

Análisis del tiempo del movimiento de una canica sobre una curva braquistócrona



Alvarez, Erick¹, Reyes, Edgar¹, Sánchez, Diego¹

¹Departamento de Física, Universidad del Valle de Guatemala, 18 avenida 11-95. Ciudad de Guatemala, 01015.

E-mail: alv20900@uvg.edu.gt

(Recibido el 13 de febrero de 2023, aceptado el 9 de mayo de 2023)

Resumen

Una curva braquistócrona es aquella que tiene el descenso de una partícula en el intervalo más pequeño de tiempo. J. Bernoulli encontró que una cicloide cumple con esta característica, además del hecho que el tiempo para llegar al punto mínimo de la curva es independiente a la posición del lanzamiento. En este artículo se demuestra que, sin importar el punto de lanzamiento de una partícula sobre una curva braquistócrona, la partícula llega al punto mínimo de la curva en el un mismo intervalo de tiempo. Se utilizó una curva cicloide fabricada y pequeñas esferas de vidrio (canicas), las cuales se soltaron desde distintos puntos y se midieron los tiempos con los que estas se desplazaban sobre la curva. Se realizó el estudio del tiempo mediante el análisis del movimiento oscilatorio de una canica sobre la curva. El promedio del intervalo de tiempo entre cualquier punto de lanzamiento y el punto de mínima altura es de 0.35 segundos. Se concluyó que, sin importar el punto de lanzamiento de una canica sobre la cicloide, esta llegara al punto mínimo en el mismo tiempo.

Palabras clave: Curva braquistócrona, cálculo de variaciones, ecuación de Euler, tiempo mínimo.

Abstract

A brachistochrone curve is that which comprises the descent of a particle in the shortest possible interval. Bernoulli found a cycloid englobes all necessary characteristics to be a brachistochrone. He determined the fact that the time for the particle to reach the lowest point does not correlate to the initial position of the descent. We demonstrate that regardless of the starting point of a particle over the brachistochrone curve, the particle ought to reach the lowest point in the same timelapse. To prove said phenomena, we utilized a cycloid designed with a laser cutter, marbles, which were released from various points of the curve. All times taken for the marble movement were measured, recorded, and tabulated. Also, we ran an oscillatory movement analysis using said marbles and analyzing the oscillation periods, onto which we also applied the corresponding statistical analysis to compare. We were able to observe the times that a marble needed to reach the lowest point, on average 0.35 s, key value used to accept the original hypothesis. We agreed on a consensus that regardless of the releasing point within the cycloid, this will reach the lowest point taking the same time.

Keywords: Brachistochrone curve, calculus of variations, Euler's equation, minimum time.

I. INTRODUCCIÓN

El término braquistócrono significa el tiempo más pequeño [3]. Una curva braquistócrona es aquella donde una partícula influenciada por una fuerza constante desciende en el intervalo de tiempo más pequeño. Cuando una partícula recorre la curva desde un punto A, hasta un punto B, no necesariamente si la distancia es mínima, significa que el tiempo también lo será. El científico Galileo en 1633 escribió “*parece posible concluir que el movimiento más rápido entre dos puntos no tiene lugar a lo largo de la línea más corta, es decir a lo largo de una recta, sino a lo largo de un arco de círculo*” [4]. Bernoulli planteó la solución al problema de Galileo encontrando la representación de la llamada curva braquistócrona [2]. Bernoulli denominó a una cicloide, como la curva descrita por un punto fijado sobre un círculo de diámetro $2a$ que rueda sin deslizarse sobre una recta, donde $2a$ es la pérdida de altitud en relación con el punto de partida [2].

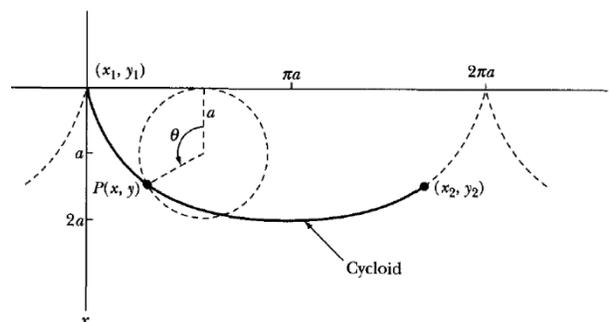


FIGURA 1. Solución al problema de la curva braquistócrona, una cicloide. Se observa el diagrama de la curva cicloide [3].

