¿Es estable el Sistema Solar?

José J. Arenas
Jefe del Departamento de Física, Instituto Monterroso,
C/Santo Tomás de Aquino S/N, C.P.: 29680, Estepona, Málaga, España

E-mail: arenasferrer@hotmail.com

(Recibido el 27 de Febrero de 2014; aceptado el 16 de Junio de 2014)

Resumen

En bachillerato y primeros cursos universitarios, el Sistema Solar se enseña como ejemplo de la Ley de Gravitación y del determinismo newtoniano. Sin embargo, la estabilidad del Sistema Solar ha sido objeto de amplios estudios por los más grandes físicos y matemáticos de todos los tiempos. Lagrange y Laplace iniciaron los primeros análisis rigurosos en los siglos XVIII-XIX, y a ellos siguieron otros gigantes como Poincaré y, más recientemente, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. La pregunta en su sentido clásico: ¿Es estable el Sistema Solar? se refiere a si los planetas colisionarán entre sí o, por el contrario, algunos de ellos escaparán al infinito. En este artículo se analizará el estado de la cuestión revisando las fuentes originales de los autores y se propone que se incluya en el currículum académico.

Palabras clave: mecánica celeste, estabilidad del Sistema Solar, problema de los n cuerpos, caos, determinismo

Abstract

In high school and early college courses, the Solar System is taught as an example of the Law of Gravitation and Newtonian determinism. However, the stability of the Solar System has been object of research by the most important physicists and mathematicians of all times. Lagrange and Laplace began the first rigorous analysis in the 18^{th} and 19^{th} centuries, and others followed such as Poincaré and, more recently, Kolmogorov, Arnold, Moser, Laskar, etc. The question in its classic sense: Is the Solar System Stable? refers to if planets will collide with each other or, on the contrary, some of them will escape to infinity. This article will analyze the state of the art reviewing the original sources of the authors.

Keywords: celestial mechanics, stability of the Solar System, n-body problem, chaos, *determinism*

PACS: 01.65.+g, 45.50.Jf, 45.50.Pk, **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Los esquemas y análisis sobre las órbitas planetarias del Sistema Solar suelen adoptar un formato sencillo en la enseñanza secundaria y primeros cursos universitarios, ya que se basan en modelos de dos cuerpos en que uno de masa m orbita en torno a otro de masa $M>>m$, pudiendo considerarse así en reposo al segundo de ellos. Sin embargo, incluso en los complejos cálculos de trayectorias suele obviarse la tendencia natural del sistema dinámico a largo plazo si tenemos en cuenta otras fuerzas gravitatorias, es decir, realmente *¿Es estable el Sistema Solar?*

Esta pregunta surgió de forma natural tras los trabajos sobre gravedad y órbitas planetarias de Kepler y Newton [1] del siglo XVII, ya que en estos no se incluía la interacción que los planetas ejercían entre sí. Estas interacciones aumentaban la complejidad en el cálculo de trayectorias, ya que se pasaba de *un problema de dos cuerpos* a un *problema de n cuerpos*. Por tanto, el Sistema Solar, en caso de no ser un sistema integrable, podría resultar caótico (término aún no acuñado en aquellos años). El sentido clásico de la pregunta se refiere a si los planetas colisionan entre sí o escaparán al infinito con el paso del tiempo, y como veremos en un recorrido de siglos, la respuesta, especialmente la analítica, es de una extraordinaria complejidad histórica.

Desde las primeras investigaciones al respecto de la mano de Laplace en 1796 [2] hasta las modernas contribuciones relacionadas con la expansión cosmológica [3, 4] y las simulaciones de Laskar y otros [5, 6, 7, 8, 9] de 2009, han sido muchos los grandes físicos y matemáticos que han tratado de resolver uno de los grandes retos de la física clásica. Esta cuestión ha sido muy bien señalada y esbozada por algunos autores como Moser [10], Szebehely [11], o, más recientemente, Solé-Manrubia [12]

II. KEPLER Y NEWTON: GERMEN DEL PROBLEMA

Entre 1609 y 1618, apoyado en las observaciones del astrónomo Tycho Brahe, Johannes Kepler estableció un modelo heliocéntrico sobre el movimiento de los planetas en sus órbitas alrededor del Sol. Las tres leyes enunciadas por Kepler se pueden resumir de la siguiente forma (entre paréntesis escribimos parte de las palabras textuales de Kepler del Libro Quinto, Las Armonías del Mundo:

a) Ley de las Elipses

Los planetas describen órbitas elípticas en su movimiento alrededor del Sol, estando este en uno de sus focos (*demostrado está también por mí, al mismo tiempo, ser elíptica la órbita del planeta, y estar el Sol, fuente del movimiento, en el otro foco de esa elipse*).

