Soluciones estudiantiles de un problema de movimiento propuesto en un libro de texto de geometría analítica: influencias del razonamiento lógico y de reflexión cognitiva

Yolanda Monterrosas Castillo[1,2], Honorina Ruiz Estrada[1], Josip Slisko[1], Olga Leticia Fuchs Gómez[1]

[1]*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México,*

[2]*Preparatoria General Lázaro Cárdenas del Río, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, México.*

E-mail: ymonterrosas@hotmail.com

(Recibido el 2 de abril de 2018, aceptado el 30 de mayo de 2018)

Resumen

Se presenta los resultados de una encuesta realizada a un grupo de 26 alumnos de tercero de preparatoria, del área de sociales, con edades entre 17 y 18 años. Se eligió un problema relacionado con movimiento propuesto un libro de texto de geometría analítica del nivel medio superior de México. El problema tiene datos confusos que dificultan la comprensión del texto. Se analiza la interpretación que hacen los estudiantes del texto, así como los dibujos y las soluciones que presentan. Se discute la posible influencia del razonamiento lógico y la reflexión cognitiva en sus respuestas.

Palabras clave: Contextos de física, Libros de texto de matemática, Resolución de problemas, Razonamiento lógico, Reflexión cognitiva.

Abstract

We present results from a survey applied to 26 social-science students with ages between 17 and 18 years. A motion-related problem was chosen from a analytic geometry textbook for high school level students in Mexico. The problem text has confusing data that make text comprehension difficult. The interpretation of the students to such a text is analyzed as well as the drawings and solutions they give to the problem in question. The possible influence of logical reasoning and cognitive reflection on the solutions is discussed.

Keywords: Physics contexts, Mathematics textbooks, Problem solving, Logical reasoning, Cognitive reflection.

PACS: 01.30.mr, 01.40.Ha, 02.40.Dr **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

De acuerdo a Fan [1], los libros de texto de matemática se han perfilado últimamente como una línea de investigación emergente en la educación. Este autor ha sugerido dar especial atención al uso de los libros de texto y a sus efectos en el aprendizaje de los alumnos. En este contexto, el libro de texto es una variable independiente que incide en la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes o una variable dependiente que se ve influenciada por otros factores como el mercado, las políticas educativas nacionales de cada país o la preparación profesional de los autores. Fan [1] propone llevar el análisis de libros de texto más allá de la identificación de sus características o cómo desarrollan un tema específico de la matemática escolar. Sugiere plantear tres tipos de preguntas de investigación: causal, correlacional y otras preguntas y recomienda trabajar en ellas porque hay pocos datos en esta dirección y porque esto permitiría explorar la repercusión de los libros de texto en el aprendizaje de los alumnos. En cuanto al método de investigación, Fan [1] aconseja adoptar el método experimental que es ampliamente usado en las áreas científicas: las evidencias deben desprenderse de la observación y el experimento y ser recogidas de manera sistemática. En consonancia con Fan [1], dirigimos la investigación hacia la exploración crítica de algunas actividades de aprendizaje que han sido propuestas en los libros de texto de matemáticas de las escuelas públicas del nivel medio superior de México.

Otros autores han mencionado a la contextualización de los problemas verbales como un elemento relevante en el aprendizaje de la matemática escolar. En especial, Palm [2] sugiere que la autenticidad de los problemas verbales es crucial en el aprendizaje de los estudiantes. Un problema verbal auténtico es aquel que simula alguna situación que ocurre o puede llegar a ocurrir en la realidad. Para garantizar su autenticidad, Palm [2] propone ocho aspectos. En este trabajo, se consideran únicamente cuatro, que usamos para seleccionar problemas de libros de texto de matemáticas en contextos de la mecánica.

Los aspectos considerados son: (1) **el Evento,** que narra una situación que ha sucedido o que es muy probable que suceda, (2) la **Pregunta** que se plantea en el problema y que debe tener su equivalente fuera de la escuela, (3) la **Información/datos,** que se refieren a los valores numéricos, modelos, y condiciones dadas en una situación de la vida cotidiana, y (4) la **Presentación,** que es el lenguaje y las estructuras semánticas que conforman el problema, los cuales deben ser entendibles y con significado para el alumno.

El test de razonamiento lógico (TRL), en la versión castellana de Acevedo y Oliva [3], ha sido uno de los instrumentos usados para indagar el nivel de razonamiento lógico de los estudiantes. Esta prueba consiste de un conjunto de diez tareas (de papel y lápiz) que evalúa proporcionalidad, control de variables, probabilidad, correlación y operaciones combinatorias. Cada uno de estos esquemas de razonamiento es evaluado a través de dos tareas (una de nivel bajo y otra de nivel alto). Salvo las dos tareas de combinatoria, las restantes son de opción múltiple, tanto para la respuesta como la para justificación. Se asigna un punto cuando la respuesta y la justificación dan solución a la tarea y cero en caso contrario. El pensador concreto alcanza de cero a cuatro puntos y el formal, de ocho a diez.

Hay estudios que han sugerido una posible correlación entre el razonamiento lógico de un alumno y su habilidad para resolver problemas matemáticos. Aguilar y colaboradores [4] aplicaron el TRL a 78 estudiantes, de una escuela pública, con edades de entre 15 años, 07 meses y 17 años, 08 meses, de 4° de Educación Secundaria Obligatoria en España. Ellos encontraron que los pensadores formales pueden llegar a resolver con mayor eficacia problemas matemáticos.

El Cognitive Reflection Test, elaborado por Frederick [5], es una prueba de papel y lápiz que contiene tres acertijos matemáticos. Su propósito es servir como herramienta para obtener una medida simple de las habilidades cognitivas, y determinar si éstas son determinantes en la toma de decisiones. Esta propuesta surgió en el área de economía, y se ha aplicado poco en las áreas científicas. El pensador rápido obtiene cero puntos y el lento logra tres. La zona intermedia de 1 y 2 puntos, es de transición entre estos dos tipos de pensadores. Según Kahneman [6], la mente trabaja de dos formas: una, intuitiva o pensamiento rápido, llamado Sistema 1, y otra, reflexiva o pensamiento lento, llamada Sistema 2. En palabras de Kahneman, el Sistema 1 opera de manera rápida y automática, con poco o ningún esfuerzo y sin sensación de control voluntario. El Sistema 2, centra la atención en las actividades mentales que lo demandan, incluidos los cálculos complejos. En la presente investigación, usamos la adaptación al castellano del Cognitive Reflection Test realizada por López [7], conocida como Test de Reflexión Cognitiva (TRC). Este autor la aplicó a 40 estudiantes de psicología de la Universidad de Almería, España, y encontró que los estudiantes universitarios tienden a ser más reflexivos a medida que avanzan en su programa de estudios.

De acuerdo a Biembengut [8], la modelación matemática es un proceso involucrado en la obtención de un modelo matemático. Un modelo matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. En la modelación matemática está involucrada la comprensión del texto que narra la situación, la incorporación de conocimientos curriculares, la obtención de una representación mental separada del texto y la realización de simplificaciones que permitan la resolución del problema. Estas actividades mentales podrían representar un reto para los estudiantes de la educación obligatoria. Por ejemplo, el representar a un avión en pleno vuelo por un punto matemático asignado a su centro de masa y a su velocidad por un vector libre.

II. DISEÑO DEL ESTUDIO

Las preguntas de investigación son:
¿Cómo interpretan los estudiantes de bachillerato, problemas matemáticos que están redactados de manera confusa o que son difíciles de imaginar?
¿Incide el grado de razonamiento lógico de un alumno en su manera en que enfrenta una situación como ésta?
¿Tiene alguna relación el tipo de pensamiento (rápido o lento) de los alumnos con la forma en que resuelven un problema matemático?

