Dinámica clásica y cuántica de una partícula cargada en un campo magnetostático uniforme

Tonatiuh Miramontes Pérez, Victor David Granados García
Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, Edificio 9, C.P. 07738, México D. F.

E-mail: tonatiuhmiramontes@gmail.com

(Recibido el 19 de Enero de 2012; aceptado el 23 de Marzo de 2012)

Resumen
En este artículo se ejemplifica el uso de los paréntesis de Poisson y los conmutadores cuánticos para resolver las ecuaciones de movimiento de Hamilton y Heissenberg respectivamente en el caso de una partícula cargada inmersa en un campo magnético constante y uniforme, con el fin de establecer las analogías entre la dinámica clásica y la dinámica cuántica. Así mismo se da una interpretación a la denominada longitud magnética del sistema en términos de operadores relacionados con las trayectorias clásicas del sistema.

Palabras clave: Dinámica clásica, paréntesis de Poisson, dinámica cuántica, conmutadores cuánticos, niveles de Landau, longitud magnética.

Abstract
In this paper we present an example of use of Poisson brackets and quantum commutators to solve the Hamilton and Heissenberg equations of motion respectively in the case of a particle immerse on a uniform and constant magnetic field in order to establish analogies between classical and quantum dynamics. We also give an interpretation of the so called magnetic length of the system in terms of operators related to the classical system trajectories.

Keywords: Classical dynamics, Poisson brackets, quantum dynamics, quantum commutators, Landau levels, magnetic length.

PACS: 45.20.Jj, 03.65.-w, 03.65.Ca, 03.65.Db, 03.65.Fd, 71.70.Di **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

P. Lagrange, J. D'Alembert y W. Hamilton ayudaron a demostrar que era posible hallar una formulación compatible con la mecánica Newtoniana partiendo de principios variacionales, los cuales no sólo permitieron tratar sistemas que bajo la óptica Newtoniana parecen más complicados o confusos, sino que dotaron de un formalismo matemático más profundo a la física culminando en la formulación Hamiltoniana, donde emerge una estructura algebraica que sugiere una forma de plantear problemas que resulta tan fundamental que sirvió de base para formular la moderna mecánica Cuántica.

Dentro de esta formulación, los paréntesis de Poisson permiten resolver las ecuaciones de movimiento del sistema conociendo los paréntesis de Poisson de las variables dinámicas con la función de Hamilton, de igual forma que en el caso cuántico es posible resolver las ecuaciones de movimiento de Heissenber a partir de los conmutadores cuánticos de los operadores con el Hamiltoniano.

A continuación, además de analizar la naturaleza dinámica del sistema tanto clásica como cuánticamente, resolvemos de manera completamente análoga el problema de una partícula cargada inmersa en un campo magnetostático por medio de paréntesis de Poisson para el caso clásico y conmutadores cuánticos para el caso cuántico, de forma que se establezcan las analogías y correspondencias entre los resultados que se obtienen en cada caso.

Primeramente, presentamos de forma breve los desarrollos que nos permiten resolver las ecuaciones de movimiento mediante las estructuras antes mencionadas.

II. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO CLÁSICAS MEDIANTE EL USO DE LOS PARÉNTESIS DE POISSON

El paréntesis de Poisson (Ver [1], Ecs. 9-67) de cualquier función con la función de Hamilton resulta de gran utilidad pues es posible probar que

$$\frac{du}{dt} = \left[u, H\right] + \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

y a partir de esto, escribir las ecuaciones de Hamilton en términos de los paréntesis de Poisson como:

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \tag{2}$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H]. \tag{3}$$

Por tanto, si una cantidad es una constante de movimiento y su expresión no incluye de manera explícita al tiempo, su paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano se anula.

Si u es una función analítica, una variación infinitesimal δu correspondiente a un intervalo δt puede expresarse como

$$\delta u = dt[u, H], \tag{4}$$

de donde es claro que la función de Hamilton es la responsable de la evolución del sistema en el tiempo. Así mismo, el desarrollo en serie de Taylor para $u(t)$ alrededor de $t=0$ puede escribirse como en [1], Ecs. 9-117:

$$u(t) = u|_0 + [u, H]_0 t + [[u, H], H]_0 \frac{t^2}{2!} + \cdots \tag{5}$$

Si introducimos un operador $\hat{G} \equiv [,G]$, tal que

$$\hat{G}u \equiv [u, G], \tag{6}$$

la expresión (5) puede expresarse como:

$$u(t) = e^{t\hat{H}} u. \tag{7}$$

III. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HEISSENBERG MEDIANTE EL USO DE LOS CONMUTADORES DE OPERADORES CUÁNTICOS

