

Un modelo didáctico para la estructura del centro estelar



J. Díaz Polanco¹, F. Arretche²

¹*Departamento de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad Arturo Prat, Avenida Arturo Prat 2120, Iquique, Chile.*

²*Centro de Ciências Tecnológicas, CCT; Universidade do Estado de Santa Catarina- UDESC; Rua Paulo Malschitzki, s/número: Campus Universitário Prof. Avelino Marcante: Bairro Zona Industrial Norte, Joinville/SC, Brasil.*

E-mail: jose.diaz.polanco@unap.cl

(Recibido el 3 de Febrero de 2011; aceptado el 14 de Junio de 2011)

Resumen

En este trabajo, presentamos y discutimos un modelo pedagógico para la descripción del centro de una estrella. En este sentido, consideramos una solución en serie de las ecuaciones de estructura estelar, para un sistema en equilibrio hidrostático y ecuación de estado barotrópica, permitiendo describir de manera general el comportamiento de las variables termodinámicas presentes en la vecindad del centro estelar. La metodología empleada permite tratar el problema de estructura del centro estelar con mayor precisión de lo que comúnmente se encuentra en la respectiva literatura educativa. Debido al carácter general de la metodología, se espera estimular a los estudiantes a encarar problemas con mayor complejidad, tales como aquellos que incluyen dinámica de rotación, materia exótica o singularidades.

Palabras clave: Centro estelar, equilibrio hidrodinámico, solución en series.

Abstract

In this work, we show and discuss a pedagogical model for description of the center of a star. This way, we consider a series solution for the equations of stellar structure, for a system in hydrostatic equilibrium and barotropic state equation, getting a general description of thermodynamic variables present in the neighborhood of stellar center. The methodology used permits to treat the problem of stellar center structure with higher precision compared to the ordinary found results given in the respective educative literature. Owen to the general character of the methodology, we expect to stimulate the students to face problems of greater complexity like those that include rotation, exotic matter and singularities.

Keywords: Stellar center, hydrodynamic equilibrium, series solution.

PACS: 95.30.LZ, 95.30.tg, 97.10.Cv

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Los estudios sobre formación y evolución de galaxias son un pilar fundamental para aproximarnos a una mejor comprensión de la dinámica y evolución del universo. De hecho, para poder entender y describir la historia de nuestro universo debemos intentar comprender la evolución de las partes que lo componen. Por esta razón la estrella es una de las primeras unidades básicas a comprender.

La experiencia adquirida en clases por los autores sugiere que los estudiantes de ciencias básicas y aplicadas se muestran curiosos e interesados por temas ligados a la astronomía en general. Así, parece interesante buscar problemas de origen astrofísico para motivar el aprendizaje de diversos tópicos avanzados, tales como, ecuaciones diferenciales, termodinámica, mecánica de fluidos, y modelación matemática de sistemas dinámicos en general. El problema que exploramos en este trabajo se refiere a

estructura estelar. Pretendemos una mejor comprensión de los modelos simples de estructura estelar y sus soluciones.

En el contexto de Newton, una estrella en equilibrio hidrodinámico se puede describir a través de un modelo de fluidos, en donde para cada elemento de volumen del fluido las leyes de Newton son validas. En el modelo más simple de estrellas Newtonianas, las fuerzas presentes sobre cada elemento de volumen están asociadas a la gravedad y a la presión. Para el caso sin rotación, el equilibrio hidrostático se alcanza cuando ambas fuerzas se compensan y la fuerza neta es nula para cada elemento de fluido en la estrella. Este simple modelo teórico ha sido intensamente estudiado en astrofísica [1] para describir termodinámicamente las cantidades físicas relevantes en la descripción del interior estelar: presión, densidad, temperatura, masa, luminosidad, opacidad, etc. Pero, la descripción de un sistema estelar también necesita de lo que se conoce en termodinámica como una “ecuación de estado”. En verdad, es la ecuación

que determina la relación entre las cantidades termodinámicas principales: presión, temperatura y densidad. Para este estudio y por razones de simplicidad, consideramos una ecuación de estado del tipo “barotrópica”, lo que significa que la presión del gas estelar no depende explícitamente de la temperatura, más bien, exclusivamente de alguna función de la densidad de materia. Esta simplificación, permite una primera aproximación al tema, es ideal para estudiantes que se inician en temas astrofísicos y pretendan investigar modelos más complejos en el futuro.

Nuestros objetivos en este manuscrito son:

1. Hacer una breve presentación pedagógica sobre las ecuaciones de estructura estelar y desarrollar una metodología simple para resolverlas;
2. Discutir, en un nivel educativo, los resultados que se pueden obtener al resolver las ecuaciones de estructura para el caso en donde es válida una “ecuación de estado barotrópica” y mostrar que existe una solución en serie capaz de modelar el núcleo de este tipo de estrellas de forma general en el contexto Newtoniano;
3. Estimular la búsqueda de soluciones de las ecuaciones de estructura estelar para casos cada vez más realistas y a su vez, más complejos.

La lectura de este manuscrito está recomendada, en particular, para los estudiantes de ciencias, como un buen ejemplo transversal a las disciplinas de mecánica de fluidos, termodinámica, ecuaciones diferenciales y gravitación, y en general para quién quiera comprender la teoría de los modelos estelares básicos.

