia de un potencial de Lanczos a partir del cual la solución pueda ser derivable, y gracias a la cual se permita estudiar y comprender mejor a la solución, desde una perspectiva clásica a la forma en cómo tradicionalmente (por comparación) se estudia el campo electrostático a partir de un potencial escalar eléctrico.

II. LOS ESPACIOS DE EINSTEIN TIPO N

Uno de los componentes del tensor de curvatura de Riemann es el tensor de curvatura intrínseca o tensor de Weyl. Esta componente describe la curvatura que no es conformalmente plana. Es decir, la curvatura que no necesita un factor conforme para reproducirse a partir de una métrica plana de Minkowski. Una herramienta bastante útil para describir al mismo tensor en componentes, es la notación espinorial. Usando espinores, la curvatura descrita por el tensor de Weyl C_{abcd} se describe en términos de sus contrapartes espinoriales C_{ABCD} y su complejo conjugado $\bar{C}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}$ es [3]

$$C_{abcd} = C_{ABCD}\,\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\,\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} + \bar{C}_{\dot{A}\dot{B}\dot{C}\dot{D}}\,\varepsilon_{AB}\,\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}. \qquad (1)$$

Donde el espinor métrico y el espinor de Weyl están dados por

$$\varepsilon_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$C_{ABCD} = \overset{1}{\psi}_{(A} \overset{2}{\psi}_{B} \overset{3}{\psi}_{C} \overset{4}{\psi}_{D)} . \tag{3}$$

Aquí cada factor del miembro derecho de la ecuación (3) representa un espinor bidimensional, en un espacio espinorial de campo complejo y con producto interno antisimétrico [3].

Por otro lado, el conjunto de curvaturas espinoriales están dadas por

$$C^{(1)} = 2C_{ABCD}\, l^A l^B l^C l^D = 2C_{2222}, \tag{4}$$

$$C^{(2)} = -2C_{ABCD}\, k^A l^B l^C l^D = -2C_{1222}, \tag{5}$$

$$C^{(3)} = 2C_{ABCD}\, k^A k^B l^C l^D = 2C_{1122}, \tag{6}$$

$$C^{(4)} = -2C_{ABCD}\, k^A k^B k^C l^D = -2C_{1112}, \tag{7}$$

$$C^{(5)} = 2C_{ABCD}\, k^A k^B k^C k^D = 2C_{1111}. \tag{8}$$

La solución tipo N es aquella cuya curvatura $C^{(1)}$ es la única que es diferente de cero. Los espinores k^A y l^A de un espacio espinorial complejo 2-dimensional que denotamos como S^{A}, y sus correspondientes complejos conjugados $\bar{k}^{\dot{A}}$ y $\bar{l}^{\dot{A}}$ del espacio espinorial complejo conjugado al primero y que denotamos por $S^{\dot{A}}$, se derivan a partir de un marco móvil de Cartan [8], cuyos componentes son 1-formas diferenciales con producto interno definido, a este marco móvil de 4 elementos lo conocemos como *tétrada*. Si el producto interno de una de estas componentes consigo misma es cero, entonces decimos que la tétrada es *nula*. Revisamos estos puntos en el siguiente párrafo.

Dada una tétrada de Minkowski [3] para un marco móvil de Cartan [8]

$$ds^2 = \mathbf{e}^1{}' \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^1{}' + \mathbf{e}^2{}' \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^2{}' + \mathbf{e}^3{}' \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^3{}' - \mathbf{e}^4{}' \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^4{}' . \tag{9}$$

Existe un procedimiento para encontrar una tétrada nula, que dentro del formalismo de Plebański [11, 12] se escribe como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^1{}' + \mathbf{e}^2{}'), \quad \mathbf{e}^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^1{}' - \mathbf{e}^2{}'), \\ \mathbf{e}^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^3{}' + \mathbf{e}^4{}'), \quad \mathbf{e}^4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}^3{}' - \mathbf{e}^4{}'). \end{aligned} \tag{10}$$