A. El objetivo

El objetivo es estudiar las interpretaciones que hacen alumnos de bachillerato de un problema matemático con las características antes señaladas, el tipo de dibujos elaboran y las soluciones que presentan.

En consonancia con Palm [2], nos interesamos en problemas matemáticos en contextos de desplazamiento de objetos, porque es un aspecto que está muy presente en nuestras vidas cotidianas. Los alumnos experimentan el movimiento cuando se desplazan de un lugar a otro: caminan, corren o viajan en un vehículo. La posición de un objeto en el espacio en un tiempo dado, es uno de los conceptos básicos de la mecánica y su formulación matemática requiere de la geometría.

B. El problema y el instrumento de investigación

Se seleccionó un problema relacionado con movimiento de un libro de geometría analítica básica (por competencias) del tercer semestre del nivel medio superior de México. El libro consta de 7 bloque donde se tratan los temas: línea recta, circunferencia, parábola y elipse. En cada bloque se enuncian los objetos de aprendizaje, así como desempeños y competencias a desarrollar. En el libro se menciona que el material está acorde con el marco curricular propuesto por la Secretaría de Educación Pública de México y que se apega a los cambios pedagógicos de la Dirección General de Bachillerato.

El problema de movimiento seleccionado corresponde al Bloque 2 de la sección de Autoevaluación correspondiente al contenido "Aplicas las propiedades de segmentos rectilíneos y polígonos", con objeto de aprendizaje "Punto de división de un segmento". Este problema narra la pérdida total de comunicación con un avión de reconocimiento en un punto intermedio entre el punto de partida y el punto al que debía llegar. Textualmente, el problema dice:

C. Vuelo de reconocimiento

El último mensaje emitido por un avión de reconocimiento con el que se perdió todo contacto indicaba que se hallaba a 250 km del punto de partida y a 350 km del punto donde debía llegar. ¿Cuáles son las coordenadas del sitio desde donde envió su señal, si el avión se desplaza en línea recta y los lugares de partida y llegada se ubican en A(-2,4) y B(8,5)? [9].

La redacción del problema se acompaña de la siguiente fotografía de un avión.

FIGURA 1. Fotografía que acompaña el problema del libro de texto "Geometría analítica básica" [9].

Esta fotografía es decorativa. Como se verá más adelante, los estudiantes no la usan para nada en la resolución del problema antes descrito.

D. Análisis del problema

Para su modelación matemática, este problema requiere en conceptos como: punto matemático, segmento de línea recta, punto de división de un segmento, segmento dirigido, proyección de un punto sobre una línea recta y representación de objetos masivos por medio de puntos matemáticos. Sin embargo, salvo los tres primeros conceptos, los restantes son tratados de manera somera y velada en el Bloque 2 del libro mencionado.

En términos de la taxonomía de Palm [2], la **Información/datos** de este problema es confusa y de difícil interpretación. El avión de reconocimiento emite su último mensaje desde un punto en el espacio. La pregunta es: ¿desde este punto se miden las distancias de 250 km y 350 km? Es claro que los puntos de partida y llegada están sobre la superficie de la Tierra y se pueden representar en el plano cartesiano.

En cuanto al aspecto **Presentación,** el problema se proporciona en forma de texto, formulado en un lenguaje accesible al estudiante, con términos que les son familiares en el contexto escolar, más no de la vida real, y acompañado de la imagen decorativa de un avión en vuelo. La dificultad radica en la modelación matemática implícita en el texto.

Para el alumno debe ser claro que la trayectoria del avión ocurre en tres dimensiones. Sin embargo, los datos del problema lo remiten al plano cartesiano y se le indica que el avión se desplaza en línea recta. No es claro si esta línea recta es la trayectoria que sigue el avión en el espacio, o si es su proyección en el plano, donde se ubican los puntos de partida (A) y de llegada (B). Considerando el contenido del Bloque 2, esta línea recta tendría que representar la proyección del avión en el plano y contener a los puntos A, B y al punto intermedio C, donde se pierde comunicación con el avión.

Así que, el vuelo del avión de reconocimiento se reduce al movimiento de un objeto que se desplaza a lo largo de la línea recta que contiene a los puntos A, B y C. Pero, aún hay un dilema por resolver, ¿cómo se relacionan las distancias en kilómetros con las distancias correspondientes en el plano cartesiano? Hay un factor de escalamiento que debe ser reconocido y calculado. Aunque los elementos necesarios para resolver esta situación problemática, están considerados en el objeto de aprendizaje correspondiente, las exigencias de razonamiento matemático y de modelación son altas, si se considera el contenido del Bloque 2 del citado libro [9].

En el contexto de la taxonomía de Palm [2], el problema antes descrito satisface dos de los cuatro aspectos considerados: el Evento y la Pregunta. Un avión de reconocimiento puede perder comunicación con la torre de control de tráfico aéreo, y en ese caso, la pregunta sería, ¿dónde estaba el avión cuando emitió su último mensaje? La **Información/datos** implica la modelación matemática imaginada por el autor del libro. Además, se omite información que es de utilidad para que el alumno interprete apropiadamente los valores numéricos que se le proporcionan. Por ejemplo, no se menciona que el desplazamiento del avión en el espacio se proyecta sobre un plano que contiene a los lugares de partida y llegada del avión. Por lo tanto, este problema permite examinar la forma en que las variables **Información/datos** y **Presentación** influyen en las soluciones que elaboran los alumnos.

Con este problema se diseñó una Tarea de papel y lápiz. Al problema descrito previamente (el texto y la fotografía de un avión, vea la Figura 1) se le agregó el párrafo, "Lee cuidadosamente el siguiente problema y resuélvelo. Haz los esquemas, los dibujos y los cálculos que consideres necesarios".

La Tarea puede resolverse tanto manera gráfica como analítica; en ambos casos, el aspecto relevante es reconocer que la razón |AC|/|AB|=250 km/600 km=5/12, se satisface también entre las correspondientes distancias en el plano cartesiano.

D. La solución gráfica del experto

La solución gráfica de un problema se basa en dibujos matemáticos precisos de la problemática a resolver. En este caso, en el plano cartesiano se dibujan los puntos A:(-2,4) y B:(8,5) y el punto intermedio C:(x,y), así como el segmento de recta que los contiene (vea la Figura 2). Observe que en esta figura la unidad está dada en centímetros. Ahora, la distancia |AB|=10 cm se corresponde con los 600 km que dista el punto de salida y de llegada del avión. Por supuesto que una distancia de cero centímetros corresponde a una distancia de cero kilómetros en la escala real. Las distancias en la situación real (en kilómetros) y las distancias en el mapa (el plano cartesiano) en sus unidades, satisfacen la siguiente razón de proporcionalidad, 10.05 u/600 km=|AB| u/250 km. De esta expresión se obtiene que el punto A dista del C en (25/6) u=4.17 u. Así que la ubicación del punto intermedio C está a 4.17 u del punto A. Una vez que se dibujó el punto C, se proyecta sobre los ejes cartesianos. De esta información se obtiene que las coordenadas cartesianas aproximadas del punto son C:(2.1,4.4).

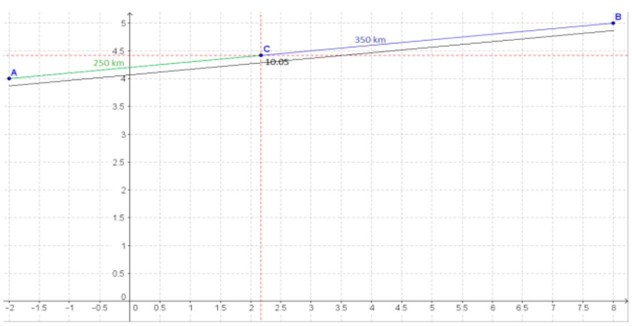

FIGURA 2. Plano cartesiano con los puntos A, B, y C, que representa, respectivamente, el lugar de salida, de llegada y donde se perdió toda comunicación con el avión. La distancia entre dos marcas sucesivas en los ejes indican la unidad de longitud u.

