Jacobi y la Estabilidad del Sistema Solar: Generalización a $\mathbb{R}^n$

Jose J. Arenas
Jefe del Departamento de Física, Instituto Monterroso,
C/Santo Tomás de Aquino S/N, C.P.: 29680, Estepona, Málaga, España

E-mail: arenasferrer@hotmail.com

(Recibido el 26 de Enero de 2013; aceptado el 25 de Junio de 2013)

Resumen
La estabilidad del Sistema Solar ha sido objeto de amplios estudios por los más grandes físicos y matemáticos de todos los tiempos. Lagrange y Laplace iniciaron los primeros análisis rigurosos en los siglos XVIII-XIX, y a ellos siguieron otros gigantes como Poincaré o Euler y, más recientemente, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. La pregunta en su sentido clásico: *¿Es estable el Sistema Solar?* se refiere a si los planetas colisionarán entre sí o, por el contrario, algunos de ellos escaparán al infinito. Aunque la respuesta sigue sin estar definitivamente cerrada, en este artículo se revisará una aportación poco conocida a este campo de estudio como es la de Jacobi en 1842, quien abordó la cuestión a través del concepto del momento de inercia de un sistema de masas puntuales. Nosotros analizamos y comentamos el estudio de Jacobi y lo generalizaremos a $\mathbb{R}^n$, relacionándolo además con otro artículo de Ehrenfest de 1920, concluyendo finalmente que el Sistema Solar sólo puede ser estable en $\mathbb{R}^3$.

Palabras clave: Estabilidad del Sistema Solar, Jacobi, Momento de Inercia., Problema de los N Cuerpos.

Abstract
The stability of the Solar System has been object of research by the most important physicists and mathematicians of all times. Lagrange and Laplace began the first rigorous analysis in the 18th and 19th centuries, and others followed such as Poincaré or Euler and, more recently, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. The question in its classic sense: *Is the Solar System Stable?* refers to if planets will collide with each other or, on the contrary, some of them will escape to infinity. Although the answer is still not completely solved, in this analysis it will be revised a little-known contribution to this field of study such as the contribution of Jacobi in 1842, who dealt with the issue through the concept of moment of inertia of a system of mass points. We analyze and comment Jacobi's study and it will be generalized to $\mathbb{R}^n$, being also related to other article of Ehrenfest in 1920 to conclude that the Solar System can only be stable in $\mathbb{R}^3$.

Keywords: Stability of the Solar System, Jacobi, Moment of Inertia, N-Body Problem.

PACS: 01.65.+g, 02.30.Em, 05.45.-a **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

¿Será estable el Sistema Solar por toda la eternidad? ¿O estará condenado a desaparecer mediante colisiones internas y planetas que se escapan? Esta pregunta representa uno de los problemas de la física clásica de mayor envergadura.

Es conocido, sin embargo, que en los cursos de Bachillerato de la mayoría de sistemas educativos y textos empleados en el aula, el campo gravitatorio aplicado al Sistema Solar se imparte y aplica a un sistema de dos cuerpos. Generalmente, se enuncian las Leyes de Kepler y la Ley de Gravitación newtoniana para, a continuación, aplicarlas a las órbitas circulares o elípticas de un sistema Sol-planeta o planeta-satélite, sin mostrar indicios de la verdadera dificultad histórica del problema. En este artículo pretendemos realizar una introducción que sintetice el recorrido de la cuestión y cómo Jacobi presentaba el problema a sus alumnos bajo su propio análisis, el cual actualizaremos.

Desde que Isaac Newton dio sentido a los movimientos celestes y puso orden en el Universo conocido, la Ley de Gravitación Universal funciona a la perfección si sólo suponemos el Sol y un planeta orbitando a este. Sin embargo la situación se complica si tenemos en cuenta las interacciones mutuas de los planetas (problema de los tres y los *n* cuerpos), algo de lo que Newton ya se percató. Laplace [1] fue el primer científico que pareció acotar las perturbaciones orbitales de Júpiter y Saturno y otros cuerpos del Sistema Solar, demostrando que estas eran periódicas y no acumulativas, como creía Newton. Tras Laplace, el problema de los *n* cuerpos y su relación con la estabilidad planetaria cobró popularidad, ya que lo atacaron matemáticos como Lagrange o Euler. La búsqueda de una solución analítica a las ecuaciones diferenciales de los movimientos orbitales comenzaba a ser uno de problemas más importante de la física y las matemáticas a finales del siglo XIX, hasta que en 1885 Poincaré se presentó al concurso matemático del Rey Oscar II de Suecia con la intención de resolver el problema. Poincaré encontró los primeros indicios de caos en un sistema [2] y, en cuanto a las constantes de integración necesarias para encontrar una solución analítica al sistema de ecuaciones diferenciales, enunció el siguiente teorema

No existe ninguna otra constante de movimiento que reduzca la dimensión del sistema

Este teorema resultó ser determinante, ya que para integrar el sistema hamiltoniano se conocían diez constantes, pero eran necesarias otras ocho para integrar un sistema de tres cuerpos (Sol-Tierra-Luna), con lo que Poincaré demostró que el hamiltoniano correspondiente al Sistema Solar no era integrable, es decir, no se encontraría solución analítica.