Según [2], si la función de onda Ψ provee toda la información del sistema para todo tiempo futuro, es necesario que exista una relación lineal entre la función de onda Ψ y su derivada respecto al tiempo, que expresamos mediante el operador $\hat{H}$ como

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \tag{8}$$

Definimos la derivada de un operador partiendo de la definición clásica, es decir, en términos de valores esperados de los observables como sigue:

$$\langle \dot{A} \rangle = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t}. \tag{9}$$

A continuación empleamos la expresión (8) para desarrollar la Ec. (9) como:

$$\langle \dot{A} \rangle = (\Psi, \dot{\hat{A}}\Psi) = \left(\Psi, \left\{\frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]\right\}\Psi\right). \tag{10}$$

Como la derivada de un observable lógicamente debe ser un observable, el operador entre llaves puede funcionar para todo fin práctico como el operador $\dot{\hat{A}}$, es decir,

$$\dot{\hat{A}} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]. \tag{11}$$

De acuerdo con [3], a esta regla se le denomina teorema de Ehrenfest. Por tanto, un operador que no depende explícitamente del tiempo y además conmuta con el Hamiltoniano es una constante del movimiento y corresponde a una cantidad conservativa, dado que su valor esperado permanece constante con el tiempo. Ésta situación marca una clara analogía entre los paréntesis de Poisson con la función de Hamilton y el conmutador cuántico con el operador Hamiltoniano $\hat{H}$, pues básicamente las Ecs. (11) y (1) son idénticas.

Luego, la versión de la Ec. (5) para operadores es:

$$\hat{A}(t) = A|_{t=0} + \frac{it}{\hbar}[\hat{H}, \hat{A}]_{t=0} + \left(\frac{it}{\hbar}\right)^2 \frac{[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{A}]]_0}{2!} + \cdots \tag{12}$$

Introduciendo la notación $\hat{G}\hat{A} \equiv [\hat{H}, \hat{A}]$ podemos expresar la Ec. (12) de una forma análoga a la Ec. (7):

$$\hat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{it}{\hbar}\right)^n \frac{(\hat{G}^n \hat{A})_{t=0}}{n!} = e^{i\frac{t}{\hbar}\hat{G}} \hat{A}|_{t=0}. \tag{13}$$

En términos de elementos de matriz, el cálculo de las derivadas de estas últimas resulta más simple pues si denotamos al elemento de la m-ésima fila y n-ésima columna de la matriz de $\hat{A}$ por

$$A_{mn} = (\Psi_m, \hat{A}\Psi_n) = e^{i\frac{E_m - E_n}{\hbar}t}(\psi_m, \hat{A}\psi_n), \tag{14}$$

podemos calcular la derivada de los elementos de matriz respecto al tiempo, considerando que $(\psi_m, \hat{A}\psi_n)$ es una constante, para obtener

$$\dot{A}_{mn} = i\frac{E_m - E_n}{\hbar} A_{mn}. \tag{15}$$

IV. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNE-TOSTÁTICO UNIFORME: TRATA-MIENTO CLÁSICO

Se trata el caso donde el campo magnético $\vec{B}$ es constante. Podemos asumir que en todo punto, este campo viene dado por $\vec{B} = B\hat{k}$ donde $\hat{k}$ es el vector unitario en la dirección de z. La primera tarea es elegir un potencial $\vec{A}$ que genere el campo $\vec{B}$. Como $\vec{B}$ es constante, podemos seleccionar

$$\vec{A} = \tfrac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} = \frac{B}{2}\left(y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}\right), \tag{16}$$

de manera que el Hamiltoniano queda

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{qB}{2c}\{y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}\}\right)^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}y^2 \\ &\quad + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{qB}{2mc}\left(xp_y - yp_x\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Podemos identificar los primeros dos términos con el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional en x, los siguientes dos términos con el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional en y, con los mismos parámetros que el primero, y el quinto término con el Hamiltoniano de una partícula libre en z, y finalmente el último término corresponde a un múltiplo de la componente z del momento angular L_z, es decir, podemos escribir el Hamiltoniano que nos atañe como

$$H = H_{arm.x} + H_{arm.y} + H_{lib.z} + \frac{qB}{2mc}L_z. \tag{18}$$

Como los paréntesis de Poisson cumplen con la linealidad, la aplicación de $\hat{H}$ (clásico) a la variable z se puede realizar por separado, considerando los paréntesis de Poisson fundamentales y los de las componentes de L:

$$\hat{H}z = 0 + 0 + \frac{p_z}{m} + 0\cdot \tag{19}$$

Es decir, en la dirección z la partícula se mueve libremente, como era de esperarse, y aplicando la Ec. (1) obtenemos:

$$z(t) = z_0 + \frac{p_{z0}}{m}t. \tag{20}$$

Gracias a que escribimos el Hamiltoniano en términos de L_z, podemos aplicar el operador $\hat{H}$ sobre x de forma inmediata:

$$\begin{aligned} \hat{H}x &= \frac{1}{2m}\left[x, p_x^2\right] + \frac{q^2B^2}{8m^c}\left[x, x^2\right] + 0 + 0 + \frac{qB}{2mc}\left[x, L_z\right] \\ &= \frac{p_x}{2m} - \frac{qB}{2mc}y \end{aligned} \tag{21}$$

La ulterior aplicación de $\hat{H}$ arroja:

$$\hat{H}^2x = -\frac{qB}{mc}\left(\frac{qB}{2mc}x + \frac{p_y}{m}\right)\cdot \tag{22}$$

$$\hat{H}^3x = -\frac{q^2B^2}{m^2c^2}\left(\frac{p_x}{m} - \frac{qB}{2mc}y\right) = -\frac{q^2B^2}{m^2c^2}\hat{H}x\cdot \tag{23}$$

$$\hat{H}^4x = -\frac{q^2B^2}{m^2c^2}\hat{H}^2x. \tag{24}$$

$$\hat{H}^5x = -\frac{q^2B^2}{m^2c^2}\hat{H}^3x = \frac{q^4B^4}{m^4c^4}\hat{H}x. \tag{25}$$

Las Ecs. (21)-(25) permiten proponer las siguientes relaciones que pueden probarse por inducción:

$$\hat{H}^{2n}x = -\frac{m^2c^2}{q^2B^2}\left(-1\right)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n}\hat{H}^2x; \tag{26}$$

$$\hat{H}^{2n+1}x = \frac{mc}{qB}\left(-1\right)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n+1}\hat{H}x, \tag{27}$$

salvo el término correspondiente a *n=0* para el caso par, por lo que tenemos que sustraerlo y reemplazarlo por el término correspondiente. Considerando esto, la serie para *x(t)* queda

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{x_0}{2} - \frac{mc}{qB}\frac{p_{y0}}{m} + \frac{mc}{qB}\left(\hat{H}x\,|_0\right)\sum_n\left\{\left(-1\right)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n+1}\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right\} \\ &\quad - \frac{m^2c^2}{q^2B^2}\left(\hat{H}^2x\,|_0\right)\sum_n\left\{\left(-1\right)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n}\frac{t^{2n}}{(2n)!}\right\}, \end{aligned} \tag{28}$$

donde podemos sustituir el desarrollo en serie del seno y coseno para expresar el resultado finalmente como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} + \left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2}\right)\sin\left(\frac{qB}{mc}t\right) \\ &\quad + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB}\right)\cos\left(\frac{qB}{mc}t\right)\cdot \end{aligned} \tag{29}$$

Al seguir el mismo procedimiento para la componente y, obtenemos

$$\hat{H}y = \frac{p_y}{m} + \frac{qB}{2mc}x; \tag{30}$$

$$\hat{H}^2y = \frac{qB}{mc}\left(\frac{p_x}{m} - \frac{qB}{2mc}y\right); \tag{31}$$

$$\hat{H}^{2n}y = -\left(\frac{mc}{qB}\right)^2\left(-1\right)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n}\hat{H}^2y; \tag{32}$$

$$\hat{H}^{2n+1}y = \frac{mc}{qB}(-1)^n\left(\frac{qB}{mc}\right)^{2n+1}\hat{H}y\,, \tag{33}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} + \left(\frac{cp_{y0}}{qB} + \frac{x_0}{2}\right)\sin\left(\frac{qB}{mc}t\right) + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{cp_{x0}}{qB}\right)\cos\left(\frac{qB}{mc}t\right). \tag{34}$$

Si derivamos *x(t)* e *y(t)* respecto al tiempo, obtenemos:

$$v_x(t) = \frac{qB}{mc}\left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2}\right)\cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) - \frac{qB}{mc}\left(\frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB}\right)\sin\left(\frac{qB}{mc}t\right), \tag{35}$$

$$\Rightarrow v_{x0} \equiv v_x(0) = \frac{p_{x0}}{m} - \frac{qB}{2mc}y_0\,; \tag{36}$$

$$v_y(t) = \frac{qB}{mc}\left(\frac{cp_{y0}}{qB} + \frac{x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) + \frac{qB}{mc}\left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2}\right)\sin\left(\frac{qB}{mc}t\right), \tag{37}$$

$$\Rightarrow v_{x0} \equiv v_x(0) = \frac{p_{y0}}{m} + \frac{qB}{2mc}y_0\,. \tag{38}$$

Notemos que la coordenada canónica $p_{x,y}$ no coincide con la cantidad $mv_{x,y}$, es decir, el momento mecánico difiere del momento canónico.