Este trabajo es presentado de la siguiente forma: En la sección II, hacemos una breve descripción de las variables físicas que participan de las ecuaciones pertinentes a la estructura interior de una estrella Newtoniana, tales como, presión, masa, densidad, temperatura, flujo de energía, tasa de energía producida por procesos nucleares, opacidad y luminosidad. Mostramos que las relaciones entre estas cantidades físicas forman un sistema de ecuaciones diferenciales y estudiamos las condiciones usuales para enfrentar la solución del problema general. En la sección III reescribimos el sistema de ecuaciones presentado en II, usando variables adimensionales y particularizamos el problema para el caso barotrópico. Presentamos su solución general, en serie de potencias, en torno del centro estelar para el subsistema de ecuaciones que define a la presión y la densidad de materia. En la sección IV mostramos los argumentos matemáticos que permiten definir la ecuación de estado en la vecindad del centro estelar y estudiamos su comportamiento. Finalmente en el capítulo V se presentan las conclusiones obtenidas.

II. ECUACIONES DE ESTRUCTURA ESTELAR: UNA BREVE REVISIÓN

Las ecuaciones de estructura para una estrella Newtoniana sin rotación y en equilibrio hidrostático están bien definidas en la literatura y su deducción formal puede ser encontrada en diversos textos básicos [2]. Con la finalidad de presentar

las ecuaciones de estructura, hacemos una breve descripción sobre como modelar una estrella, sin rotación y en equilibrio hidrostático.

Consideremos una estrella esférica de masa total M_T y radio R . Escogemos un elemento de masa ΔM de la estrella a una distancia r del centro de la estrella, donde obviamente $r \leq R$. En seguida, estudiamos las fuerzas que actúan sobre el elemento de masa ΔM (ver Fig. 1) y notamos que la condición de equilibrio hidrostático se alcanza cuando las fuerzas radiales asociadas a la presión del fluido anulan a la fuerza gravitatoria.

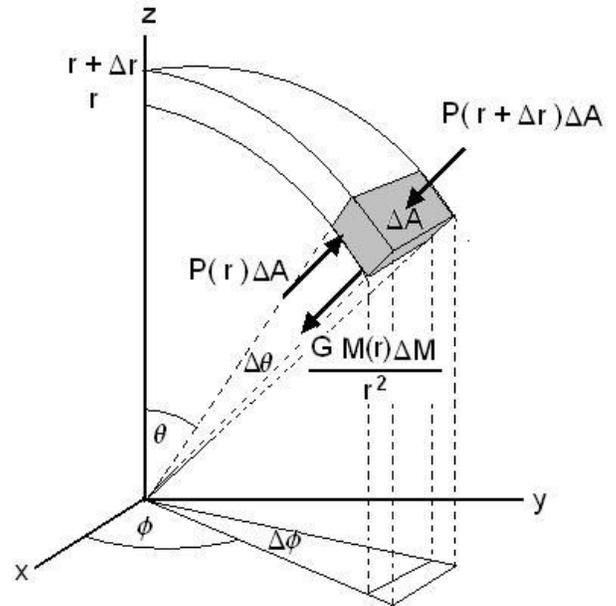


FIGURA 1. Fuerzas radiales sobre un elemento de fluido de masa ΔM usando coordenadas esféricas. Las componentes no radiales de las fuerzas se anulan sobre el elemento de fluido en equilibrio hidrostático.

Esta situación de equilibrio puede ser descrita mediante una ecuación de fuerzas del tipo

$$[P(r) - P(r + \Delta r)](r \sin \theta \Delta \phi)(r \Delta \theta) - \frac{GM \Delta M}{r^2} = 0, \quad (1)$$

en donde $P(r)$ es la presión en el punto r , $P(r + \Delta r)$ es la presión en el punto $r + \Delta r$, $(r \sin \theta \Delta \phi)(r \Delta \theta)$ es el área efectiva en el elemento de volumen en donde la fuerza radial actúa. El último término en la Ec. (1) representa la fuerza gravitatoria que actúa sobre el elemento de masa ΔM por acción del resto del fluido, de modo que $M = M(r)$ es la masa estelar total encerrada en una esfera de radio r y G es la constante de gravitación universal. De hecho, un problema interesante para nuestros alumnos es probar que $M(r)$ es la fracción de masa de la estrella que efectivamente participa de la gravitación del elemento de masa ΔM .

Tomando el cociente de la expresión (1) por el elemento volumen $\Delta V = (r \sin \theta \Delta \phi)(r \Delta \theta) \Delta r$, el cual está asociado al elemento de masa, y tomando el límite diferencial $\Delta V \rightarrow 0$, obtenemos la variación de la presión $P(r)$ en función de la coordenada radial r en el interior de la estrella, de modo que

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (2)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad de masa a una distancia r del centro de la estrella. La Ec. (2) es conocida como la “ecuación de equilibrio hidrostático” en el contexto de Newton. Observemos que la naturaleza explícita de las fuerzas que equilibran la fuerza gravitatoria no es discriminada en (2). Un ejercicio interesante para nuestros alumnos es encontrar la Ec. (2) usando argumentos puramente energéticos.

Además, el elemento de masa ΔM está vinculado con la densidad de masa en el límite diferencial según la relación $dM = \rho dV$, la cual puede ser escrita en función de la coordenada radial según

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2. \quad (3)$$

La Ec. (3) es conocida como “ecuación de continuidad”.

