

Dificultades en la aplicación del cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas del trabajo efectuado por un gas ideal: Conceptos y teoremas en acción



Manuel Sebastian Alvarez Alvarado

Instituto de Ciencias Físicas, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Campus Gustavo Galindo Km.30.5 Vía Perimetral, Apartado 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

E-mail: Manuel.alvarez.alvarado@ieee.org

(Recibido el 11 de Diciembre de 2011; aceptado el 13 de Marzo de 2012)

Resumen

Este trabajo se enfoca en los campos conceptuales de Vergnaud y el objetivo fue determinar los conceptos en acción y teoremas en acción que tienen los estudiantes cuando aplican el cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas del trabajo efectuado por un gas ideal. Para el estudio realizado se contó con la participación de treinta estudiantes registrados en un curso de física básico con cálculo en el tópico de trabajo, calor y temperatura y para esto se tiene como prerequisite el cálculo diferencial y como corequisito el cálculo integral. Se propuso un problema que consistía en calcular el trabajo neto efectuado por un gas ideal, el cual fue resuelto por los estudiantes, esto involucró el uso del cálculo diferencial e integral y de acuerdo a las resoluciones del problema se establecieron los conceptos en acción y teoremas en acción equivocados y estos se presentan principalmente en la obtención de datos en función de los datos dados en el problema y se concentran más en el dominio del cálculo diferencial e integral, así como la aplicación directa de las ecuaciones sin entender el fenómeno físico que este involucra.

Palabras clave: Física, Campos conceptuales de Vergnaud, Trabajo efectuado por un gas ideal.

Abstract

This work focuses on Vergnaud's conceptual fields and the objective was to determine the concepts and theorems in action with students when they apply differential and integral calculus in solving problems of the work done by an ideal gas. For the study is counted with the participation of thirty students enrolled in a basic physics course with calculus on the topic of work, heat and temperature and this has as a prerequisite the differential calculus and integral calculus as a corequisite. A problem that was proposed was to calculate the net work done by an ideal gas, which was decided by the students, this involved the use of differential and integral calculus and in accordance with the resolutions of the problem is set into action the concepts and theorems wrong action and these are mainly presented in the data collection based on the data given in the problem and concentrate more in the domain of differential and integral calculus, as well as the direct application of the equations without understanding the physical phenomenon that involved.

Keywords: Physics, Vergnaud's conceptual fields, work done by an ideal gas.

PACS: 01.40.gb, 01.40.J, 05.70.Ce

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Ante los problemas que se han suscitado en la actualidad, con respecto a la comprensión del concepto de trabajo efectuado por un gas ideal, se presenta este trabajo. El conocimiento de conceptos clave, así como el dominio de las matemáticas y de la física resulta indispensable para el aprendizaje. Los estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería, de una universidad ecuatoriana que están registrados en un curso de física básica con cálculo, en la unidad de trabajo efectuado por un gas ideal (dominio de la física), tienen dificultades al momento de resolver problemas que requieren de la aplicación del cálculo

diferencial e integral así como la expresión matemática de una característica física (dominio de las matemáticas).

Se generan varios conceptos en acción y teoremas en acción que resultan no ser correctos y esto afecta de diversas maneras al estudiante pues impide la construcción del conocimiento científico "correcto", y obstaculiza la habilidad de resolución de problemas que acorde a la teoría del aprendizaje de Gagne es la habilidad intelectual de más alto nivel [1].

El profesor debe de tener siempre presente, que los conceptos de acción y teoremas de acción incorrectos afectan en la resolución de problemas y es parte de la tarea del profesor poder determinarlos y deben tener los

esquemas para promover el cambio conceptual así como lo indica Gilar R. en su tesis doctoral titulada *Teoría del aprendizaje* [2].

[“Dentro de la teoría del aprendizaje se tienen varias habilidades intelectuales, pero en particular la solución de problemas es la habilidad intelectual de más alto nivel”].