Tras este golpe al problema, se hicieron necesarios métodos más sofisticados (hablando de métodos analíticos) para estudiar la estabilidad de nuestro sistema planetario, siendo el resultado más importante en relación con el problema el conocido como Teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) a mediados del siglo XX [3, 4, 5]. Este teorema viene a decir (hablando coloquialmente) que los sistemas ligeramente perturbados que se pueden representar como un hamiltoniano próximo a integrable tienden a ser estables. Supuestamente, el Sistema Solar forma parte de este tipo de sistemas, aunque el parámetro de perturbación al hamiltoniano integrable no está cuantificado en el Teorema KAM. Así, los estudios posteriores se han centrado principalmente en métodos numéricos y computacionales [6]. El problema sigue abierto.

Los autores que hemos nombrado son algunos de los más estudiados en lo que se refiere a la pregunta ya citada *¿Es estable el Sistema Solar?*, pregunta en torno a la cual gira un interesante resumen en [7]. Sin embargo, existe un análisis muy poco referido sobre la cuestión original, dicho estudio es de Jacobi y lo expuso en sus clases del semestre de invierno del curso 1842-1843 en la Universidad de Königsberg. Estas lecciones se encuentran publicadas [8], y nosotros analizaremos y ampliaremos la *Lectura 4, Principio de Conservación de la "Vis Viva" que es* relacionada con nuestro problema. En ella Jacobi profundizaba en el teorema de las fuerzas vivas y su relación con el potencial. En los casos en que dicho análisis se pueda matizar o actualizar hemos añadido un superíndice que explicaremos en el apartado III.

II. ANÁLISIS DE JACOBI

El estudio de Jacobi comienza tomando el potencial como una función homogénea de grado k y aplicando el teorema de Euler sobre dichas funciones se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden que, considerando las masas planetarias como puntuales, representa la segunda derivada del momento de inercia respecto al tiempo. A partir de dicha expresión, Jacobi realiza un análisis de las soluciones según los rangos de los parámetros y tomando la función potencial como el potencial gravitatorio con signo positivo. Nosotros, reproduciremos y comentaremos parte de dicho capítulo, ya que nos centraremos principalmente en las referencias a la estabilidad del Sistema Solar con el objeto de no dispersar la atención con largos desarrollos analíticos válidos también para otros sistemas dinámicos.

Jacobi, tras integrar ecuaciones de movimiento para un sistema dinámico general bajo un potencial U obtiene;

$$\frac{1}{2}\sum m_i\left\{\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right\}=U+h. \quad (1)$$

Siendo h una constante de integración, m_i las masas, y en donde se considera el movimiento de estas en los tres ejes cartesianos.

Sustituyendo las velocidades en los ejes por la velocidad total a lo largo de la trayectoria correspondiente;

$$\frac{1}{2}\sum m_i {v_i}^2=U+h. \quad (2)$$

Lo que adquiere la forma del teorema de la vis viva. En palabras de Jacobi: *"la mitad de la vis viva de un sistema es igual a la función-fuerza más una constante"*. La mayor importancia del teorema reside en que *"si un sistema se mueve de una posición a otra, entonces la diferencia de la vis viva del sistema entre el inicio y el final es igual a la diferencia entre los valores de la función fuerza en esos instantes"*. Hacemos notar que la constante h desaparece de dicho enunciado ya que al restar el miembro de la derecha de la ecuación en dos instantes diferentes, dicha constante queda eliminada tras dicha resta. Esta mitad de la diferencia entre los valores iniciales y finales de dicha suma es la medida del trabajo del sistema.

Continuando con las secciones del estudio que nos interesan, Jacobi aplica el teorema de Euler para funciones homogéneas (aunque no lo menciona explícitamente);

$$\sum\left(x_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+y_i\frac{\partial U}{\partial y_i}+z_i\frac{\partial U}{\partial z_i}\right)=kU. \quad (3)$$

Bajo la simbología adecuada basada en los movimientos de las masas a lo largo del tiempo y añadiendo la ecuación de la que hemos partido, multiplicada por 2, Jacobi llega a la expresión:

$$\frac{d^2(\sum m_i r_i^2)}{dt^2}=(2k+4)U+4h. \quad (4)$$

En donde hemos de tener en cuenta que las distancias r_i no se producen desde el origen, sino que debemos transformarlas en las distancias entre los puntos y la distancia del centro de gravedad desde el origen. Así, tras varios cálculos, se puede llegar a la expresión pretendida para nuestro análisis;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2}=(2k+4)U+4h'. \quad (5)$$

Siendo ρ_i los vectores radiales trazados desde el centro de gravedad y h' una nueva cantidad surgida de los desarrollos no explicitados.

