

Experimentos virtuales sobre el movimiento planetario



Fernanda Santana¹, Paco Talero^{1,2}

¹Grupo FISINFOR, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

²Grupo Física y Matemática, Depto. de Ciencias Naturales, Universidad Central, Carrera 5 No 21-38, Bogotá, Colombia.

E-mail: lfsantanag@udistrital.edu.co, ptalerol@ucentral.edu.co

(Recibido el 11 de Enero de 2011; aceptado el 15 Junio de 2011)

Resumen

Se estudia el movimiento planetario a través de experimentos virtuales con base en argumentos físicos elementales e intuitivos que permiten reinterpretar el método de Verlet. Esta metodología está basada en el movimiento uniforme rectilíneo y en el análisis gráfico, por tanto permite acercar a estudiantes de un primer curso de mecánica newtoniana a la comprensión de las leyes de Kepler ya que no requiere de un contenido matemático avanzado. Además, con estos experimentos virtuales es posible conocer de manera aproximada la posición del planeta en función del tiempo, situación que no es posible en forma analítica. La precisión del método se evalúa mediante el control de la conservación de la energía y del momento angular.

Palabras clave: Anexar Experimento virtual, movimiento planetario, método de Verlet.

Abstract

We study the planetary motion with virtual experiments based on intuitive and elementary physical arguments that allow reinterpret the popular Verlet's method. This methodology is based on the uniformly motion and this can be used in the basic course of Newtonian mechanics to study the Kepler's laws, because this methodology does not include advanced mathematics. With these virtual experiments it is possible to know the position of the planets as a function of time, situation that cannot be calculated analytically. The precision of the method is evaluated by monitoring the conservation of energy and the conservation the angular momentum.

Keywords: Virtual experiment, planetary motion, Verlet's method.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.gb, 01.50.Kw.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Los progresos en la tecnología informática permiten acercarse a la solución aproximada e intuitiva de problemas físicos que por su carácter matemático no están al alcance de estudiantes de un curso introductorio de mecánica Newtoniana [1, 2]. Así, cuando un sistema físico cuya solución analítica no se conoce o es muy compleja en determinado contexto, pero el sistema puede modelarse mediante algoritmos simples e intuitivos y se logra estudiar sus múltiples comportamientos variando sus condiciones iniciales, sus parámetros y algunos procesos propios se dice que se está explorando la naturaleza mediante un experimento virtual (ExV) [3], en este proceso es posible plantear y confrontar hipótesis de inmediato, explorar el comportamiento de los sistemas físicos en condiciones reales y abordar sistemas que presentan grandes o pequeños tiempos de evolución [4]. También han sido motivo de investigación en física educativa las simulaciones y animaciones como herramientas didácticas y se ha explorado, entre otras características, las bondades que

estas presentan en la mejora de la comprensión de conceptos básicos [5, 6].

En este trabajo se muestra una solución numérica al problema tradicional del movimiento de dos cuerpos bajo la interacción gravitacional y con una masa reducida del orden de la masa mayor [7, 8], en particular un sistema sol planeta. Para este sistema se consideran los planetas y el sol como partículas puntuales, además se sabe que el centro de masa se encuentra prácticamente en el sol, que la energía mecánica y el momento angular se conservan, que el movimiento del planeta se realiza en un plano en el cual está contenido el sol y que si la energía de tal sistema es menor que cero se cumplen las tres leyes de Kepler [7, 8].

Para implementar la solución numérica se usa el método de Verlet que es presentado en la sección II mediante un planteamiento físico intuitivo y de buena precisión. En la sección III se presentan algunos ejemplos concretos de ExV sobre movimiento planetario. Esta solución numérica puede trabajarse con estudiantes de un primer curso de mecánica Newtoniana al poner en uso el código del programa presentado en la sección IV.