La métrica (9) ahora toma la forma [11]

$$ds^2 = 2\mathbf{e}^1 \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}^3 \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^4. \tag{11}$$

Donde se ha usado el desarrollo del cuadrado del elemento de línea del espacio tiempo [11]. Este cuadrado de elemento de línea queda especificado en el espacio de producto tensorial $\Lambda^1 \underset{s}{\otimes} \Lambda^1$ dado por

$$ds^2 = g_{a'b'}\mathbf{e}^{a'} \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^{b'} = g_{ab}\mathbf{e}^{a} \underset{s}{\otimes} \mathbf{e}^{b}. \tag{12}$$

Y las métricas locales de tétradade Minkowski $g_{a'b'}$ y de tétrada nula de Plebański, g_{ab} se pueden escribir cada una como

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$g_{a'b'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

También las relaciones de la tétrada nula [11] pueden reescribirse en forma de producto matricial como

$$\mathbf{e}^a = L^a{}_{a'}\mathbf{e}^{a'}, \tag{15}$$

y entonces, la matriz $L^a{}_{a'}$ queda definida como

$$L^a{}_{a'} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Dada ahora esta tétrada nula, es fácil escribir la relación que guarda con los espacios espinoriales S^{A} y $S^{\dot{A}}$ como

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^1)^a &= k^A \bar{l}^{\dot{A}}, \quad (\mathbf{e}^2)^a = l^A \bar{k}^{\dot{A}}, \\ (\mathbf{e}^3)^a &= k^A \bar{k}^{\dot{A}}, \quad (\mathbf{e}^3)^a = -l^A \bar{l}^{\dot{A}}. \end{aligned} \tag{17}$$

III. LOS GAUGES DE LA TETRADA NULA

Existen dos tipos de Gauge que conviene aplicar a la tétrada nula definida por (10), y son denotados por las letras griegas σ y γ, donde σ está definida en términos de otros dos parámetros que son reales, según la relación

$$\sigma = \omega + i\varphi. \qquad (18)$$

El gauge σ está definido por la siguiente transformación de la tétrada nula

$$\mathbf{e}^1{}' = e^{i\varphi}\mathbf{e}^1, \quad \mathbf{e}^2{}' = e^{-i\varphi}\mathbf{e}^2, \quad \mathbf{e}^3{}' = e^{\omega}\mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^4{}' = e^{\omega}\mathbf{e}^4. \qquad (19)$$

Mientras que el gauge γ tiene la siguiente transformación

$$\mathbf{e}^1{}' = \mathbf{e}^1 + \bar{\gamma}\mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^2{}' = \mathbf{e}^2 + \gamma\mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^3{}' = \mathbf{e}^3, \quad \mathbf{e}^4{}' = \mathbf{e}^4 - \gamma\mathbf{e}^1 - \bar{\gamma}\mathbf{e}^2 - \gamma\bar{\gamma}\mathbf{e}^3. \qquad (20)$$

Por otro lado podemos mencionar la definición de las formas de conexión Γ_{ab} se definen como

$$\Gamma_{ab} := -\mathbf{e}_{ac;d}\,\mathbf{e}_b{}^c\,dx^d. \qquad (21)$$

Ahora bien, bajo los gauges σ y γ la componente $\mathbf{e}^3$ de la tétrada nula y la conexión Γ_{42}, siendo la transformación de esta cantidad

$$\Gamma_{42} \xrightarrow{\gamma} \Gamma_{42} \xrightarrow{\sigma} e^{\sigma}\Gamma_{42}, \quad \mathbf{e}^3 \xrightarrow{\gamma} \mathbf{e}^3 \xrightarrow{\sigma} e^{\omega}\mathbf{e}^3. \qquad (22)$$