Thornton y Marion plantean la solución a este problema mediante cálculo de variaciones [3]. Partimos de la idea de considerar una partícula que se mueve en un campo de fuerza constante (campo gravitacional) y que parte del reposo en una

posición (x_1, y_1) hacia el punto más bajo (x_2, y_2) . Si planteamos una curva sin fricción, sabemos que la energía en el sistema se conserva, por lo que tenemos la ecuación:

$$T + U = 0 \rightarrow \frac{1}{2}mgv^2 - mgx = 0. \quad (1)$$

Donde m representa la masa de la partícula, g la constante de gravedad, v la velocidad de la partícula y x la altura de la partícula.

Trabajando algebraicamente la expresión (1) que la velocidad está dada por:

$$v = \sqrt{2gx} = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

Nótese que el ds es debido a que la velocidad tiene componentes en ambos ejes (x, y) . Resolviendo la ecuación diferencial para el tiempo, obtenemos que:

$$t = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{ds}{v} = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{\sqrt{2gx}},$$

$$t = \int_{x_1=0}^{x_2} \left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}} dx. \quad (3)$$

Donde la función dentro de la integral es un funcional (i.e. una función que toma funciones como su argumento). Al crear una curva que varía entre el punto x_1 y x_2 pero es igual en los extremos, podemos aplicar la primera ecuación de Euler, la cual está dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = 0. \quad (4)$$

Donde nuestro funcional f está dado por:

$$f = \left(\frac{1 + y'^2}{2gx} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (5)$$

El término $(2g)^{-\frac{1}{2}}$ no afecta el resultado final de la ecuación. Dado que g no depende de la posición de la partícula.

Se aplica la ecuación de Euler (4) al funcional (5) y resolviendo para y , se obtiene que la curva braquistócrona (cicloide) se describe por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = a(1 - \cos\theta), \quad (6)$$

$$y = a(\theta - \sin\theta). \quad (7)$$

Al derivar las expresiones (6) y (7) y sustituyéndolas en la ecuación (3), se resuelve la integral cuyo resultado es el tiempo mínimo que tarda la partícula en llegar al punto mínimo de la cicloide (punto $2a, \pi a$) en la figura 1. Por lo

que, el tiempo mínimo que requiere una partícula que se mueve sin fricción hacia el punto mínimo de una cicloide está dado por:

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}. \quad (8)$$

Donde t representa el tiempo, a representa el radio del círculo que forma la curva cicloide y g la constante de gravedad.

Nótese que se obtiene una expresión del tiempo la cual no depende de la posición en el eje x ni de la posición en el eje y . Lo que significa que el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto mínimo en una cicloide no depende del punto de inicio del movimiento.

El objetivo del artículo es demostrar que sin importar el punto de lanzamiento de una partícula sobre una curva braquistócrona (una cicloide), estas llegan al punto mínimo de la curva en el mismo tiempo, esto a través de mediciones de tiempos experimentales. Además, se buscó comprobar experimentalmente que el tiempo para alcanzar el punto mínimo en una curva cicloide (ecuación 8). Para efectos de la investigación, se supone que la canica no resbala durante su desplazamiento a lo largo de la curva. Finalmente se analiza el movimiento oscilatorio de la canica a lo largo de la curva para la obtención del tiempo.

Se plantea la hipótesis de que el tiempo requerido para que una canica se mueva hacia el punto mínimo de una cicloide es independiente al punto de inicio del movimiento.