E. La solución analítica del experto

Considere el punto C tiene coordenadas cartesianas desconocidas (x, y). Se requiere un sistema de dos ecuaciones para las incógnitas x, y. Para esto, considere los vectores, AB y AC. El primero parte del punto A y termina en el B, AB= (8-(-2))i+j=10i+j y el segundo inicia en A y concluye en C, AC= (x-(-2))i+j=(x-2)i+(y-4)j.

Como la razón, |AB|/|AC|=600 km/250 km=12/5, se cumple tanto para las distancias reales como para las correspondientes en el plano cartesiano, se tiene que, AB=(12/5) AC. En esta expresión se consideran las expresiones para los vectores AB y AC. Se obtiene, 10i+j=(12/5)[(x-2)i+(y-4)j]. Como un vector del plano es una combinación única de los vectores de la base orto-normal {i, j}, se tiene: 12x=2(13), 12y=53. Se resuelve este sistema de ecuaciones y se obtienen los valores de las componentes cartesianas del punto C. A saber, x=136≈2.2, y=5312≈4.4.

Una buena solución gráfica debe diferir de la solución analítica en un par de décimas.

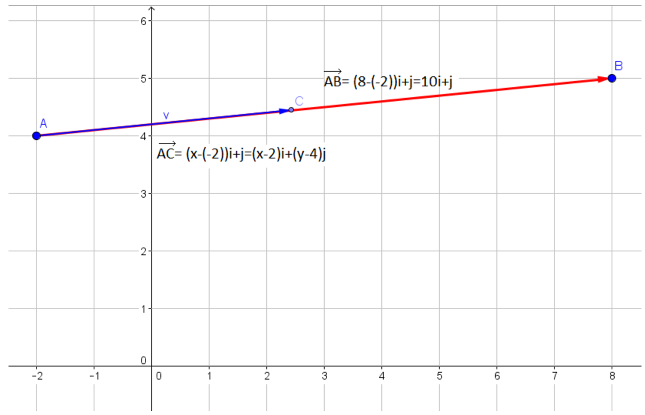

FIGURA 3. Plano cartesiano con los dos vectores citados en el párrafo anterior

F. Los estudiantes involucrados

La Tarea se aplicó a 26 alumnos de tercero de preparatoria, del área de sociales, de edades en el rango de 17 años y 01 meses a 18 años y 10 meses. Estos estudiantes son de un grupo de tercero de preparatoria, de una institución educativa pública ubicada en la ciudad de Puebla, México. Son 19 mujeres y 7 hombres, que pertenecen a un nivel socioeconómico de medio a medio-bajo. Los alumnos resolvieron la Tarea de manera individual, en aproximadamente 50 minutos. Con anterioridad, ya habían contestado las pruebas de reflexión cognitiva (TRC) y la de razonamiento lógico (TRL). El TRC se resolvió en 9 minutos y el TRL en 38 minutos.

El TRC, el TRL y la Tarea se aplicaron en el salón de clases y los estudiantes estaban enterados que no formaban parte de la evaluación de la materia de matemáticas que estaban cursando en ese momento (Probabilidad, estadística y temas selectos de matemáticas) ni de la materia de física (Física general). Además, con anterioridad, ellos habían resuelto dos problemas de razonamiento lógico y otros dos de reflexión cognitiva.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este trabajo presentamos, detalladamente, los dibujos y las soluciones presentados por los 26 alumnos encuestados, y su posible correlación con el test de razonamiento lógico (TRL) y el test de reflexión cognitiva (TRC).

Este grupo de alumnos tiene una calificación promedio de 0.46 en el TRC. En promedio, ellos son "pensadores rápidos", de baja reflexión cognitiva, con poco control del proceso de resolución y carencias para discernir la razonabilidad del resultado.

En cuanto al TRL, ellos alcanzaron un puntaje promedio de 3.42. Son pensadores concretos, la manipulación de objetos les facilita la elaboración de ideas y la propuesta de métodos de solución. Solo un alumno obtuvo un puntaje de 3 en el TRC, 9 en el TRL y resolvió la Tarea correctamente (vea la Figura 18).

Se considera que un dibujo es correcto, si tiene la siguiente información: (1) los puntos A, B y C, indicando sus coordenadas cartesianas y, (2) el trazo del segmento de recta que une estos tres puntos con la leyenda, “600 kilómetros”, la cual puede ser dada también en la justificación de la solución. El dibujo es incorrecto cuando falta alguno de estos elementos. Se dice que un estudiante presentó una solución gráfica correcta si hace un dibujo correcto y bosqueja, a través de una regla de tres, la razón de proporcionalidad que existe entre las distancias en la situación real y las correspondientes en el plano cartesiano. Además, localiza el punto intermedio C, lo proyecta sobre los ejes cartesianos y da las coordenadas cartesianas del punto C.

En relación al tipo de soluciones que presentaron los estudiantes encuestados, 25 elaboraron una solución gráfica y otro presentó un resultado sin justificación. Este estudiante (TRC=1, TRL=4) no hizo ningún cálculo ni gráfico. Escribió el siguiente texto:

Justificación:

1.- El problema a mi parecer, no tiene relación con los problemas antes vistos en la materia.

2.- Si tuviera una solución yo graficaría el problema sería (7,4.2) “Probablemente”.

3.- Necesitaria un poco más de datos.

Se observa que, este alumno no encontró relación alguna entre la Tarea y la materia que cursaba en ese momento. Además, proporciona una solución sin indicar cómo la obtuvo. Este comportamiento evidencia el contrato didáctico [10] porque, él/ella esperaba que la Tarea estuviera relacionada con la materia que cursaba en ese momento y que estuviera resuelta cuando hubiese proporcionado valores numéricos. No tiene control de su procedimiento porque una vez que proporciona las coordenadas del punto buscado, menciona que se requieren más datos. Aunque, este alumno supera el puntaje promedio del grupo en el TRC y el TRL, no logró comprender la Tarea. Cabría la posibilidad que los conocimientos curriculares involucrados hayan jugado un papel relevante o que le faltó disponibilidad para realizar la actividad.

Las 25 soluciones gráficas proporcionadas por los estudiantes se agruparon en categorías de acuerdo a si, el dibujo es correcto o incorrecto. Observe que solo los estudiantes que realizaron un dibujo correcto, están en posibilidad de resolver la Tarea. A continuación se describen estas tres categorías.

Categoría C1

Hace un dibujo incorrecto. Escribe una fracción y propone una solución incoherente.

Categoría C2

Hace un dibujo correcto. Mide distancias de manera imprecisa. Escribe una fracción arbitraria, en lugar de 250/600 o 350/600. Da una solución con errores de cálculo o incoherente.

Categoría C3

Hace un dibujo correcto. Propone la fracción 5/12, mide las distancias de manera precisa y resuelve correctamente la Tarea.

En la Categoría C1 hay 8 estudiantes, todos obtuvieron cero puntos en el TRC. En términos de Kahneman [6], estos alumnos son “pensadores rápidos”, que reflexionan poco cuando están resolviendo un problema. Como veremos más adelante, está pudiera ser una de las causas que les impidió realizar un dibujo correcto. En general, estos estudiantes no dibujaron correctamente los puntos A y B en el plano cartesiano, identifican a una línea recta con una recta paralela al eje horizontal, invierten la coordenada horizontal con la vertical, omiten en los ejes coordenados los números negativos.