b) Ley de las áreas

El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales (*a supuestos tiempos iguales, pongamos un día natural en ambos casos, los correspondientes arcos diarios verdaderos de una órbita excéntrica mantienen entre sí proporción*).

c) Ley Armónica

Los cuadrados de los periodos T de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores a de la elipse, es decir, $T^2=k\cdot a^3$. Siendo k una constante de proporcionalidad (*es cosa certísima y en todo exacta que la proporción que existe entre los tiempos periódicos de dos planetas cualesquiera sea precisamente la proporción sesquiáltera entre las distancias medias*).

Las leyes de Kepler eran descriptivas, para la fundamentación hubo que esperar a Isaac Newton y sus célebres *Principia de 1687*. En concreto, en la Sección XI (*Del Movimiento de Cuerpos que tienden unos a otros con Fuerzas Centrípetas*), Newton aborda con rigor el movimiento de los cuerpos en relación con las Leyes de Kepler. Así, en la Proposición LXV, Teorema XXV, expone:

<u>*Teorema I*</u>

"Varios cuerpos, cuyas fuerzas decrecen como el cuadrado de las distancias desde sus centros, pueden moverse entre sí en elipses, y describir mediante radios trazados a los focos áreas muy aproximadamente proporcionales a los tiempos".

Seguidamente podemos leer un comentario que ya contiene el germen del problema;

"Se ha demostrado en la proposición anterior el caso en el cual los movimientos ocurren exactamente en elipses. Cuanto más se aparte la ley de las fuerzas de la ley allí propuesta, tanto más perturbarán los cuerpos sus mutuos movimientos; y tampoco es posible que los cuerpos, con atracción mutua según la ley aquí supuesta, se muevan en elipses exactas, salvo que mantengan entre sí determinada proporción de distancias(…) pero los cuerpos pequeños pueden disminuirse tanto que dicho desvío, con las interacciones mutuas, sean menores que unas dadas y, por tanto, hasta que las órbitas coincidan con elipses y las áreas respondan a los tiempos sin mayor error que uno dado".

Así, aunque el determinismo newtoniano se asentó rápidamente a lo largo de toda Europa, fue el propio Newton quien puso de manifiesto la imprecisión de las trayectorias elípticas keplerianas si se tenían en cuenta las perturbaciones gravitatorias de otros planetas. En cualquier caso, el científico inglés atribuía a una inteligencia divina el reajuste de las órbitas para que estas funcionaran eternamente como un reloj.

III. LAPLACE Y JACOBI: PRIMEROS ANÁLISIS

La monumental obra newtoniana dejó alguna cuestión sin resolver, como por ejemplo: *¿Por qué las órbitas de los dos planetas mayores, Júpiter y Saturno, a veces se retrasan y otras se adelantan respecto a sus predicciones teóricas?*

Pierre Simón de Laplace estudió esta aparente inestabilidad planetaria y publicó sus conclusiones en *Exposition Du Systeme Du Monde* (1796) y en *Mécanique Céleste (primera vez en la historia en que se aplica esta expresión)*, cuyo primer volumen apareció en 1799. Así, el francés demostró que las perturbaciones orbitales no eran acumulativas como temía Newton, sino que se repetían con un periodo de 929 años. Además, inspirado en un trabajo de Lagrange de 1766 (que no reproduciremos aquí debido a su extensión), Laplace también demostró que la excentricidad de las órbitas planetarias está acotada inferior y superiormente. Con estos y otros estudios como la vinculación de aceleración media de la Luna con la disminución de la excentricidad terrestre quedó aparentemente zanjada la cuestión de la estabilidad del Sistema Solar. Sin embargo, los análisis laplacianos sólo se basaban en observaciones, con lo que quedaban fuera del estudio las perturbaciones no advertidas y sus efectos a largo plazo, en esta línea encontramos un primer análisis teórico del problema en 1842, el cual es poco conocido a pesar de que su autoría pertenece a Carl Gustav Jakob Jacobi [13].