Siendo así, la resolución de problemas es la parte más difícil de lograr y resulta indispensable usar la teoría de Vergnaud para determinar concepciones alternativas que tienen los estudiantes en este caso para la resolución de problemas para la determinación del trabajo efectuado por un gas ideal, aplicando el cálculo diferencial e integral.

II. TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE VERGNAUD

Vergnaud toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos progresivamente los dominen. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales; ellas son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez [3].

La teoría de los campos conceptuales supone que el amago del desarrollo cognitivo es la conceptualización y es la piedra angular de la cognición. Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de campo conceptual, los conceptos de esquema (la gran herencia piagetiana de Vergnaud), situación, invariante operatorio (teorema-en-acción o concepto-en-acción), y su propia concepción de concepto [4].

Resumiendo, la teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitiva neo piagetiana que pretende ofrecer un referencial más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente aquellas implicadas en las ciencias y en las técnicas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio. Aunque Vergnaud esté especialmente interesado en los campos conceptuales de las estructuras aditivas y de las estructuras multiplicativas, la teoría de los campos conceptuales no es específica de esos campos, ni de la Matemática. En Física, por ejemplo, hay varios campos conceptuales – como el de la Mecánica, el de la Electricidad y el de la Termología - que no pueden ser enseñados, de inmediato, ni como sistemas de conceptos ni como conceptos aislados. Es necesaria una perspectiva

desarrollista del aprendizaje de esos campos. Esto mismo es válido, según Vergnaud en *Biología: La comprensión de la reproducción en vegetales no tiene mucho que ver con la comprensión de la reproducción en animales o con la comprensión de procesos celulares. La Historia, la Geografía, la Educación Física, por ejemplo, tienen igualmente una serie de campos conceptuales para los cuales los alumnos deben desarrollar esquemas y concepciones específicas. En todos esos casos, el modelo piagetiano de la asimilación/acomodación funciona si no se intenta reducir la adaptación de esquemas y de conceptos a estructuras lógicas* [5].

Cada estudiante ante una misma situación tiene un funcionamiento cognitivo diferente y por lo tanto se pueden presentar dos escenarios. El primer escenario es que el estudiante ante una determinada situación tenga un amplio repertorio de esquemas que le permita resolver adecuadamente el problema propuesto. El segundo escenario es que el estudiante ante una determinada situación no tenga un amplio repertorio de esquemas que no le permita resolver el problema propuesto adecuadamente.

Se puede concluir que la teoría de Vergnaud permite conocer los conceptos y teoremas en acción al momento que un estudiante realiza un problema.

II. MÉTODO

A. Sujetos

Participaron en este estudio treinta estudiantes registrados en un curso de física básica con cálculo, en el tópico de trabajo, calor y temperatura, y que siguen las carreras de ingeniería. Los estudiantes fueron veintidós hombres y ocho mujeres cuyas edades estaban comprendidas entre los 18 y 19 años.

B. Tareas y materiales

La tarea instruccional seleccionada para este estudio fue la unidad de Trabajo realizado por un gas ideal. Este contenido fue previamente enseñado a los estudiantes y el tiempo dedicado a la instrucción fue de dos horas. Los prerrequisitos para este curso son las asignaturas de cálculo diferencial e integral. Se elaboró una prueba y el tiempo dedicado para el desarrollo de la misma fue de 60 minutos para todos los estudiantes.

C. Procedimiento

Los estudiantes participantes de este estudio realizaron una prueba escrita que constaba por un problema que consistía en la determinación del trabajo efectuado por un gas ideal el cual era sometido a un ciclo constituido por dos procesos isotérmicos y dos procesos isobáricos. Se les solicitó a los estudiantes que resolvieran el problema y que utilizaran las herramientas matemáticas y conceptos físicos que conocen. La prueba fue revisada para determinar conceptos en acción

y teoremas en acción inadecuados una vez realizado esto, en adición se entrevistó a ciertos estudiantes que rindieron la prueba para que expliquen con mayor detalle el porqué de los conceptos en acción y teoremas en acción que utilizaron.

