

La tecnología en el aula de clase: De las calculadoras graficadoras a los ambientes virtuales de aprendizaje



Elvia Rosa Ruiz Ledezma

CECyT Wilfrido Massieu, Instituto Politécnico Nacional, Av.de los Maestros 217, Colonia, Casco de Santo Tomás, C.P. 11340, México D. F.

E-mail: ruizelvia@hotmail.com

Resumen

En este trabajo queremos mostrar la evolución del uso de la tecnología en diversas situaciones didácticas para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas. Partimos del punto de que en el aula cada día es más común el uso de las nuevas tecnologías, aunque en la mayoría de las ocasiones no se muestran ni exhiben razones o evidencia de que su uso produzca cambios en la forma de aprender o en los resultados escolares de los alumnos. De inicio la introducción de la tecnología en investigaciones que implementaron calculadoras graficadoras, adoleció de un sustento teórico y en otras usaron la teoría de los sistemas de representación. Más recientemente se implementaron los sistemas CAS incluyendo la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje, nació la teoría de la aproximación instrumental, encaminada al desarrollo de aproximaciones socio-culturales.

Palabras clave: Nuevas tecnologías, software, génesis instrumental, ambientes CAS, aproximación instrumental.

Abstract

In this work, we want to show the evolution of the use of technology in various teaching situations for teaching and learning mathematics. We start from the point that in the classroom is more common the use of new technologies, although in the majority of cases they do not show or exhibit reasons or evidence of its use to produce changes in the way of learning or schooling outcomes of students. At the beginning, the introduction of technology in research implementing graphing calculators suffered from a lack of theoretical support. In others, they used systems of representation theory. More recently, the CAS systems including the instrumental dimension of learning processes have been implemented. The theory of the instrumental approach was born, is aimed at the development of socio-cultural approaches.

Keywords: New technologies, software, Instrumental génesis, CAS enviromen, Instrumental approach.

PACS: 01.40.-d, 01.40.E-, 01.50.H-

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En este escrito mostramos como el proceso de introducir la tecnología en la enseñanza de las matemáticas ha sufrido diversas transformaciones, al mismo tiempo que la evolución de las herramientas tecnológicas ha influenciado a las teorías de la Matemática Educativa (ME); lo anterior ha permitido abordar las diferentes problemáticas surgidas alrededor del uso de estas herramientas en el aula.

En el último cuarto del siglo pasado se implementaron diversas propuestas didácticas a realizar con la ayuda de calculadoras graficadoras, hojas de cálculo, programas computacionales, etc. A inicios de los años ochentas la utilización de calculadoras graficadoras permitió al estudiante visualizar rápidamente comportamientos de gráficas de funciones que al realizarse con lápiz y papel eran muy tediosos y difíciles de observar, así la pauta teórica dentro de la ME la dieron los registros de representación de Duval [1]. Posteriormente en los noventas se inició la utilización de programas computacionales de cálculo formal llamados CAS (Computer Algebra Systems = Sistemas Algebraico

Computacionales) [2] y también el uso de software de geometría dinámica como son Cabri-Géomètre y Logo; los cuales en su momento fueron exitosos como lo demuestran investigaciones de Tinoco [3] y Sacristán [4].

En el presente siglo y hasta la fecha con la construcción teórica de la aproximación instrumental se ha profundizado sobre el uso de la tecnología en las clases de matemáticas, no siendo solamente adaptaciones de actividades en lápiz y papel sino actividades encaminadas hacia la conceptualización y la socialización del conocimiento [5]. Otros aspectos que también presentamos son el empleo de tutoriales en el aula, el empleo de software y las ventajas y desventajas del uso de estas herramientas tecnológicas y cómo han adquirido sentido desde la Aproximación Instrumental.

Además, el desarrollo acelerado de las tecnologías de la información y comunicaciones (TIC), a las que cada vez más de nuestros estudiantes tienen acceso [6] y que ha provocado la producción acelerada de programas que son utilizados en todos los ámbitos de nuestra vida, transforman y agilizan muchas tareas. Desde esta perspectiva permiten

estudiar de manera diferente los campos de la ciencia, la ingeniería y la didáctica [7].

Actualmente nos preguntamos ¿si es posible enseñar ciencias en línea?, como con el uso de un laboratorio virtual de física [8], o los entornos virtuales donde participan gran cantidad de usuarios conectados en red llamados MUD (Multi- User Dungeon/Domain/Dimension). Dieterle y Clarke [9] presentan cómo MUVES (multi-user virtual environments) se han utilizado en la educación y como pueden utilizarse para la enseñanza inmersos en un contexto psicosocial.

II. CALCULADORAS GRAFICADORAS

A. Introducción de la herramienta

En este primer apartado como antecedentes del uso de la tecnología, presentamos resultados de investigaciones que consideramos muestran cómo el uso de las calculadoras graficadoras y las calculadoras avanzadas (también llamadas súper-calculadoras) despertaron gran interés entre los educadores matemáticos. A casi 30 años de la aparición de la calculadora CASIO fx 7000g recordamos comentarios de investigadores que las consideraban como una herramienta que contaba con el potencial para revolucionar la ME, tanto en la manera en que ésta se enseña como en los contenidos y énfasis del currículo escolar [10].

Muchas investigaciones como las que mencionaremos, están dirigidas a su efectividad como una herramienta para la enseñanza y aprendizaje en cursos de precálculo y cálculo. Algunos resultados obtenidos sugieren que estos instrumentos pueden facilitar el aprendizaje de conceptos sobre funciones y graficación, desarrollar habilidades de visualización espacial, promover la exploración y provocar un cambio en el énfasis que se venía haciendo en la manipulación simbólica y demostración algebraica hacia la representación gráfica; examinando las relaciones entre representaciones gráficas, algebraicas y geométricas [10]. Particularmente Dick [11] presentó el caso de un estudiante universitario en la clase de cálculo, al que una super-calculadora le permitió proyectar una solución a un problema de manera lógica y directa, pudo tener un acceso más efectivo a múltiples representaciones, (gráfica, numérica y simbólica) así también la oportunidad de verificar su resultado simbólico regresando al registro gráfico.

