



# Oscilador cuártico, análisis perturbativo y simulación

Manuel Alejandro Segura Delgado<sup>1</sup>, Miguel Fernando Castillo C.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Física, Cinvestav IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, San Pedro Zacatenco, 07360, Ciudad de México.

<sup>2</sup>Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Cra. 3Este No 26-1, Bogotá Distrito Capital.

**E-mail:** asegura@fis.cinvestav.mx

(Recibido el 20 de junio de 2017; aceptado el 05 de marzo de 2018)

## Resumen

Se realiza un análisis perturbativo al oscilador cuártico (también llamado oscilador de Duffing), el cuál es descrito por un término de cuarto orden en el Hamiltoniano. Inicialmente, aplicando teoría clásica de perturbaciones se estudia un caso particular donde el Hamiltoniano no tiene fuerzas impulsoras ni factores de amortiguamiento. Este método requiere eliminar términos seculares, lo cual garantiza soluciones que tengan una interpretación física correcta. Luego, se agregan los términos de amortiguamiento e impulso y se obtienen soluciones al orden más bajo. Por último, para visualizar las soluciones en el espacio fase y contrastar con el modelo teórico se emplea el programa Easy Java Simulations (**EJS**), además, es un recurso educativo para bajar la curva de aprendizaje de estos temas. Para finalizar se realiza la combinación de parámetros y condiciones iniciales permite encontrar una condición de caos en este sistema dinámico.

**Palabras clave:** Oscilador de Duffing, Teoría de Perturbaciones, Simulaciones numéricas.

## Abstract

Perturbative analysis to the quartic oscillator is performed (also called Duffing oscillator), this is described for a quartic order term in the Hamiltonian. Initially a particular case where the Hamiltonian does not neither have forced nor damped factor was studied, applying the classic perturbation theory. This method requires to delete secular terms which lead to solutions with correct interpretation. Further on, forced and damped terms are added, and lower solutions are obtained. Finally, in order to display the solution in the phase space and to contrast with the theoretic model the Easy Java Simulation (EJS) is used, moreover, this is an educational resource for reducing the learning curve in these topics. The combination of parameters and initial conditions allow to find a chaos conditions in this dynamic system.

**Keywords:** Duffing oscillator, Perturbation theory, Numeric simulations.

**PACS:** 45.50.Dd, 45.20.Jj, 46.15.Ff

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Para el oscilador armónico simple se tiene una solución analítica exacta que nos permite reconocer el comportamiento de las variables de posición y velocidad. Estas variables pueden ser relacionadas en el espacio de fase y por tanto, se puede predecir el comportamiento del sistema después de un tiempo  $t$ . Sin embargo, existen muchos sistemas físicos cuyas soluciones analíticas no se pueden obtener o por lo menos no de forma simple. Un ejemplo de estos sistemas son los osciladores no lineales, en particular en este trabajo nos referiremos al ya mencionado oscilador cuártico:

$$\ddot{x} + R\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon bx^3 = \text{sacos}(\omega t). \quad (1)$$

La no linealidad de la ecuación muestra la necesidad de usar y explorar métodos alternativos para obtener soluciones aproximadas al problema. Por lo cual, el uso de la teoría de

perturbaciones es apropiado. Estas se pueden incorporar estableciendo condiciones iniciales al sistema o añadiendo un término al Hamiltoniano (en este caso al Hamiltoniano del oscilador armónico simple).

Entonces para llevar a cabo el desarrollo del oscilador cuártico y encontrar una solución aproximada al mismo, inicialmente se plantean los parámetros del sistema y de la simulación (Sección II). En la Sección III se considera el oscilador armónico simple y se da la solución a este, lo cual es el paso de entrada al oscilador cuártico. Posteriormente, el término no lineal ( $x^4$ ) es introducido al Hamiltoniano de la sección anterior como una perturbación modulada por el parámetro  $\epsilon y$ , para finalizar esta parte se obtiene una solución aproximada para la ecuación de movimiento en la Sección IV. En las Secciones V y VI se consideran los casos de amortiguamiento sin fuerzas impulsora y de forzamiento sin amortiguación, respectivamente, en la Sección VII se estudia el caso general de oscilador cuártico amortiguado y forzado.

