

Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos



M. A. M. Souza¹, D. Bazeia², L. Losano² e R. Menezes²

¹ Coordenação de Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Parnaíba, 64215-000, Parnaíba, Piauí, Brasil.

² Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-970, João Pessoa, Paraíba, Brasil.

E-mail: msouza.ifpi@gmail.com, msouza@ifpiparnaiba.edu.br.

(Received 5 December 2011, accepted 26 February 2012)

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica de modelos descritos por um potencial $V(\phi)$, onde ϕ representa um campo escalar real, a partir do fenômeno de quebra espontânea de simetria. Este mecanismo leva o sistema a apresentar dois estados distintos, isso pode ser representado em meios contínuos como um processo de transição de fase e/ou pelo surgimento de defeitos topológicos. Tais defeitos são soluções estáticas, estáveis e de energia finita, de uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Apresentamos também as equações de Bogomol'nyi, onde escrevemos o potencial de um dado modelo em termos de uma função superpotencial e o problema de resolver uma equação de segunda ordem reduz-se a encontrar as soluções de duas equações de primeira ordem cujas soluções, denominadas estados BPS, identificam os estados de menor energia e os setores topológicos do modelo.

Palavras-chave: Campo escalar, quebra espontânea de simetria, defeitos topológicos, superpotencial, estados BPS.

Abstract

In this paper we study the dynamic models described by a potential $V(\phi)$, where ϕ represents a real scalar field, from the phenomenon of spontaneous symmetry breaking. This mechanism causes the system to have two distinct states; this can be represented in continuous media as a process of phase transition and / or the appearance of topological defects. Such defects are static solutions, stable and finite energy of a nonlinear differential equation of second order. We also present Bogomol'nyi's equations, where we write the potential of a given model in terms of a superpotential function and the problem of solving a second-order equation reduces to finding the solutions of two first order equations whose solutions, called BPS states, identify the lowest energy states and topological sectors of the model.

Keywords: Scalar field, spontaneous symmetry breaking, topological defects, superpotential, BPS states.

PACS: 11.10.-z, 11.27.+d, 98.80. Cq.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUÇÃO

Os estudos de sistemas físicos arraigados à dinâmica de campos escalares reais é algo de bastante interesse no meio científico. Estamos falando de uma classe de fenômenos passíveis de uma descrição exata com base nos princípios físicos da teoria de campos. As aplicações se estendem desde sistemas de matéria condensada até Cosmologia e Física de altas energias.

Como exemplo, podemos citar que algumas das vertentes mais modernas da Cosmologia utilizam o campo escalar para descrever o campo do inflaton [1, 2, 3], que seria responsável pela aceleração cósmica do universo na sua fase inicial, ou ainda, poderíamos falar de modelos de quintessência [4, 5, 6, 7], que atribuem a energia escura aspectos da dinâmica de campos escalares na fase atual do universo. Temos também em matéria condensada a

descrição de defeitos topológicos em meios elásticos contínuos [8, 9], associados a irregularidades nos campos que descrevem a ordenação da estrutura dos materiais. Esses defeitos surgem da quebra de simetria, que levam a uma transição de fase do sistema, e podem ser vórtices, kinks, paredes de domínio, etc.

Do ponto de vista matemático, os defeitos topológicos também são definidos como solução estável de uma equação diferencial não-linear, que possui energia finita e localizada.

II. CAMPOS ESCALARES REAIS

Em teoria de campos defini-se campo escalar real como sendo uma função real do quadrvetor $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ no espaço

de Minkowski. Para um único campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu)$ em D+1 dimensões podemos escrever a ação como:

$$S = \int d^{D+1}x L(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (1)$$

onde a densidade de lagrangeana L é função do campo e de suas derivadas. A dinâmica de modelos descritos por um único campo escalar real pode ser analisada a partir da densidade de lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que depende do sistema físico considerado. As equações de movimento são escritas em 1+1 dimensão como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3)$$