Como podemos observar estas dos magnitudes casi no sufren cambo bajo estos dos gauges, por lo que conviene establecer una clasificación de soluciones tipo N bajo el comportamiento de estas dos cantidades y algunas de sus expresiones construidas a partir del cálculo exterior. Así clasificamos a las soluciones bajo tres casos principales, que son los siguientes

$$\begin{aligned} &\text{Caso I:} && \Gamma_{42} = 0, && \Gamma_{42} \wedge \bar{\Gamma}_{42} = 0, \\ &\text{Caso II:} && \Gamma_{42} \neq 0, && \Gamma_{42} \wedge \bar{\Gamma}_{42} = 0, \\ &\text{Caso III:} && \Gamma_{42} \neq 0, && \Gamma_{42} \wedge \bar{\Gamma}_{42} \neq 0. \end{aligned} \qquad (23)$$

El caso I es más o menos trivial, mientras los otros dos casos se subdividen en subcasos, que son los que siguen

$$\begin{aligned} &\text{Subcaso II}_S: && \mathbf{e}^3 \wedge \Gamma_{42} = 0, \\ &\text{Subcaso II}_G: && \mathbf{e}^3 \wedge \Gamma_{42} \neq 0, \\ &\text{Subcaso III}_S: && \mathbf{e}^3 \wedge \Gamma_{42} \wedge \bar{\Gamma}_{42} = 0, \\ &\text{Subcaso III}_G: && \mathbf{e}^3 \wedge \Gamma_{42} \wedge \bar{\Gamma}_{42} \neq 0. \end{aligned} \qquad (24)$$

Ahora, para una solución tipo N de un polvo cósmico sin presión y con densidad de materia ρ las ecuaciones tensoriales de Einstein se escriben

$$G_{\mu\nu} = -\rho\kappa_\mu\kappa_\nu. \qquad (25)$$

Con las Segundas Ecuaciones de Estructura de Cartan dadas por

$$d\Gamma_{42} + \Gamma_{42} \wedge (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) = 0, \qquad (26)$$

$$d(\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + 2\Gamma_{42} \wedge \Gamma_{31} = 0, \qquad (27)$$

$$d\Gamma_{31} + (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) \wedge \Gamma_{31} = \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^3 \wedge (C^{(1)}\mathbf{e}^1 + \rho\,\mathbf{e}^2). \qquad (28)$$

Cuando hacemos el producto exterior de la tercer ecuación con Γ_{42} obtenemos

$$\frac{1}{2}\Gamma_{42} \wedge \mathbf{e}^3 \wedge (C^{(1)}\mathbf{e}^1 + \rho\mathbf{e}^2) = 0. \qquad (29)$$

Ya que el primer miembro de la tercer ecuación en (26) es cero porque

$$\begin{aligned} &\Gamma_{42} \wedge d\Gamma_{31} + \Gamma_{42} \wedge (\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) \wedge \Gamma_{31} = \\ &\Gamma_{42} \wedge d\Gamma_{31} + (-1)^3 d\Gamma_{42} \wedge \Gamma_{31} = d(\Gamma_{42} \wedge \Gamma_{31}) = \\ &\tfrac{1}{2} d(d(\Gamma_{12} + \Gamma_{34}) + 2\Gamma_{42} \wedge \Gamma_{31}) = 0. \end{aligned}$$

En el último paso empleamos la diferencial exterior de la ecuación de estructura (27), razón por la cual a (29) se le conoce como la identidad de Bianchi.

