

# Tensor de inércia de massa de um corpo rígido: teoria e prática



ISSN 1870-9095

**Bogos Nubar Sismanoglu<sup>1</sup>, Eduardo Cezar Barbosa de Barros Aragão<sup>2</sup>, Bogos Bedik Sismanoglu<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Departamento de Física, Laboratório de Mecânica, Laboratório de Óptica e Espectroscopia, São José dos Campos, São Paulo*

<sup>2</sup>*SENAI CIMATEC, Salvador, Bahia*

<sup>3</sup>*Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais*

**E-mail:** bogos@ita.br

(Recibido el 15 de febrero de 2021, aceptado en 25 de mayo de 2021)

## Resumo

No estudo do movimento de rotação e translação do corpo rígido, as leis de conservação da energia mecânica, momento linear e momento angular geralmente estão associadas a uma grandeza importante chamada de momento de inércia de massa. O momento de inércia de massa está relacionado à inércia à rotação do corpo e calculada para o caso em que o corpo gira em torno de um eixo fixo pré determinado. Para o caso em que a rotação se processa em eixos aleatórios, sem serem eixos principais de inércia, o tensor de inércia de massa é o mais apropriado para o estudo cinemático e dinâmico do movimento rotacional. No movimento geral do corpo rígido no espaço tridimensional, o tensor de inércia de massa é mais apropriado para uso pois este possibilita a obtenção de todas as grandezas físicas associadas ao movimento, como momento angular, torque das forças externas e energia cinética rotacional. Diversos possíveis experimentos são elencados neste trabalho com o objetivo de se estudar teoricamente e experimentalmente o movimento rotacional. Muitos dos experimentos foram tratados teoricamente e experimentalmente pelo nosso grupo de pesquisa e apresentados na plataforma de compartilhamento de vídeos youtube, na página <https://www.youtube.com/channel/UC7m8xE0RUPForkdmit9ZQjw/playlists>, facilitando muito o acompanhamento da teoria e dos experimentos propostos. Alguns experimentos não muito usuais mas que permitem o aprofundamento da aplicação teórica também são apresentados, como o do Disco de Euler e o do movimento reverso do dispositivo sólido semielipsoidal assimétrico chamado de Rattleback. A teoria do tensor de inércia de massa é apresentado e algumas aplicações importantes são feitas.

**Palavras chave:** Experimentos, Física, Mecânica, Inércia rotacional.

## Abstract

In the study of both rotation and translation movement of the rigid body, the laws of conservation of mechanical energy, linear moment and angular moment are usually associated with an important quantity called mass moment of inertia. The moment of mass inertia is related to the inertia to the rotation of the body and calculated for the case in which the body rotates around a predetermined fixed axis. For the case in which the rotation takes place on random axes, without being the main axes of inertia, the mass inertia tensor is the most appropriate for the kinematic and dynamic study of rotational movement. In the general movement of the rigid body in three-dimensional space, the mass inertia tensor is more appropriate for use because it makes it possible to obtain all the physical quantities associated with the movement, such as angular momentum, torque of external forces and rotational kinetic energy. Several possible experiments are listed in this work with the aim of studying theoretically and experimentally the rotational movement. Many of the experiments were treated theoretically and experimentally by our research group and presented on the YouTube video sharing platform, on the page <https://www.youtube.com/channel/UC7m8xE0RUPForkdmit9ZQjw/playlists>, making it much easier to follow the theory and the experiments proposed. Some experiments that are not very common but that allow the deepening of the theoretical application are also presented, such as that of Euler's Disc and that of the reverse movement of the solid asymmetric semiellipsoidal device called Rattleback. The theory of the mass inertia tensor is presented and some important applications are made.

**Keywords:** Experiments, Physics, Mechanics, Rotational inertia.

## I. INTRODUÇÃO

No estudo da mecânica do corpo rígido, nos enfoques cinemáticos e dinâmicos, com ênfase à rotação em torno de eixos fixos e móveis, é de fundamental importância a implementação de experimentos práticos em laboratório apropriado para o melhor acompanhamento e entendimento

da teoria abordada. Muitas vezes as instituições de ensino não possuem laboratórios e equipamentos apropriados ao desenvolvimento de bons experimentos capazes de propiciar ao corpo discente a experimentação necessária à sua capacitação profissional. Desta forma, experimentos virtuais são cada vez mais procurados pelos professores e alunos por ser uma ferramenta facilmente encontrada na internet. As