II. DISCONTINUIDAD EN EL MOVIMIENTO PLANETARIO

El movimiento de un planeta alrededor del sol está descrito por la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton por tanto la aceleración viene dada por

$$\vec{a} = \frac{-GM}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (x\hat{u}_x + y\hat{u}_y). \quad (1)$$

Donde G es la constante de gravitación universal, M la masa del sol y \hat{u}_x , \hat{u}_y son los vectores unitarios a lo largo de los ejes x y y respectivamente.

Para aproximar el movimiento continuo del planeta alrededor del sol es preciso realizar algún tipo de hipótesis sobre el movimiento que habrá de seguir el planeta entre algunos intervalos discretos y fijos de tiempo. Se han realizado aproximaciones de movimiento en incrementos iguales de ángulo [9]. Sin embargo, aquí se propone e implementa la hipótesis fundamental de que en intervalos de tiempo iguales los planetas se mueven con movimiento rectilíneo uniforme durante un tiempo muy corto Δt cambiando la velocidad y aceleración en cada nuevo intervalo de tiempo de acuerdo con la ley de gravitación universal. Esta hipótesis no es más que una reinterpretación del bien conocido método de Verlet, es decir el resultado de la presentación formal del método coincide con la hipótesis aquí planteada [10, 11]. Esto se aprovecha desde un punto de vista didáctico para realizar ExV sobre el movimiento planetario.

El método de Verlet es un método de aproximación que permite implementar la discontinuidad del movimiento y se realiza suponiendo, como hipótesis fundamental, que a partir de una posición y velocidad iniciales el planeta se mueve con velocidad constante durante un tiempo corto Δt comparado con el periodo, al cabo de este tiempo la aceleración y la velocidad cambian de acuerdo con (1) y (4) luego de nuevo se mueve con velocidad constante durante el mismo tiempo, ver Fig. 1. El proceso se repite hasta que se complete un periodo.

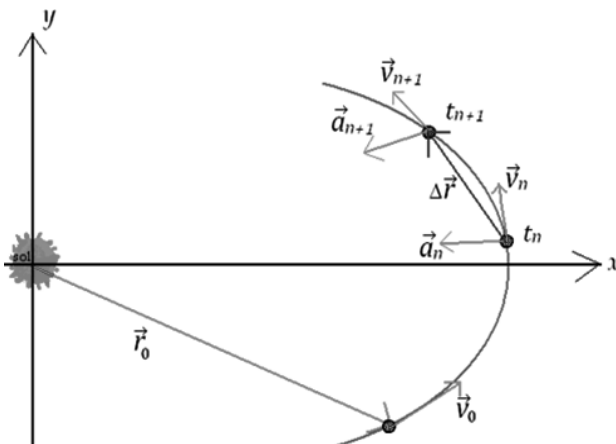


FIGURA 1. Posición, desplazamiento, velocidad y aceleración del planeta, para t_0 , t_n y t_{n+1} . Con $\Delta t = t_{n+1} - t_n$.

Experimentos virtuales sobre el movimiento planetario

A partir de las condiciones iniciales \vec{r}_0 y \vec{v}_0 se calcula sucesivamente la aceleración y la velocidad como sigue:

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{F}(\vec{r}_n)}{m}, \quad (2)$$

$$\vec{r}_{n+1} = \vec{r}_n + \vec{v}_n \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_n (\Delta t)^2, \quad (3)$$

$$\vec{v}_{n+1} = \vec{v}_n + \frac{1}{2} (\vec{a}_{n+1} + \vec{a}_n) \Delta t. \quad (4)$$

El método de Verlet aproxima el movimiento planetario continuo a sucesivos movimientos uniformes rectilíneos puesto que Δt es muy pequeño comparado con el periodo hace que el término que contiene Δt^2 en (3) sea despreciable y por tanto ésta expresión corresponda a la de un movimiento uniforme rectilíneo.

