

Un tratamiento alternativo para el análisis de colisiones no relativistas con parámetro de impacto dado



S. Díaz-Solórzano^{1,3}, L. González-Díaz² y A. Rincón-Rivero¹

¹Departamento de Física, Universidad Simón Bolívar, Sartanejas, Edo. Miranda, AP. 8900, Venezuela.

²Centro de Física, IVIC, Apdo.21827, Caracas 1021, Venezuela.

³Centro de Investigación de Matemática y Física. Dpto. Matemáticas y Física. Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas, A.P. 1021, Venezuela.

E-mail: sttiwuer@yahoo.es; lagdelul@gmail.com; angeles19531322@gmail.com;

(Recibido el 27 de Febrero de 2012; aceptado el 9 de Junio de 2012)

Resumen

Planteamos un novedoso tratamiento para el cálculo de las velocidades después de una colisión inelástica bidimensional entre dos discos rígidos con un parámetro de impacto dado. Para tal fin, definimos el vector de colisión $\vec{A}(\delta)$, el cual es invariante y covariante ante transformaciones de Galileo. Mediante dicho vector, replanteamos la regla de colisión de Huygens-Newton, empleándola para caracterizar la colisión inelástica entre dos esferas rígidas.

Palabras clave: Colisión inelástica, regla de colisión, vector de colisión, parámetro de impacto.

Abstract

We present a novel processing for the calculation of the velocities after a two-dimensional inelastic collision between two rigid disks with a parameter of impact given. For this, we define the collision vector $\vec{A}(\delta)$, which is invariant and covariant before Galilean transformations. The collision vector leads to alternative forms of the rule of collision of Huygens-Newton.

Keywords: Inelastic collision, collision rule, collision of vector, impact parameter.

PACS: 01.55+b; 45.20df; 45.20dh; 45.50.Tn

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El tópico de colisiones entre partículas suele ser tratado en los textos básicos de física [1] y discutida en cursos de física general y mecánica. El problema básico de una colisión consiste en determinar las velocidades de las partículas después del choque, cuando se conoce la dispersión de una de ellas después de colisionar. Este estudio se centra especialmente en los casos de choques completamente elásticos e inelásticos o plásticos, dejando en un segundo plano los casos intermedios, conocidos como colisiones semi-elásticas, las cuales son particularmente importantes en física atómica y subatómica [2]. Para el caso de una colisión completamente elástica se requiere tanto la conservación del momento lineal como la conservación de la energía cinética. En cambio, para una colisión inelástica o plástica, el problema se centra en resolver únicamente la conservación del momento lineal, debido a que las partículas se mueven con la misma velocidad en este tipo de colisiones. En los casos intermedios, las velocidades después del choque son obtenidas al resolver de manera

simultánea la conservación de la cantidad de movimiento lineal y la regla de colisión de Huygens-Newton. Esta regla toma en cuenta el balance energético y la transferencia de momento lineal durante la colisión.

Algunos autores [2, 3, 4] muestran que el proceso de colisión puede ser sustituido por la dispersión de una de las partículas o cuerpos colisionantes. En particular, cuando se consideran discos rígidos, la interacción determina la dispersión de uno de los discos, considerada a través del parámetro de impacto, como se muestra en la Sec. II. Por otra parte, en la literatura [1, 5, 6, 7, 8] es frecuente ver que el procedimiento empleado para el tratamiento de colisiones en dos dimensiones consiste en descomponer la conservación del momento lineal en coordenadas cartesianas. Son pocos los autores [2, 3, 4] que no hacen uso de coordenadas para obtener las velocidades después de una colisión completamente elástica. Aquellos autores [9, 10, 11] que hacen tratamientos vectoriales de las colisiones se restringen a situaciones unidimensionales. En la literatura consultada no se reportan estrategias que permitan determinar las velocidades de dos partículas o cuerpos

después de una colisión semi-elástica, sin hacer uso de la descomposición en coordenadas cartesianas.

En tal sentido, este trabajo plantea una estrategia novedosa para resolver el problema de la colisión semi-elástica entre dos discos rígidos (la cual puede simplificarse a la colisión entre partículas cuando se conoce la dispersión de una de ellas), haciendo uso de la conservación de la cantidad de movimiento y de una cantidad vectorial llamada *vector de colisión*, la cual sustituye a la regla de colisión de Huygens-Newton. Dicha estrategia toma en cuenta el proceso de interacción y no hace uso de coordenadas para el cálculo de las velocidades después de la colisión. Desde el punto de vista pedagógico y técnico, nuestra propuesta, resulta más apropiada que el enfoque tradicional debido a que caracteriza a las colisiones a partir del coeficiente de restitución (ϵ) y el vector de colisión ($\vec{A}(\epsilon)$). Éste pone de manifiesto tanto el carácter vectorial como el proceso de interacción, complementándose éstos con la información geométrica contenida en la dispersión de las partículas después del choque. Adicionalmente, este enfoque exhibe, de manera sencilla, la covarianza de las velocidades después de la colisión, mostrando a su vez que toda colisión debe caracterizarse mediante cantidades invariantes y covariantes ante el grupo de Galileo.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. II se hace una breve descripción del parámetro de impacto y del proceso de interacción entre dos discos rígidos, en ausencia de rotación. En la Sec. III se plantea la regla de colisión de Huygens-Newton, proponiéndose una forma alternativa y novedosa para dicha regla, a través de la definición del vector de colisión para choques. En la Sec. IV se presenta el procedimiento vectorial que conduce a la obtención de las velocidades después de un choque inelástico. Además, se obtiene una expresión concreta para el vector de colisión. En la Sec. V se presenta el cambio de energía cinética liberada debido al proceso de colisión, en términos de cantidades que son invariantes galileanos, como el vector de colisión $\vec{A}(\epsilon)$, el coeficiente de restitución (ϵ) y el parámetro de impacto (b). Finalmente, en la Sec. VI se ilustra la sencillez de la estrategia mediante algunos ejemplos académicos.

II. PARÁMETRO DE IMPACTO ENTRE DOS DISCOS RÍGIDOS Y EL PROCESO DE INTERACCIÓN DURANTE LA COLISIÓN

En una colisión entre dos objetos con extensión se debe tener en cuenta su geometría, por esta razón se introduce el *parámetro de impacto*, denotado por la letra b . El parámetro de impacto es medido en un marco de referencia S donde una de los cuerpos, considerada como el blanco o centro dispersor, se encuentra en reposo, mientras el otro cuerpo, considerado como proyectil, está en movimiento sobre la dirección de incidencia. Tal como se ilustra en la Fig. 1, para el caso de dos discos moviéndose en un plano. El valor absoluto del parámetro de impacto indica la menor

distancia entre dos rectas paralelas a la dirección de incidencia, una de estas rectas pasa por el centro de masa del cuerpo proyectil, mientras la otra recta pasa por el centro de masa del cuerpo considerado como blanco o centro dispersor.

