Una demostración alternativa de las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido

Mateo Barkovich
Academia de Física, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Prolongación San Isidro 51, Col. San Lorenzo Tezonco, Del. Iztapalapa, México, D. F.

E-mail: mateo.barkovich@uacm.edu.mx

(Recibido el 13 de Enero de 2011; aceptado el 25 de Junio de 2011)

Resumen
En este artículo vamos a deducir las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido en dos dimensiones de una manera alternativa a la que se presenta habitualmente en los cursos introductorios de Física. Para ello vamos a partir de los tres principios fundamentales de la Estática, con los cuales derivaremos una serie de resultados previos que usaremos posteriormente para demostrar las ecuaciones que determina el equilibrio de un cuerpo rígido. Esta forma de proceder tiene enormes ventajas didácticas ya que en su desarrollo nos permite abordar aspectos conceptuales de la Estática que con frecuencia son dejados de lado.

Palabras clave: Enseñanza de la física, estática, cuerpo rígido.

Abstract
In this paper we will deduce alternative ways of equilibrium conditions for a rigid body in two dimensions studied at regular introductory physics courses. To this end we will start from the three fundamental principles of Statics, and with these we will derive a number of previous results that will be used to demonstrate the equations that determine the equilibrium in a rigid body. This way of proceeding presents enormous didactic advantages, as its development allows us to deal with conceptual issues in the study of Statics which are often overlooked.

Keywords: Physics education, statics, rigid body.

PACS: 01.40.gb, 01.40.Fk, 01.40.Ha. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

El equilibrio de un cuerpo rígido es un tema de los cursos introductorios de las carreras de Física e Ingeniería. Sin embargo, la tendencia actual al tratar este contenido es la de concentrarse en ejemplos prácticos de aplicación, dejando de lado muchos aspectos conceptuales muy importantes que ofrecen un entendimiento amplio de esta rama así como también una perspectiva del método científico en general.

En los textos básicos de física universitaria [1, 2, 3] el estudio del equilibrio de un cuerpo rígido se presenta como un caso particular de las ecuaciones de la dinámica de un cuerpo rígido. En esta línea, para que el cuerpo esté en equilibrio de traslación la suma de las fuerzas externas debe ser nula y, análogamente, para que el cuerpo esté en equilibrio de rotación la suma de los torques externos respecto de cualquier punto también debe ser cero. Posteriormente, y sin detenerse en cuestiones importantes de la Estática como el concepto de resultante o la consecuencia de trasladar el punto de aplicación de una fuerza sobre un objeto, el tratamiento se dirige a calcular diferentes parámetros (tensiones, normales, ángulos, etc.) que rigen el equilibrio en numerosas situaciones prácticas.

Por otro lado, en los libros más avanzados propios de la Estática [4] que se usan en las carreras de Ingeniería, el desarrollo de este tópico se realiza de una manera más detallada. En el mismo se parte de los conocidos tres principios fundamentales de la Estática, para luego introducir, sin una motivación clara, por lo menos al principio, el concepto de torque o momento de una fuerza que permite demostrar el importante resultado de que cualquier sistema de fuerzas aplicado sobre un cuerpo rígido es equivalente a una única fuerza y a un par o cupla de momento definido. Cuando esta fuerza, que es la suma vectorial de las fuerzas del sistema, y el momento del par son iguales a cero, entonces el sistema de fuerzas inicial es equivalente al vector cero y el sistema está en equilibrio.

En el presente trabajo también vamos a partir de los principios fundamentales de la Estática pero seguiremos un camino diferente. Usando estos principios vamos a mostrar cómo encontrar la resultante de un sistema de fuerzas cualesquiera actuando sobre un cuerpo rígido, pero poniendo principal atención en el caso de sistemas de fuerzas paralelas. Esto nos llevará a discutir la diferencia entre resultante y suma vectorial de fuerzas. Con este resultado, junto con el teorema de transmisibilidad que también demostraremos usando los tres principios, vamos a encontrar las condiciones de equilibrio para un cuerpo rígido en dos dimensiones usando un razonamiento inductivo. Veremos en este desarrollo como el concepto de torque aparece de una forma natural, sin necesidad de introducirlo de un principio.

II. DEFINICIONES

Para fijar un lenguaje común vamos a introducir algunas definiciones que usaremos recurrentemente a lo largo del presente artículo. Estas definiciones son:

a) Cuerpo rígido: Es un objeto cuyas deformaciones pueden despreciarse en la situación bajo estudio.

b) Sistema de fuerzas: es cualquier conjunto de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido.

c) Sistemas de fuerzas equivalentes: si un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por otro sin perturbar la condición de reposo o de movimiento del cuerpo, ambos sistemas son equivalentes.

d) Resultante: si un sistema de fuerzas es equivalente a una única fuerza (sistema constituido por una fuerza), esta se llama resultante del sistema. En otras palabras, la resultante de un sistema de fuerzas es una única fuerza cuya acción sobre el cuerpo es la misma que la de todo el sistema.