instituições de ensino estão cada vez mais propensas a adotar o ensino virtual como uma solução mais econômica e prática para solucionar os problemas encontrados nos cursos presenciais, como a falta de profissionais capacitados e os elevados custos financeiros. O relativamente baixo custo dos dispositivos móveis como os smartphones propiciou a expansão na utilização de técnicas de filmagens para serem utilizadas no ensino de física e ciências, principalmente nas aulas de laboratório [1, 2]. Nosso grupo de ensino e pesquisa vem desenvolver aulas e experimentos virtuais e difundindo-os através da rede de compartilhamento de vídeos do youtube [3], uma ferramenta gratuita e facilmente acessada através de smartphones [4]. A facilidade de uso destas ferramentas permite a qualquer um o compartilhamento de vídeos, desde que siga as políticas internas e regulamentos da empresa.

Neste trabalho iremos abordar teoricamente o tema tensor de inércia de massa, que é fundamental para o estudo da cinemática e da dinâmica do movimento de rotação do corpo rígido. O momento de inércia de um corpo que gira em torno de um eixo fixo pode facilmente ser tratado com a definição simples do momento de inércia de massa, desde que o eixo de rotação passe pelo centro de massa e que seja um eixo principal de inércia de massa. Por exemplo, a rotação do eixo de um motor, que produz um torque mecânico, pode estar ligada a um corpo rígido, como um disco de metal que fica fortemente atado a este eixo. Se o eixo passa pelo centro de massa do disco e é o eixo axissimétrico do disco (eixo  $z$  principal de inércia), então o momento de inércia do disco, dado por  $I_z = MR^2/2$ , pode ser associado ao torque e ao momento angular de rotação. Por outro lado, se o disco está inclinado de um determinado ângulo  $\alpha$ , e o eixo passando ou não pelo CM do disco (centro geométrico), observamos que este eixo não será mais um eixo principal de inércia de massa e, portanto, neste caso, a aplicação da matriz do tensor de inércia facilita a determinação do momento angular e do torque necessário para implementar uma rotação com velocidade angular  $\vec{\omega}$  [5, 6]. Para que um corpo gire em estado de equilíbrio estático e dinâmico, deveremos ter obrigatoriamente o eixo de rotação como eixo principal de inércia e que também o CM esteja neste eixo. Quando isto ocorre, os vetores velocidade angular, momento angular e torque externo são todos colineares (na direção do eixo principal de inércia) e caso haja variação da velocidade angular, ou seja, estar presente a aceleração angular, então a variação do momento angular ocorre também na direção deste eixo. Portanto, não há variação em direção do vetor momento angular e sim, apenas variação em módulo.

Muitos experimentos foram retratados neste trabalho e muitos outros tantos foram resolvidos teoricamente, ressaltando o enfoque experimental intrínseco em alguns casos específicos, como por exemplo a obtenção do momento de inércia de um corpo rígido, numa determinada direção de rotação, através de um experimento de oscilação. Neste caso, o momento de inércia é determinado através da medição do período de oscilação do corpo em torno de um eixo fixo.

Alguns experimentos com corpos rígidos foram apresentados no vídeo divulgado na página do youtube, [https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PL-Eic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9slYy](https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PL-Eic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9slYy), e nas páginas

seguintes da mesma playlist, percorremos as teorias necessárias para solucionar estes experimentos utilizando as leis de conservação e as teorias que envolvem também a rotação e a oscilação de corpos rígidos.