Existen cantidades comunes que podríamos reescribir como sigue:

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc}\,; \tag{39}$$

$$x_c \equiv \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} = x_0 - \frac{mc}{qB}v_{y0}\,; \tag{40}$$

$$y_c \equiv \frac{y_0}{2} + \frac{cp_{x0}}{qB} = y_0 + \frac{mc}{qB}v_{x0}\,. \tag{41}$$

En términos de estas cantidades y aplicando la identidad para el seno y coseno de una suma de ángulos, podemos expresar las Ecs. (29, 34, 35) y (37) como

$$x(t) = x_c + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \alpha). \tag{42}$$

$$y(t) = y_c - \frac{v_0}{\omega}\cos(\omega t + \alpha). \tag{43}$$

$$v_x(t) = v_0\cos(\omega t + \alpha). \tag{44}$$

$$v_y(t) = v_0\sin(\omega t + \alpha). \tag{45}$$

con $\alpha \equiv \arctan\frac{v_{y0}}{v_{x0}}$.

Si definimos $R \equiv \frac{v_0}{\omega}$, podemos identificar la solución como una trayectoria circular de radio *R* alrededor de un centro (x_c, y_c) con una frecuencia angular ω. Notemos además que si derivamos respecto al tiempo a v_x y v_y, obtenemos

$$a_x(t) = -\omega v_0\sin(\omega t + \alpha). \tag{46}$$

$$a_y(t) = \omega v_0\cos(\omega t + \alpha). \tag{47}$$

Es decir, se cumplen las relaciones

$$\dot{x} = -\omega v_y\,. \tag{48}$$

$$\dot{y} = \omega v_x\,. \tag{49}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2(x - x_c). \tag{50}$$

$$\ddot{y} = -\omega^2(y - y_c). \tag{51}$$

Al sustituir estos resultados en la definición de *L*, para la componente z obtenemos

$$\omega L_z = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\omega^2 r_c^2}{2}\,. \tag{52}$$

Es decir, el momento angular es una constante, y sólo depende de los valores iniciales de energía cinética y de la posición de la partícula.

Nuestro problema en realidad es tridimensional, por lo que con este conjunto de resultados sabemos que la curva generada por la trayectoria de la partícula es una helicoidal alrededor del eje *z*.

En éste problema se ha mostrado la utilidad de los paréntesis de Poisson para resolver problemas, aunque puede parecer un procedimiento un poco forzado y muy sofisticado para abordar problemas que podrían solucionarse de una forma más breve utilizando las ecuaciones de Newton o las de Hamilton. El objetivo en este caso es mostrar una semejanza operacional entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica a través de la definición de productos que originan estructuras algebraicas comunes y que pueden ser utilizadas para resolver en sentido estrictamente ideal cualquier problema de la mecánica.

IV. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNETOSTÁTICO UNIFORME: TRATAMIENTO CUÁNTICO

Emplearemos el mismo campo vectorial que empleamos en el caso clásico, de manera que la expresión para el operador Hamiltoniano es explícitamente

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m}\left(\hat{p} - \frac{qB}{2c}\left\{y\hat{i} - x\hat{j}\right\}\right)^2 \\
&= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}x^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}y^2 \\
&\quad + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \frac{qB}{2mc}\left(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x\right).
\end{aligned} \tag{53}
$$

Es decir, hemos obtenido, de manera idéntica al caso clásico, un operador Hamiltoniano que puede considerarse como la suma de los Hamiltonianos de dos osciladores armónicos acoplados por medio de un término de momento angular.

Sabemos que la solución en la dirección del campo (paralelo a z) es independiente de la solución transversal, por lo que podemos escribir

$$\psi(x,y,z) = \phi(x,y)\upsilon(z), \tag{54}$$

de manera que definiendo

$$\hat{H}_t \equiv \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{q^2B^2}{8mc^2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{qB}{2mc}\left(x\hat{p}_y - y\hat{p}_x\right), \tag{55}$$

podemos escribir la ecuación de eigenvalores como

$$\hat{H}_t\phi\upsilon + \hat{H}_{lib.z}\phi\upsilon = E\phi\upsilon, \tag{56}$$

de donde a su vez podemos separar la variable z si se cumplen las ecuaciones

$$\hat{H}_t\phi = E_t\phi \tag{57}$$

y

$$\hat{H}_{lib.z}\upsilon = E_z\upsilon \tag{58}$$

tales que $E = E_t + E_z$.