En las lecciones sobre dinámica que Jacobi impartió en la Universidad de Königsberg durante el semestre de invierno del curso 1842-43, se encontraba un capítulo *(Lectura 4, Principio de Conservación de la "Vis Viva")* en que profundizaba en el teorema de las fuerzas vivas y su relación con el potencial. Tomando el Sistema Solar como un sistema de masas puntuales, Jacobi obtuvo una relación general entre el momento de inercia del sistema (R) y el potencial gravitatorio total (U) que, particularizado en $\mathbb{R}^3$ era;

$$\frac{d^2R}{dt^2} = 2U + 4h'. \qquad (1)$$

Siendo h' una constante de integración.

Sin embargo, a pesar del ingenioso método que se puede leer en sus *lecciones*, Jacobi reconoce al final del capítulo que la anterior ecuación no le condujo a conclusiones definitivas ya que (entre otras razones) al integrar la expresión anterior, sólo se obtienen soluciones dependientes de parámetros desconocidos, los cuales acota basándose en la hipótesis inicial de un sistema planetario estable.

IV. POINCARÉ: EL CONCURSO DEL REY

Desde que Halley observó en 1682 el cometa que lleva su nombre y predijo acertadamente que regresaría en 1758 (desgraciadamente, como tantas veces en ciencia, no vivió para comprobar su logro), la mecánica de Kepler-Newton se había convertido en la manifestación del gran poder de la razón frente a la religión en cuanto a explicar las leyes de los cielos. De tal forma, se esperaba que algún científico con la voluntad e inteligencia necesarias resolviera la cuestión, ya que el ambiente intelectual de la época no contemplaba problemas irresolubles. Así, el ya conocido como *Problema de los n cuerpos* topó con un año clave en su historia: 1885.

Con motivo del cumpleaños del Rey Óscar II de Suecia y Noruega, G. M. Leffer, profesor de matemáticas de la Universidad de Estocolmo propuso en 1884 al monarca la realización de un concurso matemático. Finalmente, tras aceptar la propuesta, se compuso un jurado formado por Weierstrass, Hermite y el propio Leffer. De los cuatro problemas de que constaba el concurso, el que pasó a la historia fue el propuesto por Weierstrass:

"Dado un sistema formado por un número arbitrario de puntos materiales que se atraen mutuamente de acuerdo con las leyes de Newton, se propone, bajo la hipótesis de que un choque entre dos o más partículas no tiene nunca lugar, desarrollar las coordenadas de cada partícula en una serie procedente de funciones conocidas en el tiempo y que sean uniformemente convergentes para cualquier valor de tiempo".

La verdadera dificultad del reto residía no ya en encontrar las soluciones del sistema dinámico, sino en demostrar su existencia. Henri Poincaré, durante los tres años concedidos para resolver el problema, se sumergió en la cuestión.

Desde la comodidad que ofrecía la mecánica de Hamilton-Jacobi que reducía el orden de las ecuaciones diferenciales, Poincaré partió del concepto de integrabilidad de sistemas dinámicos dado por Liouville en 1840:

<u>*Teorema II*</u>

"Si existen $f_k\colon U \to \mathbb{R}$ independientes y en involución (paréntesis de Poisson nulos), donde k = 1,…, n, f_1 = H, entonces el sistema hamiltoniano H es integrable".

En definitiva, para que un sistema hamiltoniano de *n* variables sea integrable, debe haber *n* constantes de movimiento, las cuales no siempre son sencillas de encontrar. En referencia a ello, los *Métodos Nuevos de la Mecánica Celeste Tomo I* (Poincaré, 1892), se estudia el sistema Sol-Tierra-Luna (problema de los tres cuerpos) de hamiltoniano:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{p_3^2}{2m_3} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}}. \quad (2)$$

En donde m_i representa las masas, p_i el momento y r_{ij} la distancia entre la i-ésima partícula y la j-ésima.

En el espacio euclídeo tridimensional dicho sistema consta de 18 variables entre momentos y posiciones, pero podemos reducir la dimensión del sistema gracias a las 10 constantes de movimiento conocidas (que derivan del centro de gravedad como sistema de referencia en reposo, momento angular constante y conservación de la energía). Así, el sistema Sol-Tierra-Luna queda con 8 variables. La pregunta oportuna es *¿habrá más constantes de movimiento?* La respuesta a la cuestión se cerró con Poincaré;

<u>*Teorema III*</u>

"No existe ninguna otra constante de movimiento que reduzca la dimensión del sistema".