## II. PARÁMETROS DEL SISTEMA Y DE SIMULACIÓN

Para realizar el estudio del sistema se empleó el software EJS [1], en el cual se plantea la ecuación diferencial mostrada en (1). En la simulación se consideran dos cuerpos de masa  $m$  unidos a un resorte de constante de elasticidad  $k_1$ [2], cuyo valor se puede variar en los deslizadores de la simulación. Las condiciones iniciales dadas al sistema son:

$$x_{\text{rojo}}(0) = 1.500; \quad x_{\text{azul}}(0) = 1.501, \\ v_{\text{rojo}}(0) = v_{\text{azul}}(0) = 0.$$

Los factores que permiten revisar cada caso por separado son:

- $0 \leq R \leq 1$  controla la fricción.
- $b$  permite observar la linealidad o no linealidad (en este caso  $b=0$  oscilador armónico,  $b=1$  oscilador cuártico).
- $s$  establece el rango de aproximación del problema desde la teoría de perturbaciones ( $s=0$  cuando no hay forzamiento,  $s=1$  oscilador forzado y  $s = -\frac{A^2}{4}(3\cos(2\omega t) + \cos(\omega t))$  si existen aproximaciones perturbativas).

A continuación se presentan varios casos en los cuales se realizará tanto un estudio teórico como las respectivas simulaciones computarizadas del caso. Iniciando por el oscilador armónico simple e introduciendo las distintas modificaciones que llevan al oscilador cuártico. En cada una de las simulaciones se puede observar, en la parte izquierda de las gráficas, los parámetros descritos anteriormente.

## III. OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

Como se indicó anteriormente, para hallar soluciones aproximadas al oscilador cuártico se usará la teoría de perturbaciones, siendo el Hamiltoniano sin perturbar el de un oscilador armónico simple [3, 4]:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0 x^2. \quad (2)$$

Para este Hamiltoniano se obtiene la ecuación diferencial de segundo orden:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3)$$

donde  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  es la frecuencia natural del sistema, con la ya conocida solución:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (4)$$

donde  $A$  es la amplitud de movimiento y  $\phi$  es el desfase para el tiempo inicial.

De acuerdo a lo observado en la figura [1], el comportamiento es el que usualmente se encuentra en un sistema masa-resorte sin amortiguamiento ni fuerzas impulsoras. Además, se observa que los dos osciladores (que solamente difieren en sus posiciones iniciales un milímetro) permanecen juntos todo el tiempo, y no hay cambios en el área generada en el espacio de fases.

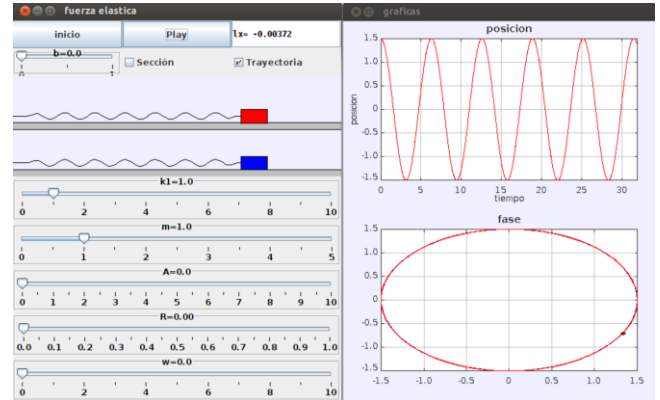


FIGURA 1. Oscilador armónico simple. Se puede observar la posición en función del tiempo y la trayectoria en el espacio fase. Adicionalmente se puede ver los parámetros del movimiento.