La precisión del método de aproximación se evalúa a través de la conservación de la energía y el momento angular, para implementar esta evaluación se calcula la energía y el momento angular en la condición inicial, se deja mover el planeta hasta cerrar su órbita y de nuevo se calculan para evaluar su diferencia. Los errores porcentuales se definen como [12].

$$\epsilon_E = \left| \frac{\Delta E}{E_0} \right| \times 100\%, \quad (5)$$

$$\epsilon_L = \left| \frac{\Delta L}{L_0} \right| \times 100\%. \quad (6)$$

Las Ecs. (5) y (6) muestran la pertinencia del método.

Por otro lado, debido al proceso de redondeo debe usarse unidades adecuadas, para éste caso las unidades más apropiadas son la unidad astronómica (1UA = 1,46 x 10¹¹m), para la distancia, para el tiempo el año (1año = 3,156 x 10⁷s) y para la masa se toma la masa terrestre. Así, se encuentra que $GM = 4\pi^2 \text{UA}^3/\text{año}^2$ [10].

El algoritmo que implementa el método es el siguiente:

1. Se escoge un tiempo Δt pequeño en comparación con el periodo.
2. Se define el periodo T del movimiento planetario.
3. Se definen los parámetros y las condiciones iniciales.
4. Se calcula la energía y el momento angular.
5. Se observa si el tiempo de evolución t es mayor o igual al periodo, si es así se va al paso 11 de lo contrario va al paso 6.
6. Se calcula la aceleración del planeta mediante (1) y la almacena como \vec{a}_{aux} .
7. Se calcula la nueva posición del planeta media (3) e imprime posición vs. tiempo.
8. Se calcula la aceleración mediante (1) y a partir de la posición hallada en el paso 7.
9. Se calcula la velocidad mediante (4) teniendo en cuenta la aceleración calculada en el paso 6.
10. Incrementa el tiempo en Δt .

11. Se calcula la energía y el momento angular.
12. Se evalúan los errores mediante (5) y (6) y se imprimen.
13. Fin.

III. ALGUNOS EXPERIMENTOS VIRTUALES

Para extraer la información física es preciso tener algunos datos experimentales de los planetas como el periodo, el perihelio y la masa. Una vez ingresados los parámetros y las condiciones iniciales al modelo se procede a realizar los ExV.

Para estudiar la primera ley de Kepler se introduce el perihelio del planeta y se da una velocidad tangencial tentativa correspondiente a la velocidad del planeta en ese punto, se observa la trayectoria y de nuevo se ajusta la velocidad tangencial hasta que la trayectoria se cierre cuando el tiempo máximo de evolución del sistema coincida de manera precisa con el periodo. Luego se ajusta el ExV para obtener la posición en cada tiempo del planeta en estudio. En la Fig.2 se muestra la trayectoria del planeta Júpiter obtenida por este método.

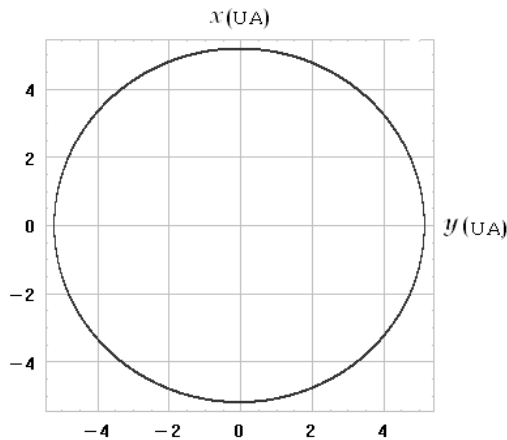


FIGURA 2. Trayectoria de Júpiter alrededor del Sol.

La segunda ley de Kepler se estudia a partir de la gráfica de la trayectoria. Se imprime ésta gráfica en papel milimetrado o se da la opción de cuadrícula al paquete procesador de gráficos y se tiene a mano los resultados del ExV que arrojó de posición contra tiempo del planeta. A partir de cualquier punto de la trayectoria del planeta en un tiempo t_0 , se estima el área barrida por el radio vector durante diversos tiempos t_1, t_2 etc, en la Fig.3 se muestra este procedimiento para el planeta Júpiter.