Como consecuencia de este rígido teorema, el problema de los 3 cuerpos fue el primero en mostrar al mundo todo un universo de dinámicas irregulares, concluyendo que la no integrabilidad del problema de los tres cuerpos podría implicar, generalizando a los n cuerpos, la inestabilidad del Sistema Solar (Peterson, 1994). En consecuencia, Poincaré obtuvo que el movimiento de los cuerpos del Sistema Solar prácticamente no se repetía nunca, al menos con total exactitud. Paradójicamente, el futuro, a pesar de ser determinista, era impredecible.

El gran enfoque de Poincaré se basó en la observación de que la mayoría de los problemas de la Mecánica Celeste se pueden clasificar como *sistemas hamiltonianos próximos a integrables*, lo que hoy conocemos como *Teoría de Perturbaciones*.

De esta forma, se pueden encontrar coordenadas de acción-ángulo $(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{w})$ en las que el hamiltoniano adopta la forma simplificada:

$$H(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{w}) = H_0(\boldsymbol{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{w}). \quad (3)$$

En donde $H_0(\boldsymbol{I})$ es integrable y $\varepsilon H_1(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{w})$ es pequeño. En nuestro caso, el planetario, $H_0(I)$ representa la energía de los planetas en órbita alrededor del Sol si despreciamos las interacciones entre ellos (movimiento kepleriano), y $\varepsilon H_1(I, w)$ representa las interacciones de los planetas entre sí (mucho menor que la atracción ejercida por el Sol, ya que el pequeño parámetro ε es del orden de las masas planetarias). *S* representa la función generadora (la nueva transformación canónica para el hamiltoniano perturbado *H*) necesaria para encontrar unas nuevas coordenadas (I', w') en forma de series en ε. Así, Poincaré obtuvo:

$$S_1(I', w) = wI' + i\varepsilon \sum_{m \neq 0} \frac{H_{1,m}(I')e^{imw}}{m\Omega}. \quad (4)$$

En donde Ω representan las frecuencias planetarias y

$$m = 2\pi(m_1, m_2, \dots, m_n), \forall i / m_i \in \mathbb{Z}.$$

Se podría pensar que con este desarrollo ya estaba resuelto el problema del movimiento de los planetas, ya que tomando cada vez más términos en las series se obtienen aproximaciones del movimiento cada vez más afinadas. Sin embargo, para garantizar la estabilidad a largo plazo, la serie debe converger, por lo que $m\Omega \neq 0$.

De tal forma, la serie diverge si:

$$\boldsymbol{m\Omega} = m_1\,\Omega_1 + m_2\Omega_2 + \dots + m_n\Omega_n = 0. \quad (5)$$

Es decir, cuando haya resonancias entre las frecuencias.

Poincaré demostró que tomando un número creciente de términos en las series, a partir de un cierto momento, las soluciones se deterioran. Así, el francés, parecía indicar que ninguna órbita iba a ser eternamente estable, lo cual planteaba otra pregunta: si además, ha quedado demostrado que no hay más leyes de conservación *¿por qué se comportaban los planetas con tanta regularidad desde hace 4500 millones de años?* A pesar de no responder definitivamente a la pregunta de Weierstrass, Poincaré ganó el concurso del Rey Óscar publicando parte de sus resultados en [14].

Llegamos así a una situación peor que la posible anulación de los divisores en algunos términos de la serie, y es que incluso en el caso estricto en que $m\Omega\neq 0$, es decir, cuando las frecuencias sean inconmensurables, siempre se puede encontrar un conjunto de valores de m tales que:

$$m\Omega < \delta. \tag{6}$$

Con δ escogido arbitrariamente pequeño, provocando la divergencia de las series. Surgió así en Teoría de Números *el problema de los denominadores pequeños* [15, 16].

IV. KOLMOGOROV, ARNOLD Y MOSER: TEOREMA KAM

Según Weierstrass, la estabilidad no podía depender únicamente del carácter racional de las medidas del cociente de las frecuencias, dada la imposibilidad de medir tales magnitudes con semejante precisión. Surgió así una elegante conexión entre la Mecánica Celeste, la Teoría de Números, y la Teoría Geométrica de la Medida, ya que:

¿Hasta qué punto los números irracionales se pueden aproximar a racionales?

Siempre podemos encontrar aproximaciones racionales para un número irracional, como por ejemplo 7/5 para $\sqrt{2}$.