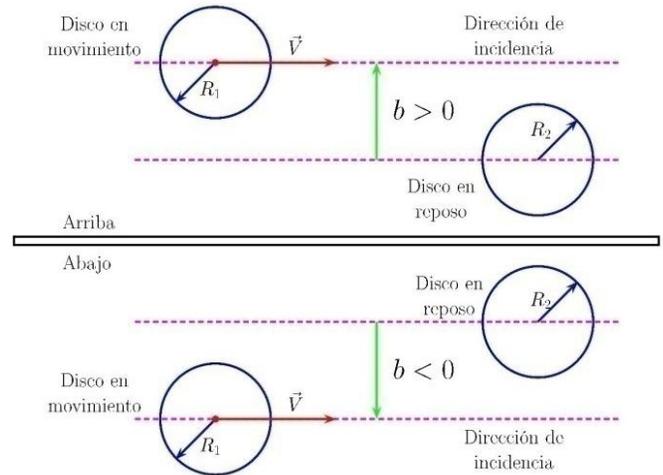


FIGURA 1. Esferas rígidas antes de colisionar con un parámetro de impacto dado. Arriba (Abajo) el parámetro de impacto es positivo (negativo).

La dirección de incidencia queda determinada por una recta colineal a la velocidad relativa de los discos colisionantes. En otras palabras, eligiendo como blanco o centro dispersor al disco de masa m_2 , que se mueve con velocidad \vec{V}_2 en el marco de referencia del laboratorio, se tiene que la dirección de incidencia queda determinada por una recta colineal al vector $\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$, siendo \vec{V}_1 la velocidad del disco de masa m_1 , que es empleado como proyectil. Dicha velocidad es medida en el marco de referencia laboratorio, de manera que \vec{V} es la velocidad del cuerpo proyectil en un marco de referencia S que observa en reposo al blanco o centro dispersor. En la Fig. 1 arriba (abajo) se muestra la situación previa a la colisión entre dos discos con un parámetro de impacto dado, donde el centro de masa para el disco de radio R_1 está por encima (debajo) del centro de masa para el disco de radio R_2 , lo cual corresponde a un parámetro de impacto positivo (negativo). También puede ocurrir la situación donde los centros de masa de cada disco se encuentren sobre la dirección de incidencia, esto conduce a que el parámetro de impacto se anule (es decir, $b=0$), en dicho caso la colisión es frontal.

Según Chow [2] durante el proceso de colisión (Fig. 2), los discos se pueden deformar y restituir su forma en la dirección de la recta que une los centros de masa de cada disco, esta recta pasa a su vez por el punto de contacto entre los discos. Así, la fuerza de contacto será colineal a dicha recta y no cambiará de dirección durante el proceso de colisión. La fuerza que actúa sobre el disco de radio R_2

debido al contacto con el disco de radio R_1 se denota como \vec{N} . Del principio de acción y reacción, la fuerza que actúa sobre el disco de radio R_1 es $-\vec{N}$, tal como se muestra en la Fig. 2. Así, las únicas fuerzas involucradas en la interacción son internas. De acuerdo con la segunda ley de Newton, el cambio del momento $\Delta\vec{p}'_2$ ($\Delta\vec{p}'_1$) del disco de radio R_2 (R_1) es paralelo (antiparalelo) a la fuerza de contacto \vec{N} como se muestra en la aludida figura. El momento lineal $m_1\vec{U}'_1$ ($m_2\vec{U}'_2$) del disco de radio R_1 (R_2) después de la colisión forma un ángulo θ'_1 (θ'_2) respecto de la dirección de incidencia, además el momento $m_2\vec{U}'_2$ coincide con $\Delta\vec{p}'_2$, por estar inicialmente en reposo.

A partir de la disposición geométrica mostrada en la Fig. 2 se puede relacionar el ángulo θ'_2 con el parámetro de impacto b , mediante la expresión

$$\text{sen}\theta'_2 = \frac{b}{R_1 + R_2}, \quad \text{con} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta'_2 \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

En el marco de referencia S , el ángulo θ'_2 describe la dispersión del disco de radio R_2 respecto de la dirección de incidencia. Adicionalmente, de la expresión (1) se tiene que el ángulo θ'_2 es positivo (negativo) para la situación mostrada en la Fig. 2 arriba (abajo), y nulo justo cuando ambos centros están sobre la dirección de incidencia. En tal sentido, el parámetro de impacto es positivo (negativo) o nulo cuando θ'_2 sea positivo (negativo) o nulo, respectivamente. De hecho, la expresión (1) establece una correspondencia unívoca entre b y θ'_2 , en virtud de la inyectividad de la función seno en el intervalo indicado en (1). Nótese que el ángulo de dispersión θ'_2 nos da información referente al parámetro de impacto, por tanto dar éste es equivalente a dar el ángulo mencionado.

El ángulo θ'_2 y en consecuencia el parámetro de impacto b , mostrado en la Fig. 2, son independientes del marco de referencia que se elija, esto se debe a que dicho ángulo determina la dirección de la fuerza de contacto \vec{N} . Al considerar los versores \hat{V} y \hat{V}_\perp como una base orientada positivamente que determina la dirección de incidencia y su dirección perpendicular, respectivamente, se tiene que

$$\tan \theta'_2 = \frac{\vec{N} \cdot \hat{V}_\perp}{\vec{N} \cdot \hat{V}} = \frac{\Delta\vec{p}'_2 \cdot \hat{V}_\perp}{\Delta\vec{p}'_2 \cdot \hat{V}}. \quad (2)$$

Resulta claro que los vectores \vec{N} , $\Delta\vec{p}'_2$, \hat{V}_\perp y \hat{V} son invariantes galileanos, lo cual hace que el ángulo θ'_2 sea independiente del marco de referencia; es decir, dicho ángulo también es un invariante galileano.

Según el valor que tome el parámetro de impacto las colisiones se pueden clasificar en *frontales* u *oblicuas*. En el primer caso los discos no presentan dispersión después

de la colisión y sus movimientos se encuentran sobre la dirección de incidencia, anulándose el parámetro de impacto ($b=0$). En cambio, para una colisión oblicua los discos se dispersan formando un ángulo respecto de la dirección de incidencia, siendo no nulo el parámetro de impacto ($b \neq 0$).

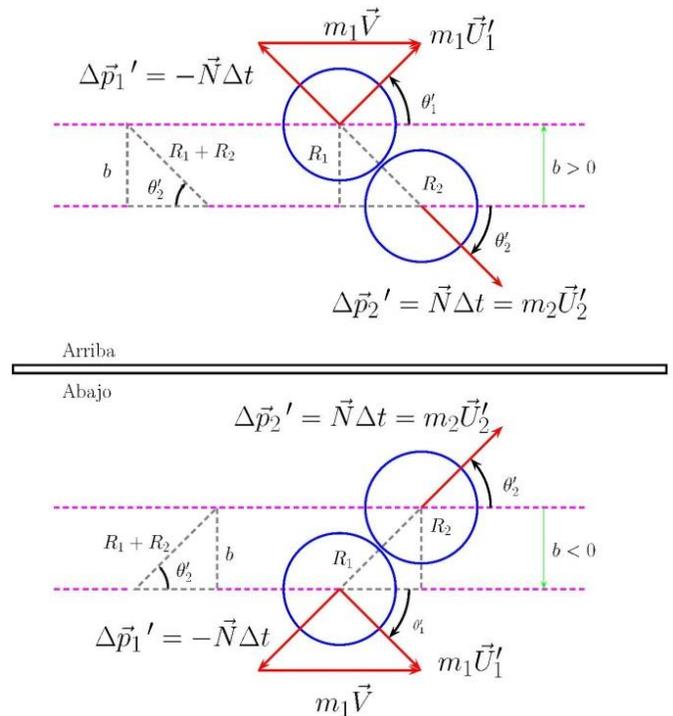


FIGURA 2. Proceso de interacción arriba (abajo) durante la colisión de dos discos cuando el parámetro de impacto es positivo (negativo).