## IV. OSCILADOR CUÁRTICO GENERAL

Para un oscilador cuártico el Hamiltoniano es de la forma [5]:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4}\epsilon m x^4, \quad (5)$$

$H$  puede ser escrito como  $H = H_0 + \epsilon U$  con  $H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$  el Hamiltoniano del oscilador armónico simple y  $U = \frac{1}{4}\epsilon m x^4$  la perturbación de cuarto orden. Este Hamiltoniano permite obtener la ecuación diferencial (1), cuya solución aplicando teoría de perturbaciones es de la forma:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t). \quad (6)$$

Para obtener la ecuación diferencial de movimiento se emplea una de las ecuaciones de movimiento de Hamilton  $\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial x}$ :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = 0. \quad (7)$$

Asumiendo que esta ecuación se cumple para cada potencia de  $\epsilon$  se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\ddot{x}_0 + \omega_0^2 x_0 = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega_0 x_1 = -x_0^3, \quad (9)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0 x_2 = -3x_0^2 x_1, \quad (10)$$

las cuales representan un conjunto infinito de ecuaciones diferenciales de segundo orden acopladas. Se toman las siguientes condiciones iniciales:

$$x_0(0)=a; x_k(0) = 0; \dot{x}_k(0) = 0. \quad (11)$$

La solución a orden cero es:

$$x_0(t) = a \cos(\omega t). \quad (12)$$

Usando este resultado, lo usamos en la ecuación (6) a primer orden tenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 &= -a^3 \cos^3(\omega_0 t) \\ &= \frac{-3}{4} a^3 \cos(\omega_0 t) - \frac{1}{4} a^3 \cos(3\omega_0 t). \end{aligned} \quad (13)$$

Para resolver (10) se propone una solución de la forma:

$$x(t) = (A+Bt)e^{i\omega_0 t} + (C+Dt)e^{3i\omega_0 t}. \quad (14)$$

De la cual, resolviendo para la parte  $\omega_0 t$  se obtiene el valor de  $B$ .

$$B = \frac{-3a^3}{8i\omega_0}.$$

con lo que  $x(t)$ :

$$x(t) = \frac{-3a^3 t}{8\omega_0} \sin(\omega_0 t). \quad (15)$$

Para  $3\omega_0 t$ :

$$C = \frac{-a^3}{32\omega_0^2}.$$

Con lo que:

$$x(t) = \frac{-a^3}{32\omega_0} \cos(3\omega_0 t). \quad (16)$$

Igualando para  $\omega t$  y  $3\omega_0 t$  se llega finalmente a la solución de (9) es:

$$x(t) = \frac{a^3}{8\omega_0^2} \left( 3\omega_0 t \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{4} (\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)) \right). \quad (17)$$

Esta solución presenta un inconveniente debido a la dependencia lineal que tiene con el tiempo, ya que la amplitud de movimiento crece indefinidamente sin estar acotada. Pero en base a lo que se establece con el Hamiltoniano, el movimiento de la partícula se encuentra restringido, por lo que la solución obtenida anteriormente no representa el caso físico real.

En el caso de la figura [2], se puede ver que, tanto la amplitud de oscilación, como la velocidad de los dos cuerpos aumenta indefinidamente, por lo que existe un problema con la aproximación planteada para este caso, en el cual se colocaron únicamente expansiones de la posición  $x(t)$ . Por tal razón, se debe tener en cuenta que el factor

perturbativo:

$$\frac{-a^3(3\cos(3\omega t) + \cos(\omega t))}{4},$$

debe ir acompañado de un factor  $\epsilon$  tal que  $\epsilon \ll 1$ . Los resultados para amplitudes muy pequeñas o multiplicados por un factor  $\epsilon$  se ven en la figura [3].