En el vacío, en ausencia de polvo cósmico debemos de tener ρ=0, y entonces (29) se simplifica a

$$\tfrac{1}{2}\Gamma_{42} \wedge \mathbf{e}^3 \wedge C^{(1)}\mathbf{e}^1 = 0. \qquad (30)$$

De esta relación de Bianchi y del desarrollo en formas diferenciales de Γ_{42}

$$\Gamma_{42} = \Gamma_{421}\mathbf{e}^1 + \Gamma_{422}\mathbf{e}^2 + \Gamma_{423}\mathbf{e}^3 + \Gamma_{424}\mathbf{e}^4. \qquad (31)$$

tenemos

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{422}\mathbf{e}^2 + \Gamma_{424}\mathbf{e}^4) \wedge \mathbf{e}^3 \wedge C^{(1)}\mathbf{e}^1 = 0. \qquad (32)$$

Donde hemos usado la antisimetría del producto exterior

$$\mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^3 = 0, \quad \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^4 = 0.$$

De la independencia lineal de los productos externos

$$\mathbf{e}^2 \wedge \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1, \quad \text{y} \quad \mathbf{e}^4 \wedge \mathbf{e}^3 \wedge \mathbf{e}^1.$$

Y la identidad de Bianchi (32) obtenemos

$$\Gamma_{422} C^{(1)} = 0,$$

$$\Gamma_{424} C^{(1)} = 0.$$

Y como estamos estudiando las soluciones tipo N debemos de tener

$$C^{(1)} \neq 0.$$

Por lo tanto

$$\Gamma_{424} = 0, \tag{33}$$

$$\Gamma_{422} = 0. \tag{34}$$

La última relación indica que una solución tipo N en el vacío no tiene tensión transversal en sus líneas de congruencias nulas, pues es Γ_{422} el coeficiente espinorial que mide esta característica óptica-geométrica de las líneas de integración nulas de una posible solución a las ecuaciones de estructura de Cartan.

Por otro lado, las Primeras Ecuaciones de Estructura de Cartan se dan por

$$d\mathbf{e}^1 = -\mathbf{e}^3 \wedge \overline{\Gamma}_{31} - \mathbf{e}^4 \wedge \Gamma_{42}, \tag{35}$$

$$d\mathbf{e}^2 = d\overline{\mathbf{e}}^1, \tag{36}$$

$$d\mathbf{e}^3 = \mathbf{e}^1 \wedge \overline{\Gamma}_{42} + \mathbf{e}^2 \wedge \Gamma_{42}, \tag{37}$$

$$d\mathbf{e}^4 = \mathbf{e}^1 \wedge \Gamma_{31} + \mathbf{e}^2 \wedge \overline{\Gamma}_{31}. \tag{38}$$

En la siguiente sección mostramos el desarrollo de estas ecuaciones para el caso III

IV. CASO III

Este caso se caracteriza por la relación de producto externo siguiente

$$\Gamma_{42} \wedge \overline{\Gamma}_{42} \neq 0. \tag{39}$$

Ahora, se puede demostrar que bajo los gauges σ y γ existen variables μ y Y tales que

$$\begin{aligned} \Gamma_{42} &= -dY, \qquad dY \wedge d\overline{Y} \neq 0, \\ \Gamma_{12} + \Gamma_{34} &= 0, \quad \Gamma_{31} = -\mu dY. \end{aligned} \tag{40}$$

Con estas identidades las Segundas Ecuaciones de Estructura de Cartan quedan escritas en forma simplificadas como

$$dY \wedge d\mu = \tfrac{1}{2}\mathbf{e}^3 \wedge (C^{(1)}\mathbf{e}^1 + \rho\mathbf{e}^2) \neq 0. \tag{41}$$

A partir del auxilio de las primeras ecuaciones de estructura para este caso

$$d\mathbf{e}^1 = \overline{\mu}\mathbf{e}^3 \wedge d\overline{Y} + \mathbf{e}^4 \wedge dY, \tag{42}$$

$$d\mathbf{e}^2 = d\overline{\mathbf{e}}^1, \tag{43}$$

$$d\mathbf{e}^3 = -\mathbf{e}^1 \wedge d\overline{Y} - \mathbf{e}^2 \wedge dY, \tag{44}$$

$$d\mathbf{e}^4 = -\mu\mathbf{e}^1 \wedge dY - \overline{\mu}\mathbf{e}^2 \wedge d\overline{Y}. \tag{45}$$