Para um campo estacionário a Eq. (3) se reduz a:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4)$$

e a densidade de energia é a componente temporal do tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} L, \quad (5)$$

que é dada por:

$$T^{00} = \rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi), \quad (6)$$

onde temos somente a contribuição gradiente e potencial para a densidade de energia dadas pelo primeiro e segundo termos de (6), respectivamente. A energia de uma dada configuração de campo é o resultado da integração da densidade de energia em todo o espaço, em 1+1 dimensão temos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad (7)$$

as soluções de interesse físico são aquelas com energia finita, também denominadas soluções solitônicas, por serem soluções de uma equação diferencial não linear com energia concentrada e são representadas por $\phi(x)$. Elas conectam os mínimos do potencial. É claro que as soluções triviais (zeros do potencial) obedecem à condição $V(\phi = \phi_0) = 0$ e satisfazem ainda $V(\phi = \phi_0) = 0$, isto é, elas são os mínimos do potencial. As soluções não-triviais obedecem ainda às condições de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_i \text{ e } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (8)$$

Esses limites devem ser obedecidos para garantir que a energia do sistema seja finita. Em verdade estamos impondo condições sobre a densidade de energia do modelo, de modo que nos extremos de integração a densidade de energia seja nula. A primeira condição de contorno em (8) tem aspectos peculiares, ela não só estabelece que nos extremos o campo ϕ seja um dos zeros do potencial, e conseqüentemente uma solução trivial, como também mostra que o comportamento assintótico das soluções pode apresentar comportamentos distintos nos extremos. De forma mais clara queremos dizer que existem duas possibilidades para o valor de ϕ nos extremos. Primeiro, a solução tem o mesmo comportamento assintótico, ou seja, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \phi_i$. Segundo, a solução tem comportamento assintótico diferente, $\phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \phi_i$ e $\phi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \phi_j$ com $i \neq j$, quando existir outra solução trivial ϕ_j , que satisfaça $V(\phi_j) = 0$. Essas possibilidades são caracterizadas pela corrente topológica:

$$j_T^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (9)$$

A densidade de carga associada à equação (9) é dada por:

$$\rho_T^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{01} \partial_1 \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx}, \quad (10)$$

que, por sua vez, nos leva a uma carga conservada:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \frac{1}{2} \phi(\infty) - \frac{1}{2} \phi(-\infty) = \frac{1}{2} \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2, \quad (11)$$

de onde podemos especificar dois tipos de soluções distintas: as soluções topológicas com $Q \neq 0$ ($\phi_1 \neq \phi_2$), isto é, conectam mínimos distintos; e as soluções não topológicas com $Q = 0$ ($\phi_1 = \phi_2$), que ligam um mínimo a ele mesmo. As soluções topológicas são configurações do campo que mudam de valor de um extremo a outro, seja por um decrescimento ou crescimento de ϕ e vice-versa, já as soluções não topológicas possuem o mesmo valor do campo em ambos os extremos.

III. QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

O conceito de simetria está intimamente relacionado com o conceito de isometria, assim como suas operações geométricas associadas de reflexão, rotação e translação. De forma geral, podemos dizer que um sistema é simétrico se o mesmo não muda as suas características e/ou propriedades frente a alterações dos parâmetros que o descrevem. As aplicações desse princípio têm grande utilidade em sistemas físicos, biológicos, em descrições matemáticas por meio da teoria de grupos e na geometria.

Em Física a aplicação mais importante de simetria está no teorema de Noether [10], que estabelece que para cada simetria contínua em um sistema físico existe uma correspondente lei de conservação. Assim, pode-se mostrar que a conservação de momento linear está associada à simetria de translação ou paridade do sistema. A conservação de energia associa-se a uniformidade temporal e a carga elétrica a uma simetria de calibre, entre outras.

Pode-se dizer que um sistema possui sua simetria quebrada quando as alterações promovidas neste, alteram suas características e/ou propriedades. Fenômenos como esse aparecem em mecanismos de transição de fase em sistemas de matéria condensada, como em cadeias poliméricas de poliacetileno [11]. Também podemos encontrar quebra de simetria em modelos cosmológicos, essa quebra de simetria é responsável pelo surgimento de defeitos topológicos no universo primordial que seriam cordas cósmicas ou monopolos magnéticos.