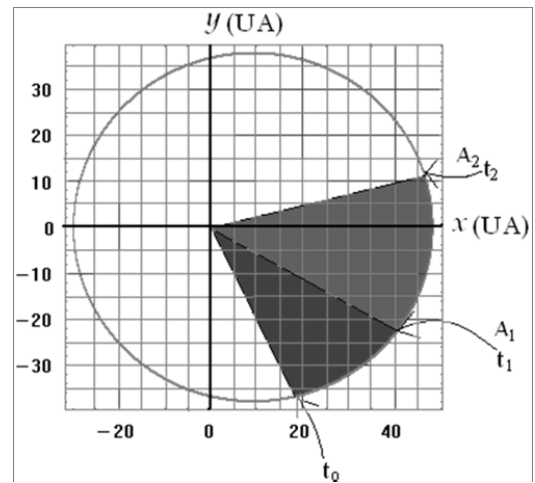


FIGURA 3. Trayectoria de Júpiter alrededor del Sol.

Los valores estimados se consignan en la tabla I y la gráfica se muestra en la Fig.4.

TABLA I. Área barrida por el radio vector como función del tiempo.

t(años)	0	2	4	6	8	10	11.8
A(UA ²)	0	14	28,5	42	57	72	84,5

La pendiente de la gráfica en la Fig. 4 representa al área barrida por el radio vector en la unidad de tiempo, que es alrededor de $7,2 \text{ UA}^2/\text{año}$ que se calculó mediante regresión lineal.

Para estudiar la tercera ley de Kepler se imprimen las trayectorias de todos los planetas del sistema solar y a partir de estas gráficas de trayectoria se estiman sus periodos y semiejes mayores y luego se realiza la gráfica del cubo del semieje mayor contra el cuadrado del periodo y se analiza su pendiente. La gráfica de la Fig. 5 fue obtenida por este método y su pendiente es aproximadamente $0,32 \text{ años}^2/\text{UA}^3$.

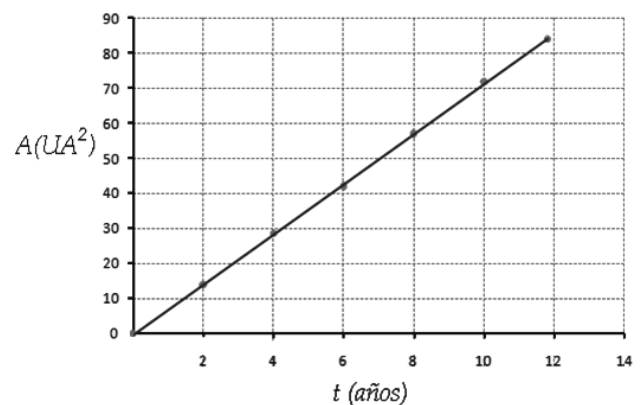


FIGURA 4. Área barrida por el radio vector en función del tiempo.

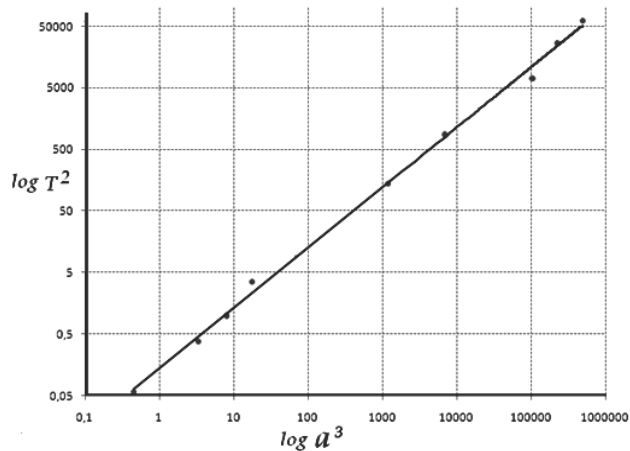


FIGURA 5. Gráfica log–log que da cuenta de la 3ª ley de Kepler.