Se han elegido seis soluciones representativas de la Categoría C1, que se presentan en las Figuras 4 a 9, organizadas de acuerdo al puntaje obtenido en el TRL. En la Figura 4 se muestra la solución de un alumno con un TRL=0. Además de dibujar el plano cartesiano, este estudiante elabora un esquema del vuelo del avión que utiliza para resolver la Tarea. No relaciona el dibujo con el esquema y de hecho, no usó el dibujo. En su esquema, visualiza al avión describiendo una trayectoria curva y dibuja un pequeño avión en el punto intermedio C sobre la trayectoria. Usa las coordenadas cartesianas de los puntos A y B, para obtener el número 4.2 y lo asigna al punto C. No se da cuenta que esto es contradictorio con las anotaciones A:(-2,4) y B:(8,5) que hizo en este mismo esquema. Pareciera que este estudiante no entiende que para designar un punto en el plano cartesiano, se requieren dos coordenadas; esto explicaría que haya anotado correctamente las coordenadas de los puntos A y B y que, sin embargo, proporcione un solo número para las coordenadas del punto C. Su procedimiento está acorde con sus puntajes en el TRC y el TRL.

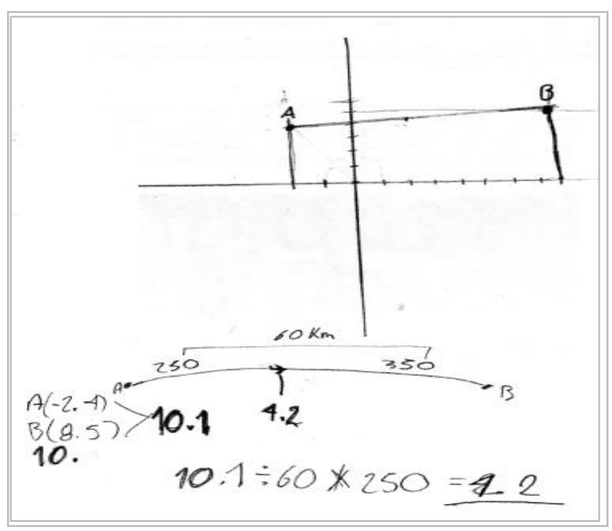

FIGURA 4. Ejemplo de la Categoría C1 (Alumno 35, TRL=0).

Este alumno calculó la parte entera del número 10.1, restando la coordenada *x* del punto B de la correspondiente del punto A, 8-(-2)=10. La parte decimal la obtuvo de manera similar, pero ahora usando las coordenadas *y*: 5-4=1. 60 km es la distancia entre los puntos A al B, como calculada por el estudiante. En la expresión aritmética que propone no considera el último dígito del 250, cuando hace su cálculo. Este procedimiento recuerda el problema conocido como "la edad del capitán" [10].

En la Figura 5 se presenta otra solución elaborada por otro estudiante con un TRL=0. En la justificación que da se observa su necesidad de hacer operaciones con los datos del contexto real y ofrecer un resultado, (7,4.2), ignorando totalmente las coordenadas cartesianas de los puntos A y B. Esta información la usa únicamente para representar este par de puntos en el plano cartesiano y plasmar las coordenadas del punto intermedio donde se perdió el avión; observe que intercambió la coordenada de la dirección horizontal por la de la dirección vertical y viceversa. Su resultado se basa en una justificación incoherente, que está tenuemente conectada con la información vertida en el plano cartesiano cuando asegura que "1 km equivale a cada rayita", y a su vez, la información en el plano cartesiano está relacionada con la justificación cuando al lado del punto de partida escribe "0 km" y en el llegada anota "350 km". Este estudiante tiene el comportamiento de un pensador rápido que percibe que el problema está resuelto cuando ofrece un resultado; no se da cuenta que las coordenadas del punto intermedio no se desprenden, ni de justificación ni de su dibujo. En lo que se refiere al texto de la Tarea, este estudiante no entendió el significado de la frase "El último mensaje emitido por un avión de reconocimiento con el que se perdió todo contacto indicaba que se hallaba a 250 km del punto de partida y a 350 km del punto donde debía llegar", porque asocia los 350 km al punto de llegada (8,5).

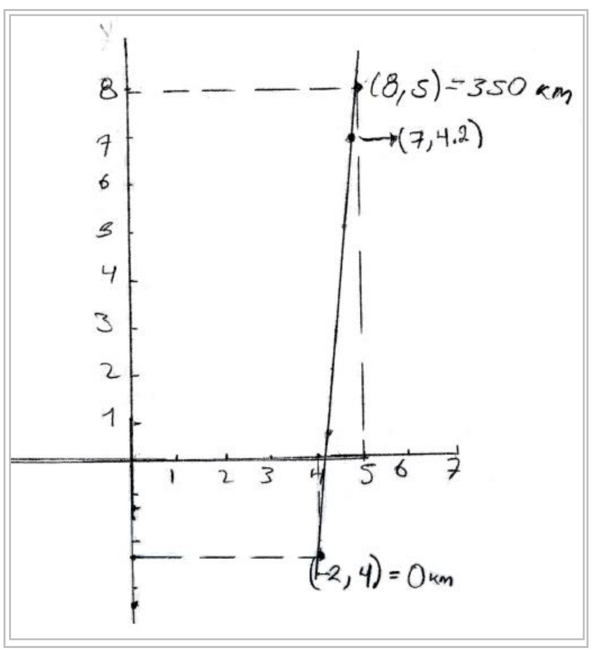

FIGURA 5. Alumno 39 (TRL=0).

Este estudiante no entiende que el símbolo igual tiene un significado de equivalencia y no percibe que un punto del plano no es lo mismo que a una distancia, un escalar.

En la Figura 6 se presenta otra solución de la Categoría C1. El estudiante da las coordenadas del punto intermedio, mismas que no se desprenden de su justificación, en la que aparecen valores numéricos que no están relacionados ni con los datos del contexto real ni con el plano.

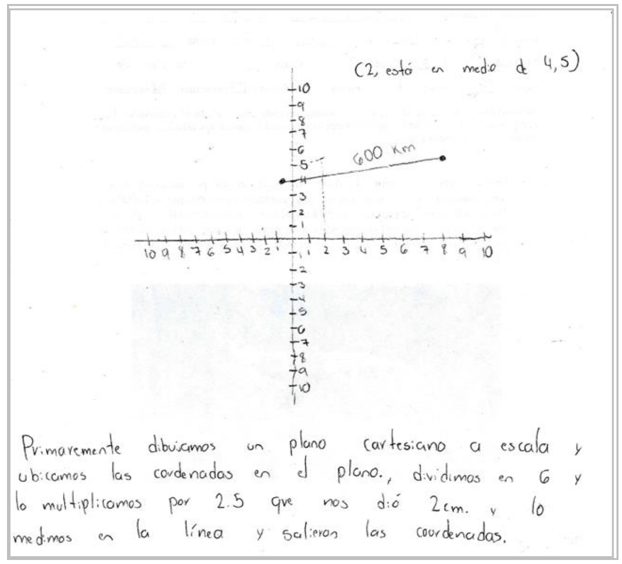

FIGURA 6. Alumno 26 (TRL=1).

No dibujó correctamente las coordenadas del punto A: (-2, 5), ni dice de donde obtuvo los 600 km que asocia con la distancia entre los puntos de salida y llegada del avión.

En las Figuras 7 a 9 se presentan soluciones propuestas por estudiantes que superan el puntaje promedio del TRL (2, 12), correspondiente a la Categoría C1. Como veremos este hecho no fue suficiente para que pudieran elaborar un dibujo correcto. La Figura 7 fue elaborada por un estudiante que obtuvo un puntaje de 3 en el TRL. Observe que transcribe correctamente las coordenadas de los puntos A y B, pero en el plano cartesiano dibuja los puntos (-4, 5) y (10, 8). Une estos puntos por medio de una trayectoria que no es una línea recta, a pesar de que en la Tarea se especifica que el avión se desplaza siguiendo un tramo recto. Asegura que 600 km se corresponden con 10 cm, pero la trayectoria que une a sus puntos de salida y llegada del avión mide 7.9 cm. En su dibujo del plano cartesiano, propone que las coordenadas cartesianas del punto intermedio son (2, 4), pero no las usa en su justificación, donde aparecen los datos que se proporcionan en la Tarea. Este comportamiento delata una lectura superficial del texto, falta de control en el cálculo y ausencia de reflexión.