Em teoria de campos, um dos mecanismos de quebra de simetria de grande interesse é aquele que promove a geração de massa para o campo. Inicialmente, dizemos que uma teoria descrita por uma densidade de lagrangeana $L(\phi)$, onde ϕ representa um campo escalar real, é simétrica se esta torna-se invariante frente a transformação $L(\phi) \rightarrow L(-\phi)$, o estado de vácuo é degenerado e os estados possíveis transformam-se um no outro em detrimento dessa simetria. Dos modelos descritos por potenciais polinomiais, o modelo $\lambda\phi^4$ é o mais simples que apresenta o fenômeno de quebra espontânea de simetria, ele possui a forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (12)$$

com μ e λ constantes reais, onde λ representa a constante de acoplamento de auto-interação do campo. Os fatores numéricos são introduzidos por conveniência, algumas características desse modelo são:

- i) possui simetria de reflexão $\phi \rightarrow -\phi$, ou simetria Z_2 ;
- ii) Hamiltoniana dada por:

$$H = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \mu^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{4} \phi^4; \quad (13)$$

- iii) se $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ o mínimo do potencial está em $\phi = 0$, sendo este um mínimo global, conforme Fig. 1;
- iv) se $\mu < 0$ e $\lambda > 0$ aparecem dois mínimos em $\phi_{\pm} = \pm (-\mu/\lambda)^{1/2}$, o que possibilita o fenômeno de quebra espontânea de simetria, ver Fig. 1.

Para $\mu < 0$, a simetria é quebrada, pois o sistema sai de um único estado de vácuo para a possibilidade de se encontrar em dois estados distintos de mínima energia. A massa quadrática associada ao campo tem valor expresso por:

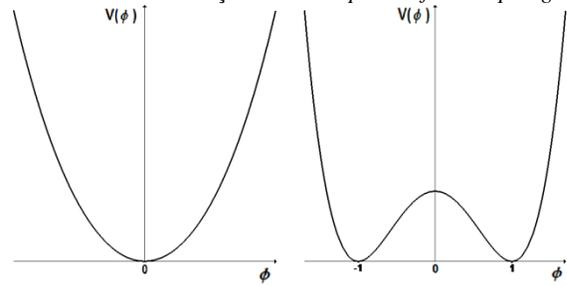


FIGURA 1. Potencial do modelo ϕ^4 para $\mu = 1$ e $\lambda = 2$ (a esquerda) e para $\mu = -2$ e $\lambda = 2$ (a direita).

$$m^2 = \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi^2 = -\mu/\lambda} = -2\mu. \quad (14)$$

Sabemos que o campo é uma entidade física que permeia todo o espaço e conseqüentemente não possui massa. Entretanto, o surgimento de dois estados de vácuo e a conseqüente quebra de simetria gera massa para o campo, que, por sua vez, localiza-se nos mínimos do potencial. O que estamos calculando na verdade é a massa da partícula clássica associada ao campo nos estados de mais baixa energia, dependendo do modelo podemos ter mais de um valor de massa associada. Uma vez que $\phi = 0$ não é mais um mínimo global, podemos estudar o lagrangeano em torno dos novos estado de vácuo definindo um novo campo. Vamos fazer o deslocamento $\phi \rightarrow \chi = \phi \pm (-\mu/\lambda)^{1/2}$ de modo que o potencial pode ser reescrito, a menos de uma constante aditiva, como:

$$V(\chi) = -\mu\chi^2 \mp \sqrt{-\mu\lambda}\chi^3 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4. \quad (15)$$

A lagrangeana para esse novo potencial e com o novo campo χ fica:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \mu\chi^2 \mp \sqrt{-\mu\lambda}\chi^3 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4. \quad (16)$$

A nova lagrangeana dada por (16) possui um termo cúbico que viola a simetria Z_2 . As propriedades do modelo expresso pelo campo χ são:

- i) o estado de vácuo corresponde a $\chi = 0$;
- ii) sua massa é positiva, dada por $m = \sqrt{2|\mu|}$;
- iii) apresenta uma interação cúbica χ^3 .

Existem ainda outros mecanismos desse tipo, como por exemplo: a quebra espontânea de simetria de um grupo contínuo de simetria, como o grupo de rotações $SO(2)$, que para dois campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 , leva ao surgimento de massa para um dos dois campos, enquanto o outro permanece sem massa. Esse campo sem massa é denominado de Bóson de Goldstone [12]. Podemos ainda citar o mecanismo de Higgs [13, 14] no modelo padrão. Para este caso, o estado de vácuo do campo de Higgs é constante e tem valor igual a 246 GeV. A existência de um

estado de vácuo diferente de zero quebra espontaneamente a simetria de calibre da interação eletrofraca, esse mecanismo gera massa para os bósons de calibre Z_0 , W^+ e W^- , mediadores dessa interação.