La resolución del problema propuesto se muestra en el Anexo 1.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis del proceso de resolución de problemas reveló las siguientes situaciones que se detallan a continuación con respecto a los conceptos de acción:

A. Interpretación del gráfico

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, tres estudiantes no tenían ninguna idea sobre la representación gráfica dada en el problema, pues no intentaron resolver el problema. El resto de los estudiantes comprendían los procesos que conformaban el ciclo dado, e intentaron resolver el problema.

Teoremas en acción: Interpretar el gráfico y reconocer los parámetros físicos que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema [6].

Para este caso se presentó un gráfico presión versus volumen donde se mostraba un ciclo al cual era sometido un gas ideal. Los ciclos que se pueden dar en un problema relacionado con trabajo, calor y temperatura van a depender de los procesos implícitos en el ciclo, esto facilitará aplicar criterios como la ley de los gases ideales y características de los diferentes procesos.

Si el estudiante no interpreta el gráfico dado, él no podrá resolver el problema.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indico lo siguiente: “.....no entendía el gráfico y por eso no hice nada, ya que no sabía como atacar el problema”.

B. La ley ideal de los gases: ecuación de estado

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, veintisiete expresaron de manera correcta la ecuación de estado, sin embargo veinte de ellos no lograron deducir la ecuación que relaciona a la presión (P), al volumen (V), y a la temperatura (T) como una constante.

Teoremas en acción: Identificar que la ley ideal de los gases se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación de estado, pero conocer esto no basta para la resolución del problema, pues lo mas complicado es poder deducir la ecuación $\frac{PV}{T} = constante$ [7].

La ecuación de estado describe normalmente la relación entre la presión (P), el volumen (V), la temperatura (T), la

constante de los gases ideales (R) y la cantidad (en moles) de un gas ideal (n): $PV = nRT$. Despejando se obtiene $\frac{PV}{T} = nR$. De esta manera como n y R son constantes entonces $\frac{PV}{T} = constante$, es decir se puede usar esta ecuación para relacionar con diferentes puntos dentro del ciclo al cual es sometido el gas ideal. Los estudiantes al final de este análisis debieron haber llegado a lo siguiente: $\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D}$.

Los estudiantes tienen dificultades para realizar un análisis matemático como el descrito anteriormente.

Adicionalmente muchos de los estudiantes no podían encontrar el valor de las temperaturas en función de los datos dados, ya que no realizaban el despeje adecuado $PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$

Los estudiantes deben localizar, definir y expresar correctamente relaciones acorde a los datos dados y las ecuaciones conocidas en este caso se refiere a la ecuación de estado.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....fue fácil escribir las ecuaciones pero no podía dejar una variable en función de otra.....”.

C. Características de los procesos: isotérmico e isobárico

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, cinco de ellos desconocían que era un proceso isotérmico e isobárico y otros seis estudiantes si reconocían los procesos sin embargo no podían expresar matemáticamente sus características. El resto de los estudiantes no tenían problema relacionado con las características de los procesos.

Teoremas en acción: Distinguir y reconocer las características de los procesos y poder expresarlos matemáticamente resulta una gran ventaja para la resolución del problema, pues con esto se podrá obtener datos desconocidos que son necesarios para llegar a la solución.

La característica principal de un proceso isotérmico es que la temperatura permanece constante y aplicando esto en la ecuación que relaciona a la presión (P), al volumen (V), y a la temperatura (T) como una constante, es posible obtener relaciones como $P_A V_A = P_B V_B$ o $P_C V_C = P_D V_D$ que son puntos donde experimentan procesos isotérmicos y así obtener algún dato requerido.

Para el caso en el que se tenía un proceso isobárico la principal característica es que la presión permanece constante de esta manera es posible obtener valores de presión en cada punto acorde al gráfico dado.

Los estudiantes deben aprender a diferenciar los procesos y reconocer sus principales características para poder expresarlas matemáticamente.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....aunque

conocía las características de los procesos no me acordaba cual era de cual y no pude expresarlas en forma matemática”.

D. Diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, diecinueve de ellos expresaron el trabajo efectuado por un gas ideal como la integral de la presión por un diferencial de volumen lo cual es correcto, sin embargo de esos diecinueve solo quince estudiantes resaltaron la principal característica de un proceso isobárico y lograron deducir que la presión como es constante puede salir de la integral.

Teoremas en acción: En un proceso isobárico la presión permanece constante de esta manera al expresar la ecuación de trabajo la presión puede salir de la integral. Emplear el concepto requerido da resultados positivos.

Se define el trabajo efectuado por un gas ideal $W = \int_0^f P dV$ pero lo más relevante de esto, es reconocer que para el caso en que se tenga un proceso isobárico la presión permanece constante siendo así $W = P \int_0^f dV = P(V_f - V_0)$. Este teorema en acción es una consecuencia de los anteriores.

Hay que resaltar que el conocimiento de la ecuación del trabajo efectuado por un gas ideal no garantiza una resolución correcta pues emplear el concepto físico requerido permite un desarrollo adecuado para resolver el problema.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....no sé porque no saqué fuera de la integral la presión.... No era tan difícil calcular el trabajo para el proceso isobárico”.

E. Diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, veinticinco de ellos al analizar el gráfico donde se tenían procesos isotérmicos, no expresaron la presión en función del volumen para poder determinar el trabajo efectuado por un gas ideal.

Teoremas en acción: En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral [8]. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.

Dos estudiantes intentaron resolver la integral, sin relacionar la presión y el volumen (consideraron como si fuera un proceso isobárico cuando en realidad era un proceso isotérmico) y escribieron: $W = \int_0^f P dV = P \int_0^f dV = P(V_f - V_0)$ Este teorema en acción es una consecuencia de los anteriores.

Considerar que un proceso isotérmico se caracteriza por mantener su temperatura constante y que la presión varía en

función del volumen, aplicando la ecuación de estado se obtiene la expresión $PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V}$, reemplazando en la ecuación del trabajo efectuado por un gas ideal: $W = \int_0^f P dV = \int_0^f \frac{nRT}{V} dV = nRT[\ln(V_f) - \ln(V_0)]$.

Los estudiantes no logran relacionar matemáticamente los parámetros físicos unos con otros y al final llegan a pensar que un parámetro físico no tiene nada que ver con otro lo cual con lleva a concepciones alternas que son equivocadas.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....cuando determine el trabajo en el caso del proceso isobárico fue fácil pero no me di cuenta que para el proceso isotérmico no cumplía las mismas condiciones y no resolví bien”.

F. Tabular los datos

Ningún estudiante tabuló los datos del problema y los datos obtenidos.

Teoremas en acción: Tabular datos permite una organización adecuada para poder realizar una estrategia y así obtener una resolución adecuada [9].

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indicó lo siguiente: “.....tabular datos no lo vi necesario pues me toma tiempo y no me garantizaba éxito en la resolución del problema”.

Pero después de mostrarle la solución expresó: “Si hubiera tabulado los datos quizás no hubiera cometido los errores que cometí”.

G. Límites de integración

Solo tres estudiantes llegaron a este punto clave para la resolución del problema.

El estudiante uno tomó los límites para calcular el trabajo entre el tramo AB considerando $V_{inicial} = V_1$ & $V_{final} = V_3$ y no pudo encontrar una expresión en función de los datos dados, pues V_3 no es dato del problema, y esta misma dificultad tuvo para determinar el trabajo entre los tramos BC & CD.

El estudiante dos para calcular el trabajo entre el tramo DA eligió como límite de integración $V_{inicial} = V_D$ & $V_{final} = V_A$ y esto es un teorema en acción erróneo porque acorde al gráfico dado en el tramo DA el punto inicial es el punto D y en el punto final es el punto A.

Teoremas en acción: Los límites de integración comprenden todo el sistema del ciclo dado para la obtención trabajo neto efectuado por un gas ideal. Definir correctamente los límites hará que el valor encontrado sea correcto o erróneo [10].