## II. INTRODUÇÃO TEÓRICA E ABORDAGEM EXPERIMENTAL

Antes de definir tensores de inércia de massa, vamos lembrar o conceito de momento de inércia de massa para o caso mais simples de um ponto material que gira em torno de um eixo fixo. O momento de inércia na sua concepção mais importante retrata a medida da resistência do sistema mecânico à aceleração angular em torno de um eixo. Em última análise é uma medida da inércia rotacional, que é expressa pela equação  $I_z = Mr^2$ . Esta é a definição de momento de inércia de massa para um ponto material de massa  $M$  que gira em torno de um eixo fixo localizado a uma distância  $r$  de  $M$ . Para uma distribuição discreta de um conjunto de massas  $m_i$ , podemos somar a contribuição para cada massa e escrever então  $I_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$  e para uma distribuição contínua de massa, como a de um corpo rígido por exemplo,  $I_z = \int r^2 dm$  onde  $dm$  é o elemento de massa que pode ser escrito como  $dm = \rho dV$ , sendo  $\rho$  a massa específica no volume  $dV$  do corpo. A unidade de  $I$  é  $\text{kgm}^2$  no SI. Por exemplo, para uma moeda de massa  $M$  e raio  $R$  (disco homogêneo), os eixos principais de inércia para um sistema de eixos triortogonais  $(x, y, z)$  com origem no seu centro de massa CM tem momento de inércia de massa iguais a  $I_x = I_y = 0,25MR^2 = 0,5I_z$ . Por tanto, com relação ao movimento de rotação, é mais fácil girar a moeda em pé na vertical do que deitado em torno de um eixo que passa pelo centro de massa e é perpendicular à sua superfície. Observa-se neste exemplo que o disco possui simetria na direção destes 3 eixos de inércia e, portanto, dizemos que estes são os 3 eixos principais de inércia do corpo. Isto significa que ao rodarmos o corpo em torno destes eixos, o momento angular gerado,  $\vec{H}$ , estará na direção do vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$  e, portanto, a taxa de variação do momento angular,  $d\vec{H}/dt$ , se houver, estará apontando também nesta direção. O momento da força externa resultante é igual à taxa de variação do momento angular. Como estes eixos principais passam pelo centro de massa G do corpo (centro geométrico do disco), podemos também dizer que a rotação se processa em equilíbrio estático. Assim, além deste temos também o equilíbrio dinâmico, pois  $\vec{H}$  e  $\vec{\omega}$  apontam na mesma direção. Devemos lembrar que a equação cinemática básica regula a taxa de variação de um vetor num sistema girante, pois

$$\left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{móvel}} = \left(\frac{d\vec{H}}{dt}\right)_{\text{fixo}} + \vec{\omega} \times \vec{H}, \quad (1)$$

onde a taxa de variação de um vetor no sistema móvel, que gira com o corpo, é igual à taxa de variação deste vetor no sistema fixo (inercial) adicionado ao produto vetorial entre a velocidade angular do sistema girante e o próprio vetor. Vemos na Eq. 1 que se há equilíbrio dinâmico na rotação do

corpo, então o produto veorial é nulo já que  $\vec{H}$  e  $\vec{\omega}$  são colineares e, portanto, só ha possibilidade de incremento em  $\vec{H}$  através da variação em seu módulo, não em direção. Isto não ocorre no movimento giroscópico de um pião, pois o torque da força peso (torque externo) aponta para uma direção perpendicular à direção do momento angular do corpo, fazendo com que a taxa de variação de  $\vec{H}$  seja na direção do torque, gerando o movimento de precessão em torno de um eixo vertical.

Seja agora um corpo rígido com eixos principais de inércia  $I_x, I_y$  e  $I_z$ , nas direções principais de inércia  $x, y$  e  $z$ . O tensor de inércia para eixos distintos destes, para outras direções não principais de inércia, é representado por uma matrix 3 x 3 ortogonal onde os elementos de inércia são compostos por momentos de inércia e produtos de inércia para esta nova base adotada. Para um ponto P qualquer fixo no corpo, podemos escrever

$$\frac{d\vec{H}_P}{dt} = \vec{M}_P, \quad (2)$$

e para a k-ésima partícula tem-se

$$\vec{H} = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r} \times \vec{v}_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_k), \quad (3)$$

onde  $\vec{H}$  é função de  $\vec{\omega}$ . Logo,  $\vec{H}$  é uma função linear vetorial pois  $\vec{H}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) = \vec{H}(\vec{\omega}_1) + \vec{H}(\vec{\omega}_2)$ . usando a propriedade dos produtos vetoriais

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (4)$$

a Eq.1 fica

$$\vec{H} = \sum_{k=1}^n [m_k r_k^2 \vec{\omega} - m_k \vec{r}_k (\vec{r}_k \cdot \vec{\omega})] = (\sum_{k=1}^n m_k r_k^2) \vec{\omega} - (\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k \vec{r}_k) \cdot \vec{\omega}, \quad (5)$$

onde  $\vec{r}_k \vec{r}_k$  é uma justaposição de 2 vetores e representa no  $\mathfrak{R}^3$  uma matrix 3 x 3, sendo chamada de díada ou tensor de 2ª ordem:

$$\vec{r}_k \vec{r}_k = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Observa-se na matrix em (6) que os elementos da diagonal principal representam os momentos principais de inércia e os outros 6 elementos são os produtos de inércia. Essa matrix é ortogonal pois os termos  $xy$  e  $yx$  são idênticos, assim como ocorre com os outros não diagonais.