Los errores porcentuales obtenidos en los ExV tanto en la conservación de la energía como en la conservación del momento angular no superan el 0.001%. Lo que significa que los resultados obtenidos son confiables para la extracción de conclusiones físicas correctas sobre el movimiento planetario.

IV. REPORTE TÉCNICO

Para materializar los ExV hace falta implementar el algoritmo descrito con anterioridad, lo que se puede llevar a cabo ya sea en algún lenguaje de programación o en una hoja de cálculo. Los resultados de los ExV son gráficos que se pueden procesar en cualquier paquete de gráficos como Gnuplot, Mathematica o Excel.

A continuación se muestra el código de un programa en C++ que implementa el algoritmo necesario para materializar los ExV. Este programa se compiló en el Dev-C++ 4.9.9.2.

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <iostream.h>
#include <conio.h>
//- Parámetros -----
#define PI 3.14159265
#define Tmax 11.86 //Tiempo.
#define dt 0.001 //Incremento en el tiempo.
#define GM 4*PI*PI //Constante de gravedad y masa solar.
//-----Condiciones iniciales -----
#define mp 317.8 //Masa del planeta
#define Th 3.0*PI/2.0 //Ángulo en el perihelio.
#define xo -5.2 //Perihelio
#define yo 0.0 //Posición inicial en y
#define vorb 2.75 //Rapidez en el perihelio

