

Introducción al formalismo gauge con ligaduras en los casos clásico y cuántico



Rafael Andrés Alemañ Berenguer^{1,2}

¹Instituto Universitario de Física Aplicada a la Ciencia y a la Tecnología. Universidad de Alicante (España).

²Agrupación Astronómica de Alicante (División de Cosmofísica), c/ Arzobispo Loaces, 12 - 4ªA, esc. dcha. Alicante – 03003 (España).

E-mail: agrupacion.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 12 Enero de 2012; aceptado el 17 de Marzo de 2012)

Resumen

Las ecuaciones dinámicas obtenidas variacionalmente de un principio de acción estacionaria, junto con la imposición de ciertas ligaduras a las simetrías gauge asociadas, han demostrado ser uno de los métodos más poderosos en el tratamiento analítico de extensas áreas de la Física tanto clásica como cuántica. En este artículo se traza las líneas fundamentales de su desarrollo conceptual, así como algunos de los problemas que todavía sufre este procedimiento en el ámbito cuántico (consecuencias empíricas de las supersimetrías) y en el clásico (una pertinente interpretación gauge de la variable tiempo).

Palabras clave: Formalismo gauge con ligaduras, mecánica clásica hamiltoniana, teoría cuántica no relativista.

Abstract

The dynamic equations variationally derived from a principle of stationary action, together with the imposition of certain constraints to the associated gauge symmetries have proven to be one of the most powerful methods in the analytic treatment of extensive areas of Physics, both quantum and classical. This paper traces the main lines of its conceptual development as well as some of the problems that this procedure still suffers in the quantum (empirical implications of supersymmetry) and classical domains (a proper gauge interpretation of the time variable).

Keywords: Gauge formalism with constrictions, Hamiltonian classic mechanics, non-relativistic quantum theory.

PACS: 02.30.Xx, 03.65.Db, 04.20.Fy, 45.20.Jj.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La teoría conocida como cálculo de variaciones –hoy día parte de la teoría de funcionales– fue fundada por el suizo Leonard Euler (1707-1783) y el italo-francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Estos matemáticos descubrieron que una función f proporciona un valor extremo a un funcional F siempre y cuando satisfaga un cierto conjunto de ecuaciones diferenciales (ecuaciones de Euler-Lagrange).

La importancia de este resultado sobrepasaba el mero ámbito de la matemática pura, pues pronto se comprobó que muchas de las ecuaciones diferenciales de la mecánica y de la física en general son precisamente del tipo Euler-Lagrange. Como consecuencia de ello, tales ecuaciones físicas podían tomarse como condiciones de Euler-Lagrange para ciertos funcionales convenientemente elegidos.

De esta forma multitud de leyes físicas se reformularon sustituyéndolas por enunciados en los que se exigía un valor extremo, normalmente un mínimo, a determinadas cantidades. Así, en lugar de afirmar que un sistema físico

obedecía una ley dada por una cierta ecuación diferencial de las variables del sistema, se comenzaba construyendo un funcional con dichas variables. A continuación se requería que este funcional alcanzase un valor mínimo, por ejemplo, y se deducía por ello –mediante el cálculo variacional– que las ecuaciones así obtenidas coincidían con las del planteamiento tradicional.

La ventaja de esta formulación de las situaciones físicas es que multitud de leyes naturales, sin aparente relación entre sí, son susceptibles de expresarse por medio de un principio variacional. Y con ello, además de una viva impresión unificadora, ganamos la posibilidad de simplificar buen número de problemas utilizando las herramientas de la teoría de funcionales para resolverlos. El funcional escogido, por supuesto, es distinto según el caso físico considerado, aunque en todos ellos se cumple que sus unidades han de ser iguales al producto de la energía por el tiempo, llamado también acción.

Tanta es la trascendencia de este procedimiento que en el siguiente apartado se esbozarán los inicios conceptuales de la mecánica analítica de la mano de los fundadores de sus dos principales desarrollos, la mecánica lagrangiana y la

hamiltoniana. Los apartados tercero y cuarto se dedicarán a exponer la importancia de las relaciones que ligan las variables canónicas entre sí, relaciones más conocidas como ligaduras del sistema. El quinto y sexto epígrafes entran de lleno en la decisiva importancia de las transformaciones gauge como ingrediente esencial en nuestras descripciones matemáticas de la naturaleza, que junto con las ligaduras permiten formular ecuaciones dinámicas ampliadas.

La extensión de la mecánica analítica con simetrías gauge mediante la inserción de variables anticonmutativas, como se ve en el séptimo apartado, permite incorporar en este tratamiento los sistemas fermiónicos, caracterizados por su espín semientero y la falta de conmutatividad en algunas de sus propiedades. La conexión entre los valores enteros y semienteros del espín sugiere la posible ampliación de las simetrías gauge hasta un nuevo género de transformaciones denominadas “supersimetrías”, lo que será examinado en el epígrafe octavo. Los problemas que genera la interpretación del carácter dinámico de la variable tiempo a través del formalismo gauge se abordarán en el octavo apartado, y las conclusiones, en el décimo, cerrarán este trabajo.

II. DE LAGRANGE A HAMILTON

Los primeros pasos de la mecánica analítica se deben a la obra de Lagrange contenida en su monumental tratado *Mecánica Analítica*, publicado por primera vez en 1788. En él se afirmaba que los sistemas físicos evolucionan con el tiempo de modo tal que la magnitud de su acción – representada por una función denominada lagrangiana, cuya integral es el funcional deseado– sea mínima [1, 2].

El británico William Rowan Hamilton (1805-1865) aquilató el principio de mínima acción introducido por Lagrange al advertir que en bastantes casos la realidad física no involucraba un mínimo de la acción en absoluto. Amplió las ideas de Lagrange y desembocó en el principio de acción estacionaria que, como se ha señalado antes, exige un valor estacionario para la acción, o dicho de otro modo, que la variación de primer orden de la integral de la acción sea nula.

Hamilton desarrolló incluso un nuevo juego de ecuaciones, equivalentes a las de Lagrange si bien matemáticamente más sencillas, en las que insertando un funcional de las variables del sistema –el hamiltoniano– se llegaba a las mismas conclusiones que con el método lagrangiano [3]. Las variables escogidas en las ecuaciones de Hamilton no son las coordenadas de posición, q , y sus derivadas temporales, dq/dt , sino las coordenadas q y los impulsos deducidos de ellas p_q (pues en mecánica el impulso de una partícula consiste simplemente en el producto de su masa por su velocidad).

Es obvio que en un sentido estricto las q y las p_q no son variables independientes, pero la esencia del procedimiento hamiltoniano estriba en operar como si lo fueran. Así obtenemos doble número de ecuaciones que con Lagrange,

a cambio de que todas ellas contengan solo derivadas de primer orden, menos complicadas de resolver.

En ambos planteamientos es necesario representar la evolución del sistema estudiado mediante el auxilio de un espacio abstracto de muchas dimensiones: $3n$ dimensiones en el espacio de configuraciones de Lagrange, y $6n$ en el espacio fásico de Hamilton (además del tiempo) para n partículas.

A menudo se presenta la función hamiltoniana como si no fuese más que otro apelativo para la energía total de un sistema, asegurando sin matizaciones que $H = T + U$, lo cual es estrictamente falso. El hamiltoniano coincidirá con la energía total únicamente cuando las ecuaciones que definan las coordenadas generalizadas no dependan del tiempo y los potenciales no dependan de las velocidades generalizadas. Cuestión aparte es la conservación de su valor, pues H será constante siempre que no dependa explícitamente del tiempo (se le llama entonces “integral primera de Jacobi”, coincida o no con la energía). Así, en ocasiones podríamos toparnos con una H que se conservase no siendo la energía total, o que no se conservase siéndolo [4].