IV. DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Uma definição matemática para defeito seria dizer que ele é uma solução, com energia finita, de uma equação diferencial não linear. Do ponto de vista físico, um defeito topológico é a região de transição entre fases distintas de um sistema, em suma, é a região em que o sistema muda suas características e/ou propriedades.

Geralmente, os defeitos estão associados a alguma quebra de simetria que dá origem a um conjunto não trivial de estados degenerados, como os dipolos magnéticos nos domínios de um material ferromagnético [15]. No regime de baixas temperaturas, a quantização do fluxo magnético em super condutores como o hélio superfluido gera o aparecimento de defeitos, denominados vórtices [9]. Em cosmologia temos os monopolos magnéticos, introduzidos por 't Hooft [16], ou cordas cósmicas, propostas por Nielsen e Olesen [17], que são defeitos associados ao processo de transição de fase do universo primordial, quando a temperatura do mesmo diminuiu até um valor crítico T_c , gerando esses objetos exóticos. Em 1961, Skyrme apresentou o primeiro defeito topológico tridimensional decorrente da teoria de campo não linear, já em 1966, Nambu antecipou a existência de tais defeitos na teoria quântica de campos e Rather, estudando excitações em partículas elementares, verificou o aparecimento de defeitos quânticos, cuja energia adicionada aos estados de energia da partícula completavam o espectro observado [18].

Iremos estudar o defeito topológico que aparece na teoria de campos escalares, o kink. Vamos utilizar o potencial do modelo ϕ^4 , que é dado, no sistema adimensional de unidades, por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (17)$$

O potencial (17) pode ser visto na Fig. 2. A equação de movimento para o caso estacionário tem a forma:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(\phi^2 - 1). \quad (18)$$

Utilizando o método da quadratura para resolver (18) temos:

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} (V(\phi)).$$

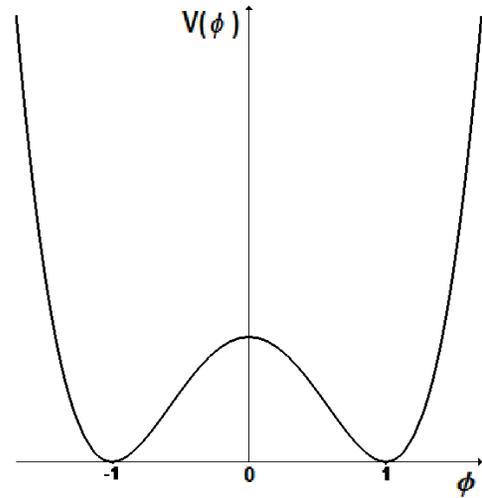


FIGURA 2. Potencial do modelo ϕ^4 .

Integrando, obtemos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (19)$$

que são duas equações diferenciais de primeira ordem, onde C é uma constante de integração. Lembrando que como estamos trabalhando com campos escalares reais, $V(\phi)$ deve ser positivo definido para que ϕ seja real. Fazendo a constante C igual zero, separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\phi = \pm \tanh(x - x_0). \quad (20)$$

Impor que a constante C seja nula, está assegurando na verdade que a energia das soluções seja finita, uma vez que a presença dessa constante na densidade de energia acarretaria na divergência da integral utilizada para determinar o valor da energia. A solução com sinal positivo em (20) é denominada kink e a com sinal negativo anti-kink. Essas soluções são topológicas por terem limites assintóticos diferentes, elas conectam os diferentes mínimos do potencial, que também são soluções triviais $\phi_{\pm} = \pm 1$, com energia nula.

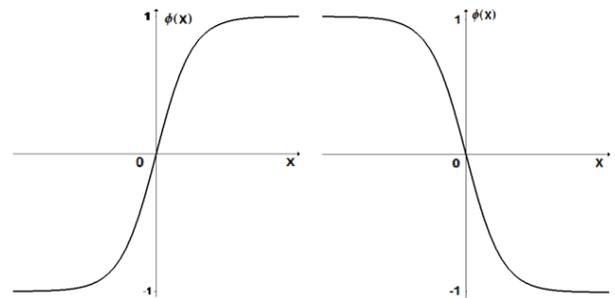


FIGURA 3. O kink, a esquerda, e o anti-kink, a direita, ambos centrados na origem.