III. REGLA DE COLISION DE HUYGENS – NEWTON Y EL VECTOR DE COLISION PARA COLISIONES SEMI-ELÁSTICAS E INELÁSTICAS

Durante el proceso de colisión mostrado en la Fig. 2, la norma del vector \vec{N} tiene una distribución tal que a partir del instante de tiempo t_1 , cuando inicia el contacto, comienza a aumentar hasta alcanzar un valor máximo en un tiempo t_c , posterior a t_1 . Debido a la intensidad de la interacción, puede ocurrir que los discos sufran una deformación a lo largo de la dirección en la que actúa la fuerza de contacto \vec{N} . Cuando la intensidad de esta interacción alcanza un valor máximo los discos se mueven con igual velocidad \vec{v} , y comienza el proceso de restitución. A partir del instante de tiempo t_c la norma del vector \vec{N} comienza a disminuir hasta que las partículas se separan por completo en el instante t_2 , posterior a t_c . En el tiempo t_2 los discos de masas m_1 y m_2 alcanzan sus

velocidades finales \vec{U}'_1 y \vec{U}'_2 , respectivamente. Los impulsos de cada disco durante el lapso de tiempo t_c-t_i vienen dados por

$$\vec{I}'_1 = \int_{t_i}^{t_c} \vec{N}(t) dt = m_1(\vec{v} - \vec{V}), \quad (3a)$$

$$\vec{I}'_2 = -\int_{t_i}^{t_c} \vec{N}(t) dt = m_2\vec{v}, \quad (3b)$$

respectivamente. Notemos que \vec{V} en la expresión (39) es la velocidad del disco proyectil antes de la colisión, en el marco de referencia S . De las expresiones mostradas en (3) observamos que $\vec{I}'_2 = -\vec{I}'_1$. Usando esta igualdad se llega a que \vec{v} es la velocidad del centro de masa del sistema en el instante t_c . Con dicha correspondencia se logra eliminar la velocidad \vec{v} en (3b), obteniéndose la siguiente expresión:

$$\vec{I}'_1 = \mu\vec{V}, \text{ con } \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

donde μ corresponde a la masa reducida del sistema. Procediendo de manera similar para obtener el impulso del disco de masa m_1 durante el lapso de tiempo t_2-t_c , se obtiene que

$$\vec{I}'_1^f = -\mu(\vec{U}'_2 - \vec{U}'_1). \quad (5)$$

Cuando la dirección de la fuerza de contacto \vec{N} permanece inalterada antes y después de la colisión; resulta claro que la dirección de los impulsos de cada disco a lo largo de \vec{N} permanece constante durante el choque. Por tal razón, la proyección del impulso \vec{I}'_1^o sobre la dirección de \vec{N} es antiparalela a la proyección del impulso \vec{I}'_1^f sobre la dirección de la fuerza de contacto \vec{N} ; es decir,

$$\vec{I}'_1^o \cdot \hat{n} = -\varepsilon \vec{I}'_1^f \cdot \hat{n} \quad \therefore (\vec{U}'_2 - \vec{U}'_1) \cdot \hat{n} = \varepsilon \vec{V} \cdot \hat{n}. \quad (6)$$

Donde se ha sustituido (4) y (5) en la primera ecuación de (6). El versor \hat{n} es un vector unitario colineal a la dirección de la fuerza normal, de manera que

$$\hat{n} \equiv \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\Delta\vec{p}'_2}{|\Delta\vec{p}'_2|} = \frac{\vec{U}'_2}{|\vec{U}'_2|}. \quad (7)$$

La constante de proporcionalidad ε definida en (6) es considerada positiva y recibe el nombre de *coeficiente de restitución* o *coeficiente de elasticidad*. La expresión (6) recibe el nombre de *regla de colisión de Huygens-Newton* [2, 6, 7]. Esta regla puede ser reformulada en términos de

una cantidad vectorial que denominaremos *vector de colisión*, y será denotada como $\vec{A}(\varepsilon)$. En tal sentido, (6) puede ser escrita como

$$\vec{A}(\varepsilon) \cdot \hat{n} = 0, \quad (8)$$

con

$$\vec{A}(\varepsilon) \equiv \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 + \varepsilon\vec{V} = \vec{U} + \varepsilon\vec{V}. \quad (9)$$

Siendo $\vec{U} \equiv \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2$ la velocidad relativa de las dos partículas después de la colisión. Es importante resaltar que las velocidades relativas \vec{U} y \vec{V} son invariantes ante el grupo de Galileo, por tanto éstas pueden ser medidas respecto a cualquier observador inercial. En particular, la \vec{U} medida en el sistema S es igual a la obtenida en el sistema laboratorio; es decir, si \vec{U}'_1 y \vec{U}'_2 son las velocidades de las partículas después de una colisión medidas en el sistema laboratorio, se tiene que

$$\vec{U} = \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 = (\vec{U}'_1 - \vec{v}_2) - (\vec{U}'_2 - \vec{v}_2) = \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2. \quad (10)$$

Este hecho muestra que el vector de colisión es un invariante galileano, debido a que éste se construye mediante la combinación lineal de las velocidades relativas de los cuerpos antes y después de la colisión. Siendo los coeficientes de esta combinación lineal el coeficiente de restitución ε y la unidad, respectivamente. Por otra parte, la invarianza del vector de colisión exige que el coeficiente de restitución sea un escalar ante el grupo de Galileo, tal como ocurre con las masas de los cuerpos.

IV. COLISIÓN SEMI-ELÁSTICA E INELÁSTICA O PLÁSTICA

Consideremos la colisión indicada en la Fig. 1, en este caso la conservación de la cantidad de movimiento puede ser escrita como

$$m_1\vec{V} = m_1\vec{U}'_1 + m_2\vec{U}'_2 \Rightarrow \vec{V} = \vec{U}'_2 + m\vec{U}'_2, \quad (11)$$

Donde $m = m_2/m_1$ es definida como la *masa relativa*. La regla de colisión de Huygens-Newton (6) puede ser reemplazada por el vector de colisión definido en (9), de forma que el problema de hallar las velocidades después de la colisión semi-elástica o inelástica entre los dos discos rígidos se resuelve partiendo del siguiente sistema de ecuaciones vectoriales

$$\begin{cases} \vec{U}'_1 + m\vec{U}'_2 = \vec{V}, \\ \vec{U}'_1 - \vec{U}'_2 = \vec{A}(\varepsilon) - \varepsilon\vec{V}. \end{cases} \quad (12)$$

La primera ecuación de (12) es justamente la conservación de la cantidad de movimiento (11), mientras que la segunda corresponde a la definición del vector de colisión dada en (9). Las velocidades que se obtienen de resolver (12) son

$$\vec{U}'_1 = \frac{1-\varepsilon m}{1+m} \vec{V} + \frac{m}{1+m} \vec{A}(\varepsilon), \quad (13a)$$

$$\vec{U}'_2 = \frac{\varepsilon+1}{1+m} \vec{V} - \frac{1}{1+m} \vec{A}(\varepsilon). \quad (13b)$$

Por otra parte, la velocidad del centro de masa antes de la colisión, en el marco de referencia S , viene dada por

$$\vec{V}'_{CM} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{V} = \frac{1}{1+m} \vec{V}. \quad (14)$$