Construiremos un par de operadores denominados de escalera o de creación y destrucción. Para empezar, basándonos en el resultado clásico, definiremos $\omega \equiv \frac{qB}{mc}$, y a continuación simplificaremos la notación del operador Hamiltoniano definiendo el operador de momento mecánico como

$$\hat{\vec{\pi}} \equiv \hat{\vec{p}} - \frac{q}{c}\vec{A}. \tag{59}$$

Explícitamente, las componentes de este operador son:

$$\hat{\pi}_x = \hat{p}_x - \frac{m\omega}{2}y, \tag{60}$$

$$\hat{\pi}_y = \hat{p}_y + \frac{m\omega}{2}x, \tag{61}$$

$$\hat{\pi}_z = \hat{p}_z. \tag{62}$$

Luego, podemos escribir el operador $\hat{H}_t$ como:

$$\hat{H}_t = \frac{1}{2m}\left(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2\right). \tag{63}$$

Sea

$$\hat{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y\right). \tag{64}$$

El operador adjunto de $\hat{b}$ entonces es:

$$\hat{b}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y\right). \tag{65}$$

Ahora, expresamos $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_x$ en términos de $\hat{b}$ y $\hat{b}^+$:

$$\hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{b} + \hat{b}^+\right), \tag{66}$$

$$\hat{\pi}_y = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{b} - \hat{b}^+\right). \tag{67}$$

Sustituyendo en (63) se obtiene

$$\hat{H}_t = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{b}\hat{b}^+ + \hat{b}^+\hat{b}\right). \tag{68}$$

Con fin de simplificar aún más esta expresión, calculamos el conmutador de estos operadores:

$$\left[\hat{b}, \hat{b}^+\right] = \frac{i}{m\hbar\omega}\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] = \hat{I}. \tag{69}$$

Por lo tanto, $\hat{b}\hat{b}^+ = \hat{I} + \hat{b}^+\hat{b}$ y sustituyendo en (68):

$$\hat{H}_t = \hbar\omega\left(\hat{b}^+\hat{b} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right). \tag{70}$$

Donde $\hat{N} \equiv \hat{b}^+\hat{b}$, y como su expresión es más sencilla, tomaremos como base las funciones propias de éste operador pues resulta que éstas también son funciones propias del Hamiltoniano. Ahora, si φ_n es una función propia de $\hat{N}$ tal que $\hat{N}\phi_n \equiv \lambda_n \phi_n$, entonces $\hat{b}^+$ también será una función propia de $\hat{N}$:

$$\hat{N}\left(\hat{b}^+\phi_n\right) = (\lambda_n + 1)\left(\hat{b}^+\phi_n\right). \tag{71}$$

Y lo mismo ocurre con el operador $\hat{b}$:

$$\hat{N}\left(\hat{b}\phi_n\right) = (\lambda_n - 1)\left(\hat{b}\phi_n\right). \tag{72}$$

No es difícil calcular la norma de este eigenvector:

$$\left\|\hat{b}\phi_n\right\| = \left(\hat{b}\phi_n, \hat{b}\phi_n\right) = \left(\phi_n, \hat{b}^+\hat{b}\phi_n\right) = \lambda_n . \tag{73}$$

La norma de todo vector propio de $\hat{N}$ es una cantidad positiva, resultado que implica que $\lambda_n \geq 0$, por tanto existe un estado base con la condición $\hat{b}\phi_0 = 0$, lo cual nos permite establecer que de hecho $\lambda_n = n$ y escribiendo explícitamente $\hat{b}\phi_0 = 0$, podemos resolver la ecuación diferencial para el estado base y normalizarla, para luego hallar los estados excitados correctamente normalizados. Luego, se pueden probar las siguientes relaciones para $\hat{b}$ y $\hat{b}^+$:

$$\hat{b}^+\phi_n = \sqrt{n+1}\phi_{n+1}, \tag{74}$$

$$\hat{b}\phi_n = \sqrt{n}\phi_{n-1}, \tag{75}$$

En esta base, el espectro de energía de acuerdo a la Ec. (70) es

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right). \tag{76}$$

Podemos calcular $\hat{\dot{x}}$ e $\hat{\dot{y}}$ mediante la expresión (60), es decir,

$$\hat{\dot{x}} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{x}\right] = \frac{1}{m}\hat{p}_x - \frac{\omega}{2}y = \frac{\hat{\pi}_x}{m}. \tag{77}$$

$$\hat{\dot{y}} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{y}\right] = \frac{1}{m}\hat{p}_y + \frac{\omega}{2}x = \frac{\hat{\pi}_y}{m}. \tag{78}$$