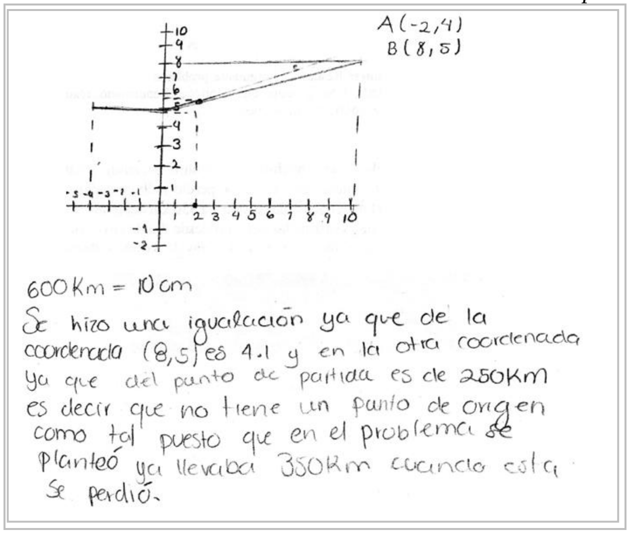

FIGURA 7. Alumno 2 (TRL=3).

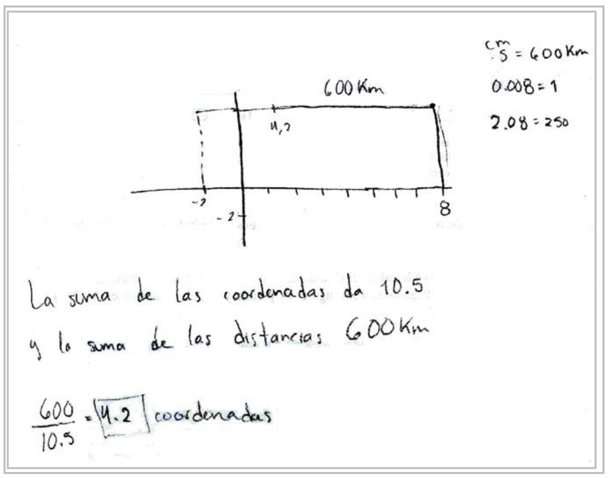

FIGURA 8. Alumno 24 (TRL=4).

Pareciera que de manera individual, este tipo de soluciones responde al puntaje alcanzado por el estudiantes en la prueba de reflexión cognitiva (TRC), más que en la prueba de razonamiento lógico (TRL), como se verá en los siguientes dos casos que enseguida se presentan. La solución, que aparece en la Figura 7, fue elaborada por un estudiante que tiene un puntaje de 3 en el TRL. Es un buen puntaje si consideramos que los 26 estudiantes encuestados tienen una calificación promedio de 3.42 en esta misma prueba.

La Categoría C2 está formada por 9 estudiantes, tiene un puntaje promedio de 0.44 en la prueba TRC y 3.22 en el TRL. Tres de los estudiantes tienen un TRC=0 y dos hicieron un puntaje de 1 en el TRC. En todos los casos, la puntuación individual en el TRL es mayor o igual a la obtenida en el TRC y no superior a 3. Algunos estudiantes propusieron soluciones inventadas (vea la Figura 10), sin ninguna base, y otras soluciones que van en la dirección correcta, pero que la desatención del estudiante, impidió la conclusión exitosa de la Tarea (vea la Figura 14).

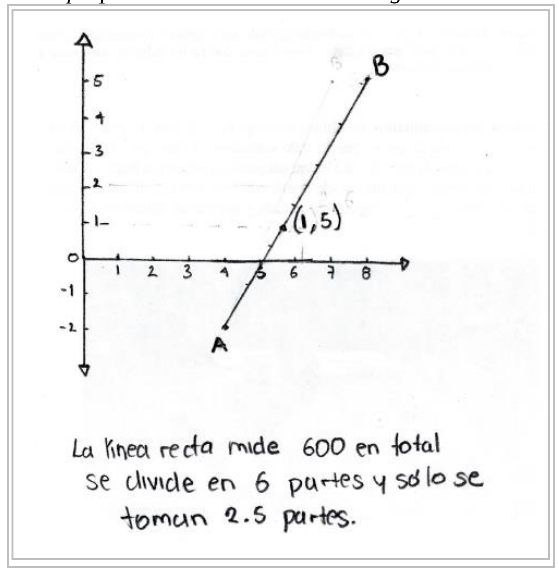

FIGURA 9. Ejemplo de la Categoría C1. Alumno 14 (TRL=6).

Estos estudiantes hicieron un dibujo correcto, pero no midieron correctamente el tramo que va del punto A al B. No escribieron correctamente la regla de tres que conecta la información del contexto real con aquella del plano cartesiano. Una vez que localizaron la posición del punto intermedio C, no lo proyectaron sobre los ejes cartesianos para identificar las coordenadas de este punto, o lo hacen de manera incorrecta. Enseguida se presentan cinco figuras representativas de las soluciones de esta categoría.

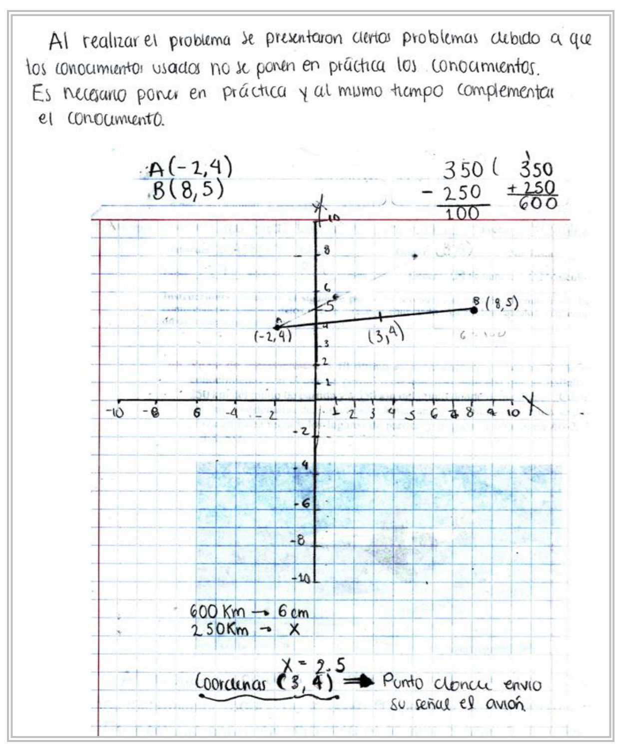

FIGURA 10. Alumno 32 (TRC=0, TRL=1).

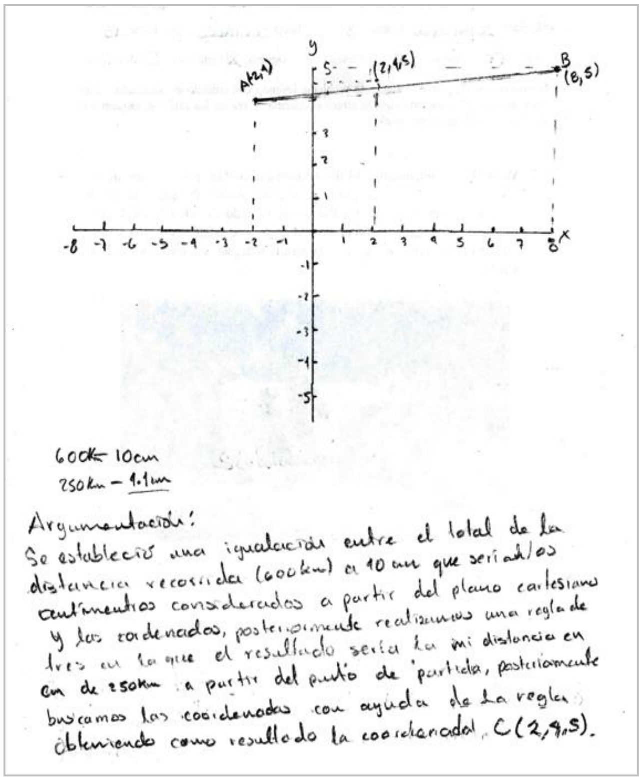

FIGURA 11. Alumno 15 (TRC=0, TRL=3).

