¿Conocer la trayectoria exacta de un planeta implica conocer la posición del planeta como función exacta del tiempo?

Fernanda Santana[1], **Paco Talero**[1, 2]
[1]*Grupo FISINFOR, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.*
[2]*Grupo Física y Matemática, Depto. de Ciencias Naturales, Universidad Central, Carrera 5 No 21-38, Bogotá, Colombia.*

E-mail: lfsantanag@udistrital.edu.co, ptalerol@ucentral.edu.co

(Recibido el 25 de Mayo de 2011; aceptado el 27 de Junio de 2011)

Resumen
Se presenta una aclaración al típico error conceptual que se comete al creer que en general conocida la trayectoria exacta de un planeta es posible obtener la función exacta de su posición respecto al tiempo, este análisis se realiza con base en una deducción corta, pero exacta, de la trayectoria del planeta y la exploración de la ecuación de Kepler. La evidencia de tal error se obtuvo a través de un estudio cualitativo de caso con profesores universitarios donde se usó como instrumento una entrevista informal corta.

Palabras clave: Planeta, trayectoria, idea falsa en astronomía.

Abstract
We clarify the typical misconception that some students and teachers have as they believe that in general if they know the exact path of a planet then they can obtain the exact function of the position with respect to time, we devise this analysis based in a short deduction of the path of the planet and the study of the Kepler´s equation. We interviewed teachers to find misconceptions.

Keywords: Planet, path, misconception in astronomy.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.gb, 01.50.Kw. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de la tierra alrededor del sol y en general el problema de dos cuerpos aislados bajo interacción gravitacional es abordado en diversos textos desde diferentes perspectivas y a diferentes niveles [1, 2, 3], así mismo en los cursos generales de física en ciencias o ingeniería habitualmente se estudia este problema. Sin embargo, es común encontrar que algunos estudiantes e incluso profesores mantienen la creencia errónea de que una solución exacta de la trayectoria trae consigo una solución exacta de la posición como función del tiempo. En este artículo se presentan los resultados de un estudio de caso realizado con profesores universitarios que evidencia esta situación. Así mismo el artículo busca aclarar la razón por la cual el conocimiento de la trayectoria exacta de un planeta no implica que pueda en general conocerse a partir de esta información las coordenadas radial y angular como funciones de tiempo.

En la sección II se presenta la metodología usada para indagar la presunta idea falsa en profesores universitarios y los resultados obtenidos. Para dar un contexto físico al problema en la sección III se presenta una deducción general de la trayectoria exacta de dos cuerpos celestes bajo interacción gravitacional, usando para esto un método corto que toma la excentricidad como un vector [4]. En la sección IV se acude a la conservación de la energía para hallar una relación entre el tiempo y la anomalía excéntrica (ver apéndice A), relacionando la coordenada radial con el tiempo, pero no de manera exacta. También se expone en esta sección las razones por las cuales el conocimiento exacto de la trayectoria no implica el conocimiento exacto de la posición como función de tiempo. En la sección V se comentan algunas posibles razones que explican el surgimiento de la idea errónea y finalmente en la sección VI se presentan las conclusiones.

II METODOLOGÍA Y RESULTADOS

La metodología usada consistió en un estudio de caso cuyo instrumento fue una corta entrevista informal aplicada de manera individual que tomó alrededor de unos diez minutos. Se escogieron 10 profesores de diversas universidades de Bogotá cuyo ejercicio profesional abarca la enseñanza de la física en ingeniería y ciencias naturales adscritas a diversas carreras. El objetivo planteado fue conocer la respuesta por parte de los profesores a la pregunta: ¿Conocer la trayectoria exacta de un planeta implica conocer la posición del planeta como función exacta del tiempo?

El objetivo planteado al entrevistado fue una indagación sobre algunas ideas sobre el movimiento planetario. La metodología seguida en la entrevista fue la siguiente: Investigador y entrevistado parten del común acuerdo de que un planeta gira en torno al sol en una órbita elíptica cuya ecuación es completamente conocida y por tanto la trayectoria del planeta alrededor del sol se conoce de manera exacta, luego el investigador pregunta al entrevistado que si esto implica conocer de manera exacta la posición del planeta para un tiempo arbitrario dado. A partir de este punto la entrevista evoluciona a través de un debate que el investigador intenta llevar en forma socrática.