Con esta igualdad las expresiones mostradas en (13) pueden ser reescritas de la siguiente forma

$$\vec{U}'_1 = 2\vec{V}'_{CM} - \vec{V} + \frac{\mu}{m_1} [\vec{A}(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\vec{V}], \quad (15a)$$

$$\vec{U}'_2 = 2\vec{V}'_{CM} - \frac{\mu}{m_2} [\vec{A}(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\vec{V}]. \quad (15b)$$

Notemos que las velocidades dadas en (15), con $\varepsilon=1$, coinciden con las presentadas por Díaz y González [6]. En cambio, cuando el vector de colisión es nulo y el coeficiente de restitución es igual a la unidad se obtiene el resultado presentado por Millet [10]. Además, las velocidades mostradas en (15) pueden ser llevadas al marco de referencia del laboratorio usando las siguientes transformaciones galileanas,

$$\vec{U}'_i = \vec{U}_i - \vec{V}_2 \text{ con } i=1, 2, \quad (16a)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2, \quad (16b)$$

$$\vec{V}'_{CM} = \vec{V}_{CM} - \vec{V}_2. \quad (16c)$$

Sustituyendo (16) en (15), se obtiene

$$\vec{U}_1(\varepsilon, \vec{A}) = 2\vec{V}_{CM} - \vec{V}_1 + \frac{\mu}{m_1} [\vec{A}(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\vec{V}], \quad (17a)$$

$$\vec{U}_2(\varepsilon, \vec{A}) = 2\vec{V}_{CM} - \vec{V}_2 - \frac{\mu}{m_2} [\vec{A}(\varepsilon) + (1-\varepsilon)\vec{V}]. \quad (17b)$$

Puede verse que las velocidades indicadas en (15) son obtenidas a partir de (17) haciendo $\vec{V}_1 = \vec{V}$ y $\vec{V}_2 = \vec{0}$. Este

hecho se debe a la covarianza de las velocidades después de la colisión ante el grupo de Galileo. En otras palabras, ante la transformación de Galileo presentada en (16) las velocidades indicadas en (17) mantienen su forma funcional en todos los marcos de referencia inerciales. Por otra parte, los términos dentro del corchete de (15) o (17) se mantienen invariantes ante cualquier transformación de Galileo; este hecho se debe a que el vector de colisión $\vec{A}(\varepsilon)$ contiene información referente a la dinámica del proceso de interacción. La forma concreta de dicho vector de colisión para choques semi-elásticos e inelástico o plásticos será presentada a continuación.

A. Construcción analítica del vector de colisión para choques semi-elásticos

Para determinar la forma concreta del vector de colisión, cuando el choque es semi-elástico o inelástico, nos limitaremos a la búsqueda de un “potencial de calibre” \vec{B} consistente con la regla de colisión de Huygens-Newton (8). Para ello proyectemos \vec{B} sobre la dirección ortogonal al versor \hat{n}

$$\vec{A}(\varepsilon) = [\mathbb{1} - \hat{n}\hat{n}] \vec{B} = \vec{B} - (\vec{B} \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad (18)$$

donde $\hat{n}\hat{n}$ corresponde al operador que proyecta en la dirección del versor \hat{n} , es decir, $\hat{n}\hat{n}(\vec{B}) = \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{B})$; y el símbolo $\mathbb{1}$ representa al operador identidad, esto es, $\mathbb{1}(\vec{B}) = \vec{B}$. Además, el término contenido en el paréntesis es un proyector perpendicular a la dirección del versor \hat{n} . Por otra parte, el versor \hat{n} puede ser reemplazado por (7), de manera que la regla de colisión (8) toma la siguiente forma

$$\vec{A}(\varepsilon) \cdot \vec{U}'_2 = 0. \quad (19)$$

Sustituyendo (13b) en (19), se obtiene

$$\vec{A}(\varepsilon) \cdot [(\varepsilon+1)\vec{V} - \vec{A}(\varepsilon)] = 0. \quad (20)$$

Reemplazando dentro del corchete de (20) el vector de colisión por la expresión indicada en (18), resultando,

$$\vec{A}(\varepsilon) \cdot [(\varepsilon+1)\vec{V} - \vec{B}] = 0. \quad (21)$$

La solución más general de (19) viene dada por

$$\vec{B} = (\varepsilon+1)\vec{V} + \lambda \hat{n}, \quad (22)$$

Siendo λ una constante arbitraria que llamaremos *calibre*, de manera que, el potencial \vec{B} es dependiente del calibre que se fije, a diferencia del vector de colisión. Tal afirmación se verifica al sustituir (22) en (18), resultando

$$\vec{A}(\varepsilon) = (\varepsilon + 1) \left[\vec{V} - (\vec{V} \cdot \hat{n}) \hat{n} \right], \quad (23)$$

el cual no depende de λ . Fijar el calibre $\lambda=0$ en (22) es equivalente a considerar como nulo al término dentro del corchete de (21), luego al sustituir este resultado en (18) se obtiene directamente (23).

En un trabajo reciente [4] presentamos la construcción del vector de colisión $\vec{A}(1) \equiv \vec{A}_1$ para colisiones completamente elásticas. En este trabajo mostramos que el vector de colisión dado en (23) es una generalización del presentado en dicha referencia, por una vía distinta. De hecho, el resultado más sorprendente es que el vector de colisión para choques semi-elásticos, dado en (23), es proporcional al obtenido en [4], esto es,

$$\vec{A}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon+1}{2} \vec{A}_1. \quad (24)$$

Este resultado sugiere que la dinámica del proceso de interacción entre dos discos o partículas durante un choque completamente elástico es esencialmente la misma que para un choque semi-elástico. La diferencia se encuentra en la intensidad de la interacción, en otras palabras, las normas del vector de colisión para choques elásticos y semi-elásticos difieren. No obstante, la dirección del vector de colisión permanece inalterada, lo cual sugiere que (7) no se ve modificado si la colisión es semi-elástica o completamente elástica.

B. Construcción geométrica del vector de colisión para choques semi-elásticos

Para establecer una construcción geométrica de (23) se requiere expresar el vector de colisión en términos del versor de incidencia de Landau \hat{n}_ψ [12], el cual viene dado por

$$\hat{n}_\psi = [2\hat{n}\hat{n} - \mathbb{1}](\hat{V}) = (2\hat{V} \cdot \hat{n})\hat{n} - \hat{V}. \quad (25)$$

El operador que aparece dentro del corchete de (25) corresponde a una reflexión del versor \hat{V} sobre la dirección del versor \hat{n} . Esta última es la dirección determinada por la fuerza de contacto entre los cuerpos. Por otra parte, con ayuda de (25) se logra escribir (23) de la siguiente forma

$$\vec{A}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon+1}{2} \left[\vec{V} - V \hat{n}_\psi \right]. \quad (26)$$

Esta descomposición para el vector de colisión permite escribir las velocidades dadas en (13) como las presentadas por Landau y Lifshitz [3], cuando $\varepsilon=1$. En tal sentido, todas las colisiones entre partículas pueden ser estudiadas a partir de la construcción del vector de colisión dado en (23) como en (26). Por otra parte, el término dentro del corchete

(26) corresponden al vector de colisión para choques elástico \vec{A}_1 [comparar (26) con (24)].