Según el mismo Jacobi comenta, el Sistema Solar representa un ejemplo de este tipo de movimientos de cuerpos en torno a un centro de gravedad, aunque como en la época no había datos sobre el movimiento del centro de gravedad del Sistema Solar, Jacobi explica que sólo se puede determinar el movimiento relativo del sistema alrededor de dicho centro. Sí señala que si se conociera el movimiento del centro de gravedad, se podría obtener el movimiento absoluto del sistema como una simple suma de dos movimientos[1].

Antes de comenzar con el análisis de las soluciones de la ecuación anterior, Jacobi hace una consideración digna de señalar, y es suponer que la atracción gravitatoria fuera de exponente cúbico en lugar de cuadrático. En este caso particular tendríamos $k = -2$, con lo que sustituyéndolo en la expresión genérica anterior y llamando R al momento de inercia del sistema;

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4h'. \tag{6}$$

Pero en tal caso el Sistema Solar se desligaría, ya que una doble integración ofrece:

$$R = 2h't^2 + h''t + h'''. \tag{7}$$

Con lo que R tiende a infinito al incrementarse el tiempo, por tanto, al menos un cuerpo del Sistema Solar debería desplazarse hacia una distancia infinita del centro de gravedad. Vemos, ya en 1842, una *primera demostración de un caso en que el Sistema Solar no sería estable*[2] en cuanto al sentido clásico de la pregunta, es decir, si hay colapso o escape cuerpos del sistema planetario.

Volviendo a nuestro Sistema Solar con la ley de gravitación de exponente cuadrático, $k = -1$, se obtiene;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = 2U + 4h'. \tag{8}$$

Tomando $U = \sum m_i m_{i'}/r_{ii'}$ (hacemos notar que Jacobi tomó la función U como el potencial gravitatorio total cambiado de signo, sin embargo, para ser fieles al texto histórico, mantendremos la notación del autor).

En este caso, la constante h' debería ser negativa para que el Sistema Solar sea estable, ya que la función U, si consideramos sólo fuerzas atractivas, es una cantidad positiva. Jacobi hace aquí una referencia a Bessel, ya que este formuló la hipótesis de que el Sol ejerce una fuerza repulsiva en contra de los cometas, relacionándose esta con observaciones de colas de cometas rechazadas por el Sol[3]. Al no estar confirmada la hipótesis, la despreció en sus consideraciones. Asumiendo esto, obtiene:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2U + 4h'. \tag{9}$$

Integrando entre *0* y *t*;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' = \int_0^t (2U + 4h')dt. \tag{10}$$

En donde R_0' es el valor de dR/dt en $t = 0$.

Si α denota como el valor más pequeño de U entre dichos límites;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' > (2\alpha + 4h')t. \tag{11}$$

Una segunda integración entre *0* ý *t* ofrece:

$$R - R_0 - R_0't > (\alpha + 2h')t^2. \tag{12}$$

O lo que es lo mismo:

$$R > R_0 + R_0't + (\alpha + 2h')t^2. \tag{13}$$

En donde R_0 es el valor de R en $t = 0$ y α, al igual que U, es una cantidad positiva.

Si $2h'$ fuera positivo, también lo sería $\alpha+2h'$, en cuyo caso R tendería al infinito con el incremento del tiempo, con lo que el Sistema Solar no sería estable. Concluimos así que $2h'$debe ser negativo. Sin embargo, este valor numérico no debe ser más grande que el mayor valor de U entre *0* y *t*, ya que de si no fuera así todos los elementos de la integral

$$2\int_0^t (U + 2h')dt, \tag{14}$$

serían negativos, con lo que se podría establecer:

$$\frac{dR}{dt} - R_0' < -2\beta t. \tag{15}$$

En donde β es una cantidad positiva, concretamente el valor numérico más pequeño de $U+2h'$entre *0* ý *t*. Integrando;

$$R < R_0 + R_0't - \beta t^2. \tag{20}$$

En este caso, al incrementarse *t*, R se aproxima a menos infinito, lo que es absurdo ya que R representa la suma de cuadrados y, por tanto, es una cantidad positiva.

Se pueden combinar todas las consideraciones anteriores en la afirmación de que, entre dichos límites de integración, $U+2h'$ no puede tener valores estrictamente positivos ni estrictamente negativos, suponiendo la estabilidad del Sistema Solar. $U+2h'$debe oscilar hacia adelante y atrás entre valores positivos y negativos, lo que quiere decir que U debe oscilar entre $-2h'$. Sin embargo, estas variaciones de U deben estar comprendidas entre límites finitos definidos, ya que si suponemos que U se convierte en una cantidad infinita, como $U = \sum m_i m_{i'}/r_{ii'}$, esto sólo puede ocurrir si dos cuerpos están infinitamente cerca. Entonces su atracción llegaría a ser infinitamente grande, no siendo capaz de separarse, así que desde ese instante en una $r_{ii'}=0$ definida, y por tanto, $U = \infty$, si uno integra más allá de ese tiempo,

$\iint(U+2h')dt^2$ (y con ello R) toma valores positivos infinitamente grandes, cualquiera que sea el valor de h' (4). Por tanto, para compensar esto, otros cuerpos del Sistema Solar deberían estar infinitamente lejanos, con lo que la estabilidad del sistema se perdería (5). U debe entonces oscilar alrededor de $-2h'$ entre dos límites definidos. Para el movimiento elíptico $U=1/r$, $-2h'=1/a$, (cancelando términos constantes comunes a ambas cantidades), con lo que r debe oscilar alrededor de a, que de hecho es el caso; la expansión de $1/r$ en términos de la anomalía media debe contener el término constante $1/a$, que es lo que sucede en realidad. Para la atracción mutua de dos cuerpos los valores negativos de h' dan el movimiento elíptico, $h'=0$ corresponde al movimiento parabólico y valores positivos de h' al movimiento hiperbólico, lo que está de acuerdo con nuestros resultados.