Lo anterior pone en evidencia que las calculadoras graficadoras pueden aportar cambios importantes en la enseñanza de las matemáticas en el salón de clase. Un mayor acceso a múltiples representaciones y una mayor oportunidad para un enfoque en la resolución de problemas. Sobre la resolución de problemas Dick [11] comenta que el uso de una calculadora graficadora nos provee de más tiempo instruccional en el desarrollo del problema, (al reducir la atención en la manipulación algebraica) más herramientas de solución y una mayor percepción al hacer uso del registro gráfico. Por lo que para Dick la utilización de la calculadora graficadora en el contexto escolar

permitirá redireccionar el currículum hacia una disminución del cálculo simbólico y numérico, favoreciendo la profundización en el aprendizaje conceptual.

Ruthven [12] comparó el desempeño de estudiantes (15-18 años) en tareas matemáticas que tenían acceso permanente a las calculadoras gráficas, con el de estudiantes con bases similares, pero sin acceso regular a esa herramienta. El cuestionario tenía 12 elementos gráficos para que el estudiante encontrara su correspondiente notación algebraica, esto es, se pretendía observar si los estudiantes eran capaces de articular la representación algebraica con la gráfica de la función presentada. Los resultados proporcionaron una fuerte evidencia tanto de reconocimiento como de refinamiento superior por parte del grupo que tenía acceso permanente a las calculadoras graficadoras.

Sin embargo, hay investigaciones que muestran que el uso de la calculadora graficadora quizás no facilite el aprendizaje de temas particulares de precálculo y que el aprendizaje de muchos conceptos gráficos tampoco es facilitado por esta herramienta [10]. Aunque estos investigadores si encontraron que si bien es posible que suceda lo mencionado, la calculadora graficadora permitió a los estudiantes la mayoría de las veces tener un mejor entendimiento al relacionar la expresión algebraica con su gráfica correspondiente y además ellos tendieron a conjeturar y generalizar.

Del Puerto y Minnaard [13] también describieron el uso de la calculadora gráfica en el nivel superior; mencionando que “Las calculadoras gráficas facilitan la exploración y el descubrimiento, favoreciendo una activa aproximación al aprendizaje y no solamente permiten el trabajo individual, pues las investigaciones indican que promueven la interacción entre estudiantes y maestros” [13]. Además, la investigación menciona los obstáculos que se presentaron en el nivel básico pese a que el nuevo currículum sugiere, a partir del segundo ciclo de Educación General Básica, el uso de la calculadora como herramienta para la realización de cálculos numéricos.

En esta primera etapa las investigaciones presentadas fueron exitosas, para los objetivos planteados, dado que la herramienta es portable (puede ser llevada al salón de clases), permite la visualización de la gráfica, de igual manera se puede desplegar el registro numérico y podemos obtener gran cantidad de información de la función que se está trabajando. Con todas las bondades encontradas, todavía en las aulas no se ha implementado, habiendo cierto rechazo de los profesores para su uso y la organización del currículum en ambientes informáticos [2].

Ese el caso de las dificultades que vieron maestros y directores [13] para emplear calculadoras en el aula: temor, no estar disponibles en las instituciones, falta de capacitación, costo, falta de tiempo, entre otros. Por lo que se refiere a los maestros de los que habla esta investigación, coinciden en que su uso intensivo puede tener efectos negativos sobre el aprendizaje no beneficiando a los alumnos en la retención e internalización de las operaciones; por lo que las creencias de los maestros contribuyen a no estar de acuerdo con la incorporación de

la calculadora en el currículum de la escuela básica en Argentina.

A pesar de estos obstáculos mencionados, otras investigaciones sobre el uso de la calculadora la recomiendan comentando que su empleo promueve que los alumnos generen información acerca de un problema dado, organicen dicha información a través de su uso, exploren patrones, entre otros [10]. Lo anterior puede comprenderse aún más si tomamos en cuenta que implementar esta herramienta, genera otro tipo de organización didáctica, en la que hay que diseñar actividades específicas y no triviales; así como el diseño de una evaluación con el uso de este instrumento.

Respecto a la evaluación del aprendizaje de los estudiantes con el uso de la calculadora graficadora se propone realizar estudios cualitativos de las funciones, como por ejemplo analizar las gráficas de las funciones en lugar de solo trazarlas [14]. Así también se debe incorporar la herramienta en actividades evaluadas como tareas y exámenes [14].

Debemos señalar que en los últimos 15 años los investigadores han sido más cuidadosos en los resultados de su uso [15]. Debido a que estas herramientas no se convierten de inmediato en instrumentos matemáticos eficientes ya que se requiere cierta experiencia para su uso [5]. También debe tomarse en cuenta que la herramienta no solo facilite una práctica matemática eficiente sino que permita sentar las bases de una cultura matemática permeada de valores sociales que determinen las relaciones con el mundo y su interpretación. Pues como observamos, los reportes de investigaciones que conformaron la primer década del uso de esta tecnología no daban respuestas claras de cómo las calculadoras graficadoras podían ser usadas para maximizar aprendizajes ni sugerían el tipo de prácticas o ambientes de aprendizaje que brindarían amplios beneficios a nuestros estudiantes.

Sin embargo, en este siglo las investigaciones sobre el impacto de las calculadoras graficadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han madurado y se ha extendido el uso de esta herramienta. En países como Inglaterra, Francia, Escocia, Suecia, Noruega y Finlandia las calculadoras gráficas no simbólicas están permitidas oficialmente en los exámenes; en Portugal, Francia, Austria y Eslovenia se recomienda el uso de sistemas de cálculo simbólico. Según el informe de la Encuesta Nacional de Ciencia y Educación Matemática 2000, más del 80% de los profesores de matemáticas de secundaria de Estados Unidos que fueron entrevistados utilizan calculadoras graficadoras en sus aulas [16].