Quando os kinks estão imersos em duas ou mais dimensões eles são chamados paredes de domínio e suas energias se transformam em densidades de energia. A Fig. 3 representa o kink e o anti-kink dado por (20), onde escolhemos o centro em $x = 0$. A separação entre os zeros do potencial definem um setor topológico com carga $Q = \pm 2$ e com energia dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^2(x) dx = \frac{4}{3}, \quad (21)$$

onde utilizamos a Eq. (7) em que a densidade de energia do kink é $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$, mostrada na Fig. 4. A figura mostra que a densidade do kink é finita e distribuída de forma simétrica em torno da origem.

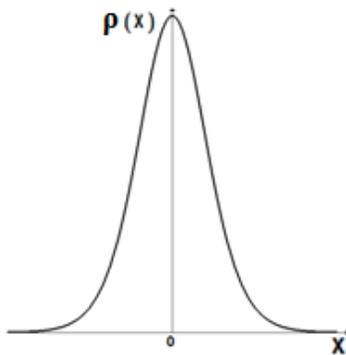


FIGURA 4. Densidade de energia do kink.

V. EQUAÇÕES DE BOGOMOL'NYI

Um método alternativo para investigar a presença de defeitos topológicos em modelos de campos escalares, consiste em identificar as soluções denominadas de BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [19, 20]. As soluções BPS são definidas por dois estados de mínima energia e identificam os setores topológicos do modelo. O método foi proposto por E. B. Bogomol'nyi em 1976, embora em 1975 M. K. Prasad e C. M. Sommerfield já tivessem publicado um trabalho sobre o assunto. A idéia central está no fato de que para potenciais não negativos, cujos zeros são mínimos globais, podemos escrever:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (22)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$ e $W(\phi)$ são funções contínuas do campo, esta última é denominada superpotencial e está associada a descrição de setores bosônicos reais em teorias supersimétricas [21, 22, 23, 24]. Para o potencial do modelo ϕ^4 temos o superpotencial associado dado por:

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3. \quad (23)$$

Podemos reescrever as equações de movimento para as soluções estáticas $\phi = \phi(x)$, utilizando a expressão (22), assim temos:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (24)$$

A energia para as soluções de (24) é obtida a partir de:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right], \quad (25)$$

onde reescrevemos a Eq. (7) em termos do superpotencial. Completando os quadrados em (25) encontramos:

$$E = E_B + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2, \quad (26)$$

sendo

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (27)$$

o que leva a:

$$E_B = W[\phi(x \rightarrow \infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)] = |\Delta W|. \quad (28)$$

Como as soluções fisicamente aceitáveis são as de energia finita, as configurações de menor energia são as de maior interesse para nossa descrição, logo o campo deve ser escolhido de modo que E seja mínima, assim devemos ter:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (29)$$

ou seja, a segunda integral em (26) deve ser nula e E_B é energia mínima do sistema, também conhecida como energia de Bogomol'nyi. O interessante está no fato de que se derivarmos a equação (29) obtemos (24), o que mostra que esta última pode ser resolvida a partir da anterior, e o problema de resolver uma equação de segunda ordem se reduz a encontrar as soluções de duas equações de primeira ordem [25, 26]. A expressão (29) é conhecida na literatura como equação de Bogomol'nyi. Outra vantagem desse método é que podemos calcular as energias usando somente a função $W(\phi)$ por meio de seus limites assintóticos sem conhecer as soluções. Outro ponto a salientar está relacionado ao fato de que as energias gradiente e potencial são degeneradas:

$$E_p = E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} dx W(\phi)^2 = \frac{E_B}{2}. \quad (30)$$

VI. ESTABILIDADE LINEAR

Na teoria de campo escalar torna-se necessário o estudo da estabilidade linear das soluções estáticas das equações de movimento, haja vista que tais equações são não-lineares. Para isto basta considerar pequenas perturbações em torno das soluções. O objetivo é linearizar as equações de movimento e obter o potencial de estabilidade e os autovalores associados [27]. Vamos inserir uma perturbação em primeira ordem, escrevemos a solução para o campo como:

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \xi(x, t), \quad (31)$$

onde $\xi(x, t)$ representa uma pequena flutuação em torno da solução estática $\phi_s(x)$. Substituindo na Eq. (3) obtemos:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (32)$$

Só que agora $V=V(\phi_s + \xi)$, fazendo a expansão em série de Taylor em torno de $\xi = 0$ e considerando os termos de primeira ordem em ϕ_s encontramos:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} + \xi \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (33)$$