Usando estas ecuaciones podemos entonces deducir la forma que tendrán las componentes de la tétrada nula

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= dz + v dY + \overline{h}\, d\overline{Y}, \quad \mathbf{e}^2 = \overline{\mathbf{e}}^1, \\ \mathbf{e}^3 &= du - \overline{z}\, dY - z\, d\overline{Y}, \quad \mathbf{e}^4 = dv - p dY - \overline{p} d\overline{Y}. \end{aligned} \tag{46}$$

Donde aquí se han usado las siguientes variables reales y complejas

$$u, v \in \mathbb{R}, \quad z, h, p \in \mathbb{C}. \tag{47}$$

Las variables h y p tiene las siguientes restricciones

$$dh = \mu\mathbf{e}^3 + q dY + p\, d\overline{Y}, \quad \mu, q, p \in \mathbb{R}, \tag{48}$$

$$dp = \mu\mathbf{e}^1 + m dY + n d\overline{Y}, \quad n \in \mathbb{C}. \tag{49}$$

Existe una cantidad óptica muy importante que por la propiedad de peeling debería no anularse para una solución tipo N que debería representar un campo de radiación gravitacional. La cantidad se llama twist por la razón de que describe la propiedad local de un giro intrínseco que tienen ciertas líneas de congruencia nula. Estas líneas de congruencia son generadas por la tercer componente de la tétrada nula $\mathbf{e}^3$. En el mismo lenguaje de las formas diferenciales el twist se representa por el producto exterior entre esas componentes y su diferencial exterior, esto es

$$T = \mathbf{e}^3 \wedge d\,\mathbf{e}^3. \tag{50}$$

Y el caso para el cual este producto exterior de formas diferenciales es diferente de cero corresponde al caso $\mathrm{III_G}$, donde es posible suponer que se cumple la condición de producto externo

$$du \wedge \Gamma_{42} \wedge \overline{\Gamma}_{42} \neq 0. \tag{51}$$

Que corresponde a la condición del caso $\mathrm{III_G}$

$$\mathbf{e}^3 \wedge \Gamma_{42} \wedge \overline{\Gamma}_{42} \neq 0. \tag{52}$$

Misma que se puede demostrar [14, 15] que corresponde a la siguiente forma de $\mathbf{e}^3$

$$\mathbf{e}^3 = du - \bar{z}\,dY - z\,d\bar{Y}. \qquad (53)$$

Aquí $u, Y, \bar{Y}$ son coordenadas independientes de la solución y $z = z(u, Y, \bar{Y})$, es función de estas coordenadas además se tiene a la función $h = h(u, Y, \bar{Y})$, de las mismas tres coordenadas, cuya relación con z esta dada por

$$z = -\frac{h_{u\bar{Y}}}{h_{uu}}. \qquad (54)$$

En este caso, se toman las conexiones

$$\Gamma_{42} = -dY, \quad \Gamma_{31} = -h_u\,dY, \quad \Gamma_{12} = 0, \quad \Gamma_{34} = 0. \qquad (55)$$

Y la siguiente forma de las demás componentes de la tétrada nula de Plebański

$$\mathbf{e}^1 = dz + v\,dY + \bar{h}\,d\bar{Y}, \quad \mathbf{e}^2 = \bar{\mathbf{e}}^1, \qquad (56)$$

$$\mathbf{e}^4 = dv - (zh_u + h_{\bar{Y}})dY - (\bar{z}\bar{h}_u + \bar{h}_Y)d\bar{Y}. \qquad (57)$$