El teorema de que U oscila alrededor de $-2h'$ ó $U+2h'$ alrededor de 0 se puede expresar como que $2U+2h'$ oscila alrededor de U, lo que está de acuerdo con la ecuación de la "vis viva" pero con la constante h en lugar de h' y movimiento relativo a un centro de gravedad. Así que el valor de la "vis viva" debe oscilar alrededor del valor de la función-fuerza. Si todas las distancias del sistema llegan a ser muy grandes, entonces la función-fuerza llegará a ser muy pequeña, y también la "vis viva", lo que concuerda con el respondiente teorema. Por tanto, las velocidades también llegarán a ser muy pequeñas, es decir, cuanto más aumentan las distancias, más pequeñas llegan a ser las velocidades. La estabilidad reside en ello. Consideraciones similares (continua Jacobi) se encuentran en el núcleo de las investigaciones de Laplace, Lagrange y Poisson sobre la estabilidad del sistema planetario. Tenemos el teorema:

Si suponemos variables los elementos de una órbita planetaria y expandimos el eje mayor en términos del tiempo, ello se traduce únicamente como argumento de funciones periódicas, sin término proporcional al tiempo.

Este teorema fue probado por primera vez por Laplace sólo para pequeñas excentricidades y la primera potencia de las series. Lagrange lo amplió a excentricidades arbitrarias [9] y Poisson [10] finalmente demostró que también se mantiene cuando se tiene en cuenta la segunda potencia de las series. Con la consideración de la tercera potencia de las series t queda fuera de las funciones periódicas, pero aún multiplica a estas. Si tomamos la cuarta potencia, entonces t aparece incluso sin multiplicar a funciones periódicas. El resultado para la tercera potencia aún ofrece oscilaciones alrededor de un valor medio, pero infinitamente grande para $t=\infty$. En el caso de la cuarta potencia dichas oscilaciones no se producen en absoluto. Se llega a similares resultados para pequeñas oscilaciones; al considerar potencias más altas de los desplazamientos se llega al resultado de que un pequeño impulso siempre conduce, con el incremento del tiempo, a grandes oscilaciones.

Sin embargo, como el mismo Jacobi concluye al final del capítulo 4 de las *Lecturas sobre Dinámica*, todos los resultados anteriores no demuestran nada; si se desprecian las potencias más altas de los desplazamientos, uno supone que el tiempo es pequeño, con lo que no puede inferir conclusión alguna para grandes valores de t. *Por tanto, se podría concluir erróneamente, contando con algunas potencias más altas, que el Sistema Solar es inestable.*

Como ya hemos visto, según los análisis de Jacobi, la predictibilidad a largo plazo y, por tanto, la precisión en el conocimiento de estabilidad del Sistema Solar, dependía de los desarrollos en serie que emanaban de las ecuaciones de Kepler y la mecánica newtoniana, series cuya convergencia no estaba demostrada.

III. COMENTARIOS AL ANÁLISIS DE JACOBI

1. Según el Principio de Relatividad de Galileo el movimiento absoluto no se puede determinar por un experimento mecánico. Newton creía que el único sistema de referencia privilegiado es el propio espacio, al que clasificaba como absoluto y divino, al igual que el tiempo. Con la llegada de las Teorías de la Relatividad de Einstein de 1905 y 1915, se comprobó que el movimiento absoluto no existe, ya que ni el espacio ni el tiempo en sí mismos son magnitudes absolutas puesto que dependen de las velocidades y masas de los cuerpos, no habiendo, por tanto, marcos de referencia privilegiados.

2. En realidad, observamos que si la única constante distinta de cero fuera h''', el momento de inercia R sería constante y la estabilidad sería posible para órbitas circulares (algo que está de acuerdo con una de las soluciones de la ecuación de Binet del oscilador armónico para una fuerza de exponente cúbico, como podemos comprobar en [11]).

3. Actualmente sabemos que los cometas tienen dos tipos de colas principalmente, una formada por polvo y otra por gas. Las cola de gas es menos pesada que la de polvo y una fuerza relativamente pequeña puede superar la inercia orbital del cometa que la arrastra, por tanto, la misteriosa fuerza repulsiva a la que se refería Bessel era en realidad el viento solar (partículas y radiación emitida por el Sol) que interaccionan con las partículas del gas y las ionizan y desvían de la trayectoria del cometa [12].