A partir de (26) el vector de colisión \vec{A}_1 puede interpretarse geoméricamente formando un círculo de radio $|\vec{V}|$, tal como se muestra en la Fig. 3. El ángulo del versor \hat{n}_ψ respecto a la dirección de incidencia es denotado por ψ , encontrándose en el semiplano inferior (superior) si $b>0$ ($b<0$) y sobre la dirección de incidencia cuando $b=0$. El ángulo que forma el vector de colisión

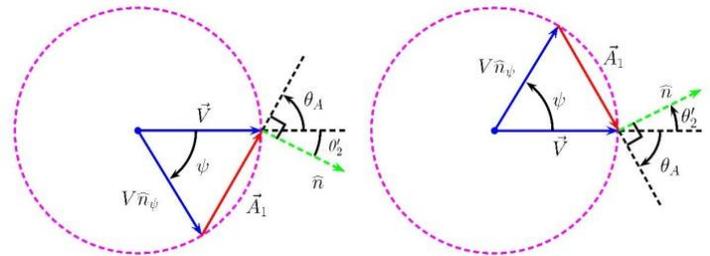


FIGURA 3. Se presenta a la izquierda (derecha) la construcción geométrica del vector de colisión \vec{A}_1 mostrado en (24) cuando el parámetro de impacto es positivo (negativo).

\vec{A}_1 respecto a la dirección de incidencia es representado por θ_A , y el ángulo que forma el versor \hat{n} que describe la dispersión del disco blanco es θ'_2 . Puede observarse que la regla de colisión (8) queda establecida en la Fig. 3 cuando se dibujan \vec{A}_1 y \hat{n} en ángulo recto. Hemos convenido elegir como positivo a todos los ángulos de la Fig. 3. En tal sentido, cuando el ángulo θ'_2 obtenido de (1) sea positivo (negativo) se elige el círculo de la Fig. 3 con parámetro de impacto positivo (negativo).

Para la construcción de (24) ó (26), el primer paso es determinar las direcciones de los vectores \vec{A}_1 y \hat{n}_ψ . Para ello se toma en cuenta que los ángulos internos del triángulo isósceles inscrito en la circunferencia de la Fig. 3 están relacionados por

$$\psi = \pi - 2\theta_A. \quad (27)$$

De acuerdo con la relación de ortogonalidad entre el vector de colisión \vec{A}_1 y el versor \hat{n} , se tiene que ambos vectores forman un ángulo recto, tal como se indica en la Fig. 3, resultando la siguiente relación

$$\theta_A = \frac{\pi}{2} - \theta'_2. \quad (28)$$

Sustituyendo (28) en (27), resulta

$$\psi = 2\theta'_2. \quad (29)$$

De (28) y (29) se pueden determinar las direcciones de los vectores \vec{A}_1 y \hat{n}_ψ , respectivamente, mientras que (27) establece la relación entre las direcciones de dichos vectores.

Para completar la construcción de los vectores \vec{A}_1 y \hat{n}_ψ , el segundo paso consiste en determinar las normas de dicho vectores, en particular, el versor \hat{n}_ψ tiene norma uno, en cambio la norma del vector de colisión \vec{A}_1 se obtiene al determinar la cuerda sustentada por los vectores \vec{V} y $V\hat{n}_\psi$, tal como se muestra en la Fig. 3, resultando

$$|\vec{A}_1| = 2|\vec{V}|\sin\left(\frac{\psi}{2}\right). \quad (30)$$

Si la dirección de incidencia no coincide con la horizontal, por ejemplo, cuando inicialmente el disco proyectil incide

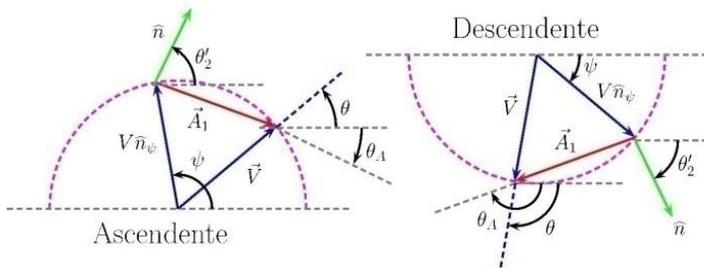


FIGURA 4. A la izquierda (derecha) se muestra una representación gráfica del versor de incidencia de Landau \hat{n}_ψ y el vector de colisión \vec{A}_1 cuando la incidencia es ascendente (descendente).

sobre el blanco con un ángulo θ medido respecto a la horizontal, entonces los triángulos inscritos en las circunferencias de radio V quedarán rotados tal como se indica en la Fig. 4. En dicho caso, la dirección de incidencia puede ser ascendente o descendente, formando un ángulo θ respecto a la horizontal, cuando el parámetro de impacto es negativo o positivo, respectivamente.

Para las situaciones mostradas en la Fig. 4 se tiene que la dirección del vector de incidencia de Landau, viene dada por:

$$\psi = 2\theta'_2 - \theta. \quad (31)$$

Este resultado también puede comprobarse analíticamente; para ello se considera la base canónica $\{\hat{i}, \hat{o}\}$, y se

construyen los vectores $\vec{V} = V(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{o})$ y $\hat{n} = \cos\theta'_2\hat{i} + \sin\theta'_2\hat{o}$, éste último es paralelo a la velocidad del disco blanco \vec{U}'_2 en el marco de referencia S (ver Fig. 4 izquierda). Sustituyendo estas cantidades en (25) se llega a

$$\begin{aligned} \hat{n}_\psi &= 2\cos(\theta - \theta'_2)\hat{n} - \vec{V} \\ &= \cos(2\theta'_2 - \theta)\hat{i} + \sin(2\theta'_2 - \theta)\hat{o}. \end{aligned} \quad (32)$$

De esta expresión queda claro que la dirección del vector de incidencia viene dada por (31).

C. Construcción del vector de colisión para choques inelásticos o plásticos

En una colisión inelástica o plástica las partículas quedan unidas moviéndose con igual velocidad, de manera que se verifica la igualdad $\vec{U}'_1 = \vec{U}'_2$. Sustituyendo este resultado en (6) se concluye que $\varepsilon=0$ para cualquier forma que tome \vec{V} y el versor \hat{n} . Sustituyendo estos resultados en (9) se concluye que el vector de colisión para choques inelásticos o plásticos se anula; esto es, $\vec{A}(0) = \vec{0}$. Resultado que también se obtiene de (23) cuando el versor \hat{n} se elige de la siguiente manera

$$\hat{n} = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}. \quad (33)$$

Así, para obtener la velocidad después de una colisión inelástica o plástica se sustituye $\vec{A}(0) = \vec{0}$ en (13), obteniéndose los resultados de las referencias [2, 7]. De igual forma, al sustituir la misma condición para el vector de colisión en (17) se obtiene el resultado indicado en la referencia [9].

V. CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA EN UNA COLISIÓN

La ley de conservación de la energía para un choque semi-elástico se establece agregando un término energético que compense la energía liberada o absorbida por el sistema debido al proceso de interacción en la colisión. A dicho término lo denotaremos con la letra Q , así

$$K'_0 \equiv K'_f + Q \quad \therefore \quad Q = K'_0 - K'_f. \quad (34)$$

Cuando Q es positivo (negativo) el choque es *endoérgico* (*exoérgico*). Por otra parte, a mayor Q más inelástico será el choque. En una colisión inelástica la energía cinética se transforma parcial o totalmente en energía interna, la cual es liberada (absorbida) por el sistema cuando el choque es endoérgico (exoérgico) [3, 5].