II. METODOS Y MATERIALES

Para poder probar la hipótesis planteada, se diseñó una curva cicloide en el programa *Inkscape*, luego la cortadora láser corta una plancha de MDF con la forma del diseño. Después, se utiliza una lija para eliminar imperfecciones en las uniones de la curva como se observa en la siguiente figura:



FIGURA 2. Diseño curva cicloide. El enlace con el diseño se encuentra en la sección de anexos.

Para probar la hipótesis planteada, se realizaron mediciones desde distintas alturas, en donde se midió el tiempo en la aplicación *Tracker* [5] en que el centro de masa de la canica se tardaba en llegar al punto más bajo de la cicloide. Posteriormente se compararon los resultados obtenidos mediante el cálculo del porcentaje de error con el valor

teórico del tiempo mínimo, el cual fue deducido en la ecuación 8. Luego, se realizan otras mediciones para el análisis del movimiento oscilatorio. Se soltó la canica desde una altura 0.15 m, donde se permitió que la canica realizará 7 oscilaciones completas (a partir de la 7ª oscilación la energía perdida causaba que la canica no siguiera oscilando). Se realizó 10 veces dichas oscilaciones, donde se obtuvieron 10 tiempos mínimos, con los cuales se obtuvo el tiempo mínimo en un intervalo de confianza al 95%. Se propuso tener un margen de error máximo de (0.005), dados los posibles resultados planteados por el modelo teórico (ecuación 8).

El número óptimo de mediciones esta dado por:

$$E = Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

En donde E, representa el margen de error, Z valor de la tabla “Z” en un intervalo de confianza al 95% (1.96), σ la desviación estándar y n el numero de mediciones. [9] Donde se obtuvo que el numero óptimo de mediciones fue de 9.8 ≈ 10.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En una curva braquistócrona, el tiempo que tarda una partícula en alcanzar el punto mínimo (punto de equilibrio) es independiente de la posición del lanzamiento. Durante la experimentación, se logró demostrar que, desde donde inició el movimiento de la canica hasta el punto mínimo de la cicloide es el mismo intervalo de tiempo. Además, se logró medir, mediante distintos métodos, el tiempo que tarda una canica en llegar al punto de equilibrio, demostrando así la isocronicidad de la curva, con lo que se aceptó la hipótesis planteada. Se concluyó que, sin importar el punto de inicio de movimiento de una canica sobre la cicloide, esta llegara al punto mínimo en el mismo tiempo.

El tiempo teórico de la canica en llegar al punto mínimo sobre la cicloide construida con un círculo de radio 10 cm fue obtenido con la ecuación 8. Se obtuvo como resultado un tiempo de 0.32 s.

Se soltaron las canicas desde distintos puntos, donde se tomó el tiempo del movimiento de la canica en llegar al punto mínimo de la cicloide en el programa *Tracker*. Para obtener resultados precisos se utilizó una cámara que grabó a 240 FPS. Se obtuvo como resultado los siguientes tiempos:

TABLA I. Tiempos en que la canica alcanza el punto mínimo de la cicloide para las distintas alturas de lanzamiento.

Altura de Lanzamiento (m)	Tiempo (s)	Error (%)
0.15	0.35	9.38
0.13	0.35	9.38
0.1	0.35	9.38
0.07	0.35	9.38
0.06	0.35	9.38

El error fue determinado comparando con el valor teorico del tiempo obtenido (ecuación 8).

Se observó que experimentalmente sin importar la altura de lanzamiento, las canicas tardaron el mismo tiempo en llegar al punto mínimo de la curva (TABLA I). No obstante, se obtuvieron porcentajes de error de 9.38%, alejándose del modelo teórico deducido en los antecedentes.

Se grabó el movimiento oscilatorio de la canica a lo largo de la cicloide. Se exportaron los datos al programa *Capstone*, con los cuales se graficó la posición de la canica en función del tiempo y se le aplicó una regresión de tipo senoidal amortiguada.