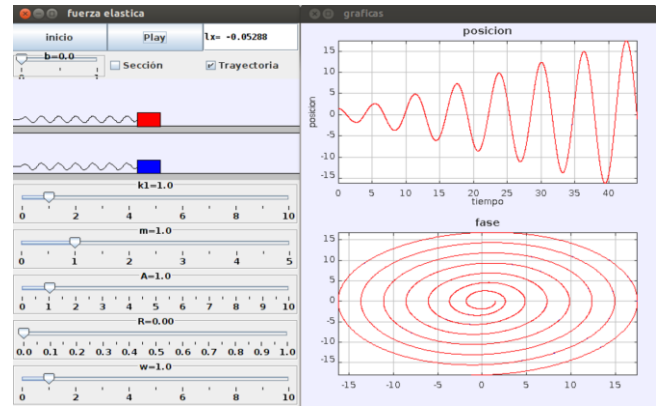


FIGURA 2. Oscilador cuártico con divergencias, la energía en este caso no está acotada y no representa un caso físico para esta solución.

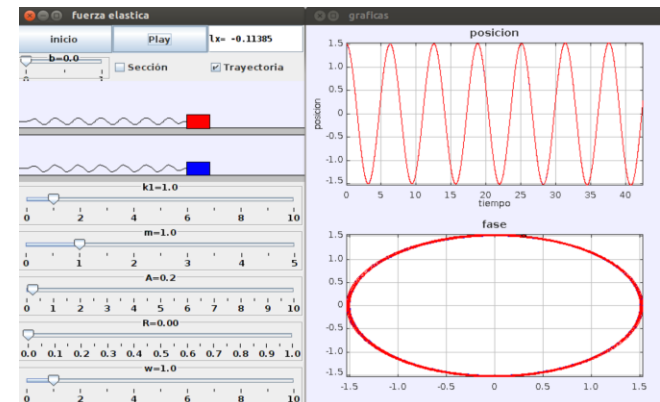


FIGURA 3. Oscilador cuártico sin divergencias, caso físico.

Analíticamente, una forma de solucionar este inconveniente es expresando la dependencia de  $\epsilon$  con la frecuencia, como una serie de potencias adicional a lo que expresa en la expansión de la ecuación (5):

$$\omega = \omega_0 + \epsilon \omega_1 + \epsilon^2 \omega_2 + \dots \quad (18)$$

Ahora la solución es de la forma  $x(\omega t)$  y sustituyendo las derivadas de  $t$  por  $\tau = \omega t$  se tiene:

$$\omega^2 x'' = \omega_0^2 x'' + \epsilon \omega_1^2 x'' + \epsilon^2 \omega_2^2 x'' + \dots \quad (19)$$

Al igual que en el caso anterior se obtiene un conjunto de ecuaciones diferenciales a orden cero y primer orden:

$$\omega_0^2(x_0'' + x_0) = 0, \quad (20)$$

$$\omega_0^2(x_1'' + x_1) = -x_0^3 - 2\omega_0\omega_1x_0'' \quad (21)$$

Empleando la solución a orden cero, se tiene a primer orden:

$$\omega_0^2(x_1'' + x_1) = \left(2\omega_0\omega_1 - \frac{3}{4}a^3\cos(\tau)\right) - \frac{1}{4}a^3\cos(3\tau), \quad (22)$$

El término de impulso se puede eliminar escogiendo:

$$\omega_1 = \frac{3a^3}{8\omega_0}, \quad (23)$$

de tal forma que la solución es parecida a la que se obtuvo para (9):

$$x_1(t) = \frac{-a^3}{32\omega_0^2}(\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)). \quad (24)$$

De este modo, la solución a primer orden  $\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1$  para el oscilador cuártico es:

$$x(t) \approx \text{acos}\left(\left(\omega_0 + \epsilon\frac{3a^2}{8\omega_0}\right)t\right) - \epsilon\frac{a^2}{32\omega_0^2}(\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)). \quad (25)$$

Esta solución difiere de la solución del oscilador armónico simple al oscilar con la combinación dos frecuencias  $\omega$  y  $3\omega$ . Así mismo la frecuencia  $\omega_1$  depende de la amplitud de oscilación y del parámetro  $\epsilon$  cuya característica es esencial de los osciladores no lineales.