4. Debemos observar que la atracción infinita para dos cuerpos infinitamente cerca, que analiza Jacobi, ocurre porque ha supuesto las masas como partículas puntuales. La aproximación de tomar los planetas como masas puntuales se puede considerar correcta si podemos despreciar su tamaño con respecto a las distancias que les separan, algo que no podemos hacer si las distancias son comparables o más pequeñas que los radios de los cuerpos. En realidad, si dos planetas se acercan hasta el límite de colisionar, $r_{ii'}\neq 0$, ya que la distancia entre dos cuerpos no puntuales se define como la que existe entre sus centros de gravedad, con lo que $r_{ii'}=R_i+R_{i'}$, siendo los sumandos los radios de los planetas. Vemos así que la atracción no sería infinita, por lo que sí podrían separarse.

5. Observamos como consecuencia de ello que la deducción que hace Jacobi sobre el hecho de que para compensar la atracción infinita, otros cuerpos deben alejarse hasta el

infinito para mantener la estabilidad del Sistema Solar, tampoco es correcta, ya que las colisiones binarias sí que pueden darse por los motivos expuestos en la primera parte de la argumentación.

IV. GENERALIZACIÓN A $\mathbb{R}^n$

Estos análisis jacobianos nos hacen preguntarnos de forma natural:

¿Qué ocurriría para atracciones gravitatorias con otros exponentes?

Entendiendo la ley newtoniana de la gravedad como un campo que se dispersa en el espacio euclídeo tridimensional, parece lógico que siga la ley inversa del cuadrado en la disminución de su intensidad (válida para campos centrales y fenómenos ondulatorios como luz y sonido). En cuanto al campo gravitatorio, que es el que nos ocupa, la generalización n-dimensional sería;

Sea *U(r)* un campo central generado por una masa puntual que satisface la Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 U(r) = 0. \qquad (21)$$

Así, para grandes distancias a la fuente (asegurándonos de que el tamaño de la masa generadora del campo no influye en las ecuaciones y, por tanto, se pueda considerar como puntual);

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2 sen\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(sen\varphi\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right)+ +\frac{1}{r^2 sen^2\varphi}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}=0, \qquad (22)$$

escrita en coordenadas esféricas.

Dada la simetría esférica del problema anulamos las dependencias angulares, y generalizando el exponente a un espacio euclídeo *n*-dimensional;

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}\right)=0, \qquad (23)$$

$$\Rightarrow r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}=C, \qquad (24)$$

siendo *C* una constante de integración. Así, integrando (excepto para $n-1=1$, es decir, para $n=2$);

$$U=\frac{C}{r^{n-2}}+C'. \qquad (25)$$

En donde la nueva constante debe ser $C'=0$ ya que a una distancia infinita el potencial debe despreciarse (salvo para $n=1$, caso en que el potencial no decrece con la distancia). Obtenemos por tanto:

$$U=\frac{C}{r^{n-2}}. \qquad (26)$$

Para mostrar una coherencia con la notación de Jacobi, para el caso tridimensional *n=3*;

$$U=\frac{C}{r}, \qquad (27)$$

llamando a la constante *C* como el producto de las masas, y extendiendo el potencial a la totalidad de planetas del Sistema Solar $U=\sum m_i m_{i'}/r_{ii'}$ que es la función que Jacobi utilizó en sus desarrollos ya expuestos en este trabajo. Volviendo al caso n-dimensional para *i* cuerpos, la expresión final sería:

$$U=\sum\frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{n-2}}. \qquad (28)$$

Siendo esta la función a emplear en el método de Jacobi. Sin embargo, debemos tener en cuenta un matiz, y es que en los desarrollos de *Lecciones sobre Dinámica* de 1842 se supone la función U homogénea, algo que no tiene porqué cumplirse para todos los exponentes. Recordamos la definición de función homogénea:

$Sea: f: C \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}/si\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \Rightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n) \in C, con\ \alpha > 0;$ *Se dice que* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *es una función homogénea de grado* k *si* $\forall\ \alpha > 0$ *se cumple que:*

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)=\alpha^k f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Analizando si la función U en un espacio $\mathbb{R}^n$es homogénea de grado k;

$$U(\alpha r_{ii'})=\sum\frac{m_i m_{i'}}{(\alpha r_{ii'})^{n-2}}=\sum\frac{m_i m_{i'}}{\alpha^{n-2}r_{ii'}{}^{n-2}}= =\alpha^{2-n}\sum\frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{n-2}}=\alpha^{2-n}U(r_{ii'}), \qquad (28)$$

siendo el grado de la función homogénea $k=2-n$. Se puede corroborar que en un espacio $n=3$, $k=-1$, y en un espacio $n=4$, $k=-2$, lo que corresponde a los valores que Jacobi analiza. Generalizando la expresión de este en función del número de dimensiones;

$$\frac{d^2(\sum m_i\rho_i^2)}{dt^2}=(2(2-n)+4)U+4h'. \qquad (29)$$

Es decir:

$$\frac{d^2(\sum m_i\rho_i^2)}{dt^2}=(8-2n)U+4h'. \qquad (29)$$

Comprobando de nuevo que para $n=4$, obtenemos la expresión del momento de inercia R de Jacobi;

$$R = 2h' t^2 + h'' t + h'''. \qquad (30)$$

Si pretendemos aplicar el método jacobiano a espacios de dimensiones diferentes a $n = 3, 4$, podemos separarlos en dos grupos, $n < 3$ y $n > 4$.