Como resultado de la entrevista se observó que 9 de los 10 profesores respondieron de manera afirmativa a la pregunta inicial y luego de el debate socrático entraron en un conflicto cognitivo del cual no lograron salir durante el debate. El profesor que no respondió afirmativamente la pregunta permaneció en conflicto cognitivo durante todo el debate y no se arriesgó con una respuesta definitiva.

Los resultados indican que para la mayoría de los profesores entrevistados el conocer la trayectoria exacta de un planeta implica conocer la posición del planeta como función exacta del tiempo y aunque algunos duden de ello no encuentran una explicación física inmediata.

III. TRAYECTORIA

En esta sección y la siguiente se busca explicar porque el conocer la trayectoria exacta de un planeta no implica conocer la posición de este como función exacta del tiempo.

Se considera un sistema de dos cuerpos celestes cuyas masas son m_1 y m_2 que están completamente aislados y sólo bajo interacción gravitacional, este sistema al ser observado desde un marco de referencia inercial O evidencia que su centro de masa se mueve con velocidad constante o permanece en reposo. En este sistema aislado tanto el momento angular como la energía se conservan lo que trae como consecuencia que el sistema sea conservativo y que el movimiento del planeta este confinado a un plano. De otro lado, los cuerpos celestes se modelan como distribuciones uniformes y esféricas de masa, lo que conlleva a considerarlos como partículas puntuales. Casos particulares de estos sistemas son los sistemas sol-tierra, tierra-luna o sistemas binarios de estrellas, ver Fig. 1.

En la Fig. 1, se observa la posición tanto del cuerpo celeste de masa m_1 como del cuerpo celeste de masa m_2 así como la posición del centro de masa respecto al marco de referencia inercial *O*, las cuales se denotan como $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, y $\vec{r}_{cm}$ respectivamente.

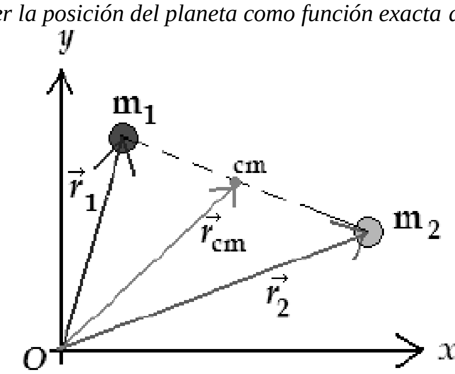

FIGURA 1. Sistema de dos cuerpos bajo interacción gravitacional.

La relación entre cada uno de los vectores de posición vistos desde el centro de masa y el de la posición relativa con las posiciones de los cuerpos respecto al marco de referencia inercial se ilustran gráficamente en la Fig. 2 e implican las relaciones

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1,$$
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{1cm} + \vec{r}_{cm}, \qquad (1)$$
$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{2cm} + \vec{r}_{cm},$$

donde $\vec{r}_{cm}$ es la posición del centro de masa definida como

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}. \qquad (2)$$

De la Fig. 2 y de las Ecs. (1) y (2) se obtienen relaciones entre $\vec{r}_{2cm}$ y $\vec{r}_{1cm}$ con $\vec{r}$ que están dadas por

$$\vec{r}_{2cm} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\vec{r}, \vec{r}_{1cm} = -\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)\vec{r}. \qquad (3)$$

Para conocer la trayectoria que siguen los cuerpos celestes es necesario conocer todas las fuerzas que actúan sobre cada uno de ellos para así hallar la fuerza neta y aplicar la segunda ley de Newton, en este sistema la única fuerza que actúa sobre los cuerpos es la fuerza de atracción gravitacional expresada como

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r \text{ y } \vec{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r\ . \qquad (4)$$