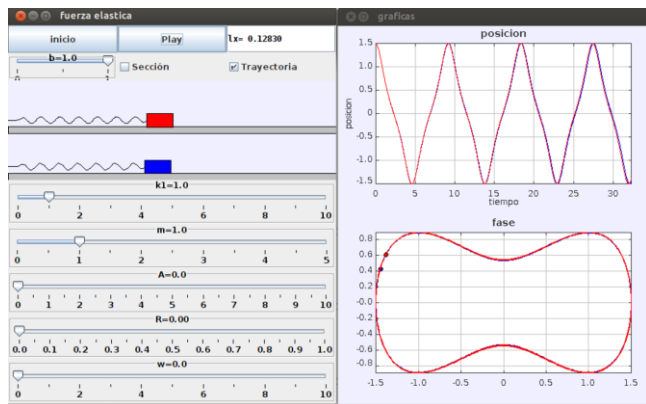


FIGURA 4. Oscilador cuártico “simple” sin amortiguación ni términos de impulso.

En la figura [4], se realiza una simulación del oscilador de Duffing (oscilador cuártico), resolviendo el problema numéricamente y apoyándonos en dichos resultados para poder describir, cuantitativa y cualitativamente el problema con las condiciones iniciales dadas.

#### IV. OSCILADOR CUÁRTICO CON AMORTIGUAMIENTO

La ecuación de movimiento, donde solamente se tiene en cuenta el amortiguamiento, es dada por [6]:

$$\ddot{x} + R\dot{x} + \omega_0^2x + \epsilon x^3 = 0. \quad (26)$$

De esta gráfica, se tienen en cuenta varias cuestiones, pues el punto en el cual se detienen el movimiento, no es  $x=0$  sino que se encuentra un poco más hacia alguno de los lados (específicamente en este caso  $x(t) = 1$ ). Además, el diagrama de fases y la trayectoria tienen un comportamiento diferente al oscilador armónico amortiguado.

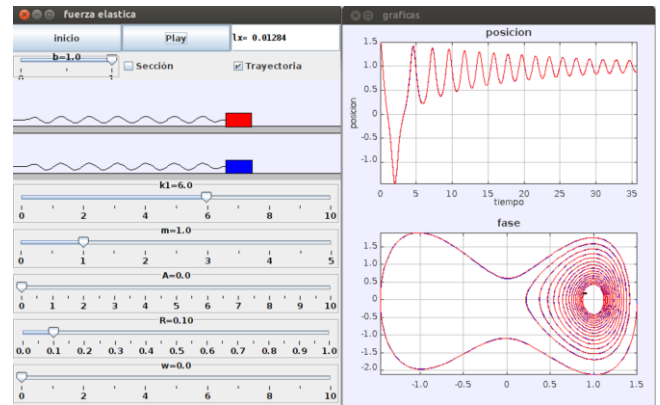


FIGURA 5. Oscilador cuártico amortiguado, es interesante visualizar (y de gran valor cualitativo) el comportamiento sin necesidad de encontrar ni la solución exacta ni el cálculo perturbativo.