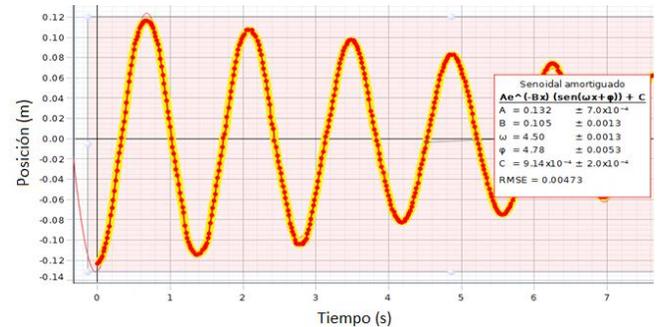


FIGURA 3. Posición en el eje x en función del tiempo de la canica sobre la curva cicloide. Se le aplicó una regresión de tipo senoidal amortiguada, obteniendo la frecuencia angular.

Se observó que la canica oscilaba en torno al punto más bajo, el cual se consideró como el punto de equilibrio estable de la cicloide [3]. Se observó que la canica sigue un movimiento oscilatorio, lo que se comprobó al realizar un gráfico de la posición en función del tiempo, dado que el ajuste senoidal amortiguado obtuvo un error cuadrático medio de 0.004. El bajo RMSE significó que los datos se acoplaron al ajuste realizado, por lo que validó tomar la frecuencia angular para realizar el cálculo del periodo y el tiempo de la canica hacia el punto mínimo de la cicloide.

Se repitió 10 veces el experimento, donde se tabularon las frecuencias angulares y se procedió a determinar el periodo de las oscilaciones, donde la cuarta parte del período es el tiempo que tarda la canica en llegar a la posición mínima de la cicloide.

TABLA II. Resultados experimentales del análisis del movimiento oscilatorio de la canica a lo largo de la cicloide. Se utilizaron 10 videos independientes que se pueden encontrar en la sección de anexos.

Frecuencia angular (ω)	Periodo (s)	Tiempo (s)
4.500	1.396	0.349
4.480	1.402	0.351
4.500	1.396	0.349
4.510	1.393	0.348
4.500	1.396	0.349
4.510	1.393	0.348
4.500	1.396	0.349
4.510	1.393	0.348
4.500	1.396	0.349
4.500	1.396	0.349

En la búsqueda de errores experimentales, se procedió a aplicarle una prueba de normalidad a los residuos entre los tiempos experimentales y el tiempo teórico. Esto con la finalidad de ver que los residuos sean aleatorios. Se aplicó la prueba de normalidad de cuantiles teóricos, donde se obtuvieron los siguientes resultados:

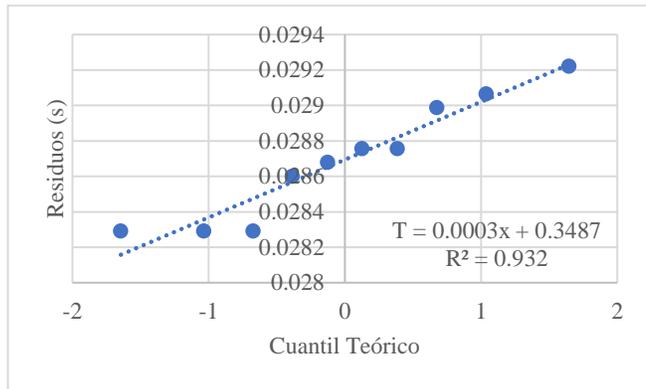


FIGURA 4. Gráfico de probabilidad normalidad, prueba de cuantiles teóricos donde el 93 % de los datos se ajustan a la regresión lineal aplicada.

Se observó un coeficiente de determinación de la figura 4 de $R^2 = 0.93$, por lo que se demostró que 93% de los datos siguen una distribución normal, lo que validó la aplicación del cálculo del intervalo de confianza y la estadística aplicada a los resultados experimentales [1]. Finalmente, se calculó la media, desviación estándar, error estándar de la media y el valor en un intervalo de confianza al 95%.

TABLA III. Estadístico de las mediciones del tiempo para que una canica alcance el punto mínimo sobre la curva cicloide.