Para $n < 3$ incluimos, lógicamente, sólo dos posibles casos, como son $n = 1$ y $n = 2$. Si sustituimos ambos valores en la función potencial;

$$n = 1;\ U = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}^{-1}} + C' = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} + C', \qquad (31)$$

$n = 2$; la integral realizada antes para polinomios no sería correcta, con lo que en este caso:

$$r\frac{\partial U}{\partial r} = C, \qquad (32)$$

$$U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C', \qquad (33)$$

Si obtenemos la fuerza de atracción gravitatoria derivando el potencial;

- $n = 1;\ F = \sum m_i m_{i'}$,
- $n = 2;\ F = \sum \frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}}$, (34)

en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

Para $n = 1$ el potencial $U = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} + C'$ es una función homogénea sólo en el caso $C' = 0$, en cuyo caso sería válida en la ecuación de Jacobi del momento de inercia. En caso de $C' \neq 0$;

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\right] = \sum m_i m_{i'} r_{ii'} = U - C'. \qquad (35)$$

Lo que se sustituiría en el desarrollo de Jacobi para llegar a la expresión:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k+4)U + 4h' = $$
$$= 2(U - C') + 4U + 4h' = 6U + 4h' - 2C'. \qquad (36)$$

En cualquier caso, $4h' - 2C'$ se puede identificar con una nueva constante de integración h''. Haciendo un análisis físico de la situación, vemos que la solución para $n = 1$ tiene sentido físico, ya que en un espacio unidimensional, el campo de fuerzas newtoniano no podría dispersarse, con lo que la fuerza gravitatoria entre masas no debe depender de la distancia, siendo, por tanto, constante, como hemos obtenido. En este caso los cuerpos sólo podrían moverse en $\mathbb{R}$, con lo que no podrían orbitar para que la gravedad actúe como fuerza centrípeta y evitar así las colisiones. Además, al ser la fuerza gravitatoria constante, por muy lejos que estuvieran los cuerpos entre sí, el campo no disminuiría, con lo que no existiría distancia alguna bajo la cual pueda despreciarse la atracción gravitatoria. Por todo ello, en este caso los cuerpos terminarían colisionando entre sí y el Sistema Solar sería inestable.

Haciendo lo propio para $n = 2$, parece de sentido común que el campo de fuerzas se disperse y siga una ley inversa de la distancia. En cuanto a si este caso susceptible de ser analizado con el método de Jacobi, es algo que se puede comprobar estudiando si el potencial es una función homogénea para $n = 2$;

$$U(\alpha r_{ii'}) = \sum m_i m_{i'} \ln(\alpha r_{ii'})$$
$$= \sum m_i m_{i'} \ln \alpha + \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C'$$
$$= \sum m_i m_{i'} \ln \alpha + U(r_{ii'}). \qquad (37)$$

Con lo que vemos que no se cumple la condición general:

$$f(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (38)$$

Y, por tanto, U no es homogénea para $n = 2$, de forma que no se podría aplicar en este caso el Teorema de Euler para funciones homogéneas. Así, los desarrollos del método de Jacobi no se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, ya que vemos en $\mathbb{R}^2$ no se puede aplicar con estricta similitud. Sin embargo, con algunas modificaciones, se puede realizar un análisis equivalente. En efecto, aunque al potencial no se le puede aplicar el Teorema de Euler:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\right] = kU, \qquad (39)$$

ya que este no es homogéneo de grado k, sí podemos hacer el cálculo nosotros al igual que para $n = 1$. Así, obtendríamos:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \left[\frac{\partial U}{\partial x_i}\right] = \sum m_i m_{i'}. \qquad (40)$$

Insertando esta diferencia en los desarrollos *4.2* y *4.4* de *Lecciones sobre Dinámica* a los que ya hicimos referencia, terminaríamos obteniendo la ecuación:

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = 2\sum m_i m_{i'} + 4(U + h'). \qquad (41)$$

Cuya similitud con la ecuación de Jacobi;

$$\frac{d^2(\sum m_i \rho_i^2)}{dt^2} = (2k+4)U + 4h' = 2kU + 4(U + h'), \qquad (42)$$

es evidente, ya que se ha sustituido la función kU por la constante $\sum m_i m_{i'}$. Siguiendo ahora con un análisis análogo al jacobiano, e identificando la constante positiva $\sum m_i m_{i'} = 2\delta$, tendríamos:

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 4(\delta + U + h').\qquad(43)$$

Integrando entre 0 y t;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' = \int_0^t 4(\delta + U + h')dt.\qquad(44)$$

En donde R_0' es el valor de dR/dt en $t = 0$.