En 2002 Texas Instruments en asociación con la Universidad Estatal de Michigan y bajo la dirección de Gail Burrill ex presidente del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), hizo una revisión exhaustiva de investigaciones en todo el mundo sobre el uso de la calculadora graficadora [16]. Los resultados obtenidos fueron más de 180, pero solo 43 fueron considerados por cumplir con estrictos criterios de arbitraje. Los estudios fueron agrupados alrededor de cinco preguntas:

- 1) ¿Cómo usan los profesores las calculadoras graficadoras y cómo relacionan su conocimiento y creencias con la tecnología, las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas?
- 2) ¿Con qué tipo de tareas matemáticas los estudiantes escogen usar la calculadora graficadora?
- 3) ¿Qué conocimientos y destrezas matemáticas son aprendidas por los estudiantes que usan calculadoras graficadoras?
- 4) ¿Qué ganan matemáticamente los estudiantes que utilizan la tecnología de la calculadora graficadora que no puede ser observado en ambientes no tecnológicos? y
- 5) ¿Esta tecnología tiene efectos similares en el desempeño de estudiantes de diferente sexo, status socio-económico y grupos de excelencia?

B. Otras formas de trabajo

Considerando el desarrollo alcanzado por las calculadoras como los CAS y otros softwares en este bloque de investigaciones contemplamos otros factores, que en un principio no fueron tomados en cuenta, como por ejemplo la argumentación, análisis de comportamientos gráficos, reforzamiento de explicaciones, etc.

Cedillo [17] reportó una investigación que utilizó al software Derive, el trabajo fue en México sobre el desempeño de 800 profesores de matemáticas que atendieron cerca de 200000 estudiantes (12-15 años) en un periodo de cuatro años. El estudio incluyó dos aspectos, uno buscó estudiar lo que ocurre en el proceso enseñanza-aprendizaje de la aritmética y el álgebra en un ambiente computarizado. Se utilizó la versión Derive instalada en la calculadora TI 92. Como resultados alentadores se observó que bajo estas nuevas formas de trabajo en el salón de clases los estudiantes descubren resultados matemáticos y generan argumentos sólidos. Sin embargo también se vio que los profesores no están empleando suficientes recursos de manipulación simbólica, como los que ofrece un sistema algebraico computarizado debido a que consideran que los estudiantes deben dominar primero los algoritmos para la transformación algebraica mediante técnicas tradicionales de lápiz y papel.

En 2003 Solis [18] presentó una investigación realizada en un ambiente gráfico de simulación. El objetivo de su trabajo se centró en el estudio del entendimiento de las ecuaciones diferenciales lineales a través de la observación de situaciones visuales y analíticas que se presentaron en las estrategias de los estudiantes cuando resuelven problemas. Para llevar a cabo el estudio creó un ambiente gráfico acentuando la idea de simulación, usando calculadoras graficadoras.

Las actividades se implementaron con estudiantes de la Universidad Autónoma de Chiapas que ya sabían resolver ecuaciones lineales de primer orden, pero cuando se les presentó la actividad que contenía las ecuaciones y sus gráficas no intentaron resolver algebraicamente, su atención se centró en los comportamientos gráficos. El diseño y la aplicación se llevó a cabo en dos partes: primeramente un grupo que cursaba ecuaciones diferenciales respondió un

cuestionario. En segundo lugar otro grupo distinto participó en una entrevista clínica donde se tuvieron hojas divididas en dos columnas; en una de ellas se proponían ecuaciones diferenciales y en la otra gráficas, para que fueran relacionadas. Asimismo, en la solución de las actividades se observó que los estudiantes trasladan las propiedades geométricas de una curva conocida al contexto de las ecuaciones diferenciales.

Además encontró que los alumnos refuerzan sus explicaciones, argumentando a través del registro gráfico, con el uso de dispositivos tecnológicos, donde las funciones son graficadas y vistas de manera global, sin poder analizarse el proceso de construcción. Por otra parte a las explicaciones que conforman el argumento de los estudiantes se les llamó comportamiento tendencial de las funciones convirtiéndose en un organizador de los contenidos del cálculo.

Otras observaciones importantes que se desprenden de esta investigación son:

- Las calculadoras y otras herramientas que grafican funciones hicieron que los estudiantes fijaran su atención en la forma global de la gráfica, favoreciéndose así estos argumentos gráficos
- El método estándar de solución para las ecuaciones en cuestión no favoreció el análisis gráfico
- Los estudiantes pudieron construir un método de solución de un tipo particular de ecuaciones diferenciales a partir de reconocer patrones analíticos

En este paso por el uso de la calculadora graficadora nos damos cuenta que en su evolución, ya no solamente predomina el registro gráfico donde el estudiante obtenía un primer acercamiento a la forma de la gráfica; ahora hace conjeturas, puede pensar recursivamente, su apreciación numérica aumenta, etc.

En el siguiente apartado incluimos una teoría de la ME en la que se han basado estudios que también utilizan como tecnología la calculadora graficadora.

III. SISTEMAS SEMIÓTICOS DE REPRESENTACIÓN

En el marco de los sistemas semióticos de representación Hitt [19] analiza la construcción de conceptos desde una teoría de las representaciones por parte de los estudiantes, particularmente sobre la problemática del uso de la calculadora gráfica para la construcción de conceptos en el aula de matemáticas. Comenta que es necesario hacer un uso reflexivo de la tecnología y además en el desarrollo de habilidades matemáticas, el empleo de diferentes representaciones constituye una herramienta fundamental para la resolución de problemas. Un grupo de estudiantes presentó dificultades al tratar de resolver la ecuación $\tan(x)=x$, esto fue porque los alumnos no tomaban la pantalla como si fuera una ventana en donde solamente estaban observando una parte de la gráfica y además tuvieron dificultad en interpretar lo que percibían en esa ventana, pues algunos estudiantes consideraron a las

asíntotas como parte de la gráfica de la función, proponiendo más intersecciones [15].

Otros estudios relevantes dan pie a reafirmar el uso de la calculadora graficadora desde la perspectiva de los registros de representación, por ejemplo Janvier [20] habla de los procesos de traslación (directo e indirecto), interesándole las traslaciones indirectas que son en donde se presentan las mayores dificultades; para subsanarlas propone un puente de apoyo (registros intermedios) en las conversiones entre dos registros de representación, como es el caso del paso del registro gráfico al algebraico en donde es conveniente usar como intermediario el registro tabular, registro que explícitamente nos puede proporcionar la calculadora y que nos hará más fácil la construcción de la expresión algebraica correspondiente a la gráfica presentada.

Podemos concluir que estas herramientas proporcionan un ambiente ideal para que los estudiantes integren las representaciones numérica, gráfica y simbólica de las relaciones matemáticas; teniendo como soporte actividades didácticas que favorezcan el aprendizaje conceptual.