Cuando se trata la Estática y Dinámica de un objeto puntual es común definir a la resultante de un sistema de fuerzas como la suma vectorial de todas las fuerzas del sistema. En este caso particular ambas definiciones son equivalentes. Sin embargo, no ocurre lo mismo en el caso de un sistema de fuerzas aplicadas sobre un cuerpo rígido y la definición que debe utilizarse para determinar la resultante es la que acabamos de enunciar. Continuaremos más adelante con esta discusión.

e) Equilibrante: es una fuerza de la misma dirección, el mismo módulo pero sentido opuesto a la resultante.

f) Equilibrio de un cuerpo rígido: como una extensión natural del concepto de equilibrio de un objeto puntual diremos que un cuerpo rígido está en equilibrio si cada una sus partes lo está (su aceleración es cero). En esta definición estamos suponiendo que dividimos al cuerpo rígido en pequeñas partes, cada una de las cuales puede ser considerada como un cuerpo puntual.

Por definición, para que un cuerpo rígido esté en equilibrio es suficiente que su resultante sea nula, ya que el sistema de fuerzas aplicadas sobre el cuerpo equivale al vector nulo o a la ausencia de fuerzas aplicadas. Sin embargo, y debido a la dificultas en muchos casos para encontrar la resultante de un sistema de fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido, es más sencillo usar dos condiciones que también aseguran el equilibrio. Ellas son: la suma vectorial de las fuerzas del sistema debe ser nula y la suma de los torques de todas las fuerzas respecto de cualquier punto también debe ser nula. Estas condiciones son las que vamos a encontrar en la Sección VI.

Otras definiciones, concernientes al tema de vectores y que son útiles tener presente son:

a) Vectores libres: son aquellos que quedan caracterizados por su:
 i) magnitud,
 ii) dirección y
 iii) sentido.

Un ejemplo de este tipo de vector es el vector aceleración de la gravedad **g**.

b) Vectores deslizantes: son aquellos que quedan caracterizados por su:
 i) magnitud,
 ii) dirección,
 iii) sentido y
 iv) recta de aplicación.

Como veremos luego, una fuerza aplicada sobre un cuerpo rígido es un ejemplo de esta categoría de vectores.

c) Vectores ligados: son aquellos que quedan caracterizados por su:
 i) magnitud,
 ii) dirección,
 iii) sentido y
 iv) punto de aplicación.

La velocidad de un objeto puntual y la fuerza aplicada sobre un objeto deformable son ejemplos de vectores ligados.

III. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES Y TEOREMA DE TRANSMISIBILIDAD

Todos los teoremas y ecuaciones de la estática de un cuerpo rígido se deducen a partir de unos pocos principios fundamentales. Estos se aceptan sin demostración como resultado de la evidencia experimental.

Primer principio: Un cuerpo rígido sometido a la acción de dos fuerzas solo puede estar en equilibrio si las dos fuerzas están aplicadas en la misma recta de acción, tiene sentidos opuestos e igual magnitud. En la Fig. 1 se ilustra este principio.

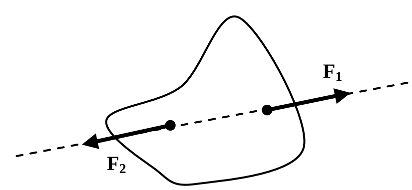

FIGURA 1. Un cuerpo rígido al cual se le aplican dos fuerzas sólo puede estar en equilibrio si las fuerzas están aplicadas en la misma recta de acción, tienen la misma magnitud y sentidos opuestos.

Este principio define el sistema de fuerzas en equilibrio más simple ya que, como sabemos por experiencia, un cuerpo sometido a la acción de una única fuerza no puede estar en equilibrio.

Segundo principio: La acción de un sistema de fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido no se altera si se le agrega o quita un sistema de fuerzas en equilibrio.

En otras palabras, dos sistemas de fuerzas que difieren en un sistema equilibrado son equivalentes.

Tercer principio (ley del paralelogramo): Dos fuerzas aplicadas sobre un mismo punto de un cuerpo rígido tiene como resultante una fuerza aplicada en el mismo punto y representada por la diagonal de un paralelogramo que tiene por lado los vectores representativos de las fuerzas. Este principio se ilustra en la Fig. 2.