Si α denota el valor más pequeño de U entre dichos límites;

$$\frac{dR}{dt} - R_0' > 4(\delta + \alpha + h')t.\qquad(45)$$

Una segunda integración entre 0 ý t ofrece:

$$R - R_0 - R_0't > 2(\delta + \alpha + h')t^2.\qquad(46)$$

Es decir:

$$R > R_0 + R_0't + 2(\delta + \alpha + h')t^2.\qquad(47)$$

En donde R_0 es el valor de R en $t = 0$, y α una constante que en este caso no tiene porqué ser positiva, ya que $U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C'$ puede tomar valores positivos y negativos.

Vemos que si $(\delta + h')$ fuera una cantidad positiva mayor que $|\alpha|$, R crecería indefinidamente con el tiempo, con lo que el Sistema Solar sería inestable. Por otra parte, si $(\delta + h')$ fuera una cantidad negativa más grande que el mayor valor de U en valor absoluto entre *0* ý *t*, los elementos de la integral:

$$4\int_0^t (\delta + U + h')dt,\qquad(48)$$

serían negativos, con lo cual:

$$\frac{dR}{dt} - R_0' < -4\beta t.\qquad(49)$$

En donde β es una cantidad positiva. Integrando de nuevo;

$$R < R_0 + R_0't - 2\beta t^2.\qquad(50)$$

En este caso, al incrementarse t, R se aproxima a menos infinito, lo que es absurdo ya que R representa la suma de cuadrados y, por tanto, es una cantidad positiva.

Así, con todo lo anterior deducimos que $\delta + U + h'$ no puede tener valores estrictamente positivos ni estrictamente negativos, para que el Sistema Solar sea estable. $\delta + U + h'$ debe oscilar hacia adelante y atrás entre valores positivos y negativos, lo que quiere decir que U debe oscilar entre $-h' - \delta$. Si asumimos la siguiente identificación:

$$U = \sum m_i m_{i'} \ln r_{ii'} + C',\qquad(51)$$

oscila alrededor de

$$\sum m_i m_{i'} \ln a - \delta.\qquad(52)$$

Encontramos así la constante $C' = -\delta = -\sum m_i m_{i'}/2$ y que r debe oscilar alrededor de a. En cualquier caso, al igual que Jacobi comenta sobre su propio método, este análisis no ofrece soluciones para grandes valores de *t.* Como curiosidad, simplificaremos el sistema a un problema de dos cuerpos en que uno orbita circularmente alrededor de otro. En este caso, si quisiéramos calcular la velocidad orbital que debe llevar un planeta para que, a una determinada distancia, se mantenga estable en su órbita, sólo debemos considerar que la fuerza gravitatoria debe actuar también como fuerza centrípeta;

$$\frac{m_i m_{i'}}{r_{ii'}} = \frac{m_{i'} v^2}{r_{ii'}}.\qquad(53)$$

Independientemente de constantes de gravitación y en donde la expresión de la fuerza centrípeta no cambia por el hecho de que la trayectoria se produzca en un plano perteneciente a $\mathbb{R}^2$. Despejando la velocidad:

$$v = \sqrt{m_i}.\qquad(54)$$

Con lo cual, si el planeta viaja a esa velocidad, su órbita será estable independientemente de la distancia al Sol. En cuanto a la ecuación de Jacobi para estudiar la estabilidad del Sistema Solar en función del momento de inercia, hemos tratado de demostrar su validez y ampliación a $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Así, podemos enunciar la siguiente generalización tomando la notación $\ddot{R} = d^2R/dt^2$;

Teorema

Supongamos el Sistema Solar formado por i masas puntuales y que el potencial gravitatorio total U del sistema cumple el Principio de Superposición en $\mathbb{R}^n$. Siendo R el momento de inercia total del sistema planetario, la correspondencia entre dichas magnitudes cumple la siguiente relación en función del número de dimensiones n del espacio euclídeo:

$$\ddot{R} = (8 - 2n)U + 4h' en\ \mathbb{R}^n, \forall n \neq 2$$

$$\Leftrightarrow\ C' = 0\ para\ n = 1\ en\ \ddot{R} = 6U + 4h' - 2C',$$

y

$$\ddot{R} = 4(\delta + U + h'),$$

en $\mathbb{R}^2$, siendo $\delta = \frac{\sum m_i m_{i'}}{2}$ y h', C' constantes de integración.

(55)

Por otra parte, hemos de decir que, para Einstein, la gravedad nace de la curvatura en el espacio-tiempo provocada por la masa, por tanto, para espacios de dimensiones $n < 3$ la gravedad no existiría, lo que provocaría que los planetas no pudieran orbitar y el Sistema Solar no estaría ligado [13]. En el caso de haber más de tres dimensiones espaciales, las órbitas se volverían inestables [14] como por ejemplo para $n = 4$, ya estudiado por Jacobi. Aunque algunas teorías de unificación sugieren la posibilidad de un Universo de 11 dimensiones (Teoría de Supercuerdas), ello no debe suponer un problema para la estabilidad del Sistema Solar, ya que de las 10 dimensiones espaciales que propone la Teoría, 7 de ellas se suponen “compactadas”. Por tanto, sólo 3 de las 11 son macroscópicas y espaciales.