Ahora, de acuerdo con la tercera ley de Newton estas fuerzas deben cumplir la relación $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ como se ilustra en la Fig. 3, al aplicar la segunda ley de Newton al cuerpo de masa m_2 se tiene

$$m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r. \qquad (5)$$

En la Ec. (5) r es la distancia relativa de los cuerpos, es decir la magnitud de la posición del cuerpo de masa m_2 respecto al de masa m_1, mientras que el $\vec{r}_2$ es la posición del cuerpo dos respecto al origen del marco de referencia inercial *O*, además debe tenerse presente que el vector unitario $\hat{u}_r$ está definido como $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

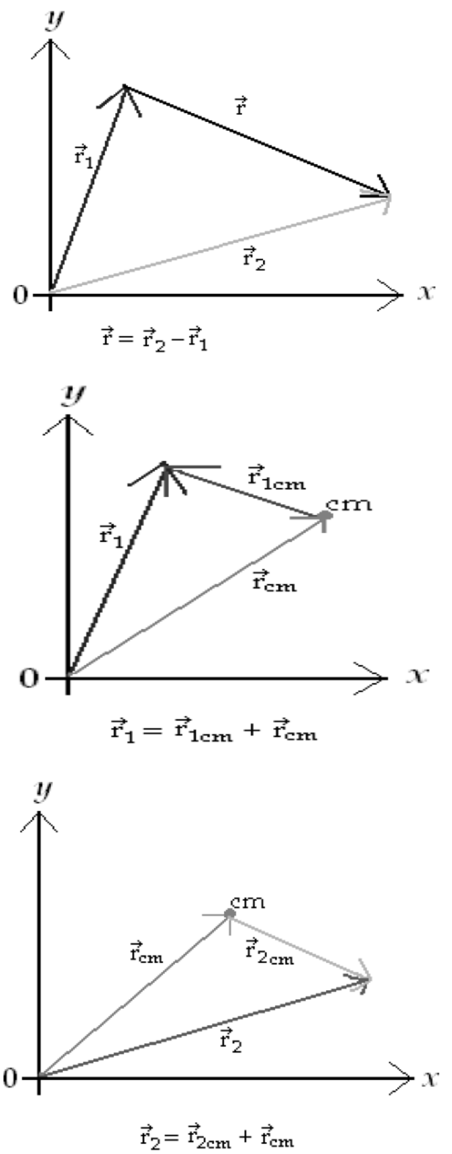

FIGURA 2. Relación entre los vectores de posición.

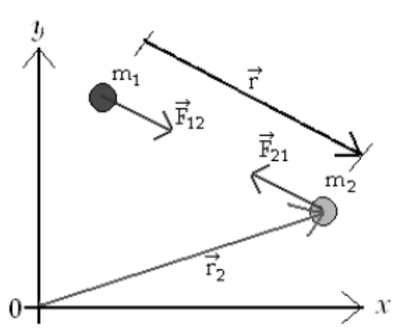

FIGURA 3. Fuerzas que actúan sobre las partículas.

La Ec. (5) se debe expresar en términos de *r*, para lograr esto se relacionan las Ecs. (1) y (3) con la Ec. (5) y se observa ahora desde el centro de masa, que es un marco inercial de referencia. Así la segunda ley de Newton para el cuerpo de masa m_2 puede expresarse como

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r, \tag{6}$$

el término $\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ se conoce como la masa reducida μ, de tal forma que la Ec. (6) se expresa como

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{u}_r. \tag{7}$$

De otro lado se sabe que el momento angular de este sistema se puede expresar como [1, 2, 3]

$$\vec{L} = \vec{r}\times\mu\vec{v}, \tag{8}$$

donde $\vec{v}$ es la velocidad relativa, es decir la velocidad del cuerpo de masa m_1. Si el marco de referencia, con origen en el centro de masa, se orienta de manera que el movimiento de los cuerpos celestes sea en el plano *xy*, el momento angular para este sistema tendrá su dirección positiva en el eje *z*. Ahora, de acuerdo con la simetría del sistema es pertinente expresar la velocidad en coordenadas cilíndricas, la cual se expresa como

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta, \tag{9}$$

y si se reemplaza la velocidad $\vec{v}$ de la expresión (9) en (8) el momento angular de éste sistema queda expresado como

$$\vec{L} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{u}_z. \tag{10}$$

Para encontrar la trayectoria de los cuerpos celestes la expresión (7) se expresa en términos de la velocidad relativa $\vec{v}$, que al despejar y simplificar se convierte en

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm'}{r^2}\hat{u}_r, \tag{11}$$

donde $m' = \frac{m_1m_2}{\mu}$, que tiene unidades de masa.