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “..... estaba cerca de terminar el problema pero no me percate que si cogía los límites al revés iba obtener resultados muy diferentes..... quizás el factor tiempo me jugó una mala pasada”.

H. Solución

La gran mayoría de los estudiantes comenzaron escribiendo la ecuación de estado de los gases ideales y junto a ella escribieron la ecuación para el cálculo del trabajo efectuado por un gas ideal, sin embargo no sabían que más hacer.

Solo hubo un estudiante de los treinta fue capaz de resolver el problema y se le hizo una entrevista y expresó: "... conozco bastante sobre cálculo integral y diferencial después de todo soy ayudante de esas materias comprender el fenómeno físico fue difícil pero la explicación brindada antes de realizar la prueba me ayudó bastante y pude resolver el problema con estrategias que fui desarrollando para llegar a la solución.... No sabía nada de conceptos y teoremas en acción pero desde mi punto de vista resulta de gran ayuda".

Esto demuestra que tener presentes los conceptos y teoremas en acción da excelentes resultados y permite al estudiante una comprensión conceptual adecuada.

Los conceptos en acción que necesitan atención y por ende sus teoremas en acción relacionados son: Interpretación del gráfico, la ley ideal de los gases: ecuación de estado, características de los procesos: isotérmico e isobárico, diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante, diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen, tabular datos, límites de integración. En el Anexo 2 en la Tabla III se presentan los conceptos en acción y teoremas en acción incorrectos.

VII. CONCLUSIÓN

De todo lo expuesto anteriormente, el principal problema de los estudiantes es que no tienen presentes conceptos y teoremas en acción al momento de resolver un problema. Los estudiantes tienen problemas en el ámbito de interpretación de gráficos de presión vs volumen, acorde a los resultados este error no ocurre en un gran rango, pero cuando se trata de identificar, diferenciar características y expresarlas matemáticamente aplican conceptos y teoremas en acción equivocados y esto ocurre una gran cantidad de estudiantes. De acuerdo a lo observado se puede inferir que los estudiantes no conocen cómo aplicar los conocimientos de cálculo diferencial e integral en el contexto de la resolución de problemas de física. Esto se debe a que los esquemas de resolución de problemas del cálculo diferencial e integral no se transfieren adecuadamente a la resolución de problemas de física con este componente [11]. Además, carecen de esquemas que les permitan aplicar el conocimiento estratégico a la resolución del problema.

Los estudiantes por un lado no han logrado comprender las definiciones, principios, reglas y teoremas de las matemáticas y por otro lado no han logrado comprender los conceptos, leyes y principios de la física. Ellos simplemente aplican el conocimiento procedimental que involucra la

memorización de los pasos para determinar la solución del problema.

Los estudiantes se centran bastante en el tema del cálculo diferencial e integral y solo desean poder aplicarlo, pero no se dan cuenta que lo más importante no es aplicarlo correctamente, sino más bien es poder entender el fenómeno físico que éste conlleva cuando se resuelven problemas de física, ellos deben aprender a cruzar esa barrera que llevan, ese pensamiento equivocado, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: "...no es difícil aprenderse una ecuación y poder aplicar el cálculo integral, lo más difícil es aprender a usarla y saber qué significa...por ejemplo si sé que la integral representa el área bajo la curva, y se tiene un gráfico presión vs volumen, entonces el trabajo que se presenta como la integral de la presión por un diferencial de volumen viene representado como el área, así el problema se reduce un simple cálculo de áreas".

Este estudio permitió analizar las percepciones alternativas que tienen los estudiantes cuando resuelven un problema de relacionado con el trabajo neto efectuado por un gas ideal, y al mismo tiempo permitió realizar una investigación donde los maestros deben hacer más refuerzo al momento de resolver y explicar un problema de este tipo.