IV. USO ESPECÍFICO DE SOFTWARE Y SU IMPLEMENTACIÓN EN EL USO DE LA COMPUTADORA

Los investigadores en ME también han utilizado computadoras y una amplia gama de software de matemáticas como por ejemplo: Derive, Cabri (incluido en algunas calculadoras), Logo, etc., para el aprendizaje de las matemáticas.

En su investigación González [21] desarrolló una introducción al estudio de las ecuaciones diferenciales usando como recurso didáctico el paquete matemático Maple para reforzar definiciones, teoremas, comportamiento gráfico de soluciones y que pudieran ser llevadas a cabo por el estudiante con un mínimo conocimiento del paquete; haciendo énfasis en la representación gráfica de soluciones. La experiencia se realizó en la carrera de Ingeniería informática de la UCLA en Venezuela. La utilización de Maple se debió a su potencial de graficación ya que es especialmente versátil para los efectos de visualización del campo direccional así como para las particularidades del problema, según las condiciones iniciales.

Sacristán [4] utilizó Logo en una investigación con el objetivo estudiar el infinito matemático para ello construyó un ambiente o micromundo computacional, en donde los estudiantes, mediante actividades de programación pudieron construir y explorar diferentes tipos de representaciones (simbólica, gráfica y numérica) de procesos infinitos, en específico sucesiones y series infinitas. La población estuvo conformada por cuatro parejas de estudiantes (15-18 años) que a través de estudios de caso, analizó como las herramientas del micromundo fueron utilizadas en la estructuración de las actividades y a su vez de cómo dieron sentido a los procesos estudiados. El marco teórico fue de tipo constructivista enfatizando la importancia de las representaciones en el proceso de

aprendizaje. La autora comenta que la computadora al permitir el uso de representaciones simbólicas, numéricas y visuales dinámicas, puede ser utilizada como un medio de exploración donde los estudiantes pueden expresar ideas. Las actividades de construcción en Logo por parte de los alumnos incluyeron modelos gráficos de algunas sucesiones infinitas y sus series correspondientes.

Los alumnos pudieron investigar el comportamiento de procesos infinitos como la velocidad de convergencia y fue un aspecto importante para que encontraran explicaciones y construyeran significados del por qué algún proceso era convergente o divergente. Al explorar la sucesión y serie armónica los estudiantes observaron el lento comportamiento de convergencia de la sucesión, la divergencia de la serie y el efecto de la velocidad de convergencia de la sucesión en el comportamiento de la serie correspondiente. Coordinaron el elemento visual con el numérico y lo complementaron con el análisis de la fórmula matemática.

Díaz [22] desarrolló una propuesta metodológica para la enseñanza avanzada de la geometría empleando el ambiente computacional Cabri-Géomètre. En lo teórico se argumentó que en la currícula tradicional el sujeto interactúa con los objetos geométricos a través de imágenes fijas, sin ser posible alterarlas en posición o magnitud dentro de una misma construcción teniendo que ser reconstruidas para dar más información gráfica; convirtiéndose este proceso en laborioso, no pudiéndose apreciar cambios graduales a los elementos de la imagen.

Bretscher [23] realizó una investigación con 23 estudiantes de una escuela primaria privada, con altos promedios en matemáticas. Los alumnos trabajaron en parejas una secuencia con 5 lecciones usando cabri-géomètre. Surgiendo tres estrategias de enseñanza para facilitar la génesis instrumental de los estudiantes en el cabri y más generalmente en el software de geometría dinámica.

En este mismo sentido, Soury-Lavergne [24] mencionó en su investigación cómo con el uso del modo drag del cabri géomètre en un ambiente de geometría dinámica elaborando y probando actividades se logra la iniciación de alumnos de 11 años en el razonamiento deductivo. Trabajándose la identificación de las propiedades geométricas de las figuras contrariamente a sus propiedades gráficas. Así mismo comenta que el drag tiene un rol crucial para el éxito de las actividades, debiéndose tener mayor atención en el modo que los estudiantes deben usarlo.

Tinoco [3] diseñó estrategias didácticas para la enseñanza de la variación lineal, utilizando también cabri-géomètre. Investigó los efectos de la aplicación de las estrategias en el uso de las gráficas y sobre el nivel de conceptualización de la variación lineal. Como referente teórico utilizó los registros semióticos de representación, en donde para la comprensión del objeto matemático se requiere de la articulación de al menos dos registros de representación. En este sentido el estudiante puede exteriorizar las diferentes representaciones mentales que tiene del concepto, preservando su significado.

El estudio se llevó a cabo con un grupo de 38 estudiantes (15-18 años) en Cuautla, México. Se diseñaron dos construcciones con el software en las que los alumnos pudieron explorar y descubrir las propiedades de las gráficas de la variación lineal, relacionándolas con su expresión algebraica correspondiente. Al final se encontró en los estudiantes un avance significativo en la deducción de la expresión algebraica que correspondía a una gráfica dada, repercutiendo en el nivel de conceptualización de la variación lineal.

La investigación de Camacho y Depool [25] se centró en torno a dos aspectos principales: el curricular y el actitudinal. Previo al estudio del cálculo diferencial los autores intentaron introducir el concepto de integral definida como área bajo una curva desde la perspectiva gráfica y numérica utilizando Derive, analizando la viabilidad de esta modificación, así como las posibles dificultades que surgieron en su implementación. En lo actitudinal se analizaron los posibles cambios de las actitudes de los estudiantes que desarrollaron secuencias de aprendizaje utilizando el software. Se usó una adaptación de la escala de actitudes de Artigue y Lagrange, conservando la categorización inicial. Se tomó una muestra de 58 estudiantes que conocían Derive divididos en dos grupos. Un experimental de 14 alumnos y otro de control con 44. El primer grupo trabajó en una sala con 15 computadoras y el segundo con métodos tradicionales.