En la dinámica lagrangiana se define igualmente una “función energía” $h(q, \dot{q}, t)$ del todo análoga al hamiltoniano y, pese a su nombre, sometida a las mismas restricciones que aquél en cuanto a su identificación con la energía. La distinción se mantiene para subrayar que h depende de las coordenadas generalizadas, de sus derivadas temporales y, en su caso, del tiempo.

Aplicando el hamiltoniano H , que en su modalidad más simple es función de coordenadas q e impulsos p , a un sistema con k grados de libertad, se desemboca en un conjunto de $2k$ ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, en lugar de las k ecuaciones lagrangianas de segundo orden usuales. Las ecuaciones hamiltonianas asumen una forma particularmente simple en el caso de un sistema conservativo, de modo que,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad - \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1)$$

No es de extrañar, pues, que una vez descubierta la forma de la función hamiltoniana adecuada en un caso particular, interese preservar dicha forma frente a cambios de variables en el espacio fásico. De ello se encargan las transformaciones “canónicas”, es decir, aquellas transformaciones de variables en el espacio de las fases que conservan la forma hamiltoniana de las ecuaciones del movimiento.

A este respecto, son dos las maneras de contemplar el modo en que actúa una transformación canónica. El punto de vista *pasivo* se adopta cuando consideramos que lo que ocurre no es sino el paso de un cierto espacio fásico F (Fig. 1) en el que el punto figurativo del sistema estudiado posee unas coordenadas (q, p) , a otro espacio F' donde el punto figurativo permanece inamovible pero en el cual sus coordenadas (q', p') ya son otras. Frente a esta perspectiva, la opción contraria consiste en juzgar que no es el espacio

físico el que cambia; más bien se diría que es el punto figurativo el que desplaza modificando sus coordenadas durante su movimiento en el seno de un espacio inalterado. Ese es el punto de vista *activo* acerca de las transformaciones canónicas.

La importancia operativa de las transformaciones canónicas en la dinámica analítica, se ve incrementada al investigar qué otras expresiones algebraicas conservan su forma bajo aquéllas. Dos de las más importantes son los corchetes de Lagrange y los corchetes de Poisson. En el primer caso, y suponiendo que las variables dinámicas q y p son funciones de ciertos parámetros u y v , los corchetes de Lagrange vendrían dados por:

$$\{u, v\} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v}. \quad (2)$$

Por el contrario, el corchete de Poisson de dos funciones A y B respecto de las variables q y p es

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (3)$$

La relación entre ambos corchetes consiste en que si tenemos r_i variables canónicas independientes se cumple que $\{r_i, r_n\}[r_j, r_n] = \delta_{ij}$.

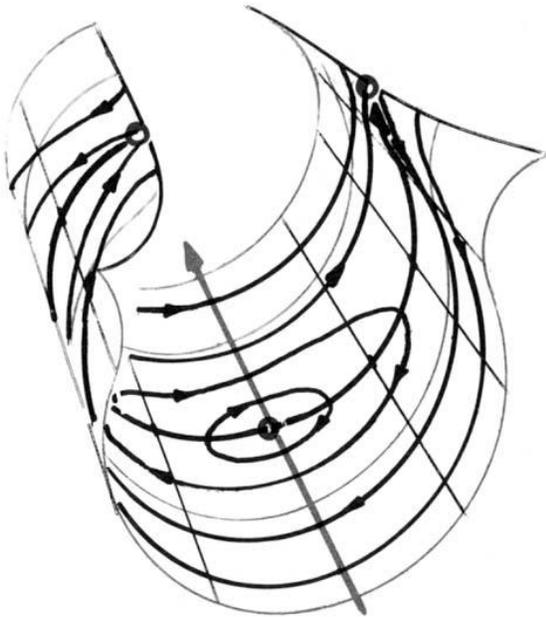


FIGURA 1. Representación figurativa de la trayectoria de un sistema dinámico en un espacio físico.

La relevancia de semejantes expresiones reside en el hecho de que las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse mediante corchetes de Poisson de las variables canónicas y

del hamiltoniano [5]. Además, todas las funciones no explícitamente dependientes del tiempo, cuyo corchete de Poisson con H es por ello nulo, son constantes del movimiento; y a la inversa, si la función es constante del movimiento, su corchete de Poisson con H es nulo, $[f, H] = 0$. Sustituyendo las funciones clásicas A y B por operadores cuánticos, se tiene la transición formal a los conmutadores cuánticos

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (4)$$

indispensables en los teoremas de incompatibilidad de Heisenberg.

Si en un sistema hamiltoniano con k grados de libertad logramos k ecuaciones del movimiento independientes, una para cada grado de libertad, el movimiento de él resultante es *integrable*, o *completamente separable*. Las constantes α_i que permiten realizar tal operación matemática de separación son llamadas *integrales aislantes*, o *invariantes globales* del movimiento [6].

Resulta muy desafortunado constatar que no existe una regla general para determinar la integrabilidad de un sistema con k grados de libertad, habiéndose de recurrir con frecuencia a métodos de perturbaciones. Estas técnicas consisten en hallar una solución analítica mediante aproximaciones sucesivas en aquellos sistemas que no admiten una solución cerrada, pero que a la vez difieren muy poco de otros para los que ello sí es posible.

El estado del sistema cuya solución deseamos obtener se considera producto de una pequeña perturbación existente sobre otro cuyo comportamiento nos es conocido. La magnitud de esta perturbación se suele introducir a través de un pequeño parámetro ϵ , respecto del cual la solución del problema perturbado se construye como serie de potencias. Cuando la aplicabilidad de los métodos perturbativos decae, las complicaciones se acrecientan extraordinariamente y las posibilidades de solución se alejan en igual medida.

III. LIGADURAS PRIMARIAS

Las variables canónicas (q, p) determinan el estado del sistema físico por ellas descrito, pero no sucede lo mismo a la inversa debido a nuestra libertad para elegir diversos juegos de coordenadas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento cuando se introducen en las ecuaciones de Hamilton. Esta posibilidad de escoger distintas variables canónicas físicamente equivalentes, recibe el nombre de “libertad gauge”.

Así pues, a causa de las transformaciones de gauge, el valor de las variables (q, p) en un instante t especificado, no determina unívocamente el valor de tales variables en un instante posterior. El procedimiento analítico que conduce a las ecuaciones del movimiento —en el caso clásico y también en el método de “suma sobre historias” de Feynman— parte de un principio lagrangiano de acción estacionaria.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (5)$$

Por motivos tanto teóricos como prácticos, resultaría deseable que las ecuaciones de Lagrange fuesen de tipo newtoniano, es decir, que la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición generalizada, \ddot{q} , pudiese despejarse en función de \dot{q} y de q . Para ello habría de cumplirse la condición por la cual la matriz

$$M_{nm} \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \right), \quad (6)$$

debe ser invertible, esto es, su determinante no debe anularse.

Precisamente el caso más interesante para sistemas dinámicos formalizados mediante el método gauge es aquél en el que el determinante de M_{nm} sí se anula. Es entonces cuando se dice que tenemos un lagrangiano degenerado, razón por la cual no podemos despejar \dot{q} en función de q y p al pasar al formalismo hamiltoniano. Se llega así –sin apelar a las ecuaciones del movimiento– al concepto de *ligaduras primarias* [7], a partir de la definición de momento generalizado como variable conjugada de la coordenada de posición generalizada:

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (7)$$

Las ligaduras primarias, por tanto, son relaciones independientes entre sí establecidas entre las variables generalizadas q y p , $\phi_m(q, p) = 0$. A continuación definimos el hamiltoniano canónico

$$H \equiv q_n p_n - L \equiv h(q, \dot{q}), \quad (8)$$

tal que las variaciones dH deben preservar las condiciones de ligadura, $\phi_m(q, p) = 0$. Precisamente el hamiltoniano canónico H sólo esta unívocamente determinado sobre la subvariedad definida por la condición $\phi_m(q, p) = 0$, ya que fuera de ella H puede extenderse de infinitas maneras distintas.