Se um corpo rígido gira em equilíbrio estático e dinâmico em torno de um eixo fixo principal de inércia,  $z$ , ou seja, do eixo que passa pelo centro de massa e que é um eixo de simetria do corpo, então podemos dizer simplesmente que  $\vec{H}_z = I_z \vec{\omega}_z$ , o mesmo valendo para os outros 2 eixos ortogonais a  $z$ . Como exemplo, o eixo da roda de um carro é um caso de eixo principal de inércia quando a roda está

*Tensor de inércia de massa de um corpo rígido: teoria e prática*

balanceada. Ela roda em equilíbrio estático (o eixo passa pelo CM da roda) e equilíbrio dinâmico (o vetor momento angular é paralelo ao vetor velocidade angular).

Para eixos de não equilíbrio, o tensor de inércia, para uma distribuição discreta de massa, pode ser escrito como

$$\vec{I}_{ij} = \sum_{k=1}^n m_k [r^2 \delta_{ij} - x_i^k x_j^k], \quad (7)$$

com  $H_i = I_{ij} \omega_j$ . Observa-se que no caso geral, uma componente do vetor momento angular contém 3 elementos distintos de momento e produto de inércia. Para um corpo com distribuição contínua de massa

$$\vec{I}_{ij} = \int_V (r^2 \delta_{ij} - x_i x_j) \rho dV, \quad (8)$$

onde  $\rho dV$  é o elemento de massa. Deste modo, podemos escrever as componentes do momento angular para a base adotada como

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix}}_{\vec{I}_{ij}} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Nesta Eq. 9,  $\vec{I}_{ij}$  apresenta os termos  $I_{ij} = I_{ji}$  e os elementos  $I_{ij}$  para  $i \neq j$  são os produtos de inércia. Na presença dos produtos de inércia, podemos dizer que a base escolhida não é de eixos principais de inércia. Logo, se o corpo gira ao redor de eixos nesta base adotada, necessariamente o vetor momento angular não está alinhado com o vetor velocidade angular resultante e, portanto, um torque externo é necessário para movimentar o corpo em estado de não-equilíbrio dinâmico. Sempre podemos diagonalizar a matrix da Eq. 8 para obter os eixos de inércia, que são os auto vetores desta diagonalização. Seja  $R$  a matrix de rotação,  $R \in \mathfrak{R}^3$ , podemos obter o tensor  $\vec{I}^*$  para uma nova base  $(x^*, y^*, z^*)$  através da equação  $\vec{I}^* = R \vec{I} R^t$ , onde  $R^t$  é a transposta de  $R$  e  $\vec{I}$  é a matrix na base  $(x, y, z)$ . A esfera e o cubo, por exemplo, são sólidos que tem momentos principais de inércia  $I_x = I_y = I_z$ , todos passando pelo CM com o triedro  $(x, y, z)$  tendo infinitas combinações triortogonais para qualquer direção que se queira. Os produtos de inércia para estes sólidos são todos nulos. Por isso são chamados de "piões esféricos".

Um corpo rígido em rotação possui uma grandeza escalar associada à velocidade angular conhecida por energia cinética rotacional,  $T_{rot}$ . Se a k-ésima partícula do corpo possui velocidade  $\vec{v}_k$ , massa  $m_k$  e vetor posição  $\vec{r}_k$  em relação a um ponto do corpo, podemos escrever

$$T_{rot} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \cdot \vec{v}_k) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \vec{L}_k = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{H}, \quad (10)$$

onde  $\vec{L}_k$  é o vetor momento linear. Mas  $\vec{H} = \vec{I} \vec{\omega}$  e, finalmente,  $T = 0,5 \vec{\omega} \vec{I} \vec{\omega}$ , e escrevendo em termos das componentes, temos

$$T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2 + I_{xy}\omega_x\omega_y + I_{yz}\omega_y\omega_z + I_{xz}\omega_x\omega_z, \quad (11)$$

que é uma família de superfícies quadráticas no espaço das velocidades angulares, pois a energia é positiva. Se  $(x, y, z)$  são eixos principais de inércia, os termos dos produtos de inércia não aparecem nesta equação e a elipsóide de inércia, neste caso, será

$$T = \frac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_z\omega_z^2. \quad (12)$$

Esta equação da energia pode ser empregada em muitos experimentos a fim de se determinar os momentos de inércia de um corpo. Basta colocar o corpo em rotação em torno de um eixo ligado a um sistema mecânico onde o teorema da energia cinética pode ser empregado, considerando-se a conservação da energia mecânica.