El siguiente paso es diseñar un material educativo computarizado en donde se implemente los resultados de esta investigación y aplicando el diseño basado en investigación se mejore el material educativo computarizado y el aprendizaje del proceso de resolución de problemas de trabajo neto efectuado por un gas ideal con cálculo diferencial e integral.

REFERENCIAS

- [1] Gagne, R., *The Conditions of Learning and Theory of Instruction*, 4 Sub edition (Wadsworth Pub Co, New York, 1985).
- [2] Gilar, R. C., *Teoría del aprendizaje*, Tesis Doctoral Universidad de Alicante (2003).
- [3] Llancaqueo, A., Caballero, M. C. & Moreira, M. A., *El aprendizaje del concepto de campo en Física: Una investigación exploratoria a la luz de la teoría de Vergnaud*, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 399-417 (2003).
- [4] Vergnaud, G., *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. En T, Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.) *Addition and subtraction. A cognitive perspective*, (Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1982), pp. 39-59.
- [5] Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didactique des Mathématiques **10**, n° 2, 3, 133-170 (1990).
- [6] Greca, I., Moreira, M. A. & Otero, R., *El uso de imágenes en textos de física para la enseñanza secundaria y universitaria*, *Investigações em Ensino de Ciências* **7**, 127-154 (2002).

Manuel Sebastian Alvarez Alvarado

[7] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. and Freedman, R., *Física universitaria*, 11a Ed. (Pearson Education, California, 2006).

[8] Arslan, S., *Traditional instruction of differential equations and conceptual learning*, Teaching Mathematics and its Applications **29**, 94-107 (2010).

[9] Andrés, M. M. & Pesa, A. M., *Conceptos en acción y teoremas en acción en un trabajo de laboratorio de física*, (2003). Descargado Diciembre, 8 (2011) <http://www.fae.ufmg.br/abrapec/revistas/V4N1/v4n1a5.pdf>

[10] Herrera, F. J., *Dificultades de la aplicación de cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas de campo eléctrico*, Descargado Diciembre, 1 (2011), <http://www.sidweb.espol.edu.ec/private/mycourses/website/?websiteId=5873>.

[11] Moreira, M. A., *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e pesquisas nesta área*, Investigações em Ensino de Ciências **7**, 7-29 (2002).

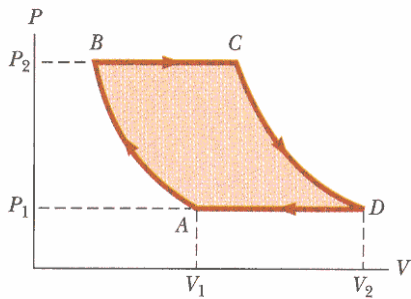
ANEXO 1

Problema propuesto con su respectiva solución

Un gas ideal se somete a un proceso termodinámico que consta de dos etapas isobáricas y de dos isotérmicas, como se muestra en la figura siguiente:

Demuestre que el trabajo neto hecho durante las cuatro etapas es:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1) \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$



GRÁFICA 1. Ciclo al cual es sometido un gas ideal.

Solución:

Un gas ideal se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación:

$$PV = nRT. \quad (1)$$

Donde:

P : es la presión a la que es sometida el gas cuya unidad según el S.I. es Atmósfera [atm].

V : es el volumen del gas cuya unidad según el S.I. es el Litro [L].

n : es el número de moles que posee el gas cuya unidad según el S.I. es mol [mol].

R : es la llamada constante de los gases ideales, cuyo valor es 0.082 (atm.L.)/(K*mol).

T : es la temperatura a la que se encuentra el gas cuya unidad según el S.I. es Kelvin [K].

Acorde a esta ecuación se requiere conocer los datos de temperatura, volumen y presión en cada punto del gráfico sin embargo solo se conoce ciertos datos:

TABLA I. Datos conocidos.