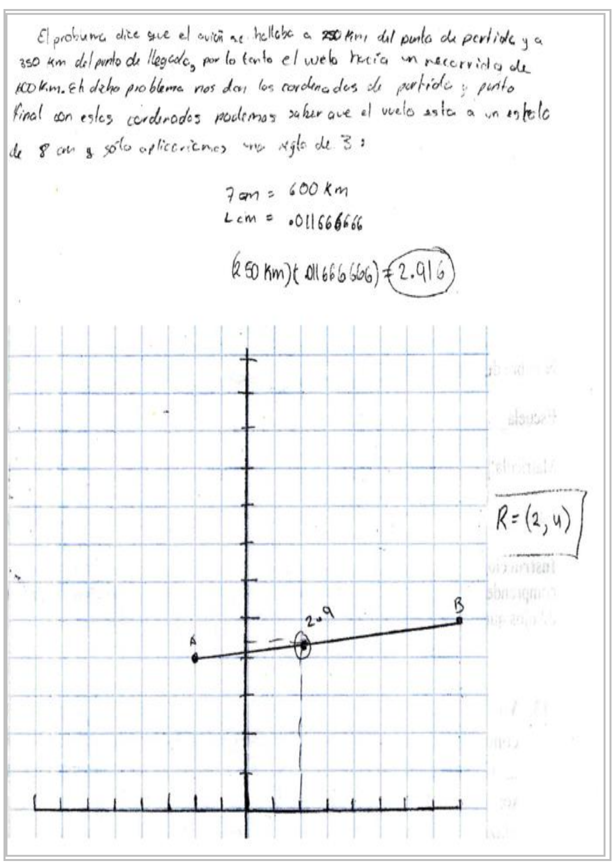

FIGURA 12. Alumno 19 (TRC=0, TRL=4).

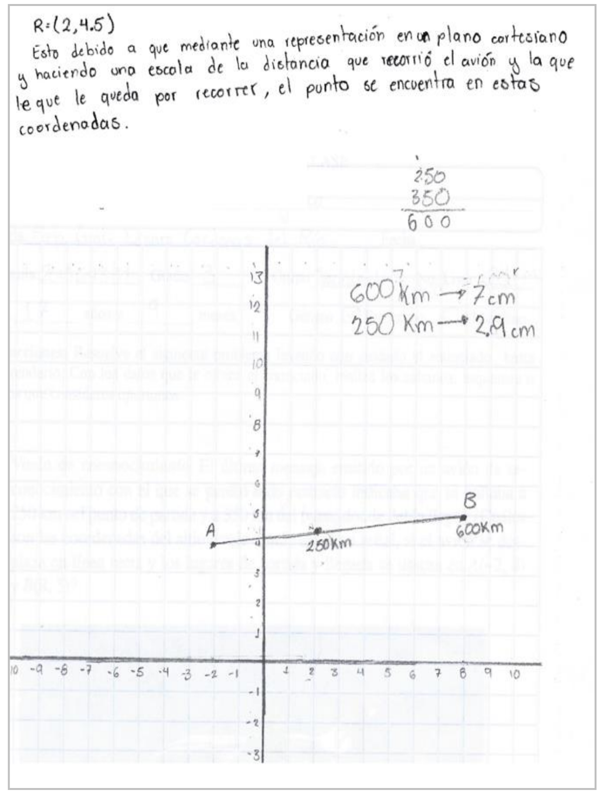

FIGURA 13. Alumno 21 (TRC=1, TRL=1).

En la Figura 13 se presenta una solución de la Categoría C2 (TRC= 0 y TRL=1). La longitud del segmento AB (que trazó este alumno) es de 7 cm. Sin embargo, él asegura que es 6 cm. Para ubicar el punto intermedio C, no midió correctamente los 2.5 cm a partir del punto A; el alumno puso la marca del punto (3, 4) a 4

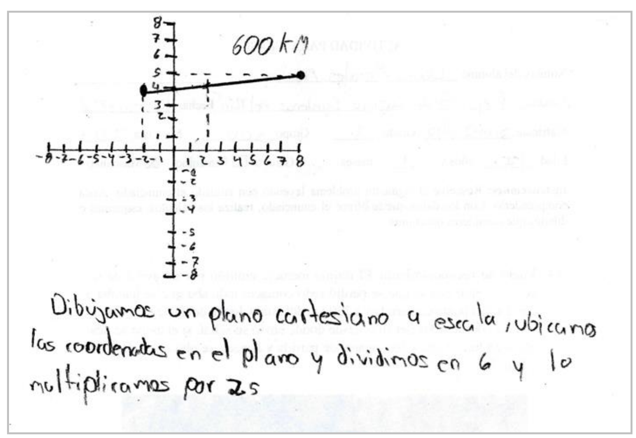

FIGURA 14. Alumno 20 (TRC=1, TOLT=3).

cm del punto A. Es un pensador rápido (TRC=0), su trabajo deje entrever este hecho. Se observa que trató de obtener la razón que requería, pero la falta de control en su procedimiento, se lo impidió.

En la Categoría C3 hay 7 estudiantes, hicieron un dibujo correcto y resolvieron apropiadamente la Tarea. Tres de ellos tienen un puntaje de cero en el TRC, otros tres estudiantes obtuvieron un punto y otro alcanzó tres puntos (el puntaje máximo).

En las siguientes figuras se dan tres ejemplos de la soluciones elaboradas por estos estudiantes. Se observa que a excepción de un estudiante (vea la Figura 17), los otros seis no se preocupan por dar las coordenadas cartesianas del punto intermedio con el mismo grado de precisión que el usado para medir la distancia AB en el plano cartesiano. Aunque proyectan el punto intermedio, recurren a su percepción visual para dar las coordenadas antes citadas. El estudiante que propone una medición para determinar estas coordenadas, da valores más cercanos a los correspondientes a la solución analítica.

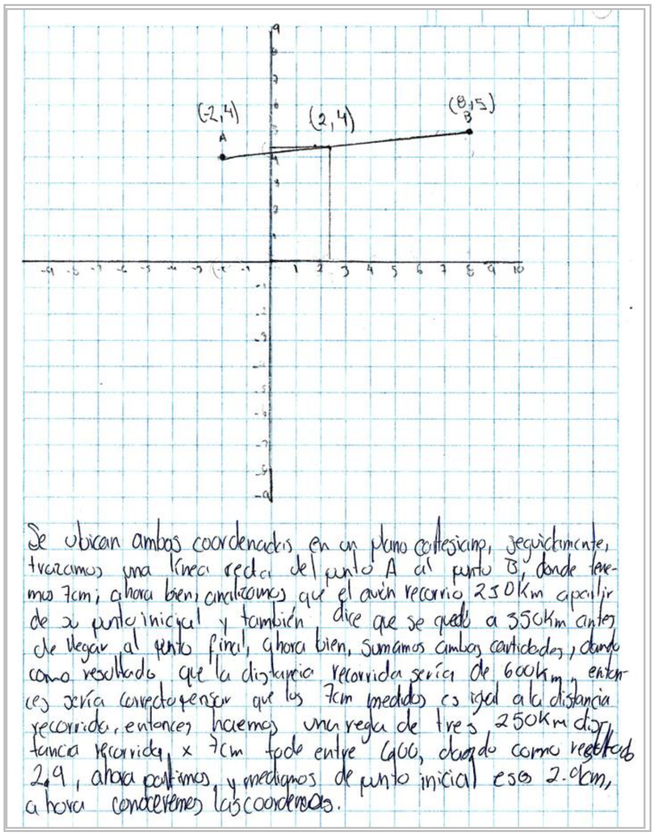

FIGURA 15. Alumno 27 (TRC=0, TRL=1).