La cantidad (34) puede ser calculada en cualquier marco de referencia inercial, dado que tal cantidad es covariante e invariante ante el grupo de Galileo [13], lo cual es consistente con la conservación del momento lineal en todos los marcos de referencia. Recíprocamente, la conservación de Q nos lleva a que el momento lineal se conserva. En efecto, al escribir

$$Q' \equiv K'_0 - K'_f = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{2} m_i \left[|\vec{v}'_i|^2 - |\vec{u}'_i|^2 \right], \quad (35)$$

y considerar un marco de referencia K , que se mueve con velocidad \vec{V}_K , donde las transformaciones de Galileo para las velocidades vienen dadas por $\vec{v}'_i = \vec{v}_i - \vec{V}_K$ y $\vec{u}'_i = \vec{u}_i - \vec{V}_K$, se obtiene

$$Q' = K'_0 - K'_f + \vec{V}_K \cdot \sum_{i=1}^{i=n} m_i \left[\vec{u}_i - \vec{v}_i \right], \quad (36)$$

$$Q' = Q + \vec{V}_K \cdot \left[\vec{P}_{\text{final}} - \vec{P}_{\text{inicial}} \right].$$

Donde claramente se observa que la conservación de Q implica la conservación del momento lineal y viceversa.

Ahora, el objetivo es calcular la cantidad (27) en el marco de referencia S , teniéndolo así en cualquier marco de referencia, y demostrar que el tipo de colisiones tratadas en este trabajo son endoérgicas. Para ello se determinará la energía cinética después de la colisión,

$$\begin{aligned} K'_f &= \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}'_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}'_2|^2, \\ &= \frac{\mu}{m} \left[m(\vec{A} - \varepsilon \vec{V})^2 + |\vec{V}|^2 \right], \\ &= K'_0 + \frac{\mu}{2} \left[(\vec{A} - \varepsilon \vec{V})^2 - |\vec{V}|^2 \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

De manera que

$$Q = \frac{\mu}{2} \left[|\vec{V}|^2 - (\vec{A}(\varepsilon) - \varepsilon \vec{V})^2 \right]. \quad (38)$$

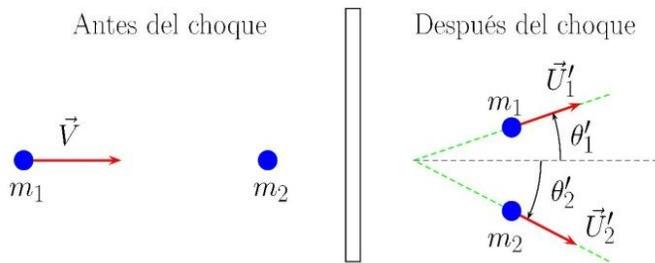


FIGURA 5. A la izquierda (derecha) se muestra la situación antes (después) de la colisión entre dos partículas.

Al sustituir (26) en (38) se obtiene la cantidad Q en términos del coeficiente de restitución y el ángulo α formado entre la dirección de incidencia y el vector de colisión de Landau. Esto es,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\mu}{2} (1 - \varepsilon^2) \left[\frac{1 - \hat{V} \cdot \hat{n}_v}{2} \right] |\vec{V}|^2, \\ &= \frac{\mu}{2} (1 - \varepsilon^2) \cos^2 \left(\frac{\psi}{2} \right) |\vec{V}|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Para las situaciones mostradas en las Figs. 3 y 4 el ángulo ψ viene dado por $2\theta'_2$ y $2\theta'_2 - \theta$, respectivamente.

VI. ALGUNOS EJEMPLOS ACADÉMICOS

A. Colisión bidimensional y semi-elástica entre dos partículas conociendo la dispersión de la partícula blanco

Una partícula de masa $m_1 = 3\text{Kg}$ y velocidad $\vec{V}_1 = 5\hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (partícula incidente) colisiona con otra partícula de masa $m_2 = 2\text{Kg}$ que se encuentra en reposo (partícula blanco). Después de la colisión, ésta se dispersa formando un ángulo de $\theta'_2 = \pi/3$ respecto de la línea de incidencia, tal como se muestra en la Fig. 5. En este caso haremos uso del diagrama izquierdo de la Fig. 3, debido a que la partícula blanco se dispersa con un ángulo descendente. De la misma figura o usando (28) y (30) se tiene que la dirección del vector de colisión y su norma vienen dadas por

$$\theta_A = \pi/6 \text{ y } |\vec{A}_1| = 5\sqrt{3} \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

respectivamente, con lo cual se obtiene el siguiente vector de colisión

$$\begin{aligned} \vec{A}(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon+1}{2} |\vec{A}_1| (\cos(\theta_A)\hat{i} + \text{sen}(\theta_A)\hat{\delta}), \\ &= \frac{\varepsilon+1}{4} [15\hat{i} + 5\sqrt{3}\hat{\delta}] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (40)$$

Sustituyendo (40) en (13) se encuentran las velocidades de las partículas después de la mencionada colisión semi-elástica con un coeficiente de restitución ε dado, resultando

$$\vec{U}_1(\varepsilon) = \frac{(5+3\varepsilon)\hat{i} + \sqrt{3}(\varepsilon+1)\hat{\delta}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (41a)$$

$$\vec{U}_2(\varepsilon) = \frac{3(\varepsilon+1)\hat{i} - 3\sqrt{3}(\varepsilon+1)\hat{\delta}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (41b)$$

Si la partícula de masa m_2 se dispersa por encima de la dirección de incidencia, en lugar de hacerlo por debajo, se considerará el diagrama derecho de la Fig. 3. Con ello, lo que se obtiene es una reflexión sobre el eje horizontal de la Fig. 5, de manera que lo que cambiaría en las velocidades dadas en (41) son sus componentes; es decir, el resultado coincide con (41) reemplazando $\hat{\delta}$ por $-\hat{\delta}$. Por otra parte, la energía transferida viene dada por la expresión (39), y para esta situación el sistema absorbió la siguiente cantidad de energía,

$$Q = \frac{15}{4}(1 - \varepsilon^2) \text{Joul.} \quad (42)$$

El coseno del ángulo con que se dispersan entre sí ambas partículas viene dado por,

$$\cos \theta(\varepsilon) = \frac{\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2}{|\vec{U}_1| |\vec{U}_2|} = \frac{1}{2\sqrt{3\varepsilon^2 + 9\varepsilon + 7}}. \quad (43)$$

De esta relación se concluye que las partículas no se dispersan entre sí formando un ángulo recto, dado que (43) no se anula para ningún valor finito del coeficiente de restitución ε . Por otra parte, de (43) es posible conocer el valor del coeficiente de restitución si conocemos la dispersión entre las partículas.