main (void)
{
```

```
Experimentos virtuales sobre el movimiento planetario
float t=0.0,x,y,vx,vy,ax,ay,aux,auy;
float Ec,Emo,Emf,Ep; //Energías
float R,v,Lo,Lf;
float eL,eE;
FILE *trayec;
trayec=fopen("Jupiter.dat","w");
x=xo;
y=yo;
vx=vorb*cos(Th);
vy=vorb*sin(Th);
v=sqrt(vx*vx+vy*vy);
R=sqrt(x*x+y*y);
Lo=mp*(x*vy-y*vx);
Ec=0.5*mp*v*v;
Ep=-GM*mp/R;
Emo=Ec+Ep;
while (t<Tmax)
{
    ax=-(GM*x)/pow((x*x+y*y),1.5);
    aux=ax;
    ay=-(GM*y)/pow((x*x+y*y),1.5);
    auy=ay;
    x=x+vx*dt+0.5*ax*dt*dt;
    y=y+vy*dt+0.5*ay*dt*dt;
    ax=-(GM*x)/pow((x*x+y*y),1.5);
    ay=-(GM*y)/pow((x*x+y*y),1.5);
    vx=vx+0.5*(ax+aux)*dt;
    vy=vy+0.5*(ay+auy)*dt;
    fprintf(trayec,"%f %f\n",x,y);
    t=t+dt;
}
v=sqrt(vx*vx+vy*vy);
R=sqrt(x*x+y*y);
Lf=mp*(x*vy-y*vx);
Ec=0.5*mp*v*v;
Ep=-GM*mp/R;
Emf=Ec+Ep;
eE=100.0*fabs( (Emf-Emo)/Emf );
eL=100.0*fabs( (Lf-Lo)/Lf );
printf ("Error en Em: %10f\n", eE);
printf ("Error en L: %10f\n", eL);
fclose(trayec);
getche();
}
```

V. EL PAPEL DE LOS EXV

Este método muestra de manera explícita el algoritmo de aproximación así como los argumentos físicos que hay detrás de él y por tanto sus alcances y limitaciones. Esta situación particular elimina el efecto de caja negra que sufren los estudiantes cuando se enfrentan a la manipulación de algunas simulaciones y animaciones, ya que no es posible conocer y entender los conceptos físicos y las consideraciones de cada sistema en particular.

Otra característica de este método es que no contiene animaciones, pues se ha mostrado que en algunas ocasiones los estudiantes se enfrentan a ellas mediante estrategias

ensayo error y demás estrategias heredadas de los juegos de video, para obtener algún resultado, pero por lo general no hay una actitud crítica frente al fenómeno simulado[2].

Una metodología que introduzca conceptos físicos a través de técnicas de simulación debería permitir al estudiante ser activo frente a la información que procesa y fusionar los conceptos físicos con las ventajas computacionales para extraer resultados conceptuales claros y precisos. Esto tal vez se alcance con la manipulación de gráficas de los resultados de ExV, pues allí el estudiante tiene que arreglárselas con todas las vicisitudes que el análisis de un experimento real requiere.

No debe esperarse que los ExV sustituyan los experimentos reales, pues la física es una ciencia experimental y por tanto el experimento es juez sobre toda proposición planteada referente a la naturaleza y esto debería reflejarse en las prácticas académicas [13]. Convendría aplicar la metodología de los ExV siempre que se encuentren situaciones complejas de estudiar y enseñar analíticamente o experimentalmente, pero siempre haciendo claridad que es sólo una manera más de atacar un problema desde un punto de vista teórico.

VI. CONCLUSIONES

Con un modelo basado en la hipótesis de que en intervalos de tiempo igual el movimiento planetario se puede aproximar como un conjunto consecutivo de movimientos uniformes rectilíneos se mostró cómo estudiar el movimiento planetario a través de ExV. Se ilustró cómo es posible en un curso elemental de mecánica Newtoniana abordar las leyes de Kepler sin acudir a las matemáticas formales, se encontró que este método es bastante preciso pues conserva la energía y el momento angular con una buena precisión ya que el error porcentual para $\Delta t = 0,001$ años es menor al 0.001%, situación que refleja confiabilidad en los resultados obtenidos. Además, este método de aproximación permite explorar el algoritmo de aproximación y sus razones físicas, lo que quizá elimine el efecto de caja negra que presentan ciertas simulaciones y animaciones. Por último se mostró que es posible abordar con la metodología de los ExV actividades enfocadas en busca de una actitud crítica de los estudiantes frente a los fenómenos simulados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan su agradecimiento a Luis H. Barbosa, Guillermo Avendaño, Ángela Talero, Johannes Talero y al los integrantes del grupo Fisinform, por las diversas contribuciones a este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Hurtado, A., Lombana, C., Fonseca, M., Ocaña, O., *Experimento y simulación*, (Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, 2006).
- [2] Esquembre, F., *Creación de simulaciones interactivas en Java, aplicación a la enseñanza de la física*, (Pearson Prentice Hall, Madrid Esp., 2005).
- [3] Talero, P., Santana, F., *Circuitos duales y resistencia efectiva*, (Lat. Am. J. Phys. Edu. **3**, 670-676, 2009).
- [4] Talero, P., *Experimentos virtuales de física, mecánica*, (Universidad Central, Bogotá, Colombia, 2010).
- [5] Dancy, M., Beichner, R., *Impact of animation on assessment of conceptual understanding in physics*, (Physical review special topics-physics education research, 010104-1–010104-7, 2006).
- [6] Robert, J., Beichner, *The impact of video motion analysis on kinematics graph interpretation skills*, American Journal of Physics **10**, 1272-1277 (1996).
- [7] Goldstein, H., *Mecánica clásica*, (Ed. Aguilar, Madrid, 1993).
- [8] Landau, L., Lifshitz, E., *Mecánica, curso de física teórica*, Vol. I, (Reverté S. A., Moscú 1965).
- [9] Goodstein, D., Goodstein, J., *La conferencia perdida de Feynman*, (Tusquets Editores, California, 1996).
- [10] Harvey, G., Tobochnik, J., *An introduction to computer simulation methods applications to physical systems*, (Addison-wesley, New York, 1988).
- [11] Pang, T., *An introduction to computational physics*, (Cambridge University Press, United States, 1997).
- [12] Lopac, V., Dananic, V., *Energy conservation and chaos in the gravitationally driven Fermi oscillator*, Am. J. Phys. **10**, 892-902 (1998).
- [13] Feynman, R. P., *What Is Science*, The Physics Teacher **7**, 313-320 (1969).