Utilizando (4) obtemos uma equação para ξ da forma:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \xi \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (34)$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial, para resolvê-la basta aplicar o método de separação de variáveis, fazendo $\xi(x, t) = \zeta(x)T(t)$ e substituindo em (34) obtemos as equações:

$$\left. \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T \right| = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} - \xi U = -\omega^2 \zeta \quad (36)$$

sendo:

$$U = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}. \quad (37)$$

Uma solução de (35) é dada por:

$$T(t) = \cos(\omega t). \quad (38)$$

A Eq. (36) é uma equação de autovalor do tipo Schrödinger [34, 35, 36], que pode ser reescrita como:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U \right) \xi = \omega^2 \xi \Rightarrow H \xi_n(x) = \omega_n^2 \xi_n(x), \quad (39)$$

em que H é o respectivo operador Hamiltoniano e ξ_n representa o conjunto de auto-funções de H . A estabilidade é assegurada se o Hamiltoniano for não-negativo, ou seja, se seus auto-valores forem positivos, já que auto-valores negativos fariam que $T(t)$ divergisse assintoticamente, caso ω seja negativo as soluções de (35) deixam de ser exponenciais complexas, e passam a ser exponenciais reais, de modo que para t tendendo ao infinito, a solução explode. Uma forma de verificar que H é não-negativo é averiguar se o mesmo pode ser fatorado na forma $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$, e de fato podemos escrever H em (39) como:

$$H = \left(-\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right) \left(\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right), \quad (40)$$

onde podemos fazer

$$S_{\pm}^{\dagger} = -\frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s} \quad e \quad S_{\pm} = \frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}, \quad (41)$$

em que S_{\pm}^{\dagger} representa o conjugado hermitiano de S_{\pm} , logo H pode ser fatorado. Na Mecânica Quântica os autovalores equivalem ao valor esperado do hamiltoniano H tomado entre dois estados ortogonais, de modo que podemos escrever:

$$\omega_n^2 = \langle \xi | H | \xi \rangle = \langle \xi | S^{\dagger} S | \xi \rangle, \quad (42)$$

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 dx. \quad (43)$$

Assim, podemos ver que $\omega \geq 0$, isto é, todos os modos são positivos ou nulos, logo as soluções BPS são linearmente estáveis mediante pequenas perturbações do campo. Temos também que o modo zero $\xi_0(x)$ é dado por:

$$S_{\pm} \xi_0 = 0 \Rightarrow \frac{d\xi_0}{dx} = \pm W_{\phi\phi} \xi_0, \quad (44)$$

$$\xi_0(x) = A e^{\pm \int dx [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}}, \quad (45)$$

onde A é uma constante de normalização. Pode-se provar [28] de uma forma geral, que o modelo que é positivo definido pode ser escrito em termos de uma função superpotencial, e conseqüentemente, sempre terá suas soluções topológicas estáveis.

Como exemplo, vamos estudar a estabilidade das soluções do modelo ϕ^4 definido por (17), que são dadas por (20), onde iremos considerar o kink com centro na origem. O potencial de estabilidade é calculado usando a expressão (37), ou seja:

$$U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (46)$$

A Eq. (46) é o potencial de Pöschl-Teller modificado, bem estudado na literatura [29]. Graficamente, ele está representado na Fig. 5. Para esse tipo de potencial os autovalores para o espectro discreto são dados por:

$$E_n = n(4-n), \quad (47)$$

onde $n = 0$ e $n = 1$. O modo zero possui energia nula e o primeiro estado excitado energia $E_1 = 3$. O auto-estado normalizado para $n = 0$ é

$$\xi_0(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} \operatorname{sech}^2(x). \quad (48)$$

O potencial de Pöschl-Teller modificado possui modo zero e os seus autovalores são positivos, o que determina a estabilidade das soluções estáticas do modelo ϕ^4 . Este resultado era esperado, uma vez que este modelo é positivo definido e tem um superpotencial associado dado por (23).

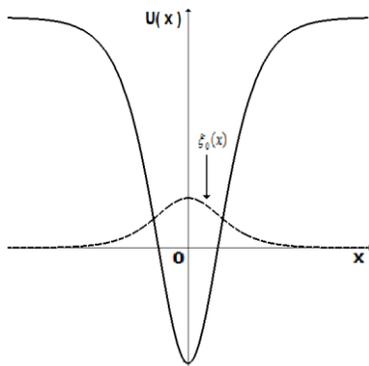


FIGURA 5. O potencial de estabilidade para o modelo ϕ^4 e o respectivo modo zero (48).