Hasta este punto, tenemos tres variables: la presión $P(r)$, la masa $M(r)$ y la densidad de materia $\rho(r)$. Necesitamos una ecuación más para que el sistema de ecuaciones sea consistente y pueda ser resuelto [3]. Esta ecuación se conoce como la ecuación de estado y en general define la dependencia entre la presión local, la densidad local y la temperatura local, la cual puede ser escrita en la forma $P = P(\rho, T)$. En general es justamente la ecuación de estado la que define el tipo de estrella en cuestión y es en ella en donde se resumen las propiedades físicas fundamentales del sistema. Su forma particular es parte del modelo y, por lo menos en principio, para una dada estrella real, no es conocida “a priori”. Es por esta razón que se debe elegir apropiadamente la ecuación de estado, caso contrario existe el riesgo de obtener una solución matemática desconectada de la realidad física.

Conjuntamente a las Ecs. (2, 3) y una ecuación de estado de la forma $P = P(\rho, T)$, un modelo estelar típico considera también el flujo de energía producida por reacciones nucleares, la energía reabsorbida luego de los procesos nucleares y los gradientes de temperatura en el interior producidos tanto por transferencias convectivas, radiativas y conductivas. Estas consideraciones adicionales se traducen en dos ecuaciones más para el modelo de estructura estelar.

La primera se puede deducir de la siguiente forma: Consideramos que $F(r)$ es la taza de energía producida a una distancia r del centro de la estrella, de preferencia asociada a reacciones nucleares. Aclaremos esta definición diciendo que $F(r)$ representa la potencia total irradiada por los procesos nucleares que ocurren dentro de una esfera de

Un modelo didáctico para la estructura del centro estelar materia de radio r . Una forma simple de modelar la taza de energía $F(r)$ es definirla a través de un nuevo parámetro q_m , que mida la taza de energía por unidad de masa, es decir que satisfaga la relación $q_m = dF/dM$, la cual, con ayuda de la Ec. (3), puede ser escrita en la forma:

$$\frac{dF}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2q_m. \quad (4)$$

La taza por unidad de masa q_m es obtenida a partir de la energía producida por cada proceso nuclear particular que ocurre en la estrella, donde usamos como referencia las secciones eficaces de colisión calculadas o medidas en la Tierra.

La ecuación que falta define el gradiente de temperatura en el interior de la estrella. Sin embargo, tenemos que tomar en cuenta el tipo de transferencia energética, ya que puede ser del tipo radiativa, convectiva o conductiva. En una estrella común la transferencia por conducción suele ser la menos efectiva, por lo que generalmente se desprecia esta contribución. Por otro lado, en las cercanías del centro estelar, es común encontrar modelos que indican que la transferencia radiativa es la dominante. Por esta razón, si asumimos que en el núcleo de la estrella predomina la transferencia radiativa, es necesario tener en cuenta que no toda esta radiación conseguirá escapar de la estrella. De hecho la radiación que consigue escapar es el resultado de un gran número de absorciones, dispersiones y emisiones a lo largo de todo su trayecto. Es así como nace un concepto asociado a la resistencia que impone la materia estelar al paso de la radiación; la opacidad. En este trabajo, la opacidad será caracterizada con la letra griega Kappa: κ . En general, la opacidad debe ser calculada tomando en cuenta los procesos particulares que ocurren en cada estrella. Una forma simple de visualizar este concepto es a través del camino libre medio λ_γ recorrido por un fotón que está viajando a una distancia r del centro estelar, de modo que se cumple la relación $\lambda_\gamma = \frac{1}{\kappa\rho}$, en la cual vemos que la

opacidad es inversamente proporcional al camino libre medio recorrido por el fotón y también a la densidad de materia por donde este circula.

A modo de ejemplo mostramos la ecuación general para la transferencia radiativa, la cual puede ser escrita en la forma

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\kappa\rho}{T^3} \frac{F}{4\pi r^2}, \quad (5)$$

cuando la transferencia por convección es despreciable. La Ec. (5) puede ser deducida a través de la conservación de flujo de energía, en donde la ley de Stefan-Boltzmann es válida localmente y ella permite conocer el gradiente de temperatura, en donde encontramos la constante de radiación $a = 4\sigma/c = 7,56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}$.

Con el fin de motivar a los estudiantes, podemos decir que en cálculos estelares típicos, es común modelar la taza de producción de energía q_m y la opacidad κ de modo que

$$q_m = q_0 \rho^\alpha T^\beta \text{ y } \kappa = \kappa_0 \rho^\lambda T^\delta \quad (6)$$

donde los coeficientes α, β, λ y δ definen los perfiles de producción de energía y de opacidad [4]. Las relaciones en (6) no serán usadas directamente en este trabajo, sin embargo, constituyen un primer paso para modelos realistas. Es importante indicar que modelar la tasa y la opacidad son temas que continúan siendo investigados en la actualidad y no es un tema cerrado.

Las condiciones de frontera para P, M, ρ, F y T están presentes en la Tabla I. Observemos que tenemos un problema de dos puntos de frontera ($r = 0$ y $r = R$), donde usaremos la siguiente notación P_0, ρ_0 y T_0 son la presión, densidad y temperatura, respectivamente medidas en el centro de la estrella. Además definimos L_* como la luminosidad total y T_{eff} es la temperatura superficial, ambas conectadas por la expresión de cuerpo negro:

$$L_* = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4, \quad (7)$$

donde $\sigma (=4a/c)$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

TABLA I. Condiciones de contorno para las funciones P, ρ, M, F y T . Por otro lado P_0, ρ_0 y T_0 son respectivamente la presión, la densidad y la temperatura centrales; M_T es la masa total de la estrella, L_* y T_{eff} son respectivamente la luminosidad y temperatura superficial.