En la Figura 16 se presenta una solución de la Categoría C3 (TRC=0, TRL=5). Este estudiante hizo un dibujo correcto y realizó mediciones atinadas. Identificó la relación requerida: 10 cm en el plano cartesiano equivalen a 600 km en la situación real. Con esta información calculó la cantidad de centímetros que dista el punto A del punto intermedio C, y como consecuencia, obtuvo sus coordenadas cartesianas (2, 4.5). Este alumno es un pensador rápido (TRC=0), no comprobó su resultado. Por otro lado, esto no fue un impedimento para que controlara su procedimiento de cálculo. Se observa que anota su idea para encontrar la razón requerida. Hace un dibujo preciso y deja claro que sabe cómo proyectar un punto sobre un segmento. Este desempeño concuerda con su puntaje en el TRL.

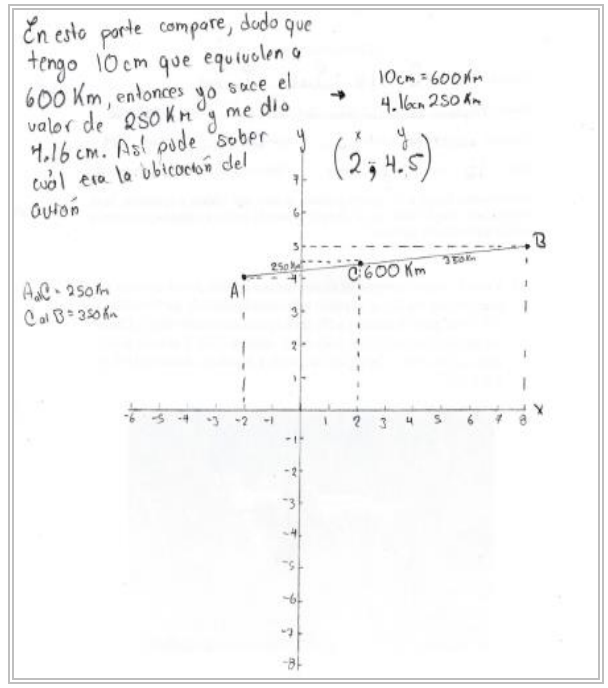

FIGURA 16. Alumno 4 (TRC=0, TRL=5). Ejemplo de la Categoría C3.

Este alumno presenta un dibujo correcto y preciso. Su solución gráfica para el punto C:(2,4.5) es muy cercana a la obtenida analíticamente, (13/6, 53/12).

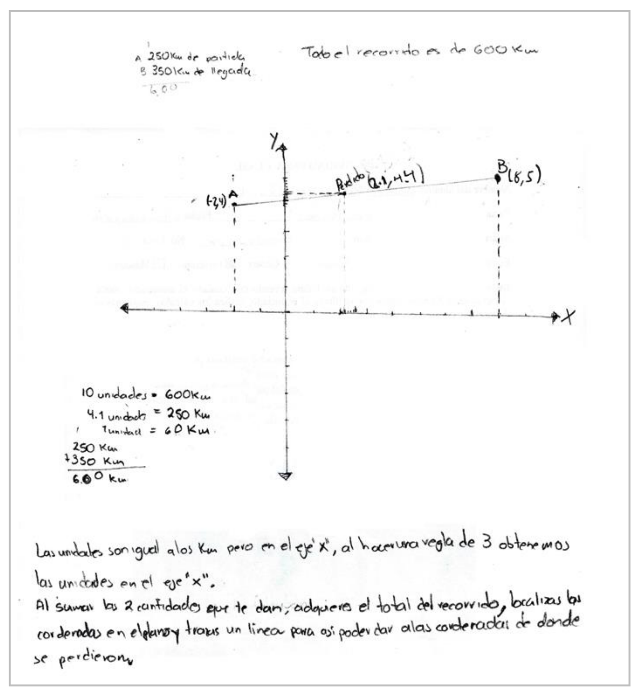

FIGURA 17. Alumno 28 (TRC=1, TRL=5).

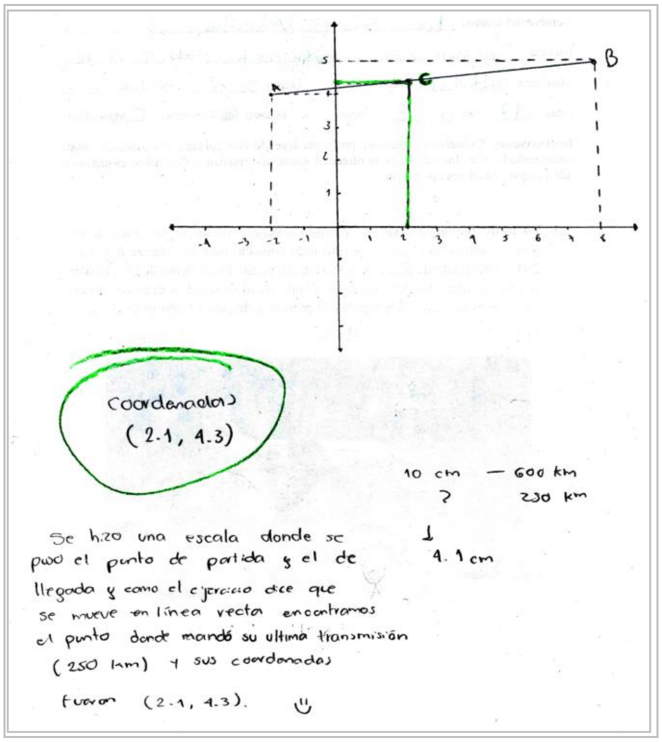

FIGURA 18. Alumno 33 (TRC=3, TRL=9).

La solución de este estudiante para las coordenadas del punto intermedio C:(2.1, 4.4) son muy cercanas a la proporcionada por el método analítico, (2.2, 4.4).

De los 25 dibujos presentados, 17 son correctos, aunque sólo 7 fueron usados en la resolución de la Tarea. 8 alumnos (Categoría C1) hicieron dibujos incorrectos y propusieron una solución incoherente. Solo uno de estos, resolvió correctamente las dos preguntas de razonamiento proporcional del TRL y otro resolvió solo una.

TABLA I. Distribución por categorías de los 25 alumnos que presentaron un dibujo y de los puntajes promedio del TRC y del TOLT. La puntuación máxima en el TRC es 3 y en el TOLT es 10.

Categoría	Número de alumnos	TRC	TRL	Dibujo	¿Solución correcta?
C1	8	0.00	2.12	Incorrecto	No
C2	10	0.50	3.50	Correcto	No
C3	7	0.85	4.71	Correcto	Si

En la Tabla I se presenta la distribución de los 25 dibujos por categorías. Se observa que el puntaje promedio más alto del TRL se corresponde con el subgrupo de estudiantes que realizó un dibujo correcto y resolvió la Tarea (Categoría C3), mientras que el puntaje más bajo, corresponde a los estudiantes que presentaron un dibujo incorrecto y no la resolvieron correctamente (Categoría C1).