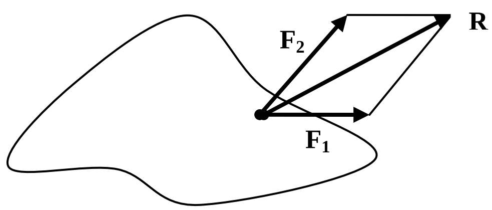

FIGURA 2. La resultante de dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ aplicadas sobre un mismo punto es **R**. En otras palabras, el efecto de $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ actuando simultáneamente sobre un cuerpo rígido es el mismo que el efecto de **R** cuando actúa sobre el mismo cuerpo.

Cuando se estudian sistemas constituidos por más de un cuerpo es indispensable introducir un cuarto principio, la ley de acción y reacción. Sin embargo en este trabajo nos ocuparemos de estudiar la condición de equilibrio de un único cuerpo rígido y por lo tanto solo usaremos los tres principios enunciados.

A partir de los dos primeros principios es posible demostrar un teorema muy útil, conocido en la literatura como el teorema de transmisibilidad.

Teorema de transmisibilidad: El punto de aplicación de una fuerza actuante sobre un cuerpo rígido puede ser trasladado a cualquier otro punto sobre su recta de acción sin alterar su efecto sobre el cuerpo. Este resultado se ilustra en la Fig. 3.

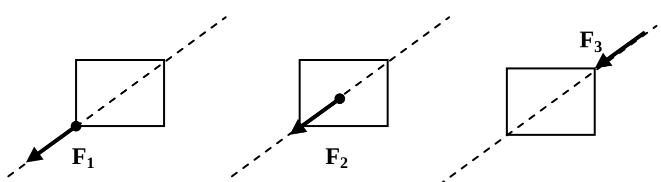

FIGURA 3. El efecto de $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F}_3$ aplicadas sobre un cuerpo rígido es el mismo (teorema de transmisibilidad).

La demostración del teorema de transmisibilidad a partir de los principios fundamentales es muy sencilla. Consideremos la fuerza $\mathbf{F_1}$ aplicada sobre un cuerpo rígido, como se muestra en la Fig. 4a.

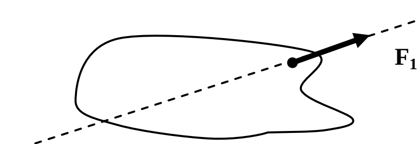

FIGURA 4a. Una fuerza $\mathbf{F}_1$ se aplica sobre un cuerpo rígido. Vamos a demostrar que esta fuerza se puede trasladar a cualquier punto sobre la recta de acción de la fuerza sin modificar su efecto sobre el cuerpo.

De acuerdo al segundo principio vamos a agregar un sistema de fuerzas en equilibrio, constituidos en este caso por las fuerzas $\mathbf{F'_1}$ y $\mathbf{F''_1}$, cuyas magnitudes son iguales, están aplicadas en la misma recta de acción y tienen sentidos opuestos. Por el primer principio sabemos que este es un sistema equilibrado. Además, elegimos que estas fuerzas tengan la misma magnitud que $\mathbf{F_1}$. La situación se muestra en la Fig. 4b.

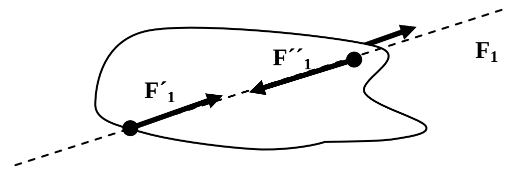

FIGURA 4b. Se agrega un sistema de fuerzas equilibrado $\mathbf{F'_1}$ y $\mathbf{F''_1}$, cuyas magnitudes coinciden entre sí y con la de $\mathbf{F_1}$, sin alterar el efecto sobre el cuerpo rígido.

El sistema constituido por las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F''_1}$ es un sistema de fuerzas en equilibrio (primer principio). Por lo tanto, según el segundo principio, se puede quitar sin afectar el sistema (ver Fig. 4c).

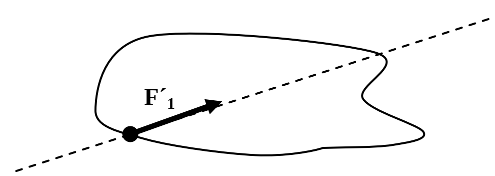

FIGURA 4c. El efecto sobre el cuerpo rígido de la fuerza $\mathbf{F_1}$ es el mismo que el de $\mathbf{F'_1}$.