En cambio, si la colisión anterior fuese completamente elástica debe tomarse el valor $\varepsilon=1$ en las expresiones (41) y (42), obteniéndose la conservación de la energía cinética ($Q=0\text{Joul}$) y las siguientes velocidades

$$\vec{U}_1(1) = (4\hat{i} + \sqrt{3}\hat{\delta}) \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (44a)$$

$$\vec{U}_2(1) = \frac{3\hat{i} - 3\sqrt{3}\hat{\delta}}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (44b)$$

B. Colisión bidimensional y semi-elástica entre dos partículas conociendo la dispersión de la partícula incidente

Consideremos la situación de la Fig. 5, pero en lugar de conocer el ángulo θ_2 se conoce que $\theta_1 = \pi/3$. En dicho caso, los valores de masa y de velocidad de la partícula incidente quedarán inalterados. Esta situación resulta ser algebraicamente más complicada, dado que se debe encontrar el ángulo θ_2 para poder emplear los diagramas de la Fig. 3. Por tal razón, se debe escribir dicho ángulo en función del ángulo θ_1 , para ello se tiene en cuenta la siguiente relación

$$\tan \theta_1 = \frac{\vec{U}_1(\varepsilon)\hat{\delta}}{\vec{U}_1(\varepsilon)\hat{i}} = \frac{\text{sen}2\theta_2}{\lambda(\varepsilon) - \text{cos}2\theta_2}, \quad (45)$$

donde se ha sustituido (13a), (26) y (29). Adicionalmente, se ha definido el parámetro $\lambda(\varepsilon)$ como

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{2 - m(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 1}. \quad (46)$$

La relación (45) puede invertirse para obtener las siguientes expresiones

$$\text{cos}(2\theta_2) = \lambda \text{sen}^2 \theta_1 - |\text{cos}(\theta_1)| \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta_1}, \quad (47a)$$

$$\text{sen}(2\theta_2) = \lambda \text{sen} \theta_1 \text{cos} \theta_1 + |\text{sen}(\theta_1)| \sqrt{1 - \lambda^2 \text{sen}^2 \theta_1}. \quad (47b)$$

Las cuales son necesarias para determinar el vector de colisión (30). Teniendo en cuenta que el ángulo $\theta_1 = \pi/3$ y las expresiones dadas en (47) se llega a las siguientes relaciones trigonométricas

$$\text{cos}(2\theta_2) = \frac{3\lambda - \sqrt{4 - 3\lambda^2}}{4}, \quad (48a)$$

$$\text{sen}(2\theta_2) = \frac{\sqrt{3}\lambda + \sqrt{12 - 9\lambda^2}}{4}, \quad (48b)$$

donde λ viene dada por la expresión (46) haciendo $m=2/3$; esto es,

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\varepsilon + 2}{\varepsilon + 1}. \quad (49)$$

Con estas relaciones trigonométricas, el diagrama mostrado a la izquierda de la Fig. 4, y la expresión (24) se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{A}(\varepsilon) &= \frac{\varepsilon + 1}{2} [V - V \hat{n}_\psi] \\ &= \frac{5(\varepsilon + 1)}{8} \left[(4 - 3\lambda + \sqrt{4 - 3\lambda^2}) \hat{i} \right. \\ &\quad \left. + (\sqrt{3}\lambda + \sqrt{12 - 9\lambda^2}) \hat{\delta} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \end{aligned} \quad (50)$$

Las velocidades de las partículas en este caso vienen dadas al sustituir el vector de colisión (50) en (13), resultando

$$\vec{U}_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon + 1}{4} \left[(\lambda + \sqrt{4 - 3\lambda^2}) \hat{i} + \sqrt{3} (\lambda + \sqrt{4 - 3\lambda^2}) \hat{\delta} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (51a)$$

$$\vec{U}_2(\varepsilon) = \frac{3(\varepsilon+1)}{4} \left[(4+3\lambda-\sqrt{4-3\lambda^2})\hat{i} - \sqrt{3}(\lambda+\sqrt{4-3\lambda^2})\hat{\delta} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (51b)$$

Por otra parte, si la colisión antes descrita es elástica debe hacerse $\varepsilon=1$ en las expresiones (49) y (51), obteniéndose las siguientes velocidades,

$$\vec{U}_1(1) = \frac{(3+\sqrt{7})\hat{i} + \sqrt{3}(3+\sqrt{7})\hat{\delta}}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (52a)$$

$$\vec{U}_2(1) = \frac{3(17-\sqrt{7})\hat{i} - \sqrt{3}(3+\sqrt{7})\hat{\delta}}{8} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (52b)$$

Obsérvese que el vector de colisión expresado en (50) no coincide con el expresado en (40), la razón se debe a que cada vector de colisión obedece a una interacción distinta. En otras palabras, si las partículas fuesen discos o esferas rígidas, la colisión entre ellas ocurre con distinto parámetro de impacto, ya que en un caso la dispersión de la partícula blanco es $\pi/6$ mientras que en la otra situación no lo es.

C. Colisión inelástica o plástica entre dos partículas

En una colisión inelástica o plástica entre dos partículas, cuya situación inicial es como la mostrada a la izquierda de la Fig. 5, estaríamos tentado a tomar $\varepsilon=0$ en (41), lo cual nos daría velocidades distintas, contrario a lo que se esperaría en una colisión de este tipo. El error en este procedimiento radica en que la interacción que condujo al vector de colisión (38) es diferente a la interacción que conduce al caso de un choque inelástico, en el cual no basta con hacer $\varepsilon=0$ en (13), sino también $\vec{A}(\varepsilon) = \vec{0}$. Por esta razón, las velocidades de las partículas mostradas en la referida figura después de una colisión inelástica o plástica viene dada por (11), dando,

$$\vec{U}_1(0) = \vec{U}_2(0) = \frac{25}{7} \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (53)$$

Esto puede obtenerse directamente de la conservación de la cantidad de movimiento sabiendo que las velocidades finales son iguales.

D. Colisión semi-elástica entre dos partículas de igual masa

Considerando la misma colisión que la planteada en la Sec. A; pero bajo la hipótesis de que las masas de las partículas son iguales. Ahora se tiene que el vector de colisión dado en (40) no se ve modificado dado que la interacción es de la misma naturaleza que la planteada en la mencionada sección. Al sustituir (40) en (13) se obtiene que las velocidades de las partículas después de la colisión son

$$\vec{U}_1(\varepsilon) = \frac{5}{8} \left[(7-\varepsilon)\hat{i} + \sqrt{3}(\varepsilon+1)\hat{\delta} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (54a)$$

$$\vec{U}_2(\varepsilon) = \frac{5(\varepsilon+1)}{8} \left[\hat{i} - \sqrt{3}\hat{\delta} \right] \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (54b)$$

El coseno del ángulo con que se dispersan entre sí ambas partículas viene dado por

$$\cos \theta(\varepsilon) = \frac{\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2}{|\vec{U}_1| |\vec{U}_2|} = \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 13}}. \quad (55)$$

Si la colisión fuera completamente elástica ($\varepsilon=1$) se observaría que ambas partículas se dispersan entre sí formando un ángulo recto, resultado que es ampliamente conocido en la literatura [2, 5, 7].