Ahora, al reemplazar y simplificar en la Ec. (11) el momento angular obtenido en la Ec. (10) se encuentra

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{Gm_1m_2}{L}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} \tag{12}$$

que al simplificar se transforma en

$$\vec{v} = \frac{Gm_1m_2}{L}(\hat{u}_\theta + \vec{e}). \tag{13}$$

Aquí al integrar (12) se debe considerar una constante de integración que para este caso es de carácter vectorial y se denota como $\vec{e}$. Este vector constante es llamado vector excentricidad [4] y su dirección debe ser también invariante con el tiempo, dado que tanto $\hat{u}_r$ como $\hat{u}_\theta$ varían con el tiempo se debe considerar la dirección del vector excentricidad en coordenadas cartesianas, por ejemplo $\vec{e} = e\hat{u}_y$ con $e \geq 0$.

Al usar este hecho en la Ec. (13) y reemplazando la velocidad relativa obtenida en la Ec. (9) se tiene

$$\dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta = \frac{Gm_1m_2}{L}\left(\hat{u}_\theta + e\hat{u}_y\right), \qquad (14)$$

que al multiplicar escalarmente por $\hat{u}_\theta$ y resolver el producto punto se logra la expresión

$$r\dot{\theta} = \frac{Gm_1m_2}{L}(1 + eCos\,\theta). \qquad (15)$$

Si ahora se expresa $\dot{\theta}$ en función del momento angular mediante la Ec. (10) y se reemplaza en (15) y se despeja r se tiene

$$r = \frac{L^2}{Gm_1m_2\mu(1+eCos\theta)}. \qquad (16)$$

El término $\frac{L^2}{Gm_1m_{2\mu}}$ en (16) se conoce como parámetro de órbita P [5], de manera que la trayectoria está dada por

$$r = \frac{P}{1+e\,Cos\,\theta}\,. \qquad (17)$$

La Ec. (17) de la trayectoria es general y se conoce como la ecuación de una cónica siendo e la excentricidad, ésta determina el tipo de cónica así: para $e = 0$ la trayectoria corresponde a una circunferencia, para $0 < e < 1$ la trayectoria es elíptica, para $e = 1$ es una parábola y para $e < 1$ es una hipérbola [1, 3, 5, 6, 7].

De otro lado, como el sistema es conservativo la energía mecánica se conserva y se expresa como

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 - \frac{Gm_1m_2}{r}, \qquad (18)$$

donde $\frac{1}{2}\mu v^2$ se conoce como energía cinética y $-\frac{Gm_1m_2}{r}$ es la energía potencial gravitacional que depende exclusivamente de la distancia entre las partículas [5, 6, 7]. Al expresar la velocidad en función del momento angular la energía del sistema es

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}. \qquad (19)$$

Cuando en un sistema de dos cuerpos bajo interacción gravitacional uno de ellos tiene una masa mucho mayor que la otra entonces la masa reducida es prácticamente igual a la masa mayor y el centro de masa del sistema se traslada prácticamente al centro del cuerpo de mayor masa, este es el caso por ejemplo del sistema Sol-Tierra.

IV. EN BUSCA DE LA POSICIÓN DEL PLANETA COMO FUNCIÓN EXACTA DE TIEMPO

Conocer la posición del planeta como función exacta del tiempo significa conocer las coordenadas radial y angular como funciones exactas y explicitas de tiempo, a continuación se muestra que tal objetivo en general no se consigue.