Variable	$r = 0$	$r = R$
Presión P	P_0	0
Masa M	0	M_T
Densidad ρ	ρ_0	0
Flujo F	0	L_*
Temperatura T	T_0	T_{eff}

El conjunto de Ecs. (2)-(5) forman un sistema no lineal. En general, no existen expresiones analíticas en la literatura [5] y lo que se hace es en general un enfoque directamente numérico al problema [6]. Es importante observar que, si conocemos la densidad ρ entonces podemos deducir todas las otras cantidades físicas citadas.

En la siguiente sección presentamos una solución en serie de las Ecs. (2) y (3), en la cual, vamos a estudiar uno de los casos formales más simples, el caso de “fluido barotrópico”. Un fluido barotrópico es un fluido cuya ecuación de estado es de la forma

$$P = P(\rho). \quad (8)$$

Es decir, la presión en el fluido depende exclusivamente de la densidad de masa. Esta simplificación permite encontrar una solución en serie válida en la vecindad del centro

estelar, lo que la hace extremadamente interesante para alumnos que se inician en este tópico.

III. SOLUCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS EN LAS CERCANIAS DEL CENTRO ESTELAR

Mientras no existan expresiones analíticas, físicamente válidas, en todo el dominio de la variable radial ($0 \leq r \leq R$), podemos buscar soluciones analíticas parciales para describir a la estrella. En este trabajo nos concentraremos en el centro de la estrella y buscaremos una solución analítica usando la técnica de las series de potencias.

Pero, antes de trabajar el sistema formado por las ecuaciones de estructura estelar, vamos a reescribirlas de forma adimensional. Comenzamos cambiando la coordenada radial r por una nueva variable x definida como

$$r = r_0 x, \quad (9)$$

donde r_0 es un parámetro de escala que puede ser escogido apropiadamente para no tener que trabajar con distancias radiales gigantescas. Por otro lado, en astrofísica es usual usar el concepto de masa geométrica [7]

$$m_g = \frac{GM}{c^2}, \quad (10)$$

con el fin de reescalar la masa de materia M a unidades de longitud. De esta forma, podemos notar que si dividimos la masa geométrica por r_0 , entonces tenemos otra variable sin dimensión, esta vez asociada con la masa. Para nuestros fines, definimos m como una cantidad adimensional, tal que

$$m = \frac{m_g}{r_0} = \frac{GM}{r_0 c^2}. \quad (11)$$

Substituyendo (9) y (11) en la Ec. (3), esta puede ser escrita en la forma

$$\frac{dm}{dx} = \left[4\pi r_0^2 \frac{G}{c^2} \right] \rho(x) x^2. \quad (12)$$

Mientras que la Ec. (2) queda escrita como sigue:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{P(x)}{c^2} \right) = - \frac{\rho(x)m(x)}{x^2}. \quad (13)$$

Se puede verificar que $P(x)/c^2$ tiene las mismas unidades que la densidad de masa y que la cantidad $4\pi r_0^2 G/c^2$ tiene unidades equivalentes al recíproco de densidad de masa. De este modo, podemos crear fácilmente otras dos cantidades adimensionales asociadas a la densidad de masa y a la presión, las cuales serán definidas de la siguiente forma:

$$\bar{\rho} \rightarrow \frac{4\pi r_0^2 G}{c^2} \rho \text{ y } \bar{P} \rightarrow \frac{4\pi r_0^2 G}{c^2} \frac{P}{c^2}. \text{ Con estas substituciones, es}$$

fácil verificar que las ecuaciones en forma adimensional para la densidad, la presión y la masa, son tales que:

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -\frac{m(x)\bar{\rho}(x)}{x^2}, \quad (14)$$

$$\frac{dm}{dx} = \bar{\rho}(x)x^2, \quad (15)$$

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{\rho}). \quad (16)$$

Con un desarrollo similar, se puede mostrar que las Ecs. (5) y (6) pueden ser escritas como

$$\frac{d\bar{F}}{dx} = x^2 \bar{\rho}(x) \bar{q}_m, \quad (17)$$

$$\frac{d\bar{T}}{dx} = -\frac{1}{4\pi x^2} \frac{\bar{\kappa} \bar{\rho}(x) \bar{F}(x)}{\bar{T}^3}, \quad (18)$$

donde $\bar{F}, \bar{q}_m, \bar{T}, \bar{\kappa}$ son las nuevas variables adimensionales asociadas a las variables originales F, q_m, T, κ . La Tabla II muestra la conversión de unidades utilizada en este trabajo.

TABLA II. Tabla de conversión de unidades fundamentales y sus derivadas usadas en este trabajo para las cantidades adimensionales. G es la constante de gravitación universal, c es la velocidad de la luz en el vacío y $a = 4\sigma/c = 7,56 \times 10^{-16} \text{ Jm}^{-3} \text{ K}^{-4}$. Observe que la relación con las unidades tradicionales depende del valor escogido para la longitud r_0 .