La única componente de curvatura intrínseca de Weyl que sobrevive y gracias a la cual esta tétrada nula con sus funciones métricas (aún sin determinar) z, h describe una solución tipo N [13, 15], la curvatura está dada por la expresión siguiente

$$C^{(1)} = -2h_{uu}(z\bar{z}_u + \bar{z}_{\bar{Y}} + v)\,\Delta^{-1}, \qquad (58)$$

$$\Delta := \left| z_u\bar{z} + z_Y + v \right|^2 - \left| z_u z + z_{\bar{Y}} + \bar{h} \right|^2. \qquad (59)$$

Como la única curvatura es proporcional a h_{uu}. La condición que debe de satisfacer la función métrica h es que su segunda derivada con respecto a u sea diferente de cero

$$h_{uu} \neq 0. \qquad (60)$$

De esta forma se asegura que una solución dada para h corresponda al tipo de Petrov N para la métrica generada por la tétrada nula.

IV. CONCLUSIONES

Las formas diferenciales son una fuerte arma dentro de las expresiones que nos sirven para describir con detalle las características locales que debe de tener un campo gravitacional tipo N, así mismo funcionan como la herramienta de cálculo gracias a la cual es posible derivar identidades diferenciales que han de cumplir cada función métrica de una solución tipo N. En este trabajo se presentó un breve esbozo de las ecuaciones de Estructura de Cartan para este tipo de espacios de Einstein, y se mostraron algunos resultados de las propiedades diferenciales que deben de tener las funciones métricas respectivas de la solución. Esto nos permite estudiar las características geométricas y físicas más sobresalientes de las soluciones exactas y asimismo posibilitar su respectivo cálculo.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado mediante el apoyo del proyecto de investigación SIP 20090739.

REFERENCIAS

[1] Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, Herlt E., *Exact Solutions of Einstein's Field Equations,* (Cambridge University Press, 2da. Edición, Gran Bretaña, 2002).

[2] Petrov, A. Z., *Einstein Spaces*, (Pergamon Press, 1ra. Edición, Hungría, 1969).

[3] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and space-time, Vol. 1, two spinor calculus and relativistic fields*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1ra. Edición, Gran Bretaña, 1984).

[4] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and space-time, Vol. 2, spinor and twistor methods in space-time geometry*, (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, 1ra. Edición, Gran Bretaña, 1986).

[5] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology, Principles and Aplications of the General theory of Relativity,* (John Wiley & Sons, 1ra. Edición, New York, 1972).

[6] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation,* (W. H. Freeman and Company, 1ra. Edición, New York, 1973).

[7] Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, (Oxford University Press, 1ra. Edición, Estados Unidos, 1998).

[8] Flanders, H., *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, (Dover Publications, 1ra. Edición, Estados Unidos, 1989).

[9] Morita, S., *Geometry of Differential Forms*, *Translations of Mathematical Monographs volume 201*, (American Mathematical Society, 1ra. Edición, Estados Unidos, 2001).

[10] García Díaz, A., Plebański, J. F., *All nontwisting N's with cosmological constant*, J. Math. Phys, **22**, 2655 (1981).

[11] Plebański, J. F., *Spinors, Tetrads and Forms*, *Vol 1.*, (manuscrito no publicado del CINVESTAV, México, 1974).

[12] Plebański, J. F., *Type N solutions of* $G_{\mu\nu} = -\rho\kappa_{\mu}\kappa_{\nu}$, *with null* κ_{μ}. (manuscrito no publicado del CINVESTAV, México, 1979).
[13] Plebański, J. F., *Attempt to obtain effective solutions*, (manuscrito no publicado del CINVESTAV, México).
[14] Sánchez-Sánchez, R., Mora, C., *A heuristic differential system to find a type N Einstein exact solution in vacuum*, Journal of Mathematical Physics, enviado para su publicación.
[15] Sánchez-Sánchez Rubén, *Soluciones tipo N a la ecuación inhomogénea de Einstein* $G_{\mu\nu} = -\rho\kappa_{\mu}\kappa_{\nu}$. (Tesis de Maestría del CINVESTAV, México, 1995).