De igual forma, podemos aproximar un número irracional "tanto como queramos" si usamos números racionales con denominadores grandes. Sin embargo, de todo ello se abre una cuestión sutil:

¿Se puede calificar a un irracional de mal aproximable o bien aproximable, en el sentido de que a los irracionales bien aproximables podemos acercarnos con lentitud, a través de números racionales de denominadores pequeños?

Joseph Liouville también se interesó por esta cuestión, llegando al siguiente teorema de 1840:

Teorema IV

Para cada algebraico α de grado n>1, existe una constante A(α)> 0, tal que:

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^n}, \tag{7}$$

se cumple para todos los números racionales p/q.

A la anterior desigualdad se le llamó condición diofántica [17]. Este teorema, que ya muestra la limitación de acercarse con precisión arbitraria a los números racionales, dejaba el cabo suelto del exponente n. Tras una larga búsqueda de mejoras al Teorema de Liouville, a mitad del siglo XX, el teorema de Liouville fue mejorado por Roth;

Teorema V

El Teorema de Liouville también se cumple para un exponente:

$$2 + e, \forall e > 0. \tag{8}$$

Por lo que le fue concedida la medalla la medalla Fields en 1958.

El resultado fundamental que combinaba las nociones de Teoría de Números con los sistemas hamiltonianos próximos a integrables llegó con Kolmogorov [18], Arnol´d [15] y Moser [10] en los años cincuenta y sesenta del siglo pasado.

Los estudios de los tres matemáticos se concentraron en el conocido como *Teorema KAM* [18, 19, 20, 21] que, enunciado en una de sus múltiples versiones:

Teorema VI

Dado el hamiltoniano $H(\boldsymbol{I},\boldsymbol{w}) = H_0(\boldsymbol{I}) + \varepsilon H_1(\boldsymbol{I},\boldsymbol{w})$, con ε suficientemente pequeña cumpliendo una de las dos condiciones:

i. H_0 es integrable no degenerado

ii.. H_0 es isoenergéticamente no degenerado,

para todas las Ω satisfaciendo la condición diofántica:

$$|(m,\Omega)| \geq \frac{A(\varepsilon)}{|m|^r}, con\ r > (n+1), |m| = \sum_{i=1}^{n} |m_i|,$$

Existe $\tilde{T}_\Omega$, toro invariante del hamiltoniano $H(\boldsymbol{I},\boldsymbol{w})$, cercano al toro invariante T_Ω del sistema no perturbado, sobre el que el flujo es conjugado del que se tenía en T_w. Dado un compacto foliado por toros de H_0, el conjunto de puntos de él no pertenecientes a algún $\tilde{T}_w$ tiene medida relativa que tiende a cero si ε lo hace.

Aunque, debido a su complejidad, queda fuera del objetivo del presente artículo la demostración y profundización de todos los conceptos que aborda dicho teorema, sí podemos decir coloquialmente que el Teorema KAM expone que los sistemas hamiltonianos débilmente perturbados tienden a mantener su estabilidad. Asumiendo que el Sistema Solar pertenece a este tipo de sistemas, este ha sido el resultado analítico más importante en la historia del problema.

Aunque en la década de 1960 todavía existían astrónomos convencidos de la existencia de leyes de conservación suplementarias como única explicación posible de la estabilidad del Sistema Solar, el Teorema KAM respondió a cuestiones de Mecánica Celeste de forma misteriosa, mediante Teorías de Números y probabilidades (cuanto mayor sea el parámetro ε, menor será la probabilidad de que el sistema sea estable).

V. ANDERSON Y LASKAR: NUEVAS VÍAS

Aunque el Teorema KAM asestó un duro golpe al problema, pronto surgieron nuevas ideas a la luz de los descubrimientos cosmológicos del siglo XX y el salto de gigante de las simulaciones por ordenador.

Edwin Powell Hubble demostró bajo el método observacional la expansión del Universo en 1929, aunque la autoría del descubrimiento es controvertida porque también se asigna el descubrimiento a Lemaitre en 1927 (publicado como noticia en Nature en Noviembre de 2011). Según la Ley de Hubble las galaxias se alejan unas de otras a una velocidad v proporcional a distancia R que las separa;

$$v = HR. \tag{9}$$

En donde H es la llamada constante de Hubble, cuyas medidas de 2011 [22] arrojan un valor de 67.0 ± 3.2 km s^{-1} Mpc^{-1}.

