

Uso de técnicas digitales para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos

Pablo Nuñez, Néstor Olivieri, María Llera y Eduardo E. Rodríguez
Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina.



E-mail: erodrigu@ungs.edu.ar

(Recibido el 7 de Enero de 2012, aceptado el 10 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo se presentan técnicas digitales de captura de imágenes para analizar dos experimentos con cuerpos rígidos en los que se estudian la condición de rodadura y el efecto del deslizamiento. Las técnicas consisten en el uso combinado de fotografías de larga exposición y análisis de video cuadro por cuadro. En una de las experiencias se evidencia la transición de rodadura a deslizamiento desde un punto de vista geométrico y en la segunda se analiza el efecto del deslizamiento en la energía mecánica.

Palabras clave: fotografía de larga exposición, cuerpo rígido, rodadura.

Abstract

In this paper we present digital imaging techniques to analyze two rigid-body experiments in which the condition of rolling and the effects of sliding are studied. The techniques combine the use of long exposure photographs and frame-by-frame video analysis. In one of the experiences the transition from rolling to sliding is made evident, while the other examines the effect of slipping on the mechanical energy.

Keywords: long exposure photography, rigid body, rolling.

PACS: 45.40.Bb, Yy, 01.50.Pa, 07.68.+m

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de un cuerpo rígido está tratado en la mayoría de los libros de textos de Mecánica de nivel universitario [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. En particular, recibe especial atención el caso de la dinámica de cuerpos que ruedan sin deslizamiento. En este caso, el análisis se facilita por el agregado a las ecuaciones dinámicas de ecuaciones de vínculo que relacionan las variables cinemáticas del movimiento del centro de masas del cuerpo (desplazamiento, rapidez y aceleración lineales) con las cantidades angulares análogas (desplazamiento, rapidez y aceleración angulares), estas últimas asociadas a la rotación en torno de un eje que pasa por el centro de masas.

En la práctica, un cuerpo rígido que rota y se traslada sobre una superficie puede plantear varios desafíos. Por ejemplo, estudiar el proceso de transición de deslizamiento a la condición de rodadura, o viceversa, y las consecuencias de dicho cambio respecto de la conservación de la energía mecánica. Estos problemas están presentados en los textos ya sea como ejemplo [8] o ejercicio [7], o bien como *puzzle* o problema de desafío [9].

En este trabajo analizamos movimientos de cuerpos que ruedan bajo diferentes condiciones y usamos técnicas de captura de imágenes digitales para tener acceso al registro completo de las características del movimiento.

II. TÉCNICAS DIGITALES

La dificultad inherente al estudio de cualquier movimiento radica en la obtención de datos de la posición en función del tiempo de los cuales deducir la velocidad y la aceleración. En el caso del movimiento de un cuerpo rígido, la dificultad se acentúa si se quiere analizar no sólo el movimiento del centro de masas (CM) sino también del movimiento de las partículas en torno al CM.

Mediante fotografías de larga exposición es posible obtener la trayectoria de algunos puntos de interés del cuerpo señalados convenientemente. Por ejemplo, para un cilindro que rueda apoyado en su generatriz se puede considerar un punto periférico en una de las caras circulares y otro en el centro. Si el cilindro está en rodadura, la trayectoria que describe el punto periférico es una cicloide que será registrada en la fotografía. Cualquier apartamiento de esta curva está asociado a la presencia de deslizamiento. El punto central, en cambio, se mueve linealmente con la velocidad del centro de masas del cuerpo.

A fin de que la trayectoria de los puntos seleccionados sobre el cuerpo aparezca con nitidez y buen contraste, es conveniente que los puntos estén marcados de color blanco, o bien que sean brillantes sobre un fondo negro opaco. Preferentemente, la escena tiene que estar dispuesta en un ambiente poco iluminado. Si fuera necesario aumentar el contraste, se puede iluminar con una lámpara que emita

Pablo Nuñez, Néstor Olivieri, María Llera y Eduardo E. Rodríguez ultravioleta (“luz negra”) para realzar los colores claros y los fluorescentes.

En simultáneo con una captura de larga exposición, una filmación del movimiento con una cámara digital es una adecuada técnica complementaria. Con cada cuadro del video es simple determinar la posición del objeto relativa a un sistema de referencia. La secuencia “cuadro a cuadro” permite conocer con detalle la evolución temporal del movimiento.

Para la captura de las imágenes, es útil ubicar dentro del cuadro de filmación y de fotografía un elemento de longitud conocida o bien realizar marcas igualmente espaciadas para luego calcular por escala las posiciones de los puntos en las imágenes en unidades de longitud conveniente [10, 11]. En efecto, con programas como Photoedit (®Microsoft) o la herramienta Paint (®Microsoft) se puede determinar las coordenadas en píxeles de los puntos de interés a estudiar. Estas coordenadas, por comparación con las referencias de longitud ubicadas dentro del cuadro, permiten convertir las posiciones en unidades de longitud. En nuestro caso, para hacer la captura de la información de posición (en píxeles) y de tiempo (en segundos) se ha utilizado el programa Data Point [12], que requiere videos en formato AVI. En el caso de ambientes muy oscuros es útil la opción *night-shot*, que algunas filmadoras tienen incorporadas. Esta variante permite filmar en condiciones de baja iluminación con el empleo de sensores con alta sensibilidad en el rango del infrarrojo cercano.