VII. CONCLUSÕES

Diante dos resultados expostos neste trabalho podemos concluir que em um processo de transição de fase, o sistema passa a apresentar dois estados distintos de mínima energia, o que corresponde ao aparecimento de defeitos topológicos (kinks). Para modelos supersimétricos, estes defeitos são as soluções de uma equação diferencial de primeira ordem e são denominados estados BPS, são as configurações do campo escalar real ϕ que minimizam a energia do sistema e identificam os setores topológicos do modelo conectando os vácuos do potencial. A estabilidade das soluções estáticas é assegurada se o Hamiltoniano associado à equação de autovalor tipo Schrödinger do modelo estudado for não negativo e puder ser fatorado na forma $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$, o que evidencia o fato do potencial de estabilidade

apresentar modo zero bosônico normalizado e auto-valores de energia positivos.

AGRADECIMENTOS

M. A. M Souza agradece à Vanda Santana pela revisão ortográfica, ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba pelo suporte e logística e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] Guth, A., *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347-356 (1981).
- [2] Linde, A., *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B **108**, 389-393 (1982).
- [3] Albrecht, A. and Steinhardt, P., *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. B **48**, 1220-1223 (1982).
- [4] Caldwell, R., Dave, R. and Steinhardt, P., *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582-1585 (1998).
- [5] Carroll, S., *Quintessence and the Rest of the World*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067-3070 (1998).
- [6] Peebles, P. and Ratra, B., *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559-666 (2003).
- [7] Padmanabham, T., *Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum*, Phys. Rep. **380**, 235-320 (2003).
- [8] Abrikosov, A., *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Sov. Phys. JETP **5**, 1174-1182 (1957).
- [9] Zurek, W., *Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems*, Phys. Rep. **276**, 177-221 (1996).
- [10] Noether, E., *Invariante Variationsprobleme*, Math. phys., 235-257 (1918).
- [11] Su, W., Schrieffer, J. and Heeger, A., *Solitons in Polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698-1701 (1979).
- [12] Goldstone, J., Salam, A. and Weinberg, S., *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965-970 (1962).
- [13] Higgs, P., *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508-509 (1964).
- [14] Higgs, P., *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156-1163 (1966).
- [15] Weiss, P., *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique*, J. Phys. **6**, 661-690 (1907).
- [16] 't Hooft, G., *A two-dimensional model for mesons*, Nucl. Phys. B **75**, 461-863 (1974).
- [17] Nielsen, H. and Olsen, P., *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45-61 (1973).
- [18] Vilenkin, A. and Shellard, E., *Cosmic String and other Topological Defects*, (Cambridge, UK, 1994).

M.A.M. Souza, L. Losano, D. Bazeia e R. Menezes

- [19] Bogomol'nyi, E., *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449-454 (1976).
- [20] Prasad, M. and Sommerfield, C., *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760-762 (1975).
- [21] Fred, C., Avinash, K. and Uday, S., *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, New Jersey (2001).
- [22] Morris, J. and Bazeia, D., *Supersymmetry breaking and Fermi balls*, Phys. Rev. D **54**, 5217-5222 (1996).
- [23] Edelstein, J., Trobo, M., Brito, F. and Bazeia, D., *Kinks inside supersymmetric domain ribbons*, Phys. Rev. D **57**, 7561-7569 (1998).
- [24] Shifman, M., Vainshtein, A. and Voloshin, M., *Anomaly and quantum corrections to solitons in two-*

- dimensional theories with minimal supersymmetry*, Phys. Rev. D **59**, 045016-045041 (1999).
- [25] Bazeia, D., Menezes, J. and Santos, M., *Complete factorization of equations of motion in Wess-Zumino theory*, Lett. B **521**, 418-420 (2001).
- [26] Bazeia, D., Menezes, J. and Santos, M., *Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories*, Nucl. Phys. B **636**, 132-140 (2002).
- [27] Rajaramam, R., *Solitons and Instantons*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [28] Bazeia, D. and Santos, M., *Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields* Phys. Lett. A **217**, 28-30 (1996).
- [29] Morse, P. and Feshbach, H., *Methods of Mathematical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953).