Estadístico	Valor Tiempo (s)
Media	0.3487
Desviación Estándar	0.0007
Error Estándar	0.0002
Intervalo 95%	0.3487 ± 0.0002

Se determinó el porcentaje de error del valor obtenido a un intervalo de confianza al 95%, siendo de 8.97% de error.

Entre las posibles fuentes de error que se identificaron durante la experimentación, se encuentra el mecanismo de soltado de las canicas, ya que no se recurrió a algún sistema automatizado, sino que una persona las soltó, mecanismo con el cual se le pudo dar una velocidad inicial. Otro error identificado, que también se relaciona al mecanismo de soltado, fue el margen de error en el tiempo en que se soltaron las canicas hasta llegar al punto mínimo, que no es exactamente al mismo instante que las canicas empiecen su movimiento, afectando la exactitud de los resultados. No obstante, al hacer oscilar la canica iniciando en una mayor

altura, se observó que esta se llegaba a deslizar por la curva al momento de cambiar de sentido su movimiento, generando pérdida de energía. Si bien se escogió una altura en la que el deslizamiento de la canica fuera imperceptible, no se descarta que este haya existido.

IV. CONCLUSIONES

Se acepta la hipótesis al comprobar que, en cualquier punto de la curva braquistócrona, el tiempo en que tarda en recorrer hasta el punto más bajo siempre será el mismo; es decir, que el tiempo es independiente a la altura inicial en la que es lanzada la canica.

Al estudiar el movimiento en una curva braquistócrona a través de un movimiento oscilatorio, se logró analizar el tiempo de un trayecto corto a través de la velocidad angular y el período. Este método permitió el análisis del tiempo de manera independiente al punto inicial de lanzamiento.

Se recalca las limitaciones del modelo utilizado, donde con una velocidad de captura de 240 FPS se obtuvo un 8.97% de error, por lo que se recomienda la creación de un mecanismo automatizado para el soltado de las canicas y el conteo del tiempo de manera sincrónica, además de crear una curva donde el tiempo que tarda en llegar a su punto mínimo sea mayor y se minimice la pérdida de energía.

Por último, se comprobó las características de una curva braquistócrona de manera experimental y su relación con el cálculo de variaciones y la minimización del tiempo en un recorrido influenciado por una fuerza constante, con un experimento de realización, medición y análisis sencillo.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a la Universidad del Valle de Guatemala, por permitir utilizar las instalaciones para la experimentación. Así mismo, se le da un agradecimiento especial a nuestro director de carrera Eduardo Alvarez, y a la catedrática del curso de mecánica analítica Irene Aguilar, por todo el apoyo brindado con respecto a la resolución de dudas.

REFERENCIAS

[1] Anderson, D., Sweeney, D., Williams, T., *Estadística para negocios y economía*, (CENGAGE Learning, México, 2012).
 [2] Johnston, D., *Cycloidal paths in physics as superpositions of translational and rotational motions*, Phys. Teach. **87**, 802 (2019).
 [3] Thornton, S., Marion, J., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, (Thomson Books/Cole, USA, 2003).
 [4] Yang, J., Stork, D., Galloway, D., *The rolling unrestrained brachistochrone*, Phys. Teach. **55**, 804 (1987).
 [5] Tracker. *Video analysis and modeling tool*. <https://physlets.org/tracker/> (2022).
 [6] Sun, P., Liu, Y., Huang, X., *Exploring the brachistochrone (shortest-time) path in fire spread*, Scientific Reports, 13600 (2022).

[7] Rodgers, E., *Brachistochrone and Tautochrone Curves for Rolling Bodies*, Phys. Teach. **14**, 249 (1946).

[8] Ashby, N., Brittin, W., Love, W., Wyss, W., *Brachistochrone with Coulomb friction*, Phys. Teach. **43**, 902 (1975).

[9] Sullivan, L., *Power and Sample Size Determination*. https://sphweb.bumc.bu.edu/otlt/mph-modules/bs/bs704_power/bs704_power_print.html

[10] Young, H., Freedman, R., *Sears y Zemansky Física Universitaria*, (Editorial PEARSON, México, 2013).