La teoría debe ser invariante bajo transformaciones de la forma $H \rightarrow H + c_m(q, p)\phi_m(q, p)$, donde las c_m son funciones arbitrarias pero regulares de q y de p .

IV. LIGADURAS SECUNDARIAS

Para facilitar los cálculos en las situaciones con interés físico, introduciremos multiplicadores de Lagrange, $u_m(t)$, asociados a las ligaduras $\phi_m(q, p) = 0$. Y al recurrir al principio de acción estacionaria, las cantidades $u_m(t)$ se varían independientemente de q y p , de modo que se tiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}_n - H - u_m \phi_m) dt = 0. \quad (9)$$

Por este procedimiento llegamos a las ecuaciones del movimiento para una variable dinámica cualquiera, f , que serán:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H\} + u_m \{f, \phi_m\} \\ \phi_m &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

En consecuencia los multiplicadores u_m han de ser compatibles con la condición de que la derivada temporal de las ligaduras primarias se anule, $d\phi_m/dt = 0$. Esto nos enfrenta a tres posibilidades:

- 1) $d\phi_m/dt = 0$ es una identidad, que es el caso trivial y nada de relevancia física aporta al problema de determinar las ecuaciones del movimiento más generales para una variable dinámica cualquiera.
- 2) $d\phi_m/dt = 0$ conduce a nuevas restricciones sobre las u_m ; o bien,
- 3) $d\phi_m/dt = 0$ establece más ligaduras entre las q_n y p_n .

Esas nuevas ligaduras introducidas en la opción (3) se denominan *ligaduras secundarias* [8], si bien la distinción entre ambos tipos de ligaduras resulta irrelevante en la forma final de la teoría.

Por otra parte, la evolución temporal de las ligaduras primarias, $d\phi_m/dt = 0$, puede escribirse:

$$\{ \phi_j, H \}_{\phi=0} + u_m \{ \phi_j, \phi_m \} = 0. \quad (11)$$

Esta igualdad es en sí misma una ecuación diferencial inhomogénea en los coeficientes u_m , que actúan –según se indicó ya– como multiplicadores de Lagrange [9, 10]. La solución general de esta ecuación viene dada por la expresión:

$$u_m = U_m(p, q) + v_a(t) V_{am}(q, p), \quad (12)$$

donde $U_m(p, q)$ es cualquier solución particular de la Ec. (11), los coeficientes $v_a(t)$ representan funciones totalmente arbitrarias del tiempo, y $V_{am}(q, p)$ es la base del espacio lineal de soluciones asociado al sistema homogéneo $u_m \{ \phi_j, \phi_m \}_{\phi=0} = 0$.

Ahora podemos llamar “hamiltoniano total” al funcional:

$$H_T = H' + v_a \phi_a = H + U_m \phi_m + V_{am} \phi_m v_a. \quad (13)$$

Y tras introducir H_T en las ecuaciones hamiltonianas obtenemos la ecuación del movimiento de una variable dinámica arbitraria en la forma compacta

$$\dot{f} = [f, H_T]_{\phi=0}. \quad (14)$$

V. GENERADORES DE GAUGE

Debido a la presencia de las funciones arbitrarias $v_a(t)$, aunque una colección de variables canónicas p y q definan unívocamente el estado del sistema en un instante dado, se

tiene que a un mismo estado físico puede corresponder más de un conjunto de variables (q, p) que conducen a predecir los mismos resultados empíricos para cualquier magnitud físicamente medible. Esa es la ambigüedad creada por la libre elección del gauge de nuestras variables dinámicas [11].

Tomemos entonces los parámetros $\varepsilon_a(t)$ definidos como $\varepsilon_a(t) \equiv \delta \cdot v_a(t)$. A partir de ellos podemos obtener transformaciones gauge para nuestras variables canónicas, cuyos generadores son las ligaduras ϕ_a :

$$\left. \begin{aligned} \delta q_n &= \varepsilon_a(t) [q_n, \phi_a] \\ \delta p_n &= \varepsilon_a(t) [p_n, \phi_a] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

A continuación diremos que una igualdad es “débil” (representada con el símbolo \approx) cuando se satisface sobre la subvariedad $\phi = 0$. Por ejemplo, $\phi_j(p, q) \approx 0$ indica que ϕ_j es numéricamente igual a cero, aunque su corchete de Poisson no tiene que anularse necesariamente también.

Ciñéndonos ahora al caso de las variables dinámicas, se considerará que una función f de tales variables es “de primera clase” si su corchete de Poisson con ϕ_j se anula débilmente, $[f, \phi_j] \approx 0$. Las funciones que no pertenezcan a la primera clase se denominarán “de segunda clase” [12].

Como se ha mencionado previamente, un sistema físico no altera sus propiedades objetivas si alguna de sus funciones dinámicas f cambia bajo una transformación gauge, $\delta f = \varepsilon_a [f, \phi_a]$. Cabe preguntarse, pues, si esas son todas las transformaciones gauge posibles que no modifican en realidad el estado del sistema. Y la respuesta es negativa, ya que podría existir una ligadura primaria de segunda clase cuyo corchete de Poisson con H_T fuese a su vez una función de primera clase en el sentido antes especificado.

En consecuencia, se admite como postulado que todas las ligaduras de primera clase generan transformaciones gauge [13]. La justificación –no demostración– de este postulado se apoya en los siguientes argumentos:

- 1) La distinción entre ligaduras primarias y secundarias depende del lagrangiano. Por el contrario, la distinción entre ligaduras de primera y de segunda clase, se basa en el corchete de Poisson del hamiltoniano.
- 2) Las transformaciones generadas por una ligadura conserva todas las ligaduras de primera y de segunda clase. Consecuentemente, transforman estados permitidos por las ecuaciones del movimiento del sistema en otros estados también permitidos por dichas ecuaciones.
- 3) El corchete de Poisson de dos ligaduras de primera clase es otra ligadura de primera clase. Además, el corchete de dos generadores gauge es también un generador gauge.
- 4) Si todas las ligaduras de primera clase son generadores gauge y las variables canónicas son conmutativas, ocurre que un sistema con un número par de coordenadas canónicas independientes admite un espacio de fases

reducido en el que cada par de variables corresponde a un grado de libertad físico.

- 5) Si ϕ_a y $[\phi_a, H]$ son generadores gauge, suponemos implícitamente que el tiempo t es un observable físico. Sin embargo, en los sistemas covariantes generales las ligaduras de primera clase asociadas a invariancias de reparametrización del tiempo *no son generadores gauge* (generadores de transformaciones que no cambian el estado físico) *sino generadores de la evolución dinámica del sistema*.

Representando las ligaduras primarias como γ_a y las secundarias como χ_a , se define el hamiltoniano ampliado H_E a través de la igualdad

$$H_E = H' + v_a \gamma_a. \quad (16)$$

Para las variables dinámicas que sean invariantes de gauge (es decir, variables cuyo corchete de Poisson sea débilmente igual a cero), los hamiltonianos H' , H_T y H_E proporcionan las mismas ecuaciones de evolución.