	A	B	C	D
Presión (P)	$P_A=P_1$	$P_B=P_2$	$P_C=P_2$	$P_D=P_1$
Volumen (V)	$V_A=V_1$	$V_B=?$	$V_C=?$	$V_D=V_2$
Temperatura (T)	$T_A=?$	$T_B=?$	$T_C=?$	$T_D=?$

En adición se conoce que el ciclo al es sometido este gas ideal se conforma por dos procesos isotérmicos y dos isobáricos de esta manera se procederá a analizar los puntos en base a las características de los procesos y así obtener los datos que faltan en la tabla superior.

De la Ec. (1) se obtiene:

$$\frac{PV}{T} = nR. \quad (2)$$

Como n y R son constantes entonces la Ec. (2) es constante, es decir se puede usar esta ecuación para relacionar con diferentes puntos dentro de un ciclo.

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D}. \quad (3)$$

El tramo AB se caracteriza por ser un proceso isotérmico y la característica de este proceso es que la presión y el volumen varían, sin embargo la temperatura permanece constante ($T_A=T_B=T_1$) y se procede aplicar la relación descrita en la Ec. (3) para obtener el volumen en el punto B .

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B},$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_B}{T_1},$$

$$V_B = \frac{P_1 V_1}{P_2}. \quad (4)$$

El tramo CD se caracteriza por ser un proceso isotérmico y la característica de este proceso es que la presión y el volumen varían, sin embargo la temperatura permanece constante ($T_C=T_D=T_2$) y se procede aplicar la relación descrita en la Ec. (3) para obtener el volumen en el punto C .

$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D},$$

$$\frac{P_2 V_C}{T_2} = \frac{P_1 V_2}{T_2},$$

$$V_C = \frac{P_1 V_2}{P_2}. \quad (5)$$

Se procede aplicar la Ec. (1) en el punto A para determinar la temperatura.

$$P_A V_A = nRT_A$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR}.$$

Como ya se mencionó, el tramo AB es un proceso isotérmico donde la principal característica es que la temperatura permanece constante entonces:

$$T_A = T_B = T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR}. \quad (6)$$

Se procede aplicar la Ec. (1) en el punto *D* para determinar la temperatura.

$$P_D V_D = nRT_D,$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR}.$$

Como ya se menciono el tramo *CD* es un proceso isotérmico donde la principal característica es que la temperatura permanece constante entonces:

$$T_C = T_D = T_2 = \frac{P_1 V_2}{nR}. \quad (7)$$

Ahora se procede a llenar la Tabla I con los datos obtenidos.

TABLA II. Datos obtenidos.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
Presión (<i>P</i>)	$P_A=P_1$	$P_B=P_2$	$P_C=P_2$	$P_D=P_1$
Volumen (<i>V</i>)	$V_A=V_1$	$V_B = \frac{P_1 V_1}{P_2}$	$V_C = \frac{P_1 V_2}{P_2}$	$V_D=V_2$
Temperatura (<i>T</i>)	$T_A = \frac{P_1 V_1}{nR}$	$T_B = \frac{P_1 V_1}{nR}$	$T_C = \frac{P_1 V_2}{nR}$	$T_D = \frac{P_1 V_2}{nR}$

Se conoce que el trabajo efectuado por un gas es:

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f P dV. \quad (8)$$

La Ec. (8) indica que el trabajo efectuado gráficamente representa el área bajo la curva desde un punto a otro.

Análisis donde se tiene procesos isobáricos

La característica principal de este proceso es que la presión permanece constante siendo así:

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f P dV = P \int_o^f dV. \quad (9)$$

Análisis donde se tiene procesos isotérmicos

La característica principal este proceso es que la temperatura permanece constante y presión varía en función del volumen y es necesario encontrar una ecuación que relacione la presión con el volumen así pues de la Ec. (1) se obtiene:

$$P = \frac{nRT}{V}. \quad (10)$$

Se reemplaza la Ec. (10) en la Ec. (8).