Um fato importante a se comentar com relação à energia cinética de rotação ocorreu com o satélite Explorer I-lançado pela NASA em 31/01/1958, durante a agitada corrida espacial com a ex URSS, que 4 meses antes havia lançado com êxito o satélite de formato esférico Sputnik I (observa-se que o formato esférico, como havíamos afirmado antes, tem rotação do tipo "pião esférico"), enquanto que o Explorer tinha formato cilíndrico - onde este foi lançado girando em torno de seu eixo principal de inércia  $z$ , eixo este axissimétrico e com velocidade angular constante  $\omega_z$  e, portanto, paralelo ao vetor momento angular  $H_z = I_z\omega_z$ .  $H_z$  é uma constante de movimento pois não há torques agindo no CM (a taxa de variação do momento angular é igual ao torque externo. Se este é nulo, o momento angular é constante). Porém, devido à presença de antenas e xicotes externos, feitos de fibra de carbono, a energia cinética rotacional do satélite começou a diminuir numa taxa constante. Como vimos, neste caso tem-se  $T = \frac{1}{2}I_z\omega_z^2$ , portanto, gradativamente a velocidade angular em  $z$  começa a diminuir também. Porém, como  $H_z$  deve permanecer constante, o que ocorre é que a rotação do satélite começa a migrar para um eixo ortogonal a  $z$  com momento de inércia maior, ou seja, para o eixo  $x$  por exemplo, para espanto dos engenheiros observadores na Terra na base de Houston. Hoje, esse fenômeno é conhecido pelos estudiosos aeroespaciais mas durante a corrida espacial ficou despercebido pelos engenheiros da NASA. Isto mostra que a experimentação e a prática talvez seja a única maneira de se ter uma aprendizagem mais completa das leis e fenômenos estudados pela física.

Em muitos casos é interessante obter o tensor momento de inércia de massa em relação ao centro de massa do corpo rígido. A partir daí, através do Teorema de Huygens Steiner podemos obter o tensor equivalente para qualquer base pertencente ou não a este corpo. Este teorema é análogo ao Teorema dos eixos paralelos de Steiner. Seja então um eixo  $\tau$  passando pelo CM do corpo e outro  $\tau^*$  paralelo a  $\tau$ . Seja  $\vec{R}_O$  vetor posição do CM em relação a um ponto O em  $\tau$ . De acordo com o teorema de Huygens Steiner [5]

$$\vec{I}_O = \vec{I}_{CM} + M(R^2\vec{1} - \vec{R}\vec{R}). \quad (13)$$

onde  $\vec{1}$  é o tensor unitário e  $M$  é a massa do corpo.

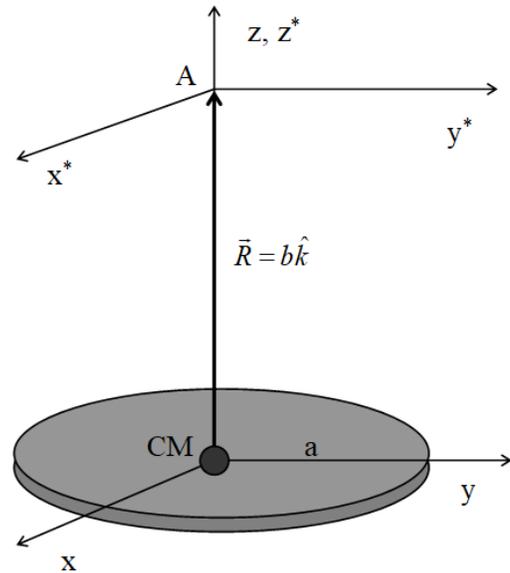


FIGURA 1. Disco homogêneo no plano horizontal.

Por exemplo, para uma moeda (disco homogêneo) de massa  $M$  e raio  $a$ , os eixos principais de inércia para um sistema que passa pelo CM são mostrados na Fig. 1 e o tensor de inércia para esta base é dada por

$$I_{CM}^{xyz} = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

com  $I_x = I_y = 0,25MR^2 = 0,5I_z$ . Para obter o tensor de inércia de massa em relação à base com asterisco (Fig. 1), no ponto A, paralela à base  $(x, y, z)$ , podemos usar o Teorema. Assim

$$\vec{I}_A = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + Mb^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - Mb^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

onde substituímos  $\vec{R}\vec{R} = b^2\hat{k}\hat{k}$  (ver Fig. 2).