En conclusión, el efecto sobre el cuerpo rígido de $\mathbf{F_1}$ es el mismo que el de $\mathbf{F'_1}$. Estas fuerzas se encuentran en la misma recta de acción y solo difieren en el punto de aplicación de las mismas. En otras palabras, las fuerzas aplicadas sobre cuerpos rígidos son *vectores deslizantes*.

IV. RESULTANTE Y SUMA VECTORIAL DE FUERZAS

Es muy instructivo, sobre todo para trabajar con los estudiantes, determinar la resultante de un sistema de fuerzas de forma gráfica. La resultante de todos los sistemas de fuerzas actuando sobre un cuerpo rígido, salvo el caso de un par o cupla (sistema de dos fuerzas paralelas de igual magnitud y sentidos opuestos) que no tiene resultante, pueden encontrarse usando los tres principios y el teorema de transmisibilidad. La forma de proceder es tomar las fuerzas de a pares, trasladarlas a un mismo punto (siempre que no sean paralelas) y allí reemplazarlas por su resultante parcial usando el tercer principio. Este procedimiento se repite, incluso con las resultantes parciales, hasta reducir el sistema a una única fuerza que es la resultante del sistema. En la Fig. 5 se muestra como encontrar la resultante de un sistema de tres fuerzas.

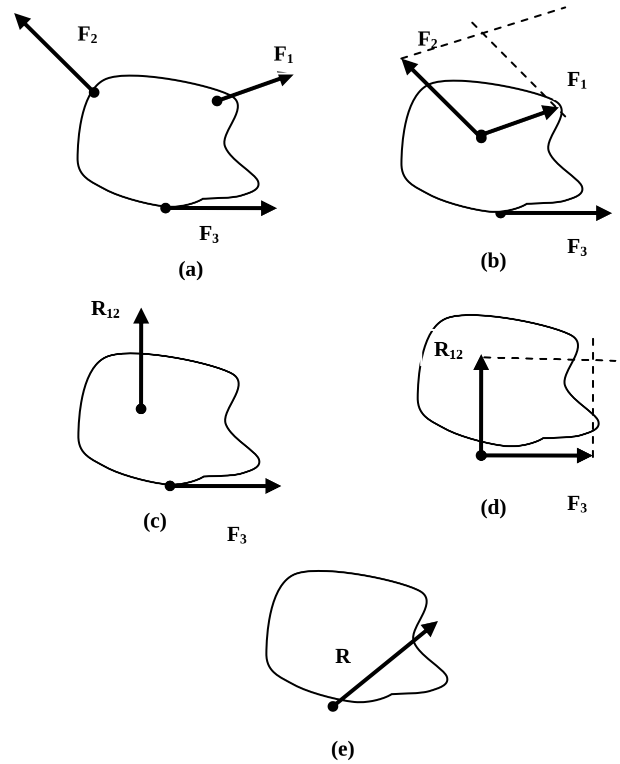

FIGURA 5. En la figura se muestra la secuencia de los pasos a seguir para determinar la resultante de un sistema de tres fuerzas aplicadas a un cuerpo rígido.

Por el teorema de transmisibilidad la resultante puede trasladarse a cualquier punto del cuerpo sin cambiar su efecto sobre el mismo. Por esta razón la resultante es un *vector deslizante*.

Cuando las fuerzas son paralelas no se puede usar el método explicado antes. En este caso es conveniente agregar un sistema de dos fuerzas en equilibrio (iguales y opuestas), cuyos puntos de aplicación coincidan con el de dos de las fuerzas. Al sumar cada par de fuerza en el mismo punto se logra que las dos resultantes parciales ya no sean paralelas y se puede proceder como en el ejemplo anterior. En la Fig. 6 se muestra la resultante de un sistema de dos fuerzas paralelas con el mismo sentido. El caso de la resultantes dos fuerzas paralelas de sentidos opuestos se obtiene de forma similar y se deja de ejercicio para el lector. En todos los casos, no obstante, la resultante es paralela a las fuerzas del sistema original y su magnitud es $R = F_1 + F_2$, en el caso de la suma de dos fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ paralelas con el mismo sentido, y $R = F_1 - F_2$ en el caso de que las fuerzas sean de sentidos opuestos.

Cuando se determina la resultante de un sistema de fuerzas aplicado a un cuerpo rígido existe un caso que rompe un poco la intuición y nos obliga a reflexionar en la diferencia entre suma vectorial de fuerzas y resultante. Este es el caso de la cupla o par de fuerzas, constituido por dos fuerzas paralelas, de igual magnitud y sentidos opuestos.