Luego, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener calculando $\hat{\dot{\pi}}_x$ y $\hat{\dot{\pi}}_y$ de la misma forma, y aprovechamos el cálculo previo de $\left[\hat{b}, \hat{b}^+\right]$ (Ec. 69) para conocer $\left[\vec{\pi}_x, \vec{\pi}_y\right]$:

$$\left[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y\right] = -im\omega\hbar, \tag{79}$$

muy útil pues el operador Hamiltoniano se encuentra expresado en términos de $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_x$. El resultado es

$$\hat{\dot{\pi}}_x = -\omega\hat{\pi}_y, \tag{80}$$

$$\hat{\dot{\pi}}_y = \omega\hat{\pi}_x, \tag{81}$$

Luego, combinando estos resultados, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\hat{\ddot{x}} = -\omega\hat{\dot{y}}, \tag{82}$$

$$\hat{\ddot{y}} = \omega\hat{\dot{x}}. \tag{83}$$

Como se esperaba, las ecuaciones de movimiento de Heissenber son idénticas a las ecuaciones de movimiento clásicas (48) y (49).

Ahora calculamos los elementos de matriz del Hamiltoniano:

$$H_{mn} = \left(\phi_m, \hat{H}\phi_n\right) = \left(\phi_m, \hbar\omega(n + 1/2)\phi_n\right) = \hbar\omega(n + 1/2)\delta_{mn}. \tag{84}$$

Es decir, únicamente los elementos de la diagonal son distintos de cero, ya que escogimos una base de vectores propios de la energía. La matriz de manera explícita tiene la forma

$$[H] = \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{85}$$

Gracias al método de operadores escalera que empleamos en este caso, resulta inmediato recuperar la forma matricial de los operadores de momento mecánico $\hat{\vec{\pi}}$, empleando las Ecs. (66), (67), (74) y (75):

$$\pi_{x,kn} = \left(\phi_k, \hat{\pi}_x\phi_n\right) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\left(\phi_k, \hat{b}\phi_n\right) + \left(\phi_k, \hat{b}^+\phi_n\right)\right\}$$
$$= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{n}\delta_{k,n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\right\}; \tag{86}$$

$$\pi_{y,kn} = \left(\phi_k, \hat{\pi}_y\phi_n\right) = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\left(\phi_k, \hat{b}\phi_n\right) - \left(\phi_k, \hat{b}^+\phi_n\right)\right\}$$
$$= i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{n}\delta_{k,n-1} - \sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\right\}, \tag{87}$$

donde se pone de manifiesto que únicamente son distintos de cero los elementos inmediatamente debajo de la diagonal e inmediatamente por encima de la diagonal, de manera que la forma explícita de las matrices es

$$[\pi_x]=\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}; \tag{88}$$

$$[\pi_y]=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \cdots\\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots\\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots\\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}. \tag{89}$$

Ahora, aplicando la Ec. (15), tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{x,kn} &= i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\{E_k-E_n\}\{\sqrt{n}\delta_{k,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\}\\ &= i\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\{-\sqrt{n}\delta_{k,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\};\end{aligned} \tag{90}$$

$$\begin{aligned}\hat{\pi}_{y,kn} &= -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\{E_k-E_n\}\{\sqrt{n}\delta_{k,n-1}-\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\}\\ &= \omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\{\sqrt{n}\delta_{k,n-1}+\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1}\}.\end{aligned} \tag{91}$$

donde hemos obtenido las relaciones (80) y (81) por medio de un método enteramente algebraico.

En este caso no resulta trivial el cálculo de los elementos de matriz x_{kn} o y_{kn}, pues no tenemos expresiones "simples" para $\hat{x}$ o $\hat{y}$ en términos de $\hat{b}$ y $\hat{b}^{+}$. Si en cambio definimos, basándonos en el resultado clásico, los operadores:

$$\hat{x}_c \equiv \hat{x}-\frac{\pi_y}{m\omega}. \tag{92}$$

$$\hat{y}_c \equiv \hat{y}+\frac{\pi_x}{m\omega}. \tag{93}$$

podemos expresar el operador Hamiltoniano como

$$\hat{H}=\frac{1}{2m}\left(\hat{\pi}_x^2+\hat{\pi}_y^2\right)=\frac{m\omega^2}{2}\left([x-\hat{x}_c]^2+[y-\hat{y}_c]^2\right). \tag{94}$$