Curiosamente, la única posibilidad de estabilidad del Sistema Solar para órbitas elípticas reside en $\mathbb{R}^3$.

V. CONCLUSIONES

Una de las partes más controvertidas de la Física y las Matemáticas consiste en los problemas históricos en los que se parece avanzar, pero no se terminan de resolver definitivamente. En este artículo hemos expuesto la poco conocida contribución de Jacobi a uno de ellos: *¿Es estable el Sistema Solar?* Generalizando dicho análisis y ampliándolo con los estudios de Ehrenfest, la Teoría de la Relatividad General y la Teoría de Supercuerdas, hemos concluido que el Sistema Solar sólo puede ser estable en $\mathbb{R}^3$. Dicha conclusión, probablemente, sorprendería al alumnado de enseñanzas medias, acostumbrado a una presentación excesivamente simplista del problema. Pensamos así que este tipo de cuestiones abiertas de la Física deberían impartirse a nivel divulgativo en Bachillerato, mostrando así al alumnado que los movimientos orbitales son mucho más complejos que la “simple” representación kepleriana Sol-Planeta usual. Creemos que incluso en Bachillerato se puede presentar el problema en su verdadera dimensión, aunque sea a nivel teórico e histórico, de forma que el alumnado perciba la complejidad de la Física cuando se reducen las aproximaciones y se buscan soluciones exactas. Una forma en que nosotros planteamos la situación en las aulas es la de establecer un paralelismo (coloquialmente hablando) entre un sistema con *n* incógnitas dentro de un número de ecuaciones inferior a *n* (el alumnado debe saber que dicho sistema no tiene solución), y un sistema también irresoluble de *n* ecuaciones de movimiento (aplicadas al Sistema Solar) con un número de constantes físicas (como la energía o momento angular) también inferior a *n*. Con esta sencilla comparación matemática y una adecuada presentación histórica, promoviendo como complemento que los alumnos se documenten sobre la estabilidad del Sistema Solar gracias a búsquedas en red, los estudiantes se acercan más fácilmente a las profundidades de las leyes de la Mecánica Celeste, lo que quizá despierte un interés mayor por el estudio e investigación de la Física en cursos posteriores.

AGRADECIMIENTOS

A Rafael Ortega, profesor del departamento de matemática aplicada de la Universidad de Granada, por sus contribuciones en un proyecto anterior sobre la Estabilidad del Sistema Solar.

A Manuel Bautista, buen profesor de matemáticas y mejor amigo, por su inestimable ayuda en la traducción del resumen.

REFERENCIAS

[1] Laplace, P. S., *Exposition Du Systeme Du Monde* en (1796) y *Mécanique Céleste*, cuyo primer volumen apareció en 1799.

[2] Poincaré, H., Livre II: *Les Approximations de la Mécanique Céleste*, Chapitre V: *Sur la Stabilité du Systeme Solaire*, (1898). La correspondencia de Poincaré y su lista de publicaciones se pueden encontrar en los *Archives Henri Poincaré, Nancy-Université*: http://poincare.univ-nancy2.fr/

[3] Arnol´d V., *Small Denominators and problems of stabiliy motion in classical and celestial mechanics*, Russ. Match. Surv. **18**, nº 6, (1963).

[4] Moser J, *Is the Solar System Stable?*, The Mathematical Intelligencer **1**, 65-71, (1978).

[5] Broer, H. W. *KAM theory: the legacy of Kolmogorov’s 1954 paper*, Bulletin of the American Mathematical Society **41**, 507-521 (2004).

[*6]* Laskar J. y Gastineau, *M., Existence of collisional trajectories of Mercury, Mars and Venus with the Earth* Nature **459**, 817-819 (2009)**.**

[7] Solé V., Manrubia S. C., *Orden y Caos en Sistemas Complejos*, Fundamentos y Aplicaciones, (UPC, España, 2001).

[8] Jacobi, *Jacobi´s Lectures on Dynamics,* Delivered at the University of Königsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt, 2009.

[9] Lagrange, J. L., *Mem. De l´Institut,* (1808).

[10] Poisson S. D., Journal de l´école polytechnique, cat. 15, (1809).

[11] Ortega, R. y Ureña, A., *Introducción a la Mecánica Celeste*, (Universidad de Granada, España, 2010).

[12] http://www.iac.es/gabinete/difus/cometas/cuantas.htm
http://astronomia.cuatrineros.es/cometas.html
Ambas consultadas por última vez el 25 de Enero de 2013

[13] Gott, R *Time Travel in Einstein´s Universe: the physical possibilities of trhough time,* (Houghton Mifflin Books, New York, 2002).

[14] Ehrenfest P., *Which roles does the three-dimensionality of area play in the basic laws of physics?*, Annalen der Physick, (1920).