Por tanto, o tensor de inércia no ponto A, obtida a partir da translação da base a partir do CM, será

$$\vec{I}_A = \frac{M}{4} \begin{pmatrix} a^2 + 4b^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + 4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Observa-se na Eq. 15 que o elemento em  $z$  na diagonal principal não sofreu alteração. Já os elementos em  $x$  e  $y$  sofreram um aumento adicional de  $Mb^2$ .

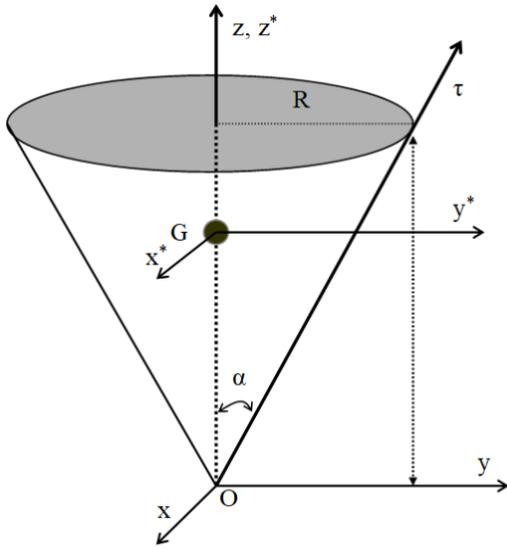


FIGURA 2. Cone sólido.

Podemos através de um experimento de oscilação obter as componentes em  $x$  e  $y$  do momento de inércia e também a componente em  $z$  (na página do nosso grupo no youtube em <https://www.youtube.com/channel/UC7m8xEORUPForkdmi t9ZQjw/playlists>, mostramos como efetuar o experimento de oscilação para obter o momento de inércia).

Outro exemplo seria a obtenção do tensor de inércia de um cone sólido homogêneo de massa  $M$ , altura  $H$ , raio de base circular  $R$  e massa específica  $\rho$  (Fig. 2). O tensor de inércia de massa para o ponto  $O$  com eixos principais de inércia na base ( $x, y, z$ ) pode ser facilmente obtido por integração direta, e seu resultado é

$$\vec{I}_O = \frac{3}{20}M \begin{pmatrix} R^2 + 4H^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 + 4H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2R^2 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

O objetivo agora é obter o tensor de inércia para o CM do sólido, ponto  $G$  na figura. Através da Eq. 13 podemos obter diretamente este tensor. Para finalizar, podemos agora projetar  $\vec{I}_O$  na direção  $\tau$  (ver figura) e obter o momento de inércia nesta direção específica, sendo  $\hat{\tau}$  o versor nesta direção, dado por  $\hat{\tau} = \text{sen}\alpha\hat{j} + \text{cos}\alpha\hat{k}$ . Desta forma, a projeção é escrita como

$$\vec{I}_\tau = \hat{\tau}\vec{I}\hat{\tau}. \quad (16)$$

Pela figura podemos ver que  $R = h(\text{tg}\alpha)$  e a Eq. 16 fornece finalmente

$$\vec{I}_\tau = \begin{pmatrix} 0 & \text{sen}\alpha & \text{cos}\alpha \\ H^2(\text{tg}^2\alpha + 4) & 0 & 0 \\ 0 & H^2(\text{tg}^2\alpha + 4) & 0 \\ 0 & 0 & 2H^2\text{tg}^2\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen}\alpha \\ \text{cos}\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{20}M = 0,15MH^2\text{sen}^2\alpha(6 + \text{tg}^2\alpha). \quad (17)$$



FIGURA 3. Rattleback.

Outro experimento curioso e interessante na sua análise é o dispositivo sólido chamado Rattleback, que consiste numa estrutura semielipsoidal assimétrica e que apresenta movimento reverso ao ser rotacionado numa superfície horizontal lisa. Podemos montar facilmente este experimento com uma colher de aço de cozinha. A Fig. 3 mostra o aparato. Basta entortar o cabo da colher e deixar a estrutura assimétrica, curvando levemente o cabo para o lado, conforme se vê nesta figura. A parte côncava da colher possui 2 raios de curvatura distintos e o ponto de contato com a mesa está um pouco afastado do centro comum na superfície. Quando rodamos a colher no sentido horário, ele gira e depois pára, perdendo por completo sua energia cinética rotacional inicial. Por outro lado, ao rodarmos no sentido anti-horário, o corpo gira, pára, e repentinamente volta em sentido oposto de rotação. À primeira vista o movimento sugere uma violação da conservação do momento angular, o que não é verdade. Muitos trabalhos científicos já foram publicados a fim de explicar este curioso e intrincado movimento rotacional.