Al finalizar el trabajo los investigadores aplicaron un cuestionario de 32 preguntas, agrupadas en tres partes y con sus respectivos indicadores. Después de un análisis cuantitativo, los autores encontraron lo reportado por otros investigadores en cuanto a que las creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y sobre si mismos juegan un papel importante en el desarrollo de respuestas afectivas a situaciones matemáticas y que las emociones que experimentan al someterlos a un tratamiento donde se utilicen nuevas tecnologías son positivas. Además el uso de programas de álgebra simbólica con el empleo de actividades de enseñanza específicas, crean un entorno de aprendizaje útil para la enseñanza de las matemáticas y pueden resultar determinantes para separar los aspectos actitudinales de los procedimentales.

En O'Farrill, Rodríguez, Durán, Vázquez y Díaz [26] se muestra un proyecto de investigación pedagógica para transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la disciplina matemática básica en una carrera de ingeniería con base en el uso de la informática. El trabajo se centró en perfeccionar la asignatura Álgebra Lineal para el perfil de una carrera de Ingeniería informática en Cuba, introduciendo la tecnología informática como tecnología educativa para el desarrollo de procesos de enseñanza-aprendizaje que desarrollen en los estudiantes capacidades para aprender a aprender.

Usaron como indicador del desarrollo de los estudiantes su desempeño en la resolución de problemas matemáticos. Por lo que proponen el desarrollo de una enseñanza sistémica a través de la resolución de problemas, considerando que de esta manera los estudiantes tienen la posibilidad de emplear sus estructuras cognitivas. Los

temas a desarrollar a través de la resolución de problemas fueron: sistemas de ecuaciones lineales, cambios de base y aplicaciones lineales, y diagonalización. Propusieron la discusión de la modelación del problema, usando Derive desarrollaron un software educativo en el que han estado trabajando para el rediseño de la asignatura.

De las investigaciones mencionadas en esta sección, podemos observar que el empleo de la tecnología y los software usados, no siempre son suficientes y no necesariamente garantizan el éxito. Balacheff [27] propone que en el diseño de ambientes tecnológicos para la educación, se contemple al estudiante como eje central y tener como objetivo el conocimiento siendo la interacción la base del diseño de este entorno. Cuando habla de conocimiento se refiere a las construcciones intelectuales que la sociedad ha institucionalizado y las construcciones intelectuales que se producen en el ser humano como resultado de resolver problemas o realizar tareas.

V. APLICACIÓN DE TUTORIALES

En el uso de los tutoriales para la enseñanza de la matemática tenemos la investigación de Melgarejo [28] que se centró en el planteamiento de un modelo para la evaluación del aprendizaje y la propuesta de otro modelo para la estrategia pedagógica basado en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y en la teoría matemática de los conjuntos de frontera imprecisa. Su objetivo fue mostrar la utilidad de los anteriores modelos en la implementación de un tutorial inteligente para el tema de trazado de curvas.

La investigación se realizó en Cuba con estudiantes universitarios de ingeniería. De los tutoriales que fueron estudiados en la investigación, las estrategias pedagógicas utilizadas se basan en las repuestas de los estudiantes. Se usó el tutorial Salomón basado en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales, pero este tutorial solo es inteligente en la componente pedagógica, el estudio y profundización en las formas de procesar y modelar el conocimiento pedagógico. El funcionamiento del tutorial se explicó teniendo en cuenta la estructuración en: examen inicial, preguntas de comprobación, dominio, simetría, extremos, concavidad-convexidad, asíntotas, monotonía y trazado de curvas.

El tutorial se validó, en lo didáctico, en dos fases: una como tutorial en donde los alumnos solo tomaron clases en la computadora. La otra utilizándolo como consulta donde los alumnos recibieron las clases en el aula. Como conclusión los investigadores vieron que el uso del tutorial resulta efectivo en el proceso de enseñanza/aprendizaje de los alumnos, además que brinda más ventajas con los alumnos buenos y regulares cuando es usado como tutorial.

También sobre tutoriales, Fernández y Lima [29] analizaron la tecnología empleada en la enseñanza de las matemáticas y su tendencia. Así mismo describieron un modelo combinado para el diseño de un curso y un modelo de tutoriales para computadoras personales. Los investigadores tomaron como base resultados de

investigaciones pedagógicas sobre las dificultades en matemáticas que presentan los estudiantes de nivel medio que optan por ingresar a carreras universitarias. Dividieron la realización de tutoriales en cuatro temas centrales: Preparación para los exámenes de ingreso, introducción al cálculo Diferencial e Integral, Estadística paramétrica y Estadística no paramétrica.

Consideraron que un sistema tutorial de enseñanza necesita representar el conocimiento y modelar tal estructura a través de principios y estrategias de desarrollo de hipertextos. Uno de los modelos para el diseño del contenido de un curso combina tres componentes fundamentales: exposición, red de preguntas y monitor de solución de problemas; incluyendo módulos para el administrador del aprendizaje, el generador del aprendizaje, la estrategia de aprendizaje, el modelo del estudiante e historial y perfil del estudiante. Los investigadores concluyeron que utilizar multimedia e hipermedia en el proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática, y en particular el cálculo, benefician al estudiante en cuanto al incremento de retención, de motivación, mayor individualización y flexibilidad en los periodos de formación entre otros.

Otros investigadores [29] realizaron un proyecto cuyo objetivo fue estructurar clases con el empleo de asistentes matemáticos y de una colección de tutoriales para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, orientados al trabajo en un ambiente de red. En la elaboración de la propuesta metodológica de los sistemas de clase se tuvieron cinco etapas: Análisis de necesidades educativas, selección del software matemático a utilizar, diseño de los trabajos científicos a realizar, desarrollo de los trabajos y su validación. Los temas abordados con el uso de asistentes matemáticos fueron: Trigonometría, funciones elementales, métodos numéricos, cálculo, entre otros. Los tutoriales incluyeron un juego de temarios, textos, gráficos, ejemplos de soluciones de problemas de tipo tradicional. Los investigadores concluyeron que la articulación de la informática en la escuela debe comenzar con la capacitación de los profesores y las experiencias adquiridas fueron en el diseño y estructuración de los contenidos a abordarse en la clase computarizada.