La conservación de la energía para un sistema de dos cuerpos aislados y únicamente bajo interacción gravitacional se muestra al escribir (19) como

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{Gm_1m_2}{r}, \qquad (20)$$

y al separar variables, integrar, multiplicar r y dividir por r se obtiene

$$t = \int\left(\frac{2}{\mu}\left[E - r^2 - \frac{L^2}{2\mu} + Gm_1m_2r\right]\right)^{-\frac{1}{2}} rdr + C, \qquad (21)$$

donde C es la constante de integración [3, 5, 6, 7]. Ahora, puesto que el planeta es un cuerpo celeste ligado al sol su energía mecánica es negativa y se puede expresar como

$$E = -E_0, \qquad (22)$$

con $E_0 > 0$. De otro lado, se puede encontrar las relaciones:

$$a = \frac{Gm_1m_2}{2E_0}, \qquad (23)$$

$$\frac{L^2}{2\mu E_0} = a(1 - e^2). \qquad (24)$$

Al reemplazar (22), (23) y (24) en (20) y realizar los procedimiento algebraicos pertinentes para agrupar a y r mediante un trinomio cuadrado perfecto, (20) se transforma en

$$\left(\frac{2E_0}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} t = \int[a^2e^2 - (r-a)^2]^{-\frac{1}{2}} rdr + C, \qquad (25)$$

donde resulta ideal la sustitución

$$r - a = -aeCos(\varepsilon). \qquad (26)$$

Al llevar a cabo la sustitución (26) en (25) e integrar se encuentra

$$2\pi\frac{t}{T} = \varepsilon - eSen(\varepsilon), \qquad (27)$$

y sin pérdida de generalidad es posible tomar *C=0* ya que se puede elegir el tiempo cero justo cuando el planeta se encuentra en su perihelio [5], además en (27) T es el periodo del planeta dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2\mu}{2E_0}}\,. \qquad (28)$$

La Ec. (27) es conocida en la literatura como la Ec. de Kepler y ε suele llamarse anomalía excéntrica [8], la interpretación geométrica y física se presenta en el apéndice A.

Nótese que en (27) el tiempo depende de la anomalía excéntrica y que una inversión de (27) no es posible, de acuerdo con esto y teniendo presente la Ec. (26) se puede concluir que no es posible expresar r como una función explicita de tiempo y que además para conocer r dado un tiempo particular es necesario un procedimiento numérico de algún tipo, ya que se requiere resolver (27). Así mismo, para conocer θ dado el tiempo es preciso conocer r y dado que r no es función explicita del tiempo tampoco θ es una función explicita del tiempo. Dado que conocer la posición del planeta como función del tiempo implica conocer sus coordenadas como funciones exactas y explicitas de tiempo lo anterior significa que no es posible conocer la posición del planeta como función exacta y explicita de tiempo.

De otro lado resolver la ecuación diferencial que involucra la segunda ley de Newton, Ec. (7), significa obtener soluciones para la coordenadas r como función de tiempo ya sea de forma implícita $S(r,t)=0$ de forma explícita $r=r(t)$ [9,10], pero como esto no se tiene se puede afirmar que (7) no tiene solución analítica, afirmación que también resulta evidente por lo discutido más arriba.

Por último, se puede pensar que la solución (27) aparece dado que no se ha realizado con suficiente cuidado la Ec. (21) y que tal vez se logra una solución analítica usando otro tipo de sustitución o argumentación matemática. Bien, obsérvese como este argumento se reduce al absurdo: suponga que se tiene por algún método una solución exacta $r=r(t)$, esto significa entonces que dado un tiempo t es posible hallar de manera exacta la coordenada r correspondiente, por lo tanto de acuerdo con (26), que sigue teniendo validez general, sería posible hallar la anomalía excéntrica ε y por tanto la ecuación trascendente de Kepler tendría solución exacta, lo que resulta contradictorio dado el conocimiento que se tiene sobre la no inversión de ecuaciones trascendentes.