Sin embargo, los modelos cosmológicos basados en la Teoría del Big Bang parecían sugerir que H podría variar lentamente a lo largo del tiempo. Así, a esta "constante" se le ha ido llamando progresivamente parámetro de Hubble. El valor de dicho parámetro depende del tiempo en la forma:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = -(1+q). \tag{10}$$

Por tanto, el parámetro de Hubble aumenta o disminuye según el signo del conocido como *parámetro de deceleración* q. En un principio se pensaba que $q \geq -1$, lo que correspondería a $\dot{H} \leq 0$, ya que ello implicaría que la expansión decelera o permanece constante debido a la fuerza gravitatoria que gobierna el Universo. Sin embargo, el descubrimiento de un valor $q < -1$ en algunas observaciones de supernovas, revolucionó la Cosmología de la mano de Riess en 1998 al implicar que la expansión cosmológica se estaría acelerando.

De acuerdo con lo anterior, queda patente que la expansión afecta a la mecánica de las galaxias, pero *¿afectará también a escalas más pequeñas?* Anderson, en 1995, demostró que sí. Comenzaron así a estudiarse los efectos de la expansión cosmológica a la escala del Sistema Solar como perturbaciones en el problema de los dos cuerpos, considerándola como una corrección de la ley de gravitación newtoniana. Por tanto, aunque la perturbación sea pequeña, quizá podría desestabilizar a nuestro sistema planetario en un futuro. Bajo esta moderna vía de estudio, Sereno y Jetzer obtuvieron en 2007 que, en un escenario pesimista y despreciando los efectos de la materia oscura, el radio orbital divergiría y ocasionaría que el Sistema Solar se disocie tras un intervalo de tiempo:

$$\Delta t_{dis} = \int_{z_{dis}}^{0} \frac{dz}{(1+z)H(z)}\,, \tag{11}$$

en donde el parámetro z (corrimiento al rojo) proviene del efecto Doppler que se mide mediante: $1 + z = \frac{\lambda_{observada}}{\lambda_{emitida}}$, siendo λ la longitud de onda de la luz solar.

A pesar del gran resultado obtenido, ya que ofrece una solución numérica al problema del orden de 10^9 años, este no es definitivo puesto que depende del comportamiento a largo plazo de la energía oscura y este tampoco es un tema cerrado.

En una revisión de la cuestión encargada por la E.S.A. (2010), Carrera y Giulini, consideraron un solo planeta del Sistema Solar, con lo que la escala de tiempo relevante del problema es el periodo de las órbitas alrededor del Sol, por lo cual asumieron el parámetro de Hubble como constante (H_0) durante una órbita. De tal forma, como perturbaciones a las leyes de Kepler, rederivaron el radio crítico a partir del cual no podrían existir órbitas circulares (tomadas así por sencillez) debido a la aceleración cosmológica, siendo dicho radio crítico:

$$R_c = \sqrt[3]{\frac{GM}{|q|H_0^2}}\,. \tag{12}$$

En donde G es la constante de gravitación y M la masa solar. Cabe decir, para hacerse una idea de la magnitud de la distancia, que el cociente entre la distancia Sol-Tierra (R_0) y dicho radio es:

$$\frac{R_0}{R_c} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{C}{|A|}}} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{\frac{GM_S}{|q_0 H_0^2|}}} = 4.2 \cdot 10^{-8}. \tag{13}$$

Por lo que el radio crítico se encuentra, suponiendo estables los parámetros cosmológicos, extremadamente alejado.

Recientemente (2013), se han tenido en cuenta las ecuaciones post-newtonianas EIH (Einstein, Infeld, Hoffman) para un sistema de dos cuerpos en la obtención del radio crítico [23]

En cuanto a otras vías de investigación que ofrezcan resultados a nivel predictivo, Jacques Laskar, en los años 80, 90 y más recientemente en 2009 investigando sobre la estabilidad del Sistema Solar para el Instituto de Mecánica Celeste de París, consolidó la idea de usar otros métodos ante el carácter no determinista del sistema. Bajo la luz de otros estudios anteriores como el de Sussman y Wisdom, Laskar integró numéricamente en 1989 el movimiento de los ocho planetas del Sistema Solar para un tiempo de 200 millones de años, indicando los resultados que planetas como Mercurio, Venus, La Tierra y Marte, tenían un comportamiento de las trayectorias caótico; las distancias entre dos órbitas inicialmente próximas se multiplicaban por tres cada cinco millones de años (exponente de Lyapunov).