#### IV. OSCILADOR CUÁRTICO CON FORZAMIENTO

En este caso la ecuación de movimiento toma la forma:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + \epsilon x^3 = \text{acos}(\omega t). \quad (27)$$

Aplicando teoría de perturbaciones se introduce una variable auxiliar  $\alpha$  tal que la solución para  $x$  y la variable de fase  $\delta$  se pueden escribir como:

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots \quad (28)$$

$$\delta(\alpha) = \delta_0 + \alpha\delta_1 + \alpha\delta_2 + \dots \quad (29)$$

Considerando en la ecuación (1) el factor de amortiguamiento ( $R=0$ ), se puede escribir:

$$\ddot{x} + \omega_0^2x + \epsilon x^3 = \text{acos}(\omega t),$$

$$\ddot{x} = \text{acos}(\omega t) - \omega_0^2x - \epsilon x^3,$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2)x - \epsilon x^3 + a \cos(\omega t). \quad (30)$$

Realizando un cambio de variable de la forma:  $\tau = \omega t - \delta(\alpha)$  tal que:

$$\omega^2 \left( \frac{\ddot{x}}{\omega^2} + x \right) = \alpha (\omega^2 - \omega_0^2) x - \alpha \epsilon x^3 + \alpha a \cos(\tau) + \delta \alpha.$$

Para obtener

$$\ddot{x} + x = \alpha \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) x - \alpha \frac{\epsilon}{\omega^2} x^3 + \alpha \frac{a}{\omega^2} \cos(\tau + \delta(\alpha)). \quad (31)$$

A partir de esta ecuación se puede identificar los términos seculares asociados a la fuerza impulsora periódica de tal forma que se puedan eliminar por la elección de una variable arbitraria.

Realizando la correspondiente expansión del parámetro auxiliar  $\alpha$  se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para cada uno de los órdenes:

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (32)$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) x_0 - \frac{1}{\omega^2} (\epsilon x_0^3 - a \cos(\tau + \delta_0)), \quad (33)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) x_1 - \frac{1}{\omega^2} (3\epsilon x_0^2 x_1 - \delta_1 \sin(\tau + \delta_0)). \quad (34)$$

La ecuación (32) tiene como solución:

$$x_0 = A_1 \cos(\tau).$$

Insertando este resultado al momento de expandir el lado derecho de (33) se obtiene:

$$(\omega^2 - \omega_0^2) A_1 - \frac{3}{4} \epsilon A_1^3 + a = 0. \quad (35)$$

Así para la ecuación  $x_1$ :

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -\epsilon 4 \omega^2 A_1^3 \cos(3\tau). \quad (36)$$

Para solucionar esta ecuación se propone una solución de la forma [7]:

$$x(\tau) = (A + B\tau)e^{3i\tau}.$$

Finalmente, la solución para el orden más bajo es:

$$x_1(\tau) = \frac{1}{32} \epsilon A_1^3 \cos(3\tau) + b_1 \cos(\tau). \quad (37)$$

Esto significa que el método perturbativo aplicado, es un método general que se puede aplicar a cualquier clase de oscilador no lineal para una frecuencia dada.

Se tiene un comportamiento no lineal como se puede ver tanto en la visualización de la trayectoria, como en el diagrama de fases, pero esto no implica que las trayectorias de las dos masas se hayan alejado, sino que presentan ambas el mismo comportamiento, cabe aclarar que el valor del a amplitud de la fuerza impulsora “a” en la simulación

esta expresado por el valor “A” figura [6].

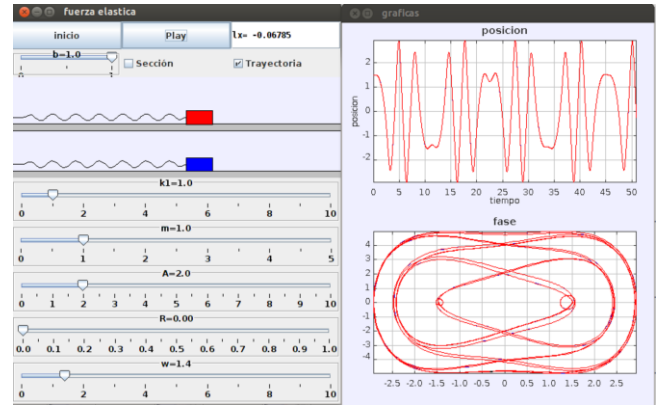


FIGURA 6. Oscilador cuártico forzado.