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f \frac{nRT}{V} dV. \quad (11)$$

Análisis en el tramo *AB*: Proceso isotérmico

Utilizando la Ec. (11):

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 [\ln(V_B) - \ln(V_A)],$$

$$W_{A \rightarrow B} = nRT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \quad (12)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (12):

$$W_{A \rightarrow B} = nR \left(\frac{P_1 V_1}{nR} \right) \ln \left(\frac{\frac{P_1 V_1}{P_2}}{V_1} \right).$$

Simplificando:

$$W_{A \rightarrow B} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right). \quad (13)$$

Análisis en el tramo *BC*: Proceso isobárico

Utilizando la Ec. (9):

$$W_{B \rightarrow C} = P \int_B^C dV,$$

$$W_{B \rightarrow C} = P(V_C - V_B). \quad (14)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (14):

$$W_{B \rightarrow C} = P_2 \left(\frac{P_1}{P_2} V_2 - \frac{P_1}{P_2} V_1 \right).$$

Simplificando y factorizando:

$$W_{B \rightarrow C} = P_1 (V_2 - V_1). \quad (15)$$

Análisis en el tramo *CD*: Proceso isotérmico

Utilizando la Ec. (11):

$$W_{C \rightarrow D} = \int_C^D \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 [\ln(V_D) - \ln(V_C)],$$

$$W_{C \rightarrow D} = nRT_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right). \quad (16)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (16):

$$W_{C \rightarrow D} = nR \left(\frac{P_1 V_2}{nR} \right) \ln \left(\frac{V_2}{\frac{P_1 V_2}{P_2}} \right).$$

Simplificando:

$$W_{C \rightarrow D} = P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right). \quad (17)$$

Análisis en el tramo DA: Proceso isobárico

Utilizando la Ec. (9):

$$W_{D \rightarrow A} = P \int_D^A dV,$$

$$W_{D \rightarrow A} = P(V_A - V_D). \quad (18)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (18):

$$W_{D \rightarrow A} = P_1(V_1 - V_2). \quad (19)$$

Cálculo del trabajo neto efectuado por un gas ideal

El trabajo neto se define como la suma de los trabajos efectuados en cada tramo:

$$W_{neto} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A},$$

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) + P_1(V_2 - V_1) + P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + P_1(V_1 - V_2).$$

Aplicando propiedad de los logaritmos:

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln(P_1) - P_1 V_1 \ln(P_2) + P_1 V_2 - P_1 V_1 + P_1 V_2 \ln(P_2) - P_1 V_2 \ln(P_1) + P_1 V_1 - P_1 V_2,$$

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln(P_1) - P_1 V_1 \ln(P_2) + P_1 V_2 \ln(P_2) - P_1 V_2 \ln(P_1).$$

Aplicando propiedad de los logaritmos y ordenando:

$$W_{neto} = -P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

Factorizando y reordenando:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1) \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right). \quad (20)$$

De esta manera se obtiene el trabajo neto efectuado por un gas ideal que es sometido al ciclo mostrado en la gráfica 1.

ANEXO 2

Lista de teoremas y conceptos en acción que deberían haber sido aplicados correctamente por los estudiantes al momento de resolver el problema adjunto, al Anexo 1.

TABLA III. Resultados obtenidos.

Conceptos en acción equivocados	Teoremas en acción equivocados
1. Interpretación del gráfico	Interpretar el gráfico y reconocer los parámetros físicos que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema.
2. La ley ideal de los gases: ecuación de estado	Identificar que la ley ideal de los gases se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación de estado, pero conocer esto no basta para la resolución del problema, pues lo más complicado es poder deducir la ecuación $\frac{PV}{T} = constante$
3. Características de los procesos: isotérmico e isobárico	En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.
4. Diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante	En un proceso isobárico la presión permanece constante de esta manera al expresar la ecuación de trabajo la presión puede salir de la integral. Emplear el concepto requerido da resultados positivos.
5. Diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen	En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.
6. Tabular los datos	Esto permite una organización adecuada para poder realizar una estrategia y así obtener una resolución adecuada.
7. Límites de integración	Los límites de integración comprenden todo el sistema del ciclo dado para la obtención trabajo neto efectuado por un gas ideal. Definir correctamente los límites hará que el valor encontrado sea correcto o erróneo.