Por tanto, ello hacía imposible cualquier predicción más allá de 100 millones de años, ya que un error del 0.00000001% en la medida de las condiciones iniciales conducía a un error del 100% (un error igual a la medida) tras 100 millones de años. El origen de tales movimientos caóticos provenía de las resonancias entre los periodos de precesión (resonancias seculares) de las órbitas de Marte y de la Tierra por un lado, y de Mercurio, Venus y Júpiter por otro. Las integraciones y simulaciones posteriores (como el análisis de Lissauer de 1999) para la evolución de las órbitas planetarias muestran una gran estabilidad en planetas similares a la Tierra para periodos de tiempo de hasta 10^9 años [24].

Simulaciones más recientes (Laskar, 2009) recrean los movimientos orbitales con pequeñas variaciones de las condiciones iniciales que dan lugar a 2500 dinámicas posibles para los próximos miles de millones de años; en un

1% de los casos, Venus, Mercurio, La Tierra o Marte colisionaban entre sí o con el Sol.

VI. CONCLUSIONES

La pregunta clásica sobre la Estabilidad del Sistema Solar sigue abierta a pesar del Teorema KAM (años 60), ya que este sólo establece su estabilidad como una probabilidad que depende de perturbaciones pequeñas, siendo una teorema de pequeño parámetro que además no está cuantificado. El carácter no integrable y caótico del Sistema Solar (Bruns-Poincaré, 1887), hace que sean necesarios métodos numéricos y simulaciones que sólo realizan predicciones válidas hasta un tiempo de 10^8 años (Laskar, 1990, 2009) o 10^9 años (Lissauer, 1999). Estas cifras son de un orden de magnitud similar a los resultados mediante otros métodos de aplicación cosmológica (Sereno y Jetzer, 2007) basados en la Ley de Hubble (1929). Respecto a esta última vía de estudio, podríamos preguntarnos ¿debe despreciarse? Esta respuesta no la hemos considerado trivial ya que el efecto de la aceleración cósmica es acumulativo y, a tenor de los recientes descubrimientos y análisis posteriores a 1998, podría crecer con el tiempo y la distancia además de influir a pequeñas escalas (Anderson, 1995). Dichos descubrimientos sobre la aceleración cósmica (Riess, 1998), parecen indicar que, efectivamente, se deben tener en cuenta parámetros cosmológicos en la búsqueda de una solución definitiva al problema. El hecho de que los parámetros de deceleración y de Hubble (q ý H respectivamente) no sean del todo conocidos, al igual que la influencia de la materia oscura, hace que la respuesta a la pregunta esté abierta.

En definitiva, nos encontramos ante un problema particular con más de tres siglos de historia mucho más profundo pero menos conocido que el del simple enunciado "*problema de los n-cuerpos*", y que ha atraído a las mejores mentes desde el siglo XVII. La respuesta a la cuestión *¿Es estable el Sistema Solar?* sigue siendo un enigma. En futuras investigaciones sería recomendable que se añadiera la perturbación cosmológica en el hamiltoniano de n cuerpos próximo a integrable de Poincaré-KAM, y que no sólo se incluya como perturbación a la ecuación newtoniana en un sistema de dos cuerpos. Por tanto, habría que añadir el parámetro de Hubble como una nueva constante del sistema dinámico que reduzca la dimensión del sistema. Entendemos también que si se ha incluido la aceleración cosmológica en el análisis del problema, habría que cuestionar también si debe seguir despreciándose la relatividad general como marco de estudio o, al menos, como perturbación de las leyes clásicas (aproximación postnewtoniana). En conclusión, dicha pregunta abierta sólo podrá resolverse con nuevos métodos matemáticos o con modificaciones en los axiomas de la mecánica celeste y la dinámica de sistemas en general.

Aunque los contenidos matemáticos y físicos son de un nivel elevado, pensamos que incluso en cursos preuniversitarios de ciencias debería enseñarse que las Leyes de Kepler-Newton sólo funcionan correctamente en un sistema de dos cuerpos. Estas ideas, aunque se expliquen en la práctica docente sin ecuaciones, no sólo pueden motivar al alumnado a investigar, sino que evitarán que en un futuro entren en contradicción sus nuevos conocimientos con los antiguos.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece la inestimable colaboración de Profesor Manuel Bautista en la traducción del "abstracts", así como la impagable ayuda en los contenidos, del Doctor Rafael Ortega Ríos, quien apoyó un proyecto de mayor envergadura y que engloba los contenidos aquí expuestos.