#### IV. OSCILADOR CUÁRTICO CON AMORTIGUAMIENTO Y FUERZA IMPULSORA

En este caso la ecuación de movimiento, considerando una fuerza impulsora y un factor de amortiguamiento  $R$  es:

$$\ddot{x} + R\dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon x^3 = a \cos(\omega t). \quad (38)$$

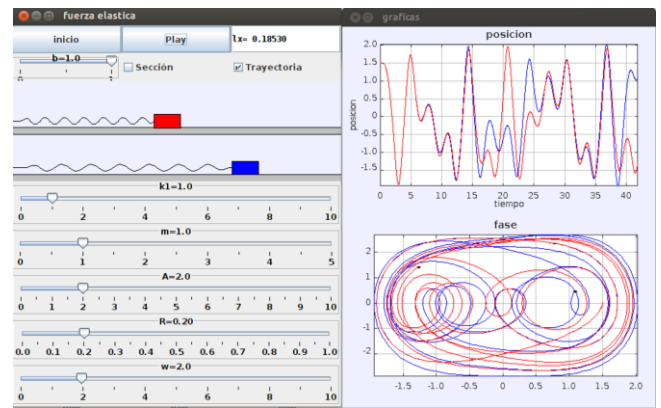


FIGURA 7. Oscilador cuártico con amortiguamiento y forzamiento.

Finalmente, en esta última figura existe una combinación de parámetros que permiten observar, como las trayectorias se separan, y tienen comportamientos distintos, aun si difieren sus condiciones iniciales en un milímetro, en este caso se puede brindar una visualización cualitativa de sistemas dinámicos que tienden al caos dependiendo de la combinación de parámetros del sistema con las condiciones iniciales.

#### IV. CONCLUSIONES

Se puede observar a lo largo del trabajo como una simple

perturbación en el oscilador armónico simple nos lleva a sistemas tan complejos que pueden salirse del límite físico, lo cual indica que las herramientas computacionales y numéricas son esenciales para detectar dichas incompatibilidades que se salen de la realidad.

Ya que no solo en este caso sino muchos sistemas físicos están descritos por modelos matemáticos que en general no son lineales, entonces el análisis perturbativo es una poderosa herramienta para tratar analíticamente problemas en los cuales las soluciones exactas no se pueden obtener por métodos usuales.

Este trabajo es un primer acercamiento para estudiantes que se inician en el estudio de teoría de perturbaciones, que les permite observar bajo ciertas combinaciones de parámetros y condiciones iniciales, que el sistema tiende al caos. Entonces además de mostrar las distintas facetas del oscilador cuártico para motivar el estudio de sistemas, no lineales a través de la teoría de perturbaciones, se muestra a los alumnos una herramienta computacional práctica para afrontar dichos sistemas y profundizar en los mismos.

## AGRADECIMIENTOS

Se agradece al departamento de física de la universidad Distrital por el apoyo prestado para la realización de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Esquembre, F., *Creación de simulaciones interactivas en java, Aplicación a la enseñanza de la física*, (Pearson Prentice Hall, México, 2005).
- [2] Campos D., Isaza J., *Prolegómenos a los sistemas dinámicos*, (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2005).
- [3] Goldstein H., Pool C., Safko J., *Classical mechanics*. Third edition, (Addison-Wesley, New York, 2002).
- [4] Hamesi S. H., Ganji D. D., *Dynamics and Vibrations Progress in Nonlinear analysis*. Second Edition, (Springer, Netherlands, 2014).
- [5] Saletan E. J., José J. V., *Classical Dynamics, Contemporary approach*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [6] Hand L. N. y Finch J. D. *Analytical Mechanics*, (Cambridge University press, Cambridge, 1998).
- [7] Boccara N., *Essentials of Mathematica with application to Mathematics and Physics*, (Springer, New York, 2007)