V. ¿DE DÓNDE PROCEDE ESTA FALSA IDEA?

Ciertamente resulta incómodo pensar que la segunda ley de Newton no tiene una solución analítica cuando de antemano se conoce que los planetas se mueven en trayectorias elípticas cuya ecuación es bien conocida, sin embargo quizá se descuide el hecho de que en este sistema interviene la conservación del momento angular y de la energía cuyo uso es fundamental al calcular la trayectoria, pero que aún así la segunda ley de Newton sigue sin resolverse. De otro lado, el estudio de sistemas presentes en la formación básica como el movimiento parabólico, el movimiento circular uniforme y en particular la aproximación del movimiento planetario como circular uniforme admiten una solución analítica de la segunda ley y de esta se extrae por lo general la trayectoria, quizá este proceder cultive la idea falsa de que el conocimiento de la trayectoria proviene de la solución exacta de la segunda ley de Newton y que por tanto conocer la trayectoria significa conocer la posición exacta.

VI. CONCLUSIONES

Se reportó, mediante un estudio de caso aplicado a profesores universitarios, la idea falsa de que el conocimiento exacto de la trayectoria de un planeta implica un conocimiento exacto de su posición respecto al tiempo, también se mostraron algunas razones físicas y matemáticas que evidencian la falsedad de tal idea. La importancia de este trabajo radica en que se dio a conocer una preconcepción o idea falsa en mecánica celeste, lo cual es importante conocer a la hora de tener una instrucción efectiva. Este estudio deja preguntas abiertas como: ¿qué grado de generalidad tiene este error conceptual?, ¿cuál puede ser su posible origen? y ¿cuáles han de ser las metodologías de instrucción pertinentes para corregirlo?

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar sus agradecimientos a los profesores que de manera amable permitieron realizar las entrevistas y a los colegas con quienes se debatieron las ideas presentadas en este trabajo.

REFERENCIAS

[1] Alonso, M., Finn, E., *Física. Vol. I. Mecánica*, (Adison-wesley, USA, 1967).

[2] Lea, S., Bruke, J., *Física. Vol. I. La naturaleza de las cosas*, (Internacional Thomson Editores, México, 1999).

[3] Marion, J., Thorton, S., *Classical dynamics of particles and systems*, (Thomson, USA, 2000).

[4] Bringier, E., *Excentricity as a vector: a concise derivation of the orbit equation in celestial mechanics*, European Journal of Physics **25**, 369-372 (2004).

[5] Landau, L., Lifshitz, E., *Mecánica curso de Física Teórica*, Vol. I (Reverté S.A., Moscu, 1976).

[6] Goldstein, H., *Mecánica clásica*, (Reverté, Moscu, 1994).

[7] Kleppner, D., Kolenkow, R. J., *Introduction to Mechanics*, (McGraw-Hill, USA, 1973).

[8] Roy, A., Clarke, D., *Astronomy principles and practice*, 4th Ed. (Bristol and Philadelphia, Philadelphia, 2000).

[9] Boyce, E., Di'Prima, R., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, (Pearson, México, 1998).

[10] Zill, D. G., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, 7th Ed. (Grupo Editorial Iberoamérica, México, 2002).

APENDICE A

La Ecuación de Kepler

Dada la trayectoria de un planeta se quiere encontrar una expresión que permita encontrar la posición del planeta para un tiempo *t* en particular. En la Fig. A1 se muestra la trayectoria elíptica que tiene el planeta, sobre esta se ha construido una circunferencia de radio a igual al semieje mayor de la elipse y sobre ella se proyecta la posición en x del planeta dando a entender que un planeta virtual se mueve sobre tal circunferencia.

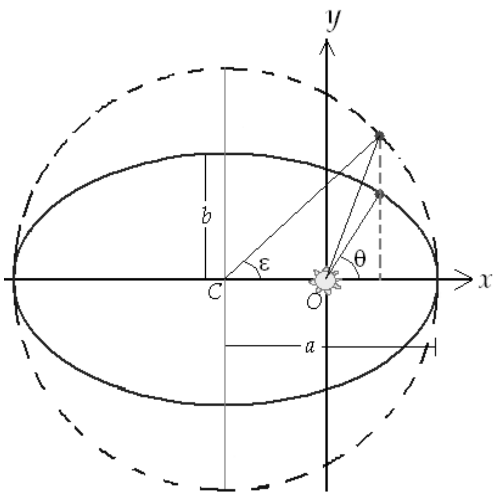

FIGURA A1. Proyección circular de la trayectoria de un planeta.