Aguilar y colaboradores [4] encuestaron a un grupo de estudiantes de preparatoria por medio de un cuestionario de nueve problemas matemáticos. Estos 78 estudiantes también resolvieron el test de razonamiento lógico (TRL). Estos autores encontraron que, de los estudiantes que estaban habilitados en el razonamiento proporcional, algunos no lo usaron para resolver el problema matemático que lo requería.

Ahora, los alumnos encuestados por nosotros deben establecer una razón para resolver la Tarea. Para saber si ellos presentan un comportamiento similar al reportado por estos autores [4], consideramos su desempeño en los dos ítems del TRL que evalúan el razonamiento proporcional. De los 26 estudiantes, 13 no resolvieron ninguno, 7 resolvieron uno, y 6 resolvieron los dos. Considerando que un alumno está habilitado en el razonamiento proporcional cuando al menos resolver uno de estos ítems, se tiene que la mitad de estos estudiantes domina el razonamiento proporcional. En la Tabla II se distribuyen estos tres bloques de alumnos por categorías. Observe que, de los estudiantes que dominan el razonamiento proporcional, 7 lograron establecer la razón y los 6 restantes no lo lograron, aunque están habilitados para ello. Como el número de alumnos encuestados en el presente trabajo es la tercera parte de la muestra de Aguilar y colaboradores [4], encontramos un acuerdo parcial con estos autores.

TABLA II. Número de ítems de razonamiento proporcional contestados correctamente, distribuidos por categorías.

No. de Ítems	0	1	2
Categoría	No. de alumnos	No. de alumnos	No. de alumnos
C1	6	1	1
C2	4	2	4
C3	3	2	2

En la cabecera de la Tabla II se señala el número de ítems contestados correctamente. Cinco estudiantes no contestaron ningún ítem, pero lograron establecer la razón necesaria para resolver la Tarea. En oposición, tres estudiantes, que de acuerdo al TOLT están habilitadas en el razonamiento proporcional, no lograron usarlo.

Cabe resaltar que de los 13 alumnos que no resolvieron ninguno de los dos ítems, 3 establecieron la razón involucrada y resolvieron la Tarea. Según la prueba TRL, estos estudiantes no están habilitados en el razonamiento proporcional. Sin embargo, algunos lo usaron y la contestaron correctamente.

De las Tablas I y II, se concluye que un dibujo correcto es necesario para establecer la razón requerida, pero, un dominio mínimo de razonamiento proporcional, no es suficiente para elaborarla.

IV CONCLUSIONES

En promedio, los 26 estudiantes de preparatoria encuestados son pensadores rápidos; obtuvieron 0.46 puntos en el test de reflexión cognitiva (TRC) [7]. En términos de Kahneman [6], en este grupo predominan los pensadores intuitivos que buscan la solución con el mínimo esfuerzo mental y sin control voluntario. Además, son pensadores concretos; el puntaje promedio en el test de razonamiento lógico (TRL) [3] es de 3.42. Los objetos concretos les facilitan la elaboración de representaciones mentales necesarias en la propuesta de un plan para resolver un problema.

25 estudiantes resolvieron la Tarea usando un método de solución gráfico. Otro propuso un procedimiento aritmético incoherente. El 46% la resolvió correctamente. Ningún estudiante conectó el desplazamiento del avión en el espacio con la modelación matemática implícita en la redacción del problema del libro de texto de geometría considerado [9].

Aunque la Tarea cumple con el Evento y la Pregunta de la taxonomía de Palm [2], esto no fue suficiente para que los estudiantes recurrieran a su conocimiento cotidiano. Además, la ambigüedad en la Información/datos y la Presentación, no les permitió interpretarlos de manera apropiada para identificar la modelación matemática involucrada en el problema del libro de texto de geometría [9]. Ellos se concretaron a utilizarla para elaborar una solución, dejando entrever un alineamiento con el contrato didáctico [11].

Además, ninguno intentó comprobar su resultado. Al ser pensadores rápidos, no consideran importante comprobarlo. En promedio, los estudiantes con los puntajes más altos en el TRC y el TRL tuvieron un mejor desempeño en la resolución de la Tarea (vea la Tabla I).

Observamos que un dibujo correcto fue crucial para proponer la razón requerida. Sin embargo, el estar habilitado en el razonamiento proporcional no fue suficiente para alcanzar este fin (vea la Tabla II). Esto está en consonancia parcial con el resultado de Aguilar y colaboradores [4].

La Comisión Nacional de Libros de texto Gratuitos de la Secretaría de Educación Pública de México considera a la modelación matemática desde la educación primaria [12]. A los estudiantes encuestados no les llamó la atención que el avión de reconocimiento hiciera su recorrido sobre el segmento de recta que conecta los puntos de salida y llegada. En un trabajo futuro, se considerarán entrevistas con los alumnos, con la finalidad de saber si ellos logran identificar el modelo matemático implícito en la redacción de la Tarea y la forma en que lo usan.

También se plantea una aplicación futura a los estudiantes universitarios. Es interesante conocer si su mayor habilitación académica les permite identificar el modelo matemático que subyace en la Tarea y el tipo de soluciones que presentan. Además, sería interesante explorar si predominan las soluciones analíticas sobre las soluciones gráficas. Esperamos que se repita el resultado que encontramos en el presente estudio: los estudiantes con los más altos puntajes en el TRC y el TRL son los más exitosos al resolver un problema matemático. Además, nos permitiría indagar si el tránsito del bachillerato a la universidad propicia que los estudiantes sean más reflexivos. López [7] asegura esto, pero únicamente en relación al tránsito de los estudiantes en sus estudios universitarios. En general, se esperaría un incremento en los puntajes promedios del TRC y TRL. Otro aspecto interesante para un trabajo futuro sería indagar la manera en que resuelven la Tarea los maestros de matemáticas de las escuelas preparatorias mexicanas.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente por la Vicerrectoría de Investigación y Postgrado de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla Yolanda Monterrosas Castillo agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por la beca para la realización de los estudios de Maestría

REFERENCIAS

[1] Fan, L., *Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks*, ZDM Mathematics Education **45**, 765-777 (2013).

[2] Palm, T., *Theory of authentic task situations*. In B. Greer, Word and worlds: Modelling verbal descriptions of situations, (In Rotterdam: Sense Publishers 2009), pp. 3-19.

[3] Acevedo, J. y Oliva, J., *Validación y aplicación de un test de razonamiento lógico*, Revista de psicología general y aplicada **48**, 339-351 (1995).

[4] Aguilar, M., Navarro, J., López, J., Alcalde, C., *Pensamiento formal y resolución de problemas matemáticos*, Psicothema **14**, 382-386 (2002).

[5] Frederick, S., *Cognitive reflection and decision making*, The Journal of Economic Perspectives **19**, 25-42 (2005).

[6] Kahneman, D., *Pensar rápido, pensar despacio* (Editorial DEBATE, Barcelona, 2011).

[7] López, J., *Evolución de la reflexión cognitiva en la universidad*, Revista Divulgación Matemática **5**, 17-18 (2012).

[8] Biembengut, M. S., Hein N., *Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática*, Educación Matemática **16**, 105-125 (2004).

[9] Ruiz, J., *Matemáticas 3 Geometría analítica básica*, 2ª Ed. (Editorial Patria, México, 2013).

[10] D’Amore, B., *Influencia del contrato didáctico y sus cláusulas en las actividades matemáticas de la escuela primaria*, Dificultades del aprendizaje de las matemáticas (En Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, España 2001) pp. 56-64.

[11] D´Amore, B., *Primeros elementos de la didáctica de la matemática*, Tendencias en la educación matemática basada en la investigación 1ra. Ed. (BUAP, México, 2015), pp**.** 9-24.

[12] Quiroz, R., Rodríguez, R., *Análisis de praxelogías de la modelación matemática en libros de texto de la educación primaria*, Educación Matemática **27**, 45-79 (2015).