Un modo alternativo de definir las ligaduras de segunda clase consiste en identificarlas como aquellas para las cuales ninguna combinación lineal suya constituye de por sí una ligadura de primera clase [14]. Así, las ligaduras χ_α son de hecho de segunda clase si la matriz $C_{\alpha\beta} \equiv [\chi_\alpha, \chi_\beta]$ resulta invertible. Las ligaduras χ_α son siempre de número par excepto en el caso de los sistemas fermiónicos, pues el determinante de una matriz antisimétrica impar es cero.

Podemos reescribir la participación de las ligaduras de segunda clase en las ecuaciones de evolución de cualquier par de funciones F y G mediante los corchetes de Dirac de dos variables dinámicas:

$$[F, G]^* = [F, \chi_\alpha] C^{\alpha\beta} [G, \chi_\beta], \quad (17)$$

donde las matrices $C^{\alpha\beta}$ cumplen la condición $C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Por medio de estos corchetes, también es posible escribir las ecuaciones de evolución ampliadas como $[F, H_E]^*$, y las transformaciones gauge adoptan ahora la forma $\delta F \approx \varepsilon_a [F, \gamma_a]$.

VI. CONDICIONES GAUGE

La presencia de ligaduras de primera clase implica que el mismo estado físico es susceptible de describirse con las variables (q, p) y con $(q + \delta q, p + \delta p)$, teniendo en cuenta que $\delta q = \varepsilon_a [q, \gamma_a]$ y $\delta p = \varepsilon_a [p, \gamma_a]$, con participación de las ligaduras primarias, γ_a .

Evitamos esta ambigüedad imponiendo restricciones externas para no contar varias veces el mismo estado físico como si fuesen distintos estados del sistema. Tales restricciones son las que denominamos “condiciones gauge”. A cada sistema físico, salvo transformaciones gauge, corresponde un único conjunto de variables canónicas compatibles con las ligaduras [15]. Para que así ocurra han de satisfacerse dos requisitos:

- Accesibilidad: Debe existir una transformación gauge que permita al paso desde las variables (q, p) a las variables (q', p') , las cuales obedecen las condiciones gauge prescritas y corresponden al mismo sistema físico.
- Unicidad: Las condiciones gauge $C_b(q, p) \approx 0$, con $b = 1, 2, 3, \dots, B$, han de fijar el gauge de modo único.

Después de fijar el gauge, todas las ligaduras pasan a ser de segunda clase, y utilizando los corchetes de Dirac podemos desembocar en una teoría sin ligaduras efectivas. Es decir, en esta nueva formulación de la teoría todas las ligaduras se reducen a igualdades que expresan algunas variables canónicas en función de las restantes.

La invariancia gauge propicia que en la formulación de la teoría cuántica por medio de integrales funcionales el papel clave corresponda a la “historia” del sistema, esto es, su trayectoria en el espacio de fases. Cada historia específica en función de t todos los argumentos de la acción $(q(t), p(t))$ junto con los multiplicadores de Lagrange. Con ello todas las historias entran en pie de igualdad en la integral funcional, hasta el punto de extender la noción de historias equivalentes bajo transformaciones gauge a cualquier historia posible, sin limitarse a las que hacen estacionaria la acción (y por eso mismo son soluciones de las ecuaciones del movimiento).

Dada la posibilidad de transformaciones gauge, resulta de suma importancia la discriminación entre los grados de libertad correspondientes a la posibilidad de realizar distintas elecciones equivalentes del gauge, y aquellos otros que verdaderamente poseen significado físico.

Con ese propósito se emplea una relación que establece la igualdad entre el número de grados de libertad físicos y la mitad del número de variables canónicas independientes [16], $N_f = \frac{1}{2}N_{ci}$. A su vez, este número de variables canónicas independientes resulta ser igual al número total de variables canónicas menos el número de ligaduras de segunda clase menos el doble del número de ligaduras de primera clase, $N_{ci} = N_c - N_\chi - 2N_\gamma$.

En presencia de variables canónicas anticonmutativas, el número de ligaduras de segunda clase no es necesariamente par. Si se da el caso de que dicho número es impar, la dimensión del espacio de fases físico también es impar y no lleva asociado un espacio reducido de configuración.

Veamos lo que sucede en el caso bien conocido del campo electromagnético [17]. Para esta clase de campos la acción tetradimensional viene dada por

$$S = \int \{(-1/4\mu_0)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\nu A_\nu\} d^4V. \quad (23)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, con A_μ el tetravector potencial electromagnético, d^4V es el elemento de volumen tetradimensional, y J^ν el tetravector de flujo de corriente.

Las variables canónicas son aquí $q_n(t) \equiv A_\mu(x, t)$, con x representando las coordenadas puramente espaciales, y $p_n(t) \equiv p^\mu(x, t) = \partial L / \partial (dA_\mu/dt)$. Por consiguiente, tendremos $L \equiv \int (-1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^3x$, y $dA_\mu/dt = \partial_0 A_\mu$.

Con la ligadura $p^0 = 0$ y la condición gauge $A_0 = 0$, la primera componente del tetravector potencial electromagnético pasa a convertirse en un multiplicador de Lagrange, deja de ser una variable dinámica y se rompe la simetría entre A_0 y las componentes espaciales A_i .

VII. VARIABLES ANTICOMUTATIVAS EN EL CASO FERMIÓNICO

Viene siendo habitual que una de las vías más utilizadas para alcanzar una descripción pseudo-clásica de los sistemas con espín semientero, sea la cuantización canónica de sistemas con espín entero [18]. Y tal procedimiento suele consistir en la sustitución de los corchetes de Dirac por conmutadores cuánticos acompañados del factor multiplicativo $(i\hbar)^{-1}$.

Esto es consistente con la necesidad de imponer reglas de anticonmutación en el caso fermiónico, de modo que el corchete de Dirac se reemplace por un anticonmutador. En términos físicos, esto se debe a que no hay un límite clásico para los fermiones, en tanto sí lo hay para el comportamiento bosónico. No obstante, para estudiar simplícidamente los sistemas fermiónicos recurrimos a los números- c anticonmutativos [19]. Gracias a estas cantidades resulta posible distinguir entre el límite clásico para los operadores bosónicos descritos mediante números- c conmutativos q_i (variables con paridad par), y el límite clásico de los operadores fermiónicos descritos por números- c anticonmutativos θ_α (variables con paridad impar).

Retornemos a las ecuaciones del movimiento obtenidas mediante el requisito de acción estacionaria, donde ahora incluimos las variables anticonmutativas, tomando el lagrangiano par con el fin de conservar la paridad (par o impar) de las variables:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}) dt. \quad (18)$$

Los momentos conjugados serán $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ y $\pi_\alpha = \partial L / \partial \dot{\theta}_\alpha$. Las ecuaciones de Hamilton se deducen imponiendo la condición:

$$S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i p_i + \dot{\theta}_\alpha \pi_\alpha - H_E) dt = 0. \quad (19)$$

Este procedimiento reviste gran importancia, pues en teoría de campos las ecuaciones del movimiento de primer orden en la variable t suelen estar asociadas a un espín semientero. A su vez, las variables impares admiten una representación matricial en términos de las matrices de Pauli, σ_α , de la forma:

$$\theta_\alpha = i(\hbar/2)^{1/2} \sigma_\alpha. \quad (20)$$

En consecuencia, el lagrangiano de una partícula libre de masa m con espín será:

$$L = \frac{1}{2}(i\dot{\theta}_\alpha\theta_\alpha + m\dot{q}_i\dot{q}_i), \quad (21)$$

donde la parte de espín no contribuye al hamiltoniano.

$$H = \frac{1}{2}(m\dot{q}_i\dot{q}_i). \quad (22)$$

VIII. SIMETRÍA Y SUPERSIMETRÍA

Ateniéndonos al método de las integrales funcionales, hemos de garantizar que una transformación gauge no cambia la historia física del sistema, para lo cual la acción debe ser invariante. Esta invariancia de la acción puede satisfacerse de dos maneras [20]:

- Se cumple $p_n(\partial\gamma_i/\partial p_n) - \gamma_i = 0$ aunque $\varepsilon_a(t_1) \neq 0 \neq \varepsilon_a(t_2)$
- Se tiene $p_n(\partial\gamma_i/\partial p_n) - \gamma_i \neq 0$ y se cumple $\varepsilon_a(t_1) \neq 0 \neq \varepsilon_a(t_2)$

El caso (a) conduce a la clase de las llamadas “simetrías internas”, ejemplos de las cuales se dan en los campos de Yang-Mills, mientras la opción (b) lleva a las “simetrías no internas”, más apropiadas para describir interacciones como la gravedad.