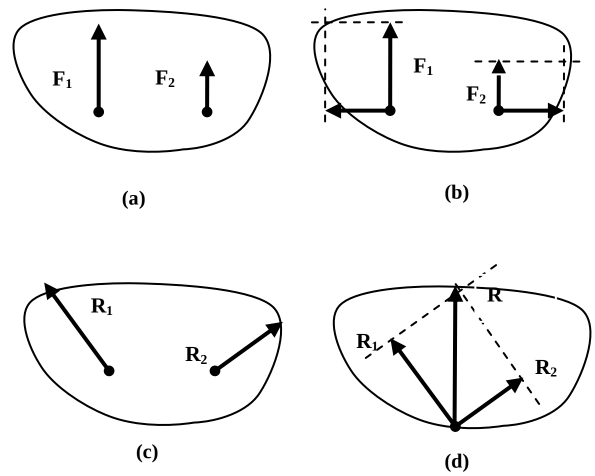

FIGURA 6. Determinación de la resultante de dos fuerzas paralelas con el mismo sentido por el método gráfico.

Por definición, la suma vectorial de las dos fuerzas de la cupla es $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Sin embargo, el vector $\mathbf{0}$ no puede ser la resultante de este sistema, ya que de ser así la cupla estaría en equilibrio y esto contradice el primer principio. Por esta razón la cupla no tiene resultante, ya que no existe una única fuerza capaz de reemplazar el efecto de la misma sobre el objeto. Este argumento nos alerta a proceder con cuidado en lo que se refiere a la diferencia entre resultante y suma vectorial, que si bien pueden ser vectores relacionados entre sí, no necesariamente coinciden. Y, de hecho, no tiene por qué coincidir ya que la resultante es un *vector deslizante* mientras que la suma vectorial de fuerzas es un *vector libre*, debido a que tanto su recta de acción como su punto de aplicación puede variar dependiendo del punto elegido en el cual las fuerzas son paralelamente trasladadas para realizar la suma.

V. RESULTANTE DE UN SISTEMA DE FUERZAS PARALELAS

Analicemos ahora el problema de hallar la resultante de un sistema de dos fuerzas paralelas de manera analítica. Esto es, encontrar la dirección, sentido, módulo y recta de acción del vector resultante. Consideremos las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, aplicadas sobre los puntos A y B de un cuerpo rígido como se muestra en la Fig. 7. Ambas son paralelas con el mismo sentido.

Agregando al sistema constituido por $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ dos fuerzas iguales y opuestas aplicadas en los puntos A y B respectivamente (ambas indicadas con $\mathbf{F}$ en la Fig. 7), el primer y segundo principio nos asegura que el sistema original no se altera. En cada punto A y B se suman las fuerzas para encontrar las resultantes parciales $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$.

El sistema constituido por $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ es equivalente al original, y por lo tanto su resultante es la misma. Por el teorema de transmisibilidad las fuerzas $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ se pueden trasladan al punto O, que es el punto de intersección de las rectas de acción de estas dos fuerzas.

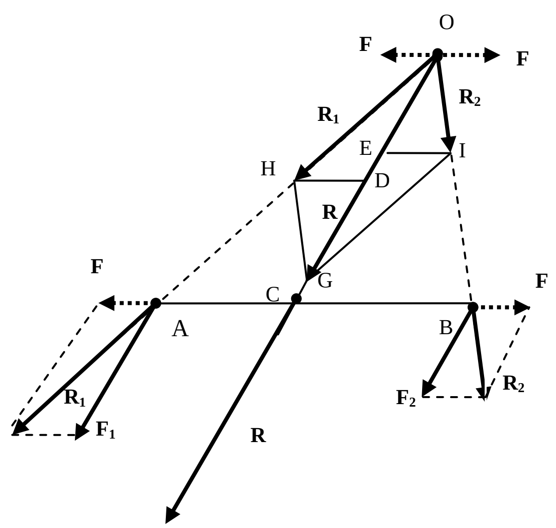

FIGURA 7. Determinación de la resultante de dos fuerzas paralelas con el mismo sentido por el método analítico.

Si en el punto O descomponemos $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ según la dirección de las fuerzas originales y de una dirección paralela a AB, relaciones geométricas sencillas nos prueban que el sistema $\mathbf{R_1}$ y $\mathbf{R_2}$ vuelve a convertirse en el sistema $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, aunque ahora aplicado sobre el punto O.

La resultante **R** tiene como magnitud R = F_1 + F_2, por tratarse de un sistema de dos fuerzas colineales (esto es, aplicadas sobre la misma recta de acción), dirección paralela a la de de las fuerzas originales $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ y sentido coincidente con el de estas dos fuerzas. Solo falta encontrar el punto o recta de aplicación de **R**. Para esto es conveniente usar las propiedades de la semejanza de triángulos.