E. Colisión entre una partícula y una pared

En esta situación se considera que la masa m_2 del blanco (ver Fig. 5) es mucho mayor que la masa del objeto incidente m_1 , de manera que la masa relativa tiende a infinito. Aplicando este límite a la velocidad (13b) se obtiene que la pared se encuentre en reposo; esto es,

$$\vec{U}_2^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{U}_2(\varepsilon) = \vec{0}. \quad (56)$$

Donde se ha considerado para esta interacción que el vector de colisión es independiente de la masa relativa m . Por otra parte, la velocidad de la masa incidente m_1 después de la colisión se obtiene al tomar en (13a) el límite antes mencionado, resultando

$$\vec{U}_1^\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \vec{U}_1(\varepsilon) = \vec{A}^\infty - \varepsilon \vec{V}. \quad (57)$$

Siendo \vec{A}^∞ el vector de colisión dado por (26) cuando \hat{n}_ψ es perpendicular a la superficie de la pared. Con esta información la velocidad dada en (57) toma la forma siguiente

$$\begin{aligned} \vec{U}_1^\infty &= \vec{V} - (\varepsilon + 1) (\vec{V} \cdot \hat{n}_\psi) \hat{n}_\psi, \\ &= \left[\mathbb{1} - (\varepsilon + 1) \hat{n}_\psi \hat{n}_\psi \right] (\vec{V}). \end{aligned} \quad (58)$$

En particular, cuando $\varepsilon=1$ se tiene que el operador dentro del corchete de (56) corresponde a una inversión respecto a la cola del vector \vec{V} seguida por una reflexión respecto a la dirección establecida por \hat{n} , o una reflexión sobre el plano de la pared.

Obsérvese que en una colisión completamente inelástica la velocidad dada en (57) se anula, en virtud que $\epsilon=0$ y $\vec{A}^\infty(0) = \vec{0}$.

VII. DISCUSIÓN

La técnica presentada aquí no requiere del uso de coordenadas para la obtención de las velocidades después de una colisión inelástica, observándose que nuestro enfoque caracteriza las colisiones inelásticas mediante tres magnitudes: El vector de colisión, el coeficiente de restitución y el parámetro de impacto. Todos ellos invariantes galileanos; además, el vector de colisión es covariante ante el grupo de Galileo. La importancia de esta caracterización radica en que las velocidades presentadas en (17) exhiben el carácter covariante de manera explícita. En esta caracterización los choques unidimensionales ($b=0$) son establecidos cuando el vector de colisión se anula; es decir, $\vec{A}(\delta) = \vec{0}$. En este caso se recuperan las expresiones obtenidas por varios autores [6, 8, 9]. Para el caso de colisiones bidimensionales ($b \neq 0$) se puede evitar el uso de la descomposición en coordenadas cartesianas de la conservación de la cantidad de movimiento usando los resultados expresados en (17), (23) y (26); de manera que las expresiones mostradas en (15) arrojan el mismo resultado que las presentadas por Ortega [10] cuando se descomponen las velocidades en coordenadas cartesianas. Los resultados (24) y (26) pueden representarse geoméricamente mediante la Fig. 4, los cuales toman en cuenta el proceso de colisión y el parámetro de impacto, dado que la velocidad relativa \vec{V} que aparece en (23) determina la dirección de incidencia; además, el versor \hat{n}_ψ de dicha relación determina la desviación de las partículas medidas desde el centro de masa y el versor \hat{n} establece la dirección de la fuerza de contacto, la cual es perpendicular al vector de colisión.

El planteamiento presentado en este trabajo permite encontrar una relación entre la dispersión de las partículas y el coeficiente de restitución [por ejemplo, ver expresiones (43), (45) y (55)]. Experimentalmente siempre es posible medir la dispersión de las partículas, con lo cual se obtiene una medida indirecta para el coeficiente de restitución.

VIII. CONCLUSIONES

Se ha presentado una estrategia para obtener las velocidades después de una colisión entre dos partículas o discos rígidos, usando como magnitudes características el vector de colisión $\vec{A}(\delta)$, el término de masa relativa m y el parámetro de impacto b (a través de θ_2'), probando, a su vez, que todas las colisiones (completamente elásticas, semi-elásticas e inelásticas) pueden ser analizadas a partir del vector de colisión, éste contiene información referente

al proceso de interacción. Además dicho vector es covariante e invariante Galileo. A partir del vector de colisión se exhibe de manera clara la naturaleza covariante de las velocidades después de un choque. Adicionalmente, se probó que las colisiones consideradas en este trabajo dan lugar a procesos endoérgicos únicamente [ver Ec. (31)], la mayor cantidad de energía transferida ocurre en colisiones frontales e inelásticas. Uno de los resultados más significativos de este trabajo es que todas las colisiones con un coeficiente de restitución dado puede generarse a partir del vector de colisión para choques completamente elásticos [ver Ec. (24)].

REFERENCIAS

- [1] Holliday, D. y Resnick, R., *Física*, 1ra parte (Compañía Editorial Continental S. A., México, 1984), pp. 197-216; Serway, R. y Jewett, J., *Física para ciencias e ingeniería*, Vol. 1 (International Thomson, México, 2005), pp. 260-270; Savéliev, I. V., *Curso de Física General*, Tomo 1 (Editorial MIR, Moscú, 1989), pp. 109-112.
- [2] Serway, R., Moses, C. J. y Moyer, C. A., *Modern Physics*, 3ra Ed. (Thomson, Estados Unidos de América, 2005), pp. 80-120.
- [2] Chow, L. T., *Classical Mechanics*, (Editorial John Wiley & Sons, New York, 1987), pp. 324-335.
- [3] Landau, L. y Lifshitz, E., *Curso Abreviado de Física Teórica*, Libro I (Editorial MIR, Moscú, 1987), pp. 47-50.
- [4] Díaz-Solórzano, S. y González-Díaz, L., *Un tratamiento alternativo para el análisis de la colisión elástica bidimensional no relativista entre dos esferas rígidas con parámetro de impacto dado*, Rev. Mex. Fís. E. **55**, 57-60 (2009).
- [5] Norwood, Jr. J., *Mecánica Clásica a Nivel Intermedio*, (Editorial Prince-Hall International, Bogotá, 1981), pp. 152-159; Alonso, M. y Finn, E. J., *Física*, Vol. 1 (Fondo Educativo Interamericano S. A., Caracas, 1976), pp. 262-268.
- [6] Spiegel, M. R., *Mecánica Teórica*, (Mc Graw Hill, Caracas, 1989), pp. 194-195 y pp. 200-202.
- [7] Ortega, M. R., *Colisiones*, (Documento en línea, consultado en 2011, Febrero 15). Disponible en: [http://www.uco.es/\\$/sim\\$fa1orgim/fisica/archivos/monytex/newline/LFM19.PDF](http://www.uco.es/$/sim$fa1orgim/fisica/archivos/monytex/newline/LFM19.PDF).
- [8] Ferreira da Silva, M. F., *Choque inelástico entre dos partículas: análisis basado en el coeficiente de restitución*, Rev. Mex. Fís. E. **54**, 65-74 (2008).
- [9] Hui, H., *More on one-dimensional collisions*, Phys. Teach. **40**, 72 (2002).
- [10] Millet, E. L., *The one-dimensional elastic-collision equation: $v_f = 2vc - v_i$* , Phys. Teach. **36**, 186 (1998).
- [11] Yung, L. Y., *Elastic collision in one dimension viewed as a linear transformation*, Am. J. Phys. **44**, 389 (1976).
- [12] Para la descripción de una colisión en el sistema centro de masa se requiere del ángulo ψ que determina la dirección de dispersión de las partículas después del choque endicho sistema, tal como lo afirma Landau y Lifshitz [3]. Dicha

S. Díaz-Solórzano, L. González-Díaz y A. Rincón-Rivero

dirección queda definida por un versor \hat{n}_ψ el cual llamaremos *versor de incidencia de Landau*. En este artículo damos una expresión concreta para dicho vector [ver Ec. 23].

[13] Jordan, T., Conservation of energy implies conservation of vector momentum, *Am. J. Phys.* **48**, 676 (1980).