Sin embargo, deben hacerse mencionarse una serie de puntualizaciones que cobran gran importancia cuando se avanza hacia la cuantización de una teoría sometida a simetrías gauge de algún tipo, especialmente si adoptamos el planteamiento de “suma sobre historias” de Feynman. En primer lugar, con una simetría interna sólo cabe hablar de equivalencia de historias de un sistema, no de sus estados concretos. Únicamente cuando la simetría es interna se puede establecer una equivalencia entre distintos estados individuales de un sistema considerándolos pertenecientes a una misma situación física [21]. Además de ello, también ha de tenerse en cuenta que sólo con respecto a simetrías internas de primera clase es posible decir que las ligaduras de primera clase generan transformaciones que no cambian el estado físico del sistema [22].

Una ampliación del concepto de simetría conduce a la noción de “supersimetría”, cuyo interés principal reside en la posibilidad de asociar bosones y fermiones (o dicho con mayor precisión, partículas de espín J con partículas de espín $J \pm 1/2$) reuniéndolos en un único marco formal que ponga de manifiesta las relaciones entre ambas clases de partículas [23].

Consideremos como ejemplo el caso de un doblete formado por un escalar y un espinor, Φ y Ψ , que represente un par fermión-bosón. En concreto, si tomamos un bosón escalar B y un fermión F con espín $1/2$, buscaremos una transformación $1 - i\chi K$ (con χ un número real infinitesimal) que conserve la lagrangiana libre total, $L = L_B + L_F$, con $L_B = (\partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi)$ y $L_F = \Psi^\dagger\sigma_\mu i\partial_\mu\Psi$. Naturalmente, sólo estamos interesados en aquellos términos que vinculan los bosones con los fermiones, $\delta\Phi = -i\chi K\Psi$ y $\delta\Psi = -i\chi K\Phi$.

Dado que $\delta\Phi$ debe ser un espinor y $\delta\Psi$ un escalar, la magnitud K debe ser ella misma también de naturaleza espinorial. Introduzcamos, por tanto, un espinor infinitesimal ξ y escribamos $\delta\Psi = \xi\Phi$, o alternativamente,

$\delta\Phi = \xi^T C\Psi$. Para satisfacer los requisitos de la supersimetría, este espinor debe cumplir una serie de condiciones:

- Como los bosones tienen espín entero y los fermiones semientero, el espín de ξ deber ser semientero. La elección más simple es un valor $1/2$, lo que nos deja con un espinor de cuatro componentes.
- Las propiedades estadísticas correctas (los campos bosónicos conmutan y los fermiónicos anticonmutan) las magnitudes ξ y $\bar{\xi} = \xi^\dagger\gamma^4$, han de conmutar con los bosones y anticonmutar con los fermiones. Es decir, se garantiza el cumplimiento de $\{\xi^a, \xi^b\} = \{\xi^a, \bar{\xi}^a\} = 0$, donde las letras latinas simbolizan índices espinoriales, y se sigue la notación habitual $\{A, B\} = AB + BA$.
- También debe cumplirse que $\xi = \xi^c$, teniendo en cuenta que $\xi^c = C\bar{\xi}^T$. La matriz de conjugación de carga satisface $C^T = -C$ y $C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$. En todos los casos el superíndice T expresa “transposición”.

No obstante, una simple mirada a los términos cinéticos revela que el bosón posee dos derivadas, mientras el fermión se las arregla con una sola. De ello se colige que la dimensión del campo bosónico será igual a la del campo fermiónico multiplicada por una longitud elevada a $1/2$. En consecuencia, χ ha de tener las dimensiones de una longitud, elevada a $1/2$ en el caso de $\delta\Phi$, pero elevada a $-1/2$ en la expresión de $\delta\Psi$. Una elección tal no acaba de funcionar bien, lo que nos obliga a insertar una derivada en la expresión de $\delta\Psi$, cosa que a su vez nos acarrea la necesidad de un nuevo 4-vector con el que podamos construir una cantidad escalar [24, 25].

Ya que podemos incluir en la densidad lagrangiana tantas derivadas totales como deseemos sin cambiar su contenido físico, resulta posible integrar por partes las variaciones correspondientes al bosón δL_B y al fermión δL_F . De ahí se obtiene que $\delta L_F = -\delta L_B$. Con ello encontramos una transformación que mezcla las partes fermiónica y bosónica de la lagrangiana sin alterar el término cinético total, es decir, dejando invariante la lagrangiana libre [26].

Restringiéndonos a las partículas sin masa, un hallazgo como este implica el establecimiento de una nueva simetría, la supersimetría (abreviadamente, *SUSY*). Gracias al teorema de Noether, sabemos que por cada nueva simetría ha de haber también una corriente conservada $J^\mu_\alpha = (\gamma^\nu\gamma^\mu\psi)_\alpha\partial_\nu\Phi^*$, donde α es un índice espinorial de valores 1 o 2.

Así pues tendremos,

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = \gamma^\nu[\gamma^\mu\partial_\mu\psi]_\alpha\partial_\nu\Phi^* + [\gamma^\nu\gamma^\mu\psi]_\alpha\partial_\mu\partial_\nu\Phi^*, \quad (24)$$

expresión fácilmente analizable. El término del primer paréntesis se anula a causa de la ecuación de Dirac; el segundo término entre corchetes contiene tan solo factores en los que $\mu = \nu$, pues de otro modo los factores $\mu\nu$ se cancelarían con los $\nu\mu$ debido a la relación $[\gamma^\nu, \gamma^\mu]_+ = 2g^{\mu\nu}$. Así el segundo término de la suma es proporcional a $\partial^\mu\partial_\mu\Phi^*$, que se anula a resultas de la ecuación de Klein-Gordon [27].

Consideremos acto seguido, el efecto de dos transformaciones supersimétricas consecutivas, con un parámetro anticonmutativo ε , que relacionen un campo escalar φ y un espinor de Majorana, ψ . Inicialmente tendríamos $\delta\varphi = i\bar{\varepsilon}\psi$ y $\delta\psi = \gamma^\mu\partial_\mu\varphi\varepsilon$. Apliquemos ahora dos transformaciones, de parámetros ε_1 y ε_2 , sobre el campo bosónico, de manera que $\delta_k\varphi = i\bar{\varepsilon}_k\psi$. Así,

$$\delta_1(\delta_2\varphi) = i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi, \quad (25)$$

y el conmutador de ambas transformaciones sería:

$$[\delta_1, \delta_2]\varphi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi. \quad (26)$$

Es decir, tras dos transformaciones supersimétricas consecutivas, obtenemos el mismo campo φ , desplazado en el espacio-tiempo una cantidad constante $d^\mu = (2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1)$. Por ello se dice que existe un vínculo entre la supersimetría el movimiento en el espacio-tiempo [28, 29]. Si las transformaciones supersimétricas son locales, $\varepsilon = \varepsilon(x)$, entonces las traslaciones también depende del lugar en el cual se den, $d^\mu = d^\mu(x)$.