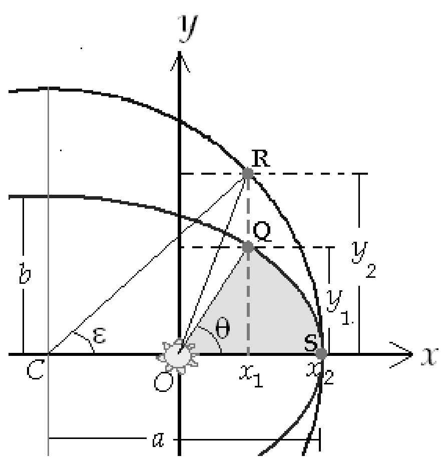

FIGURA A2. Área barrida en tiempo *t*.

Cuando ha transcurrido un tiempo *t* el planeta se encuentra en la posición (x_1, y_1) el planeta virtual en la posición (x_1, y_2) como muestra la Fig. A2, a partir de la ecuación para la elipse y la ecuación para la circunferencia es posible evidenciar que la relación entrey_1 y y_2 es

$$y_2 = \frac{a}{b} y_1, \tag{A1}$$

siendo b el semieje mayor de la elipse. Para un tiempo *t* el radio vector del planeta barre el área A_e comprendida entre los puntos *OSQO* y el radio vector de planeta virtual, que se mide a partir del foco de la elipse, barre el área A_c comprendida entre los puntos *SROS* como muestra la Fig. A2, usando la Ec. (A1) y las ecuaciones para la circunferencia y la elipse se puede encontrar que estas áreas están relacionadas como

$$A_c = \frac{a}{b} A_e. \tag{A2}$$

La Ec. (A2) resulta evidente si se dividen las áreas *OSQO* y *SROS* en áreas comprendidas entre *0* y x_1 y entre x_1 y x_2, pues resulta en áreas entre dos triángulos rectángulos y el área de funciones de segmentos de circunferencia y elipse.

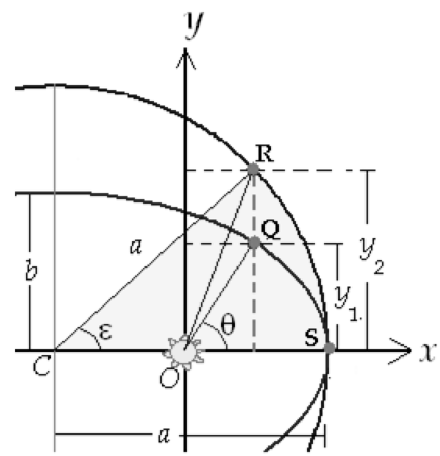

FIGURA A3. Relación de áreas barridas.

Ahora, al aplicar la segunda ley de Kepler, la cual afirma que el radio vector barre aéreas iguales en tiempos iguales, se encuentra que el área barrida por el radio vector del planeta en un tiempo *t* es

$$A_e = \frac{\pi ab}{T} t, \tag{A3}$$

y por tanto el área barrida por el radio vector del planeta virtual es

$$A_c = \frac{\pi a^2}{T} t. \tag{A4}$$

Por otro lado se sabe que el área del sector circular en un circulo es una función lineal del ángulo barrido, de manera que el área A_s del sector circular confinado por los puntos *CSRC* está dada por

$$A_s = \frac{a^2}{2} \varepsilon, \tag{A5}$$

además, nótese que el área A_T del triangulo *COR* es

$$A_T = \frac{ea^2}{2} Sen(\varepsilon) \tag{A6}$$

además en la Fig. 3 se observa relación entre las áreas A_s, A_T y A_c que es

$$A_s = A_T + A_c, \tag{A7}$$

lo que conduce, usando las Ecs. (A4), (A5) y (A6), a la relación final

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right) t = \varepsilon - eSen(\varepsilon)\ . \tag{A8}$$

La Ec. (A8) es la misma Ec. (27).