Cantidad física	Transformación	Cantidad física adimensional
Longitud r	$r \rightarrow r_0 x$	x
Masa M	$M \rightarrow \frac{r_0 c^2}{G} m$	m
Tiempo t	$t \rightarrow \frac{r_0}{c} \bar{t}$	\bar{t}
Densidad ρ	$\rho \rightarrow \left[4\pi_0^2 \frac{G}{c^2} \right]^{-1} \bar{\rho}$	$\bar{\rho}$
Presión P	$P \rightarrow \left[4\pi_0^2 \frac{G}{c^4} \right]^{-1} \bar{p}$	\bar{p}
Flujo de energía F	$F \rightarrow \frac{c^5}{G} \bar{F}$	\bar{F}
Tasa de producción de energía q_m	$q_m \rightarrow \frac{c^3}{r_0} \bar{q}_m$	\bar{q}_m
Temperatura T	$T \rightarrow \left[\frac{4a}{3} \left(4\pi_0^2 \frac{G}{c^4} \right) \right]^{-1/4} \bar{T}$	\bar{T}
Opacidad κ	$\kappa \rightarrow \frac{G r_0}{c^2} \bar{\kappa}$	$\bar{\kappa}$

Nuestro trabajo ahora es resolver el sistema de Ecs. (14), (15) y (16) en las cercanías del núcleo de la estrella (

Un modelo didáctico para la estructura del centro estelar $0 \leq x \ll 1$). Asumimos que la densidad de masa $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x)$ puede ser escrita genéricamente como una serie de potencias de la forma

$$\bar{\rho}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (19)$$

la cual tiene una representación en torno a $x=0$ y además, por hipótesis asumimos que al menos existe un $\delta > 0$, tal que existe convergencia de la serie en $0 \leq x < \delta$. Notemos que a_0 representa la densidad adimensional en el centro estelar ($\bar{\rho}_0$), por lo cual la vamos a considerar finita y positiva, es decir, en este modelo la estrella no contiene materia exótica ni tampoco posee singularidades en el centro de la configuración.

Integramos la Ec. (15) en un intervalo $[0, x]$ y usamos la condición de contorno $m(0) = 0$ para obtener que

$$m(x) = x^3 H(x), \quad (20)$$

donde $H(x)$ es una función auxiliar tal que

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{n+3}, \quad (21)$$

la cual tiene el mismo intervalo de convergencia que $\bar{\rho}(x)$.

Por otro lado la Ec. (14) puede ser expresada en la forma

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = -xH(x)\bar{\rho}(x), \quad (22)$$

la cual también puede resolverse simplemente en series, ya que podemos usar la teoría asociada al producto de series de potencias para definir la serie

$$xH(x)\bar{\rho}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \quad (23)$$

donde c_n es fácilmente obtenido y se puede probar que

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+3} a_{n-k}. \quad (24)$$

De este resultado, al integrar la Ec. (14), tenemos que en las cercanías del centro estelar la presión debe ser de la forma

$$\bar{p}(x) = \bar{p}(0) - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+2} x^n, \quad (25)$$

lo que nos da la forma explícita para la presión del sistema en las cercanías del centro estelar. Sin embargo, podemos estudiar los vínculos existentes entre los coeficientes para dar una completa solución del modelo. En este punto un ejercicio interesante para cualquier estudiante es probar que

la presión y la densidad tienen el mismo intervalo de convergencia.

IV. ANALISIS DE LA SOLUCIÓN

A continuación, realizamos un breve análisis matemático de la solución obtenida. Si la presión adimensional la escribimos en una forma genérica, tal que

$$\bar{p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad (26)$$

entonces podemos escribir cada coeficiente b_n en función de parámetros conocidos. En resumen vemos que

$$b_0 = \bar{p}(0) > 0, \quad (27)$$

$$b_1 = 0, \quad (28)$$

$$b_{n+2} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+3} a_{n-k}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (29)$$

donde la relación de recurrencia (29) se obtiene por simple comparación entre las Ecs. (25) y (26), y permite conocer cada coeficiente de la presión en función de los coeficientes de la densidad. Notemos que en particular para $n=0$ la Ec. (29) nos muestra que

$$b_2 = -\frac{a_0^2}{6} < 0. \quad (30)$$

Note que como b_2 está vinculado con la segunda derivada de la presión respecto de x (en $x=0$), podemos afirmar según (28)-(30) que la presión tiene un máximo local en $x=0$. Lo interesante es que este resultado trivialmente lógico es ahora demostrado matemáticamente de forma simple y general, para cualquier ecuación de estado que acepte una representación en serie en torno del centro estelar. Por otro lado, nuestro fluido es barotrópico, lo que nos dice que $\bar{p} = \bar{p}(\bar{\rho})$, entonces se cumple que

$$\frac{d\bar{p}}{dx} = \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx}. \quad (31)$$

la cual al ser evaluada en $x=0$ nos muestra que

$$b_1 = \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \right)_{x=0} a_1. \quad (32)$$

Intuitivamente, es físicamente correcto asumir que en el centro estelar

$$\left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \right)_{x=0} > 0, \quad (33)$$

lo que significa físicamente que presión y densidad deben disminuir simultáneamente desde el centro estelar. Además como $b_1 = 0$, entonces la Ec. (32) nos dice que

$$a_1 = 0. \quad (34)$$

Efectuando el mismo procedimiento podemos determinar que

$$\frac{d^2 \bar{p}}{dx^2} = \frac{d^2 \bar{p}}{d\bar{\rho}^2} \left(\frac{d\bar{\rho}}{dx} \right)^2 + \frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \frac{d^2 \bar{\rho}}{dx^2}. \quad (35)$$

la cual, al evaluarla en $x=0$ nos muestra que

$$2b_2 = a_1^2 \left(\frac{d^2 \bar{\rho}}{d\bar{\rho}^2} \right)_{x=0} + 2a_2 \left(\frac{d\bar{\rho}}{d\bar{\rho}} \right)_{x=0}. \quad (36)$$

Con este resultado, vemos que las Ecs. (32), (34) y (36) nos muestran que

$$a_2 < 0. \quad (37)$$

Por lo tanto, se demuestra que la densidad de materia también presenta un máximo local en el centro de la configuración, como era de esperarse.