De $A\overset{\Delta}{O}C \approx H\overset{\Delta}{O}D$ tenemos que

$$\frac{AC}{HD} = \frac{OC}{OD}; \tag{1}$$

y, de $C\overset{\Delta}{O}B \approx E\overset{\Delta}{O}I$, encontramos que

$$\frac{CB}{EI} = \frac{OC}{OE}. \tag{2}$$

Dividiendo miembro a miembro las Ecs. (1) y (2), y considerando que $HD = EI = F$ obtenemos:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{F_2}{F_1}. \tag{3}$$

A partir de la Ec. (3), y usando las propiedades de las proporciones, es fácil demostrar:

$$\frac{F_1}{CB} = \frac{F_2}{AC} = \frac{R}{AB}. \tag{4}$$

Esta relación se conoce como relación de Stevin, y nos permite encontrar el punto C por el cual pasa la recta de acción de la resultante. Si bien la demostración de esta relación es conocida en la literatura, la hicimos aquí para mostrar que no se necesitan más hipótesis que los tres principios y algunas propiedades geométricas de los triángulos y de las proporciones.

A partir del resultado anterior es fácil ver que la resultante de un sistema de dos fuerzas paralelas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, pero de sentidos opuestos, tiene como magnitud $R = |F_2 - F_1|$, la misma dirección que estas, el sentido que coincide con el de la mayor magnitud y la recta de acción se ubica usando la relación de Stevin.

VI. CONDICIONES DE EQUILIBRIO DE UN CUERPO RIGIDO

Ahora ya estamos en condiciones de demostrar la condición de equilibrio para un cuerpo rígido en dos dimensiones usando únicamente los tres principios y los resultados derivados de ellos. Esta demostración la haremos usando el razonamiento inductivo, esto es, abordando primero casos particulares para finalmente encontrar la condición para el caso general.

1. Sistema de tres fuerzas paralelas. Para que un sistema de tres $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_3}$ fuerzas paralelas esté en equilibrio, una de ellas debe tener su sentido opuesto al de las otras dos. Si consideramos el sistema mostrado en la Fig. 8 (en lo que sigue adoptaremos como dirección de *y* la misma que las de las fuerzas), observamos que para qué el cuerpo esté en equilibrio la fuerza $\mathbf{F_3}$ debe ser la equilibrante del sistema constituido por $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$. Esto es, debe ser una fuerza de igual magnitud, dirección y recta de acción que la resultante parcial de $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$, pero de sentido opuesto. Su recta de acción se localiza usando la relación de Stevin. En consecuencia:

$$F_3 = F_1 + F_2, \tag{5}$$

y

$$\frac{F_1}{d_2} = \frac{F_2}{d_1} = \frac{F_3}{d_1 + d_2}. \tag{6}$$

La condición de la Ec. (5) se puede escribir como:

$$\sum F_y = 0, \tag{7}$$

donde F_y son las componentes *y* de las fuerzas.

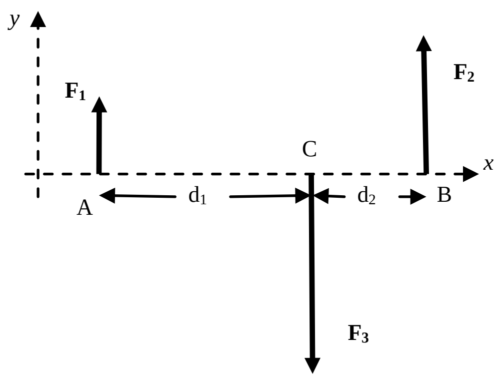

FIGURA 8. Condición de equilibrio para el caso de tres fuerzas paralelas.

Introduciendo la notación de $\tau_{\mathbf{F}}^{x}$, llamado torque o momento de la fuerza **F** respecto del punto *x* y definido por:

$$\tau_{\mathbf{F}}^{x} = \pm d\ F\,, \tag{8}$$

donde *F* es la magnitud de **F**, *d* la distancia entre *x* y la recta de acción de *F* y el signo del torque es positivo si la fuerza tiende a hacer girar al cuerpo alrededor de x en sentido antihorario y negativo si lo tiende a hacer girar en sentido horario.