Cuando el álgebra supersimétrica se expresa a partir de los generadores de supercarga, Q , la densidad de energía del vacío siempre es positiva o cero [30]. Y sólo se anula si el vacío es un autoestado de Q con autovalor igual a cero, $Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0$. Entonces –y sólo entonces– cuando SUSY es una simetría exacta sin ruptura, todos los diagramas de Feynman que contribuyen a la energía del vacío se cancelan entre sí [31].

Ello implica también que en toda teoría supersimétrica cualquier estado de energía no nula tiene un compañero cuyo momento angular difiere del suyo en $\pm 1/2$, y sobre el cual rige una estadística opuesta (Fig. 2). Pero eso no es todo: como el conmutador de dos transformaciones supersimétricas involucra el tetravector impulso-energía relativista, el grupo de Poincaré debe ser ampliado hasta incluir la supersimetría misma [32].

La transformación infinitesimal de un campo bosónico puede reescribirse ahora como $\delta\varphi = (\bar{\varepsilon}^a Q_a)\varphi$, donde Q_a es un espinor de Majorana. Tras una serie de manipulaciones convenientes se llega a obtener:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -2i(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu = -2(\gamma^\mu P_\mu)_{ab}, \quad (27)$$

en el que P_μ es el generador de las traslaciones. Así se dice libremente que los generadores supersimétricos Q actúan como las raíces cuadradas de las traslaciones. Las variedades que contienen unas coordenadas conmutativas y otras conmutativas, permitiendo así transformaciones supersimétricas, se denominan “superespacios”, y “supercampos” los campos en ellas definidos [33].

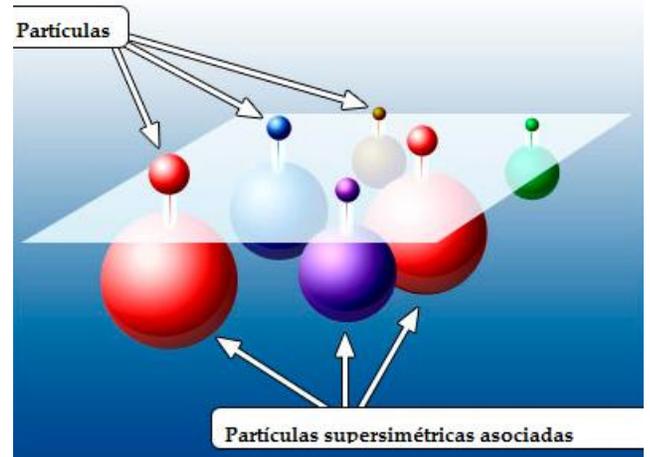


FIGURA 2. La supersimetría asocia nuevas partículas a las ya usuales.

En definitiva, la importancia de la supersimetría no estriba sólo en la relación que estipula entre fermiones y bosones, sino especialmente en la posible vinculación que sugiere entre propiedades de invariancia espacio-temporal (“simetrías externas”) y propiedades de invariancia gauge (“simetrías internas”). Se admite generalmente que si la gravedad ha de unificarse en algún momento con las tres fuerzas restantes, será mediante una simetría ampliada que contenga la invariancia por difeomorfismos y la invariancia gauge.

Con respecto a ello, los físicos norteamericanos Sidney Richard Coleman y Jeffrey Mandula demostraron un teorema según el cual cualquier grupo que contuviese ambos tipos de simetría (difeomorfismos y gauge) se escindiría en dos subgrupos, cada uno portando una sola de esas simetrías [34]. La formulación original de teorema de Coleman-Mandula hablaba de que las teorías aceptables de partículas elementales no poseerían simetrías algebraicas capaces de relacionar partículas con espín diferente (entero o semientero).

En síntesis, los grupos de simetría comúnmente utilizados no servían para unificar fermiones y bosones. El obstáculo aparentemente insalvable erigido por el teorema de Coleman-Mandula, fue franqueado gracias a la invención de las supersimetrías, cuyo nacimiento como generalización de los grupos algebraicos clásicos la ponía a salvo del fatídico teorema.

IX. SISTEMAS COVARIANTES GENERALES

Las teorías físicas que gozan de covariancia general –por ejemplo, la gravitación de Einstein (Relatividad General)– son invariantes bajo reparametrizaciones temporales. Esto significa que las ecuaciones de evolución de un sistema covariante general conservan su forma y características al efectuar la sustitución $t \rightarrow f(t)$, reemplazando la variable t por una función cualquiera suficientemente continua del tiempo.

Esto significa en la práctica que el tiempo t no es un observable en pie de igualdad con el resto de magnitudes que reciben ese mismo nombre al realizar la transición desde las teorías clásicas a sus versiones cuánticas. Este parece ser un problema inherente al intento de insertar la noción de covariancia general en el marco del formalismo gauge, un formalismo que tan buenos servicios ha rendido en la elaboración de las teorías cuánticas de campos.

No obstante, en los sistemas covariantes generales las ligaduras de primera clase asociadas a reparametrizaciones del tiempo, no deberían generar transformaciones gauge sino la propia evolución dinámica del sistema.

Ocurre aquí que el hamiltoniano ampliado H_E coincide con el hamiltoniano total H_T , y ambos pueden expresarse como el producto de una ligadura \mathcal{H} por $u(\tau)$, una función arbitraria de τ , a su vez un parámetro también arbitrario que describe la evolución dinámica del sistema. De hecho, toda la física de los sistemas covariantes generales parece contenerse en la ligadura \mathcal{H} , que es el generador de la evolución dinámica (Fig. 3).

El hecho de que los sistemas covariantes generales no se comporten como el formalismo canónico esperaría de ellos, crea el denominado “problema del tiempo” [35]. Este escollo se nos presenta con independencia de las dificultades de cuantizar la gravitación einsteiniana. Para situarlo en su contexto, recordaremos los fundamentos del método empleado.

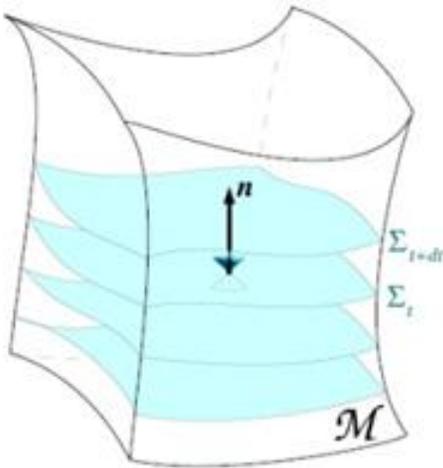


FIGURA 3. Foliación del espacio-tiempo \mathcal{M} mediante una familia de hipersuperficies $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Tomemos una teoría cuyas ecuaciones dinámicas puedan deducirse de un principio variacional $\delta \int L dt = 0$, con $L(q, \dot{q})$ y $\dot{q} \equiv dq/dt$. Las q denotan las variables de posición generalizadas y \dot{q} sus velocidades generalizadas. Las familiares ecuaciones de Euler-Lagrange de este modo deducibles, pueden escribirse también en términos de la matriz hessiana

$$H_{mn} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}, \quad (28)$$

cuyo posible carácter singular implica, en su caso, que no podamos despejar \ddot{q}^m en función de las posiciones y las velocidades. En tales circunstancias, los momentos canónicos proporcionados por las transformaciones de Legendre ($p_n \equiv \partial L / \partial \dot{q}^n$) no son todos independientes, pues han de satisfacer la ya discutidas ligaduras, $\phi_m(p, q) = 0$, provenientes de la propia definición de los momentos.