En el mismo rubro Cuevas, Mejía y Andreu [30] introdujeron y propusieron un Sistema Tutorial Inteligente (STI), como un colaborador del profesor que comparte con él las tareas docentes con un planteamiento didáctico transparente en su diseño. El STI incluyó la creación de un banco de problemas y está enfocado para apoyar la enseñanza de un curso tradicional de cálculo diferencial. Como referente teórico los investigadores mencionaron que uno de los usos de la computadora es en los sistemas tutoriales, cuyas ventajas principalmente son: La instrucción individualizada e interactiva, el poder trasladar la experiencia de un grupo interdisciplinario de profesionales y científicos de la enseñanza a un programa de computadora, eliminar algunos problemas causados por la comunicación directa entre el alumno y el profesor.

El planteamiento o estructura didáctica del sistema, siguió el modelo didáctico propuesto por Cuevas, Mejía y

Andreu [30]. En la propuesta didáctica, se sugirió que cada vez se enseñe un concepto trascendente en el curso y se propongan actividades posteriores que involucren al concepto para la comprensión de otros conceptos más complejos. Otra parte importante es intentar situar el concepto en diferentes registros de representación promoviendo la articulación entre ellos. Al final los autores recomiendan que para iniciar un tema o dar un concepto matemático es conveniente hacerlo partiendo de uno o varios problemas que constituyan el llamado proyecto de acción y cuya solución lleve a los estudiantes a la adquisición de los conceptos matemáticos propuestos.

Hasta el momento hemos presentado investigaciones de diversos tipos, iniciando con calculadoras graficadoras, pasando por software, utilizando otras herramientas tecnológicas (computadoras), estudios basados en la teoría de los sistemas semióticos de representación y la inclusión de tutoriales; percatándonos que aún hay mucho más que trabajar con la ayuda de estas herramientas y así encontramos diversas recomendaciones como menciona Abaira [31], del por qué las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Abaira toma en cuenta las consideraciones que el NCTM [32] menciona en relación con este tema entre las que se encuentran:

Los estudiantes deben disponer de calculadoras adecuadas.

En todos los salones de clase debe existir una computadora. Todos los estudiantes deben tener acceso a una computadora para el trabajo individual y por equipo.

Los estudiantes deben aprender el manejo de la computadora como herramienta para el proceso de información y la realización de cálculos en la investigación y resolución de problemas.

Asimismo, la investigadora comenta que los estudiantes deben estar en condiciones de usar los recursos tecnológicos y que los profesores deben tener una amplia formación para decidir cuándo usar las nuevas tecnologías y cómo. Por lo que la formación de maestros en las nuevas tecnologías para la educación matemática debe contemplar tres líneas:

- Formación general en nuevas tecnologías educativas.
- Formación específica en nuevas tecnologías para el aprendizaje de las matemáticas.
- Formación específica en nuevas tecnologías para la enseñanza de las matemáticas.

Como ejemplo Abaira [31] presentó el caso de la Universidad de León. Donde la única asignatura incluida en los planes de estudio para maestro es *Nuevas tecnologías aplicadas a la educación* que es insuficiente para proporcionar la formación en matemáticas y su didáctica que precisan los profesores. Por lo anterior en un primer intento de investigar sobre este tema, dicha universidad ofertó una asignatura de libre configuración. La población con la que se trabajó fue de 30 alumnos, no resultando significativa para poder recomendar a las autoridades la inclusión de esta asignatura en los planes de estudio.

VI. AMBIENTES CAS Y GÉNESIS INSTRUMENTAL

A continuación presentamos investigaciones que fueron realizadas con el fundamento teórico de la aproximación instrumental, entendida como el proceso en el cual el sujeto transforma y adapta el artefacto a sus necesidades y circunstancias [33], pasando por las etapas de descubrimiento, selección, personalización y transformación [34]. Lo que permite el desarrollo de esquemas de utilización. Por lo que este proceso puede enriquecer o empobrecer la herramienta si no hay una tarea específica. Así mismo se enfatiza la dimensión instrumental de los procesos de aprendizaje. Primeramente partimos de investigaciones que reportan beneficios en el aprendizaje de las matemáticas, con el uso de ambientes CAS.

En este sentido Pierce y Stacey [35] propusieron un marco común (la terminología y las herramientas) para mejorar la investigación en el aprendizaje del álgebra en ambientes CAS. Argumentando la necesidad de construir una visión algebraica en los estudiantes, especialmente basada en la manipulación simbólica. La visión algebraica como competencia se aborda a través de dos aspectos: Expectativas algebraicas y la capacidad de enlazar representaciones.

Siguiendo esta evolución sobre el uso de la tecnología, otros grupos de trabajo [5] encuentran dificultades en el manejo técnico de la herramienta, lo que conlleva a no poder integrar eficazmente los CAS en la enseñanza de las matemáticas, argumentando que había una gran diferencia entre el discurso de los expertos sobre el potencial de los CAS para el aprendizaje de las matemáticas y la realidad que imperaba en las aulas [2], por lo que proponen tener como sustento teórico la Génesis Instrumental (GI) como una forma de aproximarse al uso de ambientes virtuales de enseñanza/aprendizaje en la computadora y/o calculadora graficadora; por ejemplo:

Camacho [36] presentó dos investigaciones desarrolladas en la GI. La primera sobre la enseñanza y aprendizaje de la integral definida con el CAS Derive, como mediador en el proceso de enseñanza aprendizaje y la segunda, utilizando el CAS Maple V, con el objetivo de operacionalizar algunos resultados teóricos con estudiantes de primer semestre de universidad sobre la integral definida. Participaron 31 estudiantes en el curso de Cálculo I. Se observó un primer nivel de instrumentación donde los estudiantes descubren los comandos y sus efectos, aunque no tienen en cuenta otras informaciones. En algunos de los estudiantes se observó un atisbo de comprensión de la herramienta y de combinación de los elementos teóricos con los comandos adquiridos.

En este mismo sentido Briceño y Cordero [37] en su investigación cuestionaron el papel que juega el uso de la tecnología en el conocimiento matemático, tratando de responderse preguntas como: ¿De qué manera afecta la actividad matemática? ¿Qué tipo de matemática refleja el uso tecnológico? Para responderse incluyeron la GI en su marco teórico, pretendiendo evidenciar el papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático. Con ejemplos

de investigaciones orientadas al estudio del cálculo encontraron que sintomáticamente un alto porcentaje de alumnos responden equivocadamente al usar la calculadora graficadora. Apoyándose en la aproximación socioepistemológica los investigadores consideran a la graficación como una práctica social y se proponen entender como el uso de las gráficas es lo que norma cierta categoría matemática propia del uso de la calculadora graficadora.