Si definimos el operador

$$\hat{R}^2=[x-\hat{x}_c]^2+[y-\hat{y}_c]^2. \tag{95}$$

que en el límite clásico se corresponde con el cuadrado del radio de la trayectoria circular que describe la partícula, tenemos por un lado que, al ser una cantidad proporcional al operador Hamiltoniano, es un observable físico; sin embargo, no podemos identificarlo exactamente con una trayectoria circular perfectamente definida pues para ello $\hat{x}_c$ y $\hat{y}_c$ tendrían que estar determinados de manera exacta simultáneamente, y como $\hat{x}_c$ y $\hat{y}_c$ no conmutan, al determinarse uno automáticamente el otro no conmuta con el Hamiltoniano, por lo que no pueden determinarse de forma exacta usando la misma base. Podemos calcular su conmutador

$$[\hat{x}_c,\hat{y}_c]=\left[x-\frac{\hat{\pi}_y}{m\omega},\, y+\frac{\hat{\pi}_x}{m\omega}\right]=i\frac{\hbar}{m\omega}, \tag{96}$$

de forma que

$$\Delta x_c\Delta y_c \geq \frac{\hbar}{2m\omega}=\frac{\hbar c}{2qB}. \tag{97}$$

Por lo tanto, la cantidad denominada longitud magnética, $\lambda\equiv\sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$, puede interpretarse como una medida de la incertidumbre mínima con que podemos determinar simultáneamente $\hat{x}_c$ y $\hat{y}_c$.

Aunque no podemos hablar de trayectorias perfectamente definidas de acuerdo a la mecánica clásica en la mecánica cuántica, el sistema en general obedece las ecuaciones de movimiento clásicas, sólo que no podemos asegurar que el sistema sigue una trayectoria en específico, sino que tenemos un espectro de trayectorias, y sólo podemos hablar de la probabilidad de que la partícula tome determinada trayectoria.

En paralelismo con el tratamiento clásico, calcularemos la forma explícita de los operadores de posición en función del tiempo, por el método de serie de conmutadores:

$$\hat{G}(\hat{x})=[\hat{H},x]=-i\hbar\dot{\hat{x}}=-i\hbar\frac{\hat{\pi}_x}{m}, \tag{98}$$

$$\hat{G}^2(\hat{x})=-i\frac{\hbar}{m}[\hat{H},\hat{\pi}_x]=\frac{\hbar^2\omega}{m}\hat{\pi}_y, \tag{99}$$

$$\hat{G}^3(\hat{x})=\frac{\hbar^2\omega}{m}[\hat{H},\hat{\pi}_y]=-i\frac{\hbar^3\omega^2}{m}\hat{\pi}_x=\hbar^2\omega^2\hat{G}(\hat{x}), \tag{100}$$

$$\hat{G}^4(\hat{x})=\hbar^2\omega^2\hat{G}^2(\hat{x}), \tag{101}$$

$$\hat{G}^5(\hat{x})=\hbar^4\omega^4\hat{G}(\hat{x}), \tag{102}$$

$$\hat{G}^6(\hat{x})=\hbar^4\omega^4\hat{G}^2(\hat{x}), \tag{103}$$

$$\Rightarrow \hat{G}^{2n}(\hat{x})=(\hbar\omega)^{2(n-1)}\hat{G}^2(\hat{x})=\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega}\hat{\pi}_y, \tag{104}$$

$$\hat{G}^{2n+1}(\hat{x}) = (\hbar\omega)^{2n}\hat{G}(\hat{x}) = -i\frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega}\hat{\pi}_x, \quad (105)$$

salvo el término correspondiente a *n=0* para el caso par.

Considerando esto, al sustituir en (13) obtenemos la serie para $\hat{x}(t)$,

$$\hat{x}(t) = \hat{x}\,|_0 - \frac{\hat{\pi}_y\,|_0}{m\omega} + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n} \frac{\left(\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega}\hat{\pi}_y\right)_0}{(2n)!}$$
$$+ \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n+1} \frac{\left(-i\frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega}\hat{\pi}_x\right)_0}{(2n+1)!}, \quad (106)$$

e identificando el desarrollo en serie del seno y coseno así como los operadores $\hat{x}_c$ y $\hat{y}_c$:

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_c\,|_0 + \frac{1}{m\omega}\left[\hat{\pi}_y\,|_0 \cos(\omega t) + \hat{\pi}_x\,|_0 \sin(\omega t)\right]. \quad (107)$$

que no es más que la versión mecano-cuántica de la Ec. (29).