Dirac, quien inició el desarrollo de este formalismo [36], propuso que las transformaciones gauge se identificaran con las transformaciones generadas por las ligaduras de primera clase, mientras que los observables se identificarían con las funciones de las variables del espacio de fases (p, q) que conmutasen con estas ligaduras de primera clase [18].

Pasemos ahora el caso que nos ocupa, esto es, la Relatividad General entendida como una teoría gauge. Si decidimos deducir las ecuaciones gravitatorias de Einstein a partir de un principio variacional, la acción admitirá el grupo de los difeomorfismos como simetría variacional. Y al aplicar las transformaciones de Legendre para obtener la versión hamiltoniana de la teoría, llegamos a una formulación con ligaduras como las discutidas previamente. Por tanto, podemos definir una magnitud físicamente objetiva en Relatividad General como toda cantidad dinámica que sea invariante gauge en el sentido de Dirac (es decir, su corchete de Poisson con las ligaduras de primera clase, se anule).

Ahora bien, en Relatividad General el álgebra de Lie de las ligaduras no posee la propiedad de clausura, por lo cual no es un álgebra de Lie genuina. Y dado que la clausura es una propiedad distintiva de las teorías de Yang-Mills, se sigue de ello que la gravitación einsteiniana no pertenece a la familia de las teorías de Yang-Mills [37].

Pero la sorpresa más impactante llega a continuación, como señaló Peter Bergmann al estudiar la dinámica espacio-temporal de las ligaduras hamiltonianas en el marco de la Relatividad General [38]. Existen dos tipos de ligaduras en el formalismo hamiltoniano de la gravedad relativista: las ligaduras difeomórficas (o del momento canónico) y las ligaduras hamiltonianas. Las primeras –como su nombre indica– generan los difeomorfismos en la 3-superficie de datos iniciales, mientras las segundas gobiernan la transición desde cada una de estas 3-superficies a la siguiente. Si se prefiere decir de otro modo, las ligaduras hamiltonianas generan el movimiento y las ligaduras difeomórficas relacionan las descripciones equivalentes de la misma situación física.

Ya que ahora el movimiento viene dado por la ligadura hamiltoniana y –según Dirac– las ligaduras se identifican con transformaciones gauge, el movimiento mismo es meramente una pura transformación gauge [39]. En consecuencia, todas las magnitudes invariantes gauge de la teoría –las únicas a las que antes atribuíamos auténtico significado físico– son constantes del movimiento: ninguna

propiedad física relevante debería cambiar con el tiempo en absoluto. Y como la Relatividad General se ocupa de la única fuerza completamente universal, la gravedad, sus conclusiones deberían aplicarse al universo entero.

Así pues, nada habría de experimentar jamás cambio alguno en todo el cosmos. Este es el problema del tiempo, o “del formalismo congelado”, típico de la Relatividad General sin cuantización [40]. Obviamente, los intentos de cuantizar la teoría gravitatoria de Einstein no sólo no han solucionado esta paradoja, sino que se han visto enormemente obstaculizados por ella.

Es muy posible que tropecemos aquí con un impedimento esencial, relacionado con el hecho de que los formalismos lagrangiano y hamiltoniano nacieron en un ámbito en el cual la variable tiempo permanecía netamente separada del resto de variables (las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados). Esa es una de las razones por las que el tratamiento canónico de la Relatividad General se suele denominar $(3 + 1)$, en contraste con la versión covariante 4-dimensional más de acuerdo con el espíritu de la propia teoría. En el planteamiento $(3 + 1)$ las variables básicas son las 3-geometrías definidas sobre hipersuperficies espaciales para un valor concreto del tiempo coordinado. Estas variables satisfacen las ligaduras, de modo que el hamiltoniano mismo se anula idénticamente.

La arbitrariedad en la elección del gauge, aflora como un reflejo de la invariancia por difeomorfismos en la formulación covariante 4-dimensional de la teoría cuando ésta se traduce en su versión $(3 + 1)$. Así, la evolución temporal de estas 3-geometrías se expresa como una transformación gauge, que por ser gauge no comporta cambio alguno en los grados de libertad físicos de la teoría. La conclusión es la misma: todos los estados físicos resultan equivalentes e independientes de la variable tiempo. El universo entero existe en un eterno presente, sin evolución temporal, ni cambio, ni dinámica. No cabe duda que esta dificultad –aún sin resolver a plena satisfacción de todos los expertos –a se ha demostrado una de las más formidables barreras en la búsqueda de una formulación cuántica de la gravedad, y por ende también ha estorbado la consecución de una teoría unificada de las fuerzas fundamentales.

X. CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se han expuesto las líneas generales del desarrollo del formalismo gauge con ligaduras para la mecánica analítica en sus aplicaciones a los casos clásico y cuántico. Se ha constatado la continuidad existente entre las primeras formulaciones variacionales de la mecánica clásica y sus posteriores derivaciones hacia las diversas ramas de la física cuántica.

El hecho de que la mayoría de los sistemas físicos de interés –clásicos o cuánticos– obedeciesen un principio de acción estacionaria, estableció un puente metodológico en el modo de abordar las teorías cuánticas como versiones formalmente cuantizadas de sus contrapartidas clásicas. Por

añadidura, las simetrías gauge permitieron conectar la existencia de las interacciones fundamentales presentes en la naturaleza con un requisito de invariancia formal impuesto sobre el lagrangiano de ciertos sistemas físicos. Los campos de fuerzas aparecían así como el precio a pagar por el universo debido a su deseo de respetar las simetrías gauge.

Como consecuencia de ello, este el método entraña una concepción muy concreta sobre la naturaleza del universo. Las propiedades estructurales más profundas del mundo físico no pueden depender del punto de vista del observador, o si se quiere, de la herramienta matemática empleada para representarlas. Esto no sólo implica la inexistencia de posiciones o direcciones privilegiadas en el espacio-tiempo; también nos impone una suerte de irrelevancia final del marco matemático utilizado.

Tomando el caso de los vectores de estado de la física cuántica, sabemos que pueden definirse como un conjunto de funciones de las magnitudes del sistema, $\psi = \{\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \dots\}$, que residen en un espacio de Hilbert. Las funciones $\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \dots$, se interpretan entonces como las proyecciones del vector ψ sobre un cierto sistema de ejes en su espacio de Hilbert. Resulta muy razonable suponer que el significado físico de la teoría que se sirva de los vectores ψ no debe depender de la elección del sistema de ejes coordinados en ese espacio abstracto. O dicho a la inversa: nuestras teorías físicas deben construirse de tal modo que su contenido sea independiente del marco matemático en el cual lo expresemos. A esta condición la denominamos “simetría gauge” o “invariancia gauge”.

No obstante, las transformaciones gauge se ven sometidas a ciertas restricciones dependientes de las características físicas del sistema físico estudiado. Tales restricciones, o ligaduras, juegan un papel crucial en la forma que finalmente adoptarán las ecuaciones dinámicas obtenidas variacionalmente.

Enriqueciendo el lagrangiano con cierto tipo de variables anticonmutativas se abre la posibilidad de incluir en esta descripción analítica una descripción pseudo-clásica de los sistemas con espín semi-entero. Y ampliando aún más las simetrías gauge admitidas, desembocamos en el terreno de las supersimetrías, que tratan de vincular las partículas de espín entero (bosones) con aquellas de espín semientero (fermiones). Esta nueva simetría carece de parangón en la naturaleza y hasta el momento no se ha visto empíricamente respaldada con el descubrimiento de las nuevas partículas que pronostica.