Efectuando el mismo procedimiento para determinar los coeficientes de potencias superiores, es fácil probar por inducción matemática que todos los coeficientes asociados a potencias impares, tanto para la serie de presión como para la serie de densidad de masa, son nulos, es decir, para todo $n=0, 1, 2, \dots$ se cumple que

$$a_{2n+1} = 0 \quad \text{y} \quad b_{2n+1} = 0 \quad (38)$$

lo que nos muestra que tanto la presión como la densidad de energía se comportan como funciones pares en la vecindad del centro estelar, mientras que la función de masa será del tipo impar. Para demostrar (38) simplemente usamos la Ec. (29) conjuntamente con la identidad

$$\frac{d^n \bar{p}}{dx^n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dx} \right), \quad (39)$$

la cual nos dice que en $x=0$ se cumple que para todo n natural

$$b_n = a_n \left(\frac{d\bar{p}}{d\bar{\rho}} \right)_{x=0}, \quad (40)$$

mostrando claramente un vínculo extremadamente fuerte a ser satisfecho por la solución encontrada.

Finalmente, con estos resultados podemos ver que la ecuación de estado válida para todas las estrellas no singulares y sin materia exótica puede ser escrita en la forma:

$$\bar{\rho}(x) = \frac{b_0}{a_0} \bar{\rho}(x), \quad (41)$$

donde los coeficientes de la densidad pueden ser calculados de forma iterativa usando las relaciones (40) y (29), tal que obtenemos la relación de recurrencia

$$a_{2n+2} = -\frac{a_0}{2b_0(n+1)} \sum_{k=0}^n \frac{a_{2k}}{2k+3} a_{2n-2k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

de la cual podemos deducir que los primeros términos de la serie asociada a la densidad son de la forma:

$$\bar{\rho}(x) = a_0 - \frac{a_0^3}{6b_0} x^2 + \frac{a_0^5}{45b_0^2} x^4 - \frac{61a_0^7}{22680b_0^3} x^6 + O(x^8). \quad (43)$$

Para estudiar la convergencia se sugiere realizar la siguiente substitución

$$z = \frac{a_0}{\sqrt{b_0}} x, \quad (44)$$

la cual permite escribir la serie asociada a la densidad en la forma

$$\frac{\bar{\rho}(z)}{a_0} = 1 - \frac{1}{6} z^2 + \frac{1}{45} z^4 - \frac{61}{22680} z^6 + O(z^8), \quad (45)$$

convirtiendo la serie (43) en una serie numérica que puede ser estudiada usando algún programa de computación algebraica, tal como MAPLE o MATHEMATICA. Los coeficientes de la serie (45) serán llamados de g_{2n} y pueden ser calculados de la Ec. (42). Para calcular el intervalo de convergencia de la serie (45) usamos el criterio de la razón. Para hacer esto, primero calculamos el límite

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{g_{2n+2}}{g_{2n}} \right|. \quad (46)$$

Sin embargo, es fácil percibir que el cálculo analítico de este límite es muy complicado. De hecho g_{2n+2} depende de una sumatoria, en donde aparecen productos de los coeficientes anteriores. Por esta razón, proponemos un análisis numérico, en donde podamos visualizar este límite (46). La metodología numérica que proponemos es muy simple; para cada valor de n calculamos la razón $\left| \frac{g_{2n+2}}{g_{2n}} \right|$ y

estos resultados son graficados. Es decir, en la Fig. 2 presentamos la razón $\left| \frac{g_{2n+2}}{g_{2n}} \right|$ en función del natural n .

Técnicamente realizamos este gráfico hasta un natural igual a 10000, sin embargo, para una mejor visualización sólo graficamos hasta $n = 200$.

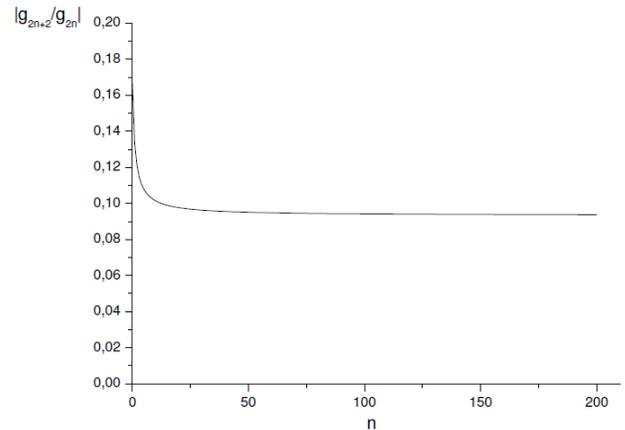


FIGURA 2. Razón entre los coeficientes de la serie da función $\bar{\rho}(z)/a_0$ para los primeros 200 coeficientes. Los resultados muestran que esta razón converge para $L \approx 0,0933$.