Estudiaron una situación de modelación del movimiento en un ambiente tecnológico, con estudiantes de Nivel Medio Superior del CECyT 8, de primero, tercero y quinto semestre. Como objetivo principal tuvieron, entender el papel que juega la tecnología en el conocimiento matemático del estudiante en una situación específica. Así también pretendieron a través de categorías del conocimiento, encontrar indicadores de una integración tecnológica en el estudiante que le permitiera construir conocimiento matemático.

Otra investigación con el mismo sustento teórico la encontramos en Defouad [38], que en su tesis doctoral presenta un estudio de las variaciones de una función. Desde la GI con la calculadora TI -92, mostrándose la complejidad de los procesos de la instrumentación. Los estudiantes ponderaron la información proveniente de diversas aplicaciones en la calculadora (exploraciones numéricas y gráficas) en la búsqueda de una argumentación.

Desde la perspectiva de una aproximación instrumental Drijvers y Gravemeijer [39] presentaron una investigación relacionando el álgebra computarizada con el pensamiento algebraico, en particular para la resolución de ecuaciones que dependen de parámetros utilizando la calculadora TI89. A los estudiantes se les dieron tareas sobre la expresión algebraica de la ecuación de segundo grado en forma general y ecuaciones con uno de los parámetros generalizado. Se observó cómo interactuaban con la calculadora, primero su visión se limitó al registro numérico, sabían utilizar el comando *SOLVE* pero no pudieron reconocer la generalización.

En las ecuaciones donde un parámetro estaba generalizado, en un principio no tenían claro que se requería despejar la incógnita, finalmente lograron resolver la ecuación con el uso de la TI- 89. Los investigadores argumentan “que el entendimiento de los conceptos algebraicos y las técnicas algebraicas computacionales están estrechamente relacionadas” y por medio de una aproximación instrumental se explicitan las dificultades de los estudiantes. Además encontraron que las dificultades técnicas de los alumnos tenían una base conceptual.

VII. CONCLUSIONES

Como pudimos observar el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas partió de su implementación en ingenierías didácticas y se puso de moda, pero no se vio avance más allá del trabajo en actividades. A lo largo de estos diez últimos años, con los ambientes CAS y la teoría

de la GI, vislumbramos que es posible que se pueda generar conocimiento. Escudero [40] comentó que los avances en tecnología demandan que se contemple a los artefactos (computadora), no solo como herramientas didácticas, sino como *recursos productores de conocimiento*. Las investigaciones nos señalan que el uso de la computadora mejora el aprendizaje de los estudiantes pero debemos tener precaución con esta nueva perspectiva, aún debe investigarse lo que cambia y lo que no cambia en nuestras mentes en la interacción con las nuevas tecnologías. Debe pensarse más en las propuestas didácticas y sus consecuencias cognitivas al introducir ambientes tecnológicos, especialmente software en el aula.

Particularmente Artigue [2], comenta que la aproximación instrumental recientemente se ha interesado en los tutoriales, planteándose nuevas preguntas en donde los resultados evidencian que estas tecnologías no solo implementan interacciones matemáticas sino también interacciones didácticas. Esta revisión nos muestra la necesidad de continuar realizando investigaciones que incorporen diferentes aproximaciones teóricas que permitan abarcar aspectos no considerados hasta ahora como son el uso masivo de la tecnología dentro y fuera del aula mediante la incorporación de computadoras, sensores y tecnología móvil.

Con respecto al punto anterior es necesario continuar con la revisión bibliográfica pues aún deben considerarse los avances que han surgido en los años recientes sobre los ambientes virtuales y sus caracterizaciones, como hacen Dieterle y Clark [9] con los ambientes virtuales multiusuario. Es tal el interés de la comunidad mundial que el 17mo. Estudio ICMI [41] está dedicado en su totalidad a la tecnología y la forma en que está modificando la enseñanza actual y futura, en dicho estudio se abordan diferentes temas desde el diseño curricular, la integración de la tecnología en la enseñanza hasta los posibles rumbos que tomará este campo.

REFERENCIAS

- [1] Duval, R., *Semiosis y Noesis*. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.), *Antología de Educación Matemática. Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa*, (CINVESTAV-IPN, México, 1993), pp. 118-142.
- [2] Artigue, M., *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning **7**, 245-274 (2002).
- [3] Tinoco, G., *La computadora como herramienta para mejorar la interpretación de gráficas de variación lineal*. En Farfán, R. M., Lezama, J. y Reséndiz, E. (Eds.), *Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa México*, (Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, México, 1997), p. 201.
- [4] Sacristán, A., *Investigando el comportamiento de procesos infinitos a través de modelos y representaciones en un micromundo computacional*. En R.M. Farfán (Ed.),

- Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **12**, 115-119 (1999).
- [5] Artigue, M., *Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work*, International Journal of Computers for Mathematical Learning **7**, 245-274 (2002).
- [6] García, R. y Sánchez, D., *La enseñanza de conceptos físicos en secundaria: diseño de secuencias didácticas que incorporan diversos tipos de actividades*, Latin American Journal of Physics Education **3**, 62-67 (2009).
- [7] Talero, P. H., *Experimentos virtuales de Física. Mecánica*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 591-730 (2011).
- [8] Meisner, G. W., Hoffman, H. and Turner, M., *Learning Physics in a Virtual Environment: Is there Any?*, Latin American Journal of Physics Education **2**, 87-102 (2008).
- [9] Dieterle, E. and Clark, J., *Multi-user virtual environments for teaching and learning*. En M. Pagani (Ed.), Encyclopedia of multimedia technology and networking (2nd ed.) (Idea Group, Inc., USA, 2009).
- [10] Penglase, M. and Arnold, S., *The graphics Calculator in Mathematics Education*, Mathematics Education Research Journal **8**, 58-90 (1996).
- [11] Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. y Dick, T., *Research on technology in mathematics education*. En F. Lester Jr., Second Handbook of research on mathematics teaching and learning. Vol. 2, (Information Age Publishing, Charlotte, N.C., USA, 2007), pp. 1169-1207.
- [12] Ruthven, K., *The influence of graphics calculator use on translation from graphic to symbolic forms*, Educational Studies in Mathematics **21**, 431-450 (1990).
- [13] Del Puerto, S. y Minnaard, C., *El uso de la Calculadora Gráfica en el aprendizaje de la matemática*. En C. Barceló i Vidal (Ed.), *Homenatge al professor Lluís Santaló*. Universidad de Girona. Recuperado de http://www.udg.edu/Portals/88/Santaló/livre_homenatge/L_a_calculadora_como_recurso_didactico_paper97.pdf. (2002). Consultado 5 octubre de 2011.
- [14] Ortiz, B., *Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Una Discusión actual hacia la transformación de la práctica*, Revista Sapiens **7**, 139-157 (2006).
- [15] Guin, D. y Trouche, L., *The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments: the case of calculators*, International Journal of Computers for Mathematics learning **3**, 195-227 (1999).
- [16] Arnold, S. M., *Mathematics Education for the Third Millennium: Visions of a Future for Handheld Classroom Technology*. En I. Putt, R. Faragher y M. McLean (Eds.) MERGA27: Mathematics Education for the Third Millennium: Towards 2010. (MERGA, Sydney, 2004).
- [17] Cedillo, T., *Potencial de los sistemas algebraicos computarizados como herramienta para la enseñanza – aprendizaje del álgebra escolar*. Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig5/Dr_Tenoch_Conferencia.pdf. (2006). Consultado 5 de octubre de 2011
- [18] Solís, M., *Predicción y simulación: nociones asociadas a las ecuaciones diferenciales*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **16**, 386-392 (2003).
- [19] Hitt, F., *Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana **10**, 213-224 (2003).
- [20] Janvier, C., *Traslation Processes in Mathematics Education*. En C. Janvier (Ed.), Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics, (USA, 1987), pp. 27-32.
- [21] González, Z., *Una introducción a las ecuaciones diferenciales apoyo computacional con Maple*. En R.M. Farfán, J. Lezama y E. Reséndiz (Eds) Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa México (p. 223). (México, 1997).
- [22] Díaz, E., *El cabri-gèometrè: un muestrario de los problemas que resuelve y las preguntas que plantea*. En R.M. Farfán, J. Lezama y E. Reséndiz (Eds.), *Resúmenes de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, (CLAME, México, 1997), p. 293.
- [23] Bretscher, N., *Dynamic Geometry Software: The Teacher's Role in Facilitating Instrumental*. En M. Joubert (Ed.), Proceedings of the British Society into Learning Mathematics **28**, 1-6 (2008).
- [24] Soury-Lavergne, S., *Deductive Reasoning and Instrumental Genesis of the Drag Mode in Dynamic Geometry*. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), Group 1-Theme 1: Integration of technology into school and other learning environments. ICME 11 (ICMI, México, 2008).
- [25] Camacho, M. y Depool, R., *Un Análisis Comparativo de las Actitudes de Estudiantes de Primero de Ingeniería hacia el uso de Ordenadores y Programas de Cálculo Simbólico para el Aprendizaje de los Conceptos de Cálculo*. En G. L. Beitía (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **14**, 611-618 (2001).
- [26] O'Farrill, Y., Rodríguez, C., Durán, M., Vázquez, M. y Díaz, M., *Álgebra lineal, informática y resolución de problemas*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **13**, 159-162 (2000).
- [27] Balacheff, N., *Knowledge, the keystone of TEL design (Les Cahiers Leibniz No. 127)*, (Laboratoire Leibniz-IMAG., Grenoble, Francia, 2005).
- [28] Melgarejo, L., *Modelos para la representación y procesamiento del conocimiento pedagógico en Tutoriales Inteligentes*, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa **1**, 51-75 (1998).
- [29] Fernández, F. y Lima, S., *Entrenando con Multimedia en P.C. Sistemas Tutoriales para matemática y el cálculo*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **12**, 105-108 (1999).
- [30] Cuevas, C., Mejía, H. y Andreu, M., *CALCDIFE-II Propuesta de un entorno computacional inteligente para la enseñanza del cálculo diferencial*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa **13**, 541-547 (2002).
- [31] Abaira, C., *Nuevas Tecnologías para la Educación Matemática: una asignatura pendiente*, Educación en Ciencias **3**, 44-49 (1999).

[32] *National Council of Teachers of Mathematics*. Página Web de Illuminations Resources for Teaching Math. Recuperada de <http://illuminations.nctm.org/> (2009). Consultado 3 de octubre de 2011.

[33] Rabardel P., *Les hommes et les technologies – approche cognitive des instruments contemporains*, (Armand Colin, Paris, 1995).

[34] Trouche, L., *Calculators in mathematics education: a rapid evolution of tools with differential effects*. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, (Springer Verlag, New York, 2005), pp. 9-40.

[35] Pierce, R. y Stacey, K., *Monitoring Progress in Algebra in a CAS Active Context: Symbol Sense, Algebraic Insight and Algebraic Expectation*, *International Journal for Technology in Mathematics Education* **11**, 3-12 (2004).

[36] Camacho, M., *La enseñanza y aprendizaje del análisis matemático haciendo uso del CAS*. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática* pp. 97-110. (2005).

[37] Briceño, E y Cordero, F., *El uso de las gráficas bajo una perspectiva instrumental Un estudio*

socioepistemológico. En M. Chaleyat-Maurel (Ed.), *Topic Study Group 16: Research and development in The Teaching and learning of calculus*. ICME 11 (ICMI, México, 2008).

[38] Defouad, B., *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation d'une calculatrice symbolique en classe de premièreS* [Tesis Doctoral], (Université Paris 7, Francia, 2000).

[39] Drijvers, P. y Gravemeijer, K., *Computer algebra as an instrument: examples of algebraic schemes*. En D. Guin, K. Ruthven y L. Trouche (Eds.), *The didactical challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*, (Springer Verlag, New York, 2005), pp. 163-19.

[40] Escudero, C., *Una mirada alternativa acerca del residuo cognitivo cuando se introducen nuevas tecnologías. El caso de la resolución de problemas en ciencias*. En A. San Martín (Ed.), *Convergencia Tecnológica: la producción de pedagogía high tech.*, (CINVESTAV, México, 2009).

[41] Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (Eds.). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*, (Springer, London, 2010).