Puesto que la supersimetría es una transformación espacio-temporal independiente de las simetrías internas $SU(N)$ y $U(N)$, sólo puede relacionar bosones y fermiones que se hallen en la misma representación del grupo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Por desgracia, sucede que dentro del modelo Standard bosones y fermiones no comparten una misma representación. Por tanto, si la supersimetría vincula bosones con fermiones, no serán los bosones y los fermiones que de hecho conocemos. Ese es el motivo de que se postulen partículas aún sin detectar como compañeras supersimétricas de la materia ordinaria.

Sin embargo, el problema más grave al que se enfrenta todo el programa de investigación basado en la supersimetría, es la falta de un camino sencillo y directo para romper la simetría de su estado de vacío, de modo que las partículas supercompañeras de la materia ordinaria posean masas tan grandes que justifiquen la actual ausencia de pruebas sobre su existencia. La estructura interna de las teorías supersimétricas es tal que no pueden romper dinámicamente por sí mismas la simetría de su estado fundamental.

Y si decidimos emplear un mecanismo de Higgs equiparable al de la teoría electrodébil, nos veremos abocados a postular todo un nuevo conjunto de campos y partículas además de aquellos cuyas propiedades tratamos de explicar. Puesto que no contamos con un mecanismo único para la ruptura de simetría, las ampliaciones supersimétricas del modelo Standard deben incluir un término añadido originados por todas las maneras posibles en las que puede romperse la simetría. Así, junto con los 18 parámetros experimentales –no determinados teóricamente– del modelo Standard, acabamos teniendo 105 parámetros indeterminados más, también sin ajustar.

En el entorno clásico, otro de los escollos que debe enfrentar el formalismo gauge surge de la consideración del tiempo físico como una variable dinámica, planteamiento típico de la Relatividad general de Einstein. Al hacerlo así, las características del propio método gauge conducen a la sorprendente conclusión de que la evolución temporal de un sistema dinámico es en sí misma una ligadura gauge que, por tanto, conecta estados físicamente indistinguibles. Tan violenta contradicción con los hechos sigue alzándose, sin duda, como uno de los principales obstáculos en la búsqueda de un marco unificado para las interacciones fundamentales de la naturaleza por medio del método gauge.

REFERENCIAS

[1] Fraser, C., *Lagrange early contributions to the principles and methods of mechanics*, Arch. Hist. Exact. Sci. **28**, 197-211 (1983).
 [2] Fraser, C., *Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations*, Arch. Hist. Exact. Sci. **32**, 151–186 (1985).
 [3] Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, (Dover, New York, 1986).
 [4] Frank, P., *Das Kausalgesetz und seine Grenzen*, (Springer, Wien, 1932).
 [5] Goldstein, H., *Mecánica clásica*, (Reverté, Barcelona, 1990).
 [6] Feynman, R., *The Feynman lectures on physics*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1963).
 [7] Yourgrau, W. and Mandelstam, S., *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, (Dover, New York, 1979).
 [8] Bryant, R. L., *Introduction to Lie groups and symplectic geometry en Lectures on Lie groups and symplectic geometry*, (Reg. Geom. Inst., Park City, Utah, 1991).

[9] Moore, T. A., "Least-Action Principle" en *Macmillan Encycl. of Phys.*, Simon & Schuster Macmillan **2**, 840–842 (1996).
 [10] Viterbo, C., *Introduction à la topologie symplectique*, Gazette des Mathématiciens **54**, 81–92 (1992).
 [11] Rubakov, V., *Classical Theory of Gauge Fields*, (Princeton Univ. Press, New Jersey, 1999).
 [12] Benettin, G., Henrard, J. and Kuksin, S., *Hamiltonian Dynamics. Theory and Applications*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005).
 [13] Deriglazov, A., *Classical Mechanics. Hamiltonian and Lagrangian Formalism*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010).
 [14] Gignoux, C. and Silvestre-Brac, B., *Solved Problems in Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, (Springer, New York, 2009).
 [15] Greiner, W., *Classical Mechanics*, (Springer-Verlag, New York, 2003).
 [16] Calkin, M. G., *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 1998).
 [17] Galtsov, D. V., Grats, Iu. V. and Zhukovski, V. Ch., *Campos clásicos. Enfoque moderno*, (Ed. URSS, Moscú, 2005).
 [18] Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of gauge systems*, (Princeton University Press, Princeton, 1992).
 [19] Darrigol, O., *From c-Numbers to q-Numbers*, (University of California Press, Berkeley, 1992).
 [20] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G. and Georgi, H., *Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction*, Phys. Lett. B. **513**, 232–240 (2001).
 [21] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Wacker, J. G., *Phenomenology of electroweak symmetry breaking from theory space*, JHEP **0208**, 020-042 (2002).
 [22] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Katz, E., Nelson, A. E. and Wacker, J. G., *The Minimal moose for a little Higgs*, JHEP **0208**, 021-036 (2002).
 [23] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Katz, E. and Nelson, A. E., *The Littlest Higgs*, JHEP **0207**, 034-049 (2002).
 [24] Bars, I., *Two time physics with gravitational and gauge field backgrounds*, Phys. Rev. D **62**, 085015 (2000).
 [25] Bars, I., *Survey of two-time physics*, Class. Quant. Grav. **18**, 3113-3135 (2001).
 [26] Chamseddine, A. H., Arnowitt, R. and Nath, P., *Locally Supersymmetric Grand Unification*, Phys. Rev. Lett. **49**, 970–983 (1982).
 [27] Dimopoulos, S. and Georgi, H., *Softly Broken Supersymmetry and SU(5)*, Nucl. Phys. **B193**, 150–164 (1981).
 [28] Dimopoulos, S., Raby, S. and Wilczek, F., *Supersymmetry and the Scale of Unification*, Phys. Rev. **D24**, 1681–1683 (1981).
 [29] Haag, R., Lopuszanski, J. T., Sohnius, M., *All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix*, Nucl. Phys. **B 88**, 257–266 (1975).
 [30] Nahm, W., *Supersymmetries and their representations*, Nucl. Phys. **B135**, 149–154 (1978).

- [31] Sakharov, A., *Vacuum Quantum Fluctuations in Curved Space and the Theory of Gravitation*, Sov. Phys. Doklady **12**, 1040-1041 (1968).
- [32] Shifman, M. (ed.), *The many Faces of the Superworld. Yuri Golfand Memorial Volume*, (World Scientific, Singapore, 2000).
- [33] Howe, P., *Supergravity in superspace*, Nuclear Physics B - CERN **33**, 47-59 (1982).
- [34] Coleman, S. and Mandula, J., *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251-1256 (1967).
- [35] Isham, C. J., "Canonical quantum gravity and the problem of time" en *Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories*, (Kluwer Academic Publishers, London, 1993), pp. 157-288.
- [36] Kuchař, K., "Time and interpretations in quantum gravity" en *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics: University of Winnipeg, 16-18 May, 1991*, G. Kunstatter, D.E. Vincent, J. G. Williams, eds. (World Scientific, Singapore, 1992).
- [37] Torre, C. G., *Gravitational observables and local symmetries*, Phys. Rev. **D48**, 2373-2376 (1993).
- [38] Bergmann, P. G., *Observables in General Relativity*, Reviews of Modern Physics **33**, 510-514 (1961).
- [39] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons Inc., New York, 1971).
- [40] Weinstein, S., "Time, gauge, and the superposition principle in quantum gravity", en *Proceedings of the Eighth Marcel Grossman Meeting*, T. Piran, ed. (World Scientific, Singapore, 1999).