Sugerimos aos leitores pesquisar na internet artigos que explicam este movimento complexo. No vídeo [https://www.youtube.com/watch?v=L1RfN0junWw&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9slYy&index=45](https://www.youtube.com/watch?v=L1RfN0junWw&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9slYy&index=45) nosso grupo de pesquisa discute sobre o movimento. Um vídeo no youtube em <https://www.youtube.com/watch?v=69Xm762qE8o> mostra de uma maneira bastante simplificada uma explicação plausível para o movimento reverso deste corpo rígido, através da análise da energia cinética rotacional.

Um experimento muito fácil de fazer é o conhecido Disco de Euler (Fig. 4), que todos já experimentaram na cozinha no dia-a-dia, consistindo de um prato, tampa de panela ou balde com água que ao ser jogado numa pia apresenta movimento de rotação próprio (ou spin) em torno do seu CM associado a outro movimento oscilatório de precessão em torno da vertical.



**FIGURA 4.** Disco em repouso sobre uma mesa horizontal (esquerda) e em rotação rápida. A seta permite verificar a intensidade da velocidade angular de spin do disco.

O objetivo é calcular a velocidade angular de spin do disco (velocidade própria de rotação em torno de seu eixo central) e a velocidade angular de precessão em torno da vertical (ou frequência de vibração ou oscilação do prato). Para facilitar a medição da velocidade angular de spin podemos desenhar uma seta na superfície do prato (ver na Fig. 4) e acompanhar sua revolução. O vídeo do youtube <https://www.youtube.com/watch?v=8pSLffliCk0> mostra de uma maneira muito interessante o movimento de rotação do disco e o cálculo que relaciona as duas rotações observadas. Em vídeos posteriores o mesmo autor faz correções acerca destas deduções, o que mostra a dificuldade na análise do movimento que a princípio parece ser simples. No vídeo [https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PL-Eic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9slYy&index=1](https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PL-Eic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9slYy&index=1) nosso grupo de pesquisa mostra o experimento do disco e elenca um grande número de outros experimentos que envolvem a rotação e oscilação de corpos rígidos.



**FIGURA 5.** Pirâmide equilátera construída com 3 discos idênticos de metal.

Vimos na Fig. 1 como obter o tensor de inércia de um disco homogêneo de raio  $R$  e massa  $M$  em relação a um ponto longe do centro de massa, na direção  $z$  perpendicular à superfície. A Fig. 5 mostra uma montagem onde nós construímos uma

pirâmide equilátera com os 3 discos idênticos. O objetivo agora é obter o tensor de inércia no ápice da pirâmide. Pelo método aditivo, nós obtemos o tensor de inércia para cada disco individualmente, todos em relação ao vértice superior, e somamos para finalizar nosso cálculo.

**(1) BASE**

$$\vec{I}_A = \vec{I}_G + M(\vec{R}\vec{1} - \vec{R}\vec{R})$$

$$\vec{R}\vec{R} = ? = 3a^2 \hat{K}\hat{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} (6a^2)$$

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\vec{I}_G = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I}_A = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**(2) Direita**

$$\vec{I}_A = \vec{I}_{G_2} + M(\vec{R}\vec{1} - \vec{R}\vec{R})$$

$$\vec{R} = 0 \quad \vec{R}\vec{R} = a^2 \hat{y}\hat{y}$$

$$\vec{I}_{G_2} = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**(3) Direita**

$$\vec{I}_A^{(1)} = \vec{R} \vec{I}_{A_{xyy'}} \vec{R}^t$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} \cos 0 & \cos 90 & \cos 180 \\ \cos 90 & \cos 60 & \cos 30 \\ \cos 90 & \cos 30 & \cos 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{I}_A^{(1)} = \frac{Ma^2}{4} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 17/4 & 5\sqrt{3}/4 \\ 0 & 5\sqrt{3}/4 & 9/4 \end{pmatrix}$$