Usando la definición de torque, la triple condición dada en la Ec. (6) puede escribirse como:

$$\tau_{\mathbf{F}_1}^{A} + \tau_{\mathbf{F}_2}^{A} + \tau_{\mathbf{F}_3}^{A} = 0\,, \tag{9}$$

$$\tau_{\mathbf{F}_1}^{B} + \tau_{\mathbf{F}_2}^{B} + \tau_{\mathbf{F}_3}^{B} = 0\,, \tag{10}$$

$$\tau_{\mathbf{F}_1}^{C} + \tau_{\mathbf{F}_2}^{C} + \tau_{\mathbf{F}_3}^{C} = 0\,. \tag{11}$$

Más aún, y la demostración es muy sencilla de realizar, la suma de los torque de las tres fuerzas es igual a 0 respecto de cualquier punto x que se tome. Esto es:

$$\sum \tau_{\mathbf{F}}^{x} = 0\cdot \tag{12}$$

Resumiendo, para que un sistema de tres fuerzas paralelas esté en equilibrio deben cumplirse simultáneamente las condiciones dadas en las Ecs. (7) y (12).

Enunciemos a continuación algunos comentarios adicionales:

- De lo visto antes debe resultar claro que para que un sistema de tres fuerzas esté en equilibrio la recta de acción de la fuerza que tiene sentido opuesto a las otras dos ($\mathbf{F_3}$ en el caso de la Fig. 8), debe ubicarse entre las rectas de acción de ellas.
- Si los puntos de aplicaciones de las tres fuerzas no se encuentran en la misma recta, estas se pueden trasladar por el teorema de transmisibilidad a una misma recta perpendicular a la dirección de las fuerzas y la demostración de la condición de equilibrio procede de la misma forma que lo hecho anteriormente.
- En el caso de un sistema constituido por dos fuerzas, para que estén en equilibrio deben tener la misma magnitud, dirección pero sentidos contrario, de acuerdo al primer principio. Esta condición es totalmente equivalente a las condiciones dadas en las Ecs. (7) y (12).

2. Sistema de cuatro fuerzas paralelas y sistema de *n* fuerzas paralelas. Consideremos ahora la condición de equilibrio para el caso de cuatro fuerzas paralelas, como se muestra en la Fig. 9.

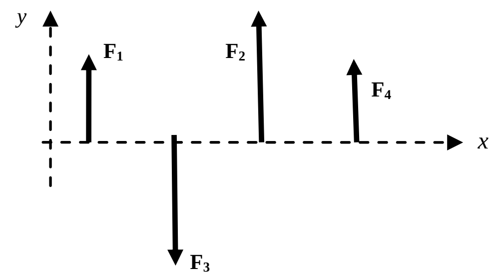

FIGURA 9. Condición de equilibrio para el caso de cuatro fuerzas paralelas.

En este caso podemos reemplazar dos fuerzas, por ejemplo $\mathbf{F_2}$ y $\mathbf{F_4}$, por su resultante parcial $\mathbf{R_{24}}$ (cuyo módulo es la suma de ambos módulos, su recta de aplicación se obtiene de la relación de Stevin, etc.) Entonces, la condición para que el sistema constituido por $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_3}$ y $\mathbf{R_{24}}$ esté en equilibrio se deriva de las Ecs. (7) y (12) y es:

$$F_{1y} + F_{3y} + R_{24y} = 0\,, \tag{13}$$

y

$$\tau_{\mathbf{F}_1}^{x} + \tau_{\mathbf{F}_3}^{x} + \tau_{\mathbf{R}_{24}}^{x} = 0\,. \tag{14}$$

Evidentemente $R_{24y} = F_{2y} + F_{4y}$ y por lo tanto la condición de la Ec (13) es igual a la dada en la Ec. (7). Por otro lado, y se deja también como ejercicio para el lector, se puede demostrar que $\tau_{\mathbf{R}_{24}}^{x} = \tau_{\mathbf{F}_2}^{x} + \tau_{\mathbf{F}_4}^{x}$ y por lo tanto la condición de la Ec. (14) es equivalente a la condición de la Ec. (12). En conclusión, las condiciones de las Ecs. (7) y (12) siguen siendo válidas en el caso de cuatro fuerzas paralelas, y, más aún, para el caso de *n* fuerzas paralelas en equilibrio.

3. Caso general. Consideremos, para fijar idea, el caso de tres fuerzas cualesquiera (no necesariamente paralelas), como se muestra en la Fig. 10. En este caso, el punto de aplicación de las fuerzas se encuentran sobre una misma recta, la cual adoptamos como eje x.

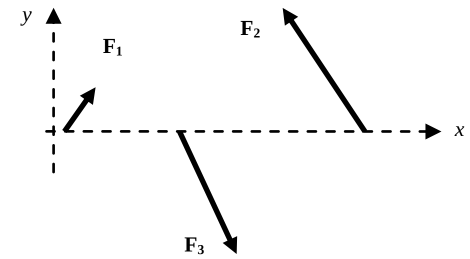

FIGURA 10. Demostración de la condición de equilibrio de un sistema de tres fuerzas.