Podemos fácilmente visualizar que el límite converge para un valor $L \approx 0,0933$. Esto significa que la serie (45) es convergente para todo valor z , tal que, $0,0933z^2 < 1$, lo que nos permite inferir que el intervalo de convergencia es aproximadamente

$$0 \leq z < 3,27. \quad (47)$$

Para que sea posible visualizar el límite de validez de la solución, presentamos en la Fig. 3, el gráfico que corresponde a la densidad en función de la coordenada z , donde fácilmente se visualiza que la función explota inmediatamente después del valor $z \approx 3,27$.

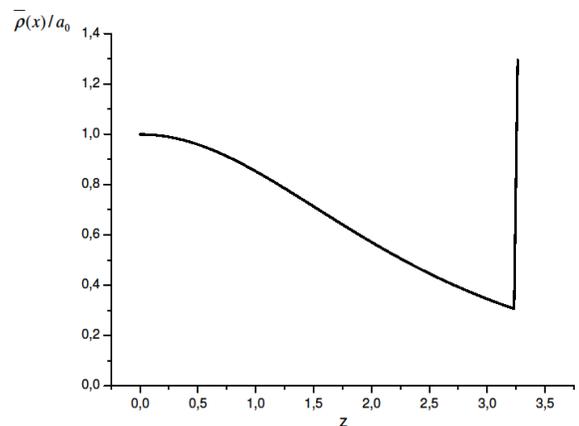


FIGURA 3. Densidad de masa, en unidades de a_0 , en función de la coordenada espacial z . Los términos considerados llegan hasta $O(z^{9000})$. Se verifica rápidamente que la serie explota para $z \sim 3,27$.

Como fue dicho en la sección anterior, la densidad y la presión central de una estrella son consideradas como

parámetros del modelo, tal que, una vez conocidos o elegidos, este modelo puede rápidamente mostrar la dependencia en las cercanías del centro estelar.

Para fines didácticos, comparamos nuestros resultados con el modelo propuesto en la referencia [8], según la cual, para una solución de “orden cero”, se considera la densidad constante: $\bar{\rho}(x) = \bar{\rho}_0 = a_0$. De acuerdo con este modelo más simplificado, la masa, la presión, el flujo y la temperatura son dadas, en nuestra versión adimensional, de la forma

$$m(x) = \frac{a_0}{3} x^3, \tag{48}$$

$$\bar{p}(x) = b_0 - \frac{a_0}{6} x^2, \tag{49}$$

$$\bar{F}(x) = \frac{a_0 q_0}{3} x^3, \tag{50}$$

$$\bar{T}(x) = \bar{T}_0 - \frac{1}{24\pi} \frac{a_0 q_0 K_0}{\bar{T}_0^3} x^2, \tag{51}$$

donde $\bar{F}(x)$ es el flujo de energía adimensional y $\bar{T}(x)$ es la temperatura adimensional. Además, si asumimos que la opacidad y la tasa de producción son constantes en las cercanías del núcleo estelar: $\kappa(x) \approx \kappa_0$ y $q(x) \approx q_0$.

Para fines prácticos elegimos $a_0 = b_0 = 1$ en los gráficos abajo. La Fig. 4 muestra el gráfico para la masa. Rápidamente verificamos que cuando consideramos términos de orden superior en la serie, la masa crece más lentamente que x^3 , traduciendo una diferencia de hasta un factor 2 en la magnitud de la masa en el límite de validez da serie.

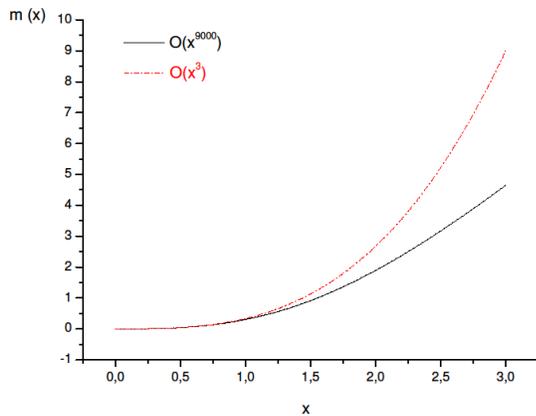


FIGURA 4. Masa m en función de la coordenada espacial x . Línea sólida: masa obtenida por este modelo en serie; Línea trazo-punto-trazo: masa obtenida para densidad constante (vea Ec. (48)).

Los resultados asociados a la presión son expuestos en la Fig. 5.

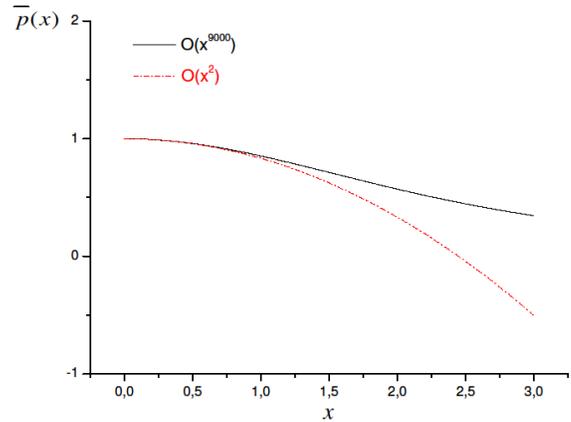


FIGURA 5. Presión p en función de la coordenada espacial x . Línea sólida: presión obtenida por este modelo en serie; Línea trazo-punto-trazo: presión obtenida con la solución de la literatura para el caso de densidad constante.