REFERENCIAS

[1] Hawking, S., *A hombros de gigantes*, (Crítica, España, 2010).
[2] Hawking, S., *Dios creó los números*, (Crítica, España, 2010).
[3] Carrera, M & Giulini D., *Influence of global cosmological expansion on local dynamics and kinematics, Rev. Mod. Phys.*, **82**, 169-208 (2010).
[4] Sereno, M. & Jetzer, P., *Evolution of gravitational orbits in the expanding universe,* Physical Review D. **75**, 064031 (2007).
[5] Laskar, J., Joutel, F. & Robutel, P., *Stabilization of the Earth´s obliquity by de Moon,* Letters to Nature **361**, 615-617 (1993).
[6] Laskar, J. & Gastineau, M., *Collisional trajectories for Mars and Venus with the Earth*, Nature **459**, 817-819 (2009).
[7] Laskar, J., *La Luna y el Origen del Hombre.* Investigación y Ciencia, Julio (1994).
[8] Laskar, J., Froeschlé, C., *El Caos en el Sistema Solar.* Mundo Científico **732**, 115-121 (1991).
[9] Laskar, J., Joutel, F. and Robutel P., *Stabilization of the Earth´s obliquity by the Moon,* Letters to Nature **361**, 615-617 (1993).
[10] Moser, J., *Is the Solar System Stable?,* The Mathematical Intelligencer **1**, 65-71 (1978).
[11] Szebehely, V. G., *Stability of the Solar System and its minor natural and artificial bodies*, (Kluwer Academic Publishers, Netherland, 1985).
[12] Solé, V., Manrubia, S. C., *Orden y Caos en Sistemas Complejos, Fundamentos y Aplicaciones*, (UPC, Barcelona, 2001).
[13] Jacobi, G., *Jacobi´s Lectures on Dynamics,* Delivered at the University of Königsberg in the Winter Semester 1842-1843 and According to the Notes Prepared by C. W. Brockardt (1842).
[14] Poincaré, H., *Livre II: Les Approximations de la mécanique céleste, chapitre v: sur la stabilité du Systeme Solaire,* (Paris, 1898).
[15] Arnol´d, V., *Small denominators and problems of stabiliy motion in classical and celestial mechanics,* Russ. Match. Surv. **18**, 6 (1963).
[16] Small Denominators. Encyclopedia of mathematics,

http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Small_denominators&oldid=14339. (Consultado el 10 de Enero de 2014).

[17] Luca, F., *Aproximaciones diofánticas,* (Centro de Ciencias Matemáticas, UNAM, México, 2012).

[18] Broer, H. W., *KAM theory: the legacy of Kolmogorov´s 1954 paper,* Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society **41**, 507-521, (2004).

[19] Celletti, A. & Chierchia, L., *KAM Stability for a three-body problem of the Solar System,* Math. Phys. **57**, 33-41 (2006).

[20] Féjoz, J., *Démostration du "théoreme d´Arnold" sur stabilité du systéme planétaire (d´après Michael Herman),* Ergod. Th. and Dynam. Sys. **24**, 1-62 (2004).

[21] Pöschel, J., *A Lecture on the classical KAM Theorem,* Proc. Symp. Pure Math. **69**, 707-732 (2001).

[22] http://www.icrar.org/news/news_items/media-releases/a-new-way-to-measure-the-expansion-of-the-universe (consultado el 30 de Agosto de 2013).

[23] Arenas, J. J., *The effect of the cosmological expansion on local systems: post-newtonian approximation,* arxiv 1309.3503, (2013).

[24] Lissauer, J. J., *Chaotic motion in the Solar System,* Rev. Mod. Phys. **71**, 835–845 (1999).

[25] Delshams, A., *Poincaré, Creador de los métodos todavía modernos en las ecuaciones diferenciales y en la mecánica celeste,* Departament de Matemàtica Aplicada I. Universitat Politècnica de Catalunya (2005) http://www.ma1.upc.edu/recerca/preprints/preprints-2005/Fitxers/040501delshams.pdf (Consultado el 22 de Diciembre de 2014).

[26] Montesinos Amilibia, A., *Variedades Diferenciales,* (Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Valencia, Valencia, 2005).

[27] Ortega, R., *La Mecánica, una fuente de problemas.* Notas dentro del curso "Matemáticas: vínculo interdisciplinar" (2006)

[28] Simó, C., *Difusión de Arnol´D, Actas II, Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones,* (UAB, Barcelona, 1979).