Según el tercer principio, el sistema original es equivalente al sistema de seis fuerzas mostrado en la Fig. 11, constituido por los vectores componentes de las fuerzas.

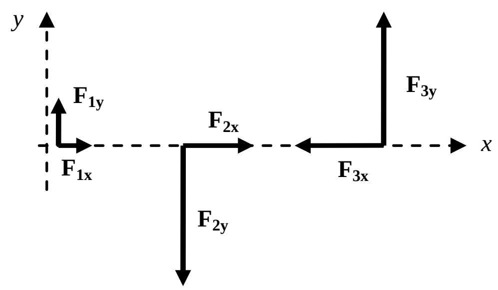

FIGURA 11. Sistema de seis fuerzas equivalente al sistema de tres fuerzas original.

Ahora pueden ocurrir dos alternativas:

- Si el sistema constituido por $\mathbf{F}_{1y}$, $\mathbf{F}_{2y}$ y $\mathbf{F}_{3y}$ está en equilibrio, entonces se cumplen las condiciones dadas en las Ecs. (7) y (12) y estas fuerzas pueden eliminarse sin alterar el efecto sobre el cuerpo de acuerdo al segundo principio. Queda entonces el sistema de las tres fuerzas $\mathbf{F}_{1x}$, $\mathbf{F}_{2x}$ y $\mathbf{F}_{3x}$. Para que esté en equilibrio, y debido a que las fuerzas son concurrentes, debe cumplirse que:

$$\sum F_x = 0 \cdot \tag{15}$$

- Si el sistema constituido por $\mathbf{F}_{1y}$, $\mathbf{F}_{2y}$ y $\mathbf{F}_{3y}$ no está en equilibrio, entonces tendrá una resultante parcial $\mathbf{R}_y$ en dirección del eje *y*. Por otro lado, el sistema $\mathbf{F}_{1x}$, $\mathbf{F}_{2x}$ y $\mathbf{F}_{3x}$ también tendrá una resultante parcial $\mathbf{R}_x$, pero en dirección del eje *x*. Por el primer principio, las fuerzas $\mathbf{R}_x$ y $\mathbf{R}_y$ no pueden estar en equilibrio y el cuerpo no puede estar en equilibrio bajo estas condiciones.

La condición dada por la Ec. (15), junto con la de la Ec. (7), se puede escribir como:

$$\sum \mathbf{F} = 0 \cdot \tag{16}$$

La condición más general de equilibrio para un cuerpo rígido está dada entonces por las Ecs. (12) y (16). Notemos, además, que la Ec. (15) no perjudica la condición para el caso de un sistema de fuerzas únicamente paralelas.

Si el sistema está constituido por *n* fuerzas el resultado para la condición de equilibrio es el mismo que el encontrado. No obstante, para empezar la demostración debemos elegir una dirección que no sea paralela a la de ninguna de las fuerzas del sistema, lo cual siempre es posible, y trasladar allí el punto de aplicación de todas las fuerzas. A esta recta la elegimos como el eje *x* y la demostración prosigue como en el caso de tres fuerzas.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos encontrado las dos ecuaciones vectoriales que rigen el equilibrio de un cuerpo rígido tomando como punto de partida los tres principios fundamentales de la Estática. La demostración tiene los ingredientes del ideal de una teoría científica: basar todos sus resultados y conclusiones en una construcción lógica que parta de un conjunto mínimo de principios proveniente de la observación objetiva y crítica de la naturaleza. En este camino también hemos discutido algunos puntos conceptuales importantes, como son la resultante de un sistema de fuerzas, la diferencia entre resultante y suma vectorial de fuerzas y los sistemas de fuerzas paralelas. Todo esto hace que este tratamiento sea muy adecuado para que la Estática sea presentada a los estudiantes de los cursos introductorios de Física, ya que es muy común que este tema tan sólo se vea limitado a la resolución de problemas.

REFERENCIAS

[1] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. y Freedman, R., *Física Universitaria, Vol. 1,* 12ª Edición, (Pearson Educación, México, 2004).

[2] Serway, R., *Física, Vol. 1*, 6ª Edición, (Thomson, México, 2005).

[3] Tipler, P., *Física, Vol. 1,* 4ª Edición, (Editorial Reverté, España, 2004).

[4] Beer, F., Russell, J. E. y Eisenberg, E., *Mecánica Vectorial para Ingenieros: Estática*, 8va Edición, (Mc Graw Hill, México, 2007).