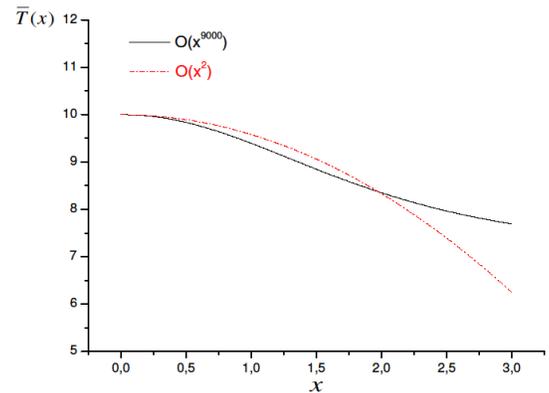


FIGURA 6. Gráfico de la temperatura adimensional \bar{T} en función de la longitud x . Línea trazo-punto-trazo: temperatura obtenida con la solución de la literatura para el caso de densidad constante. Note que la introducción de los términos de orden superior producen un desvío respecto a la dependencia parabólica presentada en la literatura.

Podemos inmediatamente ver que el cálculo en orden cero lleva a valores negativos de presión para $x \approx 2.2$. Si estamos modelando una estrella sin materia exótica o algún tema similar, no esperamos encontrar una presión negativa, principalmente cerca del núcleo. Cuando incorporamos los demás términos en la serie, los valores negativos desaparecen produciendo una función que disminuye más lentamente que la dependencia parabólica prevista en la Ec. (49).

La Fig. 6 trae los resultados para la temperatura, obtenida por integración de la Ec. (18) comparada con los datos previstos por Ec. (51). Elegimos una temperatura central $\bar{T}_0 = 10$ para que la diferencia entre los dos “modelos” sea más fácilmente visualizada. Estos gráficos fueron producidos con $k(x) \approx k_0 = 1$ y $q(x) \approx q_0 = 1$. Note que la consideración de los términos de orden superior

AGRADECIMIENTOS

muestra que la temperatura sufre desvíos del comportamiento parabólico y para $x > 1$ caiga más lentamente hasta los límites de validez de convergencia de la serie cuando es comparada con la aproximación de orden cero. Esto ocurre debido al carácter no lineal de la dependencia de temperatura en la Ec. (18) de transferencia radiactiva. La consideración de modelos más complejos para las funciones de opacidad k y de producción de energía que ciertamente debe conducir a comportamientos aún más diferenciados.

No colocamos el gráfico del flujo porque su comportamiento es equivalente al de la masa y por lo tanto no produce nuevas informaciones.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo estudiamos las ecuaciones de estructura estelar para una estrella Newtoniana en equilibrio hidrodinámico y hemos demostrado que la ecuación de estado, para el caso barotrópico, válida en las cercanías del centro estelar tiene una forma explícita bien definida usando una expansión en series en torno al centro estelar. Este tratamiento en series es muy simple en su concepción, y permite discutir todos los aspectos de la teoría de estructura estelar. Esta metodología puede ser usada por nuestros estudiantes para enfrentar problemas asociados a ecuaciones de estado más complejas, y ciertamente se obtendrán resultados significativos para la densidad de masa, la masa, presión y temperatura en las vecindades del centro estelar. Además, mostramos como usar un problema de origen astrofísico para estimular a estudiantes de ciencias exactas en general a buscar modelos matemáticos más elaborados usando herramientas analíticas y computacionales simples. De hecho, en este trabajo no consideramos efectos de rotación, materia exótica ni singularidades, por lo que dejamos la inquietud planteada para explorar esta simple metodología en trabajos futuros.

J. Díaz Polanco agradece a la Dirección de Investigación de la Universidad Arturo Prat, Chile, por el apoyo otorgado para la realización de este trabajo; Proyecto interno: DI 0050-09.

F. Arretche agradece a la Universidad del estado de Santa Catarina-UDESC, Brasil, por apoyar la estadía en Chile para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Eddington, A. S., *The Internal Construction of the Stars*, Cambridge University Press, (1926); Kippenhan, R. and Weigert, A., *Stellar Structure and Evolution*, 3rd Ed. (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [2] Hansen, C. J., Kawaler, S. D. and Trimble, V., *Stellar Interiors: Physical Principles, Structure and Evolution*, 2nd Ed. (Springer, New York, 2004).
- [3] Padmanabhan, T., *Theoretical Astrophysics, Vol. II*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000), p. 58.
- [4] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, (Dover, New York, 1957).
- [5] de Loore, C. B. (Ed.), *Late Stages of Stellar Evolution: Computational Methods in Astrophysics Hydrodynamics*, (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991), p. 26.
- [6] Thompson, J. M. and Christensen-Dalsgaard, J. (Eds), *Stellar Astrophysical Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
- [7] Adler, R., *Introduction to General Relativity*, (McGraw-Hill Inc., New York, 1975), p. 195.
- [8] Prialnik, D., *An Introduction to the Theory of Stellar Evolution*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2000), pp. 73 y 228.