**(3) Esquerda**

$$\vec{I}_A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 17/4 & -5\sqrt{3}/4 \\ 0 & -5\sqrt{3}/4 & 9/4 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

$$\vec{I}_A = \begin{pmatrix} 28 & 0 & 0 \\ 0 & 47/4 & 0 \\ 0 & 0 & 13/2 \end{pmatrix} \frac{Ma^2}{4}$$

a)  $\vec{I}_A \rightarrow \vec{I}_y = ? = \frac{21}{8} Ma^2$

$$\vec{I}_y = \hat{y}' \vec{I}_A \hat{y}'$$

**FIGURA 6.** Cálculo do tensor de inércia no ápice A da pirâmide formada por 3 discos de metal.

Para o disco da base, nós já mostramos na Fig 2 como fazer a translação do tensor de inércia do CM até o ponto A. Para o disco da direita e da esquerda, além de fazer a translação de acordo com a Eq. 13, nós deveremos fazer a rotação dos eixos para a posição análoga ao do obtido para o disco da base. Estes e outros cálculos foram desenvolvidos nos vídeo expostos por nosso grupo no youtube em:

[https://www.youtube.com/watch?v=W5w-hiVBATA&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9sIYy&index=49](https://www.youtube.com/watch?v=W5w-hiVBATA&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9sIYy&index=49)

[https://www.youtube.com/watch?v=Mao4JDjfWq8&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9sIYy&index=50](https://www.youtube.com/watch?v=Mao4JDjfWq8&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9sIYy&index=50)

Na Fig. 6, no topo, obtivemos o tensor de inércia em A através do processo mostrado na Fig. 1; na figura abaixo desta, transladamos o tensor de inércia do CM do disco da direita para este ponto A; na figura logo abaixo desta, fizemos a mudança de base em A através da rotação em torno do eixo  $x$  invariante; por fim, na figura de baixo, repetimos para o disco da esquerda e obtivemos o tensor de inércia de massa resultante através da soma dos 3 resultados anteriormente obtidos. Nesta figura também mostramos como obter o momento de inércia na direção que tangencia a superfície lateral da pirâmide, através da projeção nesta direção do tensor de inércia.

#### IV. CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentamos uma abordagem teórica e experimental para tratar o tema tensor de inércia e suas aplicações para o estudo do movimento de rotação de um corpo rígido. Os vetores momento angular, velocidade angular, aceleração angular e torque da força externa, além das leis de conservação e do tensor de energia rotacional foram abordados de uma maneira tal que a aplicação direta em casos especiais puderam ser feitas a fim de compreender o movimento do corpo ou então, para obter resultados importantes.

Muitos dos experimentos citados neste trabalho se encontram na página do grupo no youtube em

*Tensor de inércia de massa de um corpo rígido: teoria e prática*

[https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE\\_o9sIYy&index=1](https://www.youtube.com/watch?v=52Sp7Q044zg&list=PLEic5MqhRITP3Ao92tTG8ZfnyE_o9sIYy&index=1), e também na página <https://www.youtube.com/channel/UC7m8xE0RUPForkdmi t9ZQjw/playlists> disponibilizamos a teoria completa de corpo rígido para que o interessado possa acompanhar o desenvolvimento teórico com a solução de problemas mais complexos e a informação necessária para a solução de experimentos diferenciados, como o do Disco de Euler e o do Rattleback.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio parcial das agências FAPESP e CNPq sob nº FAPESP/12/13064-4, CNPq/MCTI/SECIS406035/2013-0, CNPq/310419/2012-3DT, CNPq/306095/2013-0 PQ e CAPES//ITA/88881.030340/2013-01 BJT.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Sismanoglu, B. N., Germano, J. S. E., Amorim, J. e Caetano, R., *A utilização da filmadora digital para o estudo do movimento dos corpos*, Revista Brasileira de Ensino de Física **31**, 1501-1 – 1501-7 (2009).
- [2] Sismanoglu, B. N., Caetano, R. F., Germano, J. S. E., Rezende, M. V. O., Hoyer, Y. D., *Dinâmica de massa variável: corrente suspensa na máquina de Atwood*, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 2310-1 – 2310-7 (2011).
- [3] youtube.com, acessado em 08/01/2021.
- [4] Página acessada em 12/04/2021 na youtube em <https://www.youtube.com/channel/UC7m8xE0RUPForkdmi t9ZQjw/playlists>.
- [5] Symon, K. R., *Mecânica*, (Editôra Campus, Rio de Janeiro, 1982).
- [6] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd ed. (Addison-Wesley, Mass., 1980).