Al seguir el mismo procedimiento para la componente *y*, obtenemos

$$\hat{G}(\hat{y}) = \left[\hat{H}, \hat{y}\right] = -i\hbar\frac{\hat{\pi}_y}{m}, \quad (108)$$

$$\hat{G}^2(\hat{x}) = -i\frac{\hbar}{m}\left[\hat{H}, \hat{\pi}_y\right] = -\frac{\hbar^2\omega}{m}\hat{\pi}_x, \quad (109)$$

$$\hat{G}^3(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2\omega}{m}\left[\hat{H}, \hat{\pi}_x\right] = -i\frac{\hbar^3\omega^2}{m}\hat{\pi}_y = \hbar^2\omega^2\hat{G}(\hat{y}), \quad (110)$$

$$\Rightarrow \hat{G}^{2n}(\hat{y}) = (\hbar\omega)^{2(n-1)}\hat{G}^2(\hat{y}) = -\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega}\hat{\pi}_x, \quad (111)$$

$$\hat{G}^{2n+1}(\hat{y}) = (\hbar\omega)^{2n}\hat{G}(\hat{y}) = -i\frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega}\hat{\pi}_y, \quad (112)$$

nuevamente, con excepción del término correspondiente a *n=0* para el caso par;

$$\hat{y}(t) = \hat{y}\,|_0 + \frac{\hat{\pi}_x\,|_0}{m\omega} + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n} \frac{\left(-\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega}\hat{\pi}_x\right)_0}{(2n)!}$$
$$+ \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n+1} \frac{\left(-i\frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega}\hat{\pi}_y\right)_0}{(2n+1)!}, \quad (113)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_c\,|_0 - \frac{1}{m\omega}\left[\hat{\pi}_x\,|_0 \cos(\omega t) + \hat{\pi}_y\,|_0 \sin(\omega t)\right]. \quad (114)$$

que no es más que la versión mecano-cuántica de la Ec. (34).

Al calcular el valor esperado de las Ecs. (107) y (114) respecto a un estado Φ, se obtiene

$$\langle x\rangle_\Phi(t) = \langle x_c\rangle_{\Phi(0)} + \frac{\langle v_y\rangle_{\Phi(0)}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{\langle v_x\rangle_{\Phi(0)}}{\omega}\sin(\omega t). \quad (115)$$

$$\langle y\rangle_\Phi(t) = \langle y_c\rangle_{\Phi(0)} - \frac{\langle v_x\rangle_{\Phi(0)}}{\omega}\cos(\omega t) + \frac{\langle v_y\rangle_{\Phi(0)}}{\omega}\sin(\omega t). \quad (116)$$

Es decir, independientemente de cuál sea el valor de $\langle x_c\rangle_{\Phi(0)}$, $\langle y_c\rangle_{\Phi(0)}$, $\langle v_x\rangle_{\Phi(0)}$, $\langle v_y\rangle_{\Phi(0)}$, o la incertidumbre con la que fueron medidos (valores todos dependientes de la función Φ_0), a partir de ese momento, los valores esperados de *x* e *y* seguirán las ecuaciones del movimiento clásicas.

V. CONCLUSIONES

El conjunto de estos resultados constituye un análisis bastante completo de la dinámica de una partícula cargada en un campo magnetostático uniforme, y no sólo se han recuperado las ecuaciones de movimiento clásicas, en su interpretación rigurosa al expresar los observables como valores promedio, sino que se ha comprobado que en términos de operadores y sus matrices, se cumplen las mismas ecuaciones de movimiento clásicas, entendidas como las relaciones entre entidades correspondientes. Queda establecido que el principio de incertidumbre no afecta la forma en que se comporta el sistema, pues sólo pone de manifiesto que la naturaleza del mismo no es la de una partícula a la cual se pueda asociar con arbitraria precisión una ubicación y velocidad en un momento dado, sino que es en esencia un sistema ondulatorio cuya interpretación física no puede considerarse absolutamente comprendida. Así mismo, se estableció que cuando las dimensiones (por ejemplo, el radio clásico) del sistema son del orden de la longitud magnética, es necesario emplear la mecánica cuántica y los resultados aquí expresados, pues la incertidumbre en la posición y velocidad de la partícula ya no son despreciables en lo absoluto.

V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con apoyo de COFAA-IPN, EDD-IPN y de los proyectos SIP-IPN claves 20100127 y 20120720.

REFERENCIAS

[1] Godstein, H., *Classical Mechanics,* 2nd Ed. (Addison-Wesley, Reading, 1980).
[2] Landau, L., Lifshitz, E., *Curso Abreviado de Física Teórica,* (Editorial MIR, Moscú, 1974).
[3] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics,* 3rd Ed. (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998).