Tanto la cámara fotográfica como la filmadora deben estar ubicadas de modo que la escena donde transcurre el movimiento quede centrada, y a distancias tales que se minimice la paralaje, de manera que un objeto ubicado en el centro de la imagen tenga las mismas dimensiones (en píxeles) que cuando esté ubicado cerca del borde de la imagen. En caso contrario, podría aparecer algún problema de enfoque con consecuentes distorsiones de la imagen.

Por un lado, la imagen de la trayectoria obtenida por la fotografía de larga exposición y, por el otro, los datos de posición y tiempo capturados a partir del video constituyen en conjunto un recurso factible para analizar casos particulares de movimientos como son los casos de deslizamiento o rodadura.

A continuación, se presentan dos experiencias en la que se aplican estas técnicas para estudiar, en la primera de ellas, la transición de deslizamiento a rodadura de un cuerpo simétrico y, en la segunda, la disipación de energía en el instante de deslizamiento. La segunda experiencia está diseñada a partir de un problema propuesto en un texto de mecánica elemental utilizado en cursos universitarios [7] y que tiene variantes como en [8].

III. TRANSICIÓN DE DESLIZAMIENTO A RODADURA

La experiencia consiste en empujar un cuerpo cilíndrico sobre una superficie horizontal suave de modo que deslice inicialmente para luego estudiar la transición a la rodadura.

En el presente caso, el cuerpo es un recipiente de latón de 6,4cm de radio. De manera conveniente, la cara circular de la lata se cubrió con papel negro y sobre ella se colocaron dos marcas de referencia con dos círculos de papel blanco, una como punto periférico y otra para registrar el movimiento del centro de masas. A simple vista, la elección de los colores en forma inversa puede parecer equivalente pero vuelve ineficaz la técnica fotográfica de larga exposición ya que la luz reflejada por objetos blancos termina saturando gran parte de la imagen. La cámara utilizada es una Canon 350D, puesta en modo manual, lo que permite hacer los ajustes para este tipo de imágenes. Para este caso fueron: ISO 800 (ISO hace referencia a la sensibilidad) y un tiempo de exposición de 2 segundos. No es aconsejable usar tiempos mayores a la duración del fenómeno ya que la captación de luz adicional resta innecesariamente contraste a la imagen.

La fotografía de larga exposición de la Fig. 1 muestra las trayectorias de un punto periférico y del punto central sobre el eje que pasa por el centro de masa. La trayectoria del punto periférico evidencia un tramo inicial de deslizamiento para luego pasar a la rodadura dada la cicloide asociada que se visualiza en la imagen.

En la Fig. 2 se muestra una composición de tres fotogramas de la filmación adicional realizada. En el fotograma central se puede observar que la marca de la periferia queda registrada con mayor nitidez cuando está pasando por la posición más baja, lo que se corresponde con el hecho que en caso de rodadura ese punto de contacto tendría velocidad instantánea relativa a la superficie igual a cero.

Una mayor cuantificación se puede hacer recordando que en condición de rodadura el módulo de la velocidad angular ω es igual al cociente entre la velocidad del centro de masa v_{CM} y el radio R del cilindro que rueda:

$$w = \frac{v_{CM}}{R} . \quad (1)$$

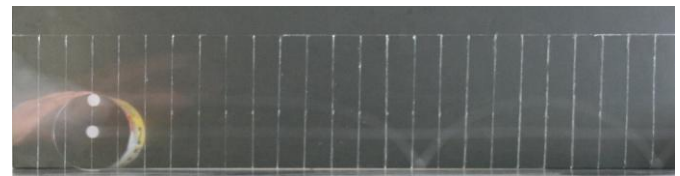


FIGURA 1. Fotografía de larga exposición, que permite tener en un sólo cuadro la trayectoria de los dos puntos resaltados. La lata es empujada rápidamente y desliza hasta que entra en condición de rodadura evidenciada por la trayectoria cicloidal del punto periférico.

Mediante un análisis cuadro a cuadro del video es posible evaluar el cociente v_{CM}/R y determinar el instante en que éste satisface la condición de rodadura, es decir cuando su valor coincide con la velocidad angular ω . En este caso se utilizó una cámara Sony DCR-SR45 para capturar imágenes a una tasa de 30 cuadros por segundo.



FIGURA 2. La imagen es una composición que reúne tres fotogramas obtenidos del video. En el segundo cuadro la nitidez del punto periférico indica que su velocidad es nula, se halla instantáneamente detenido en un cuerpo que rueda y se traslada.

En la Fig. 3 se muestran la velocidad angular ω del cuerpo y el cociente v_{CM}/R entre la velocidad de su centro de masas y el radio. Se puede observar que, al comienzo, la velocidad angular es casi nula y crece hasta quedar aproximadamente constante. Por su parte, la velocidad de traslación crece repentinamente por la acción de la fuerza ejercida por la mano que empuja para iniciar el movimiento. Luego, como actúa sólo la fuerza de fricción en el deslizamiento, la velocidad disminuye hasta hacerse también aproximadamente constante. Una vez que el cociente v_{CM}/R iguala el valor de la velocidad angular ω , el cuerpo entra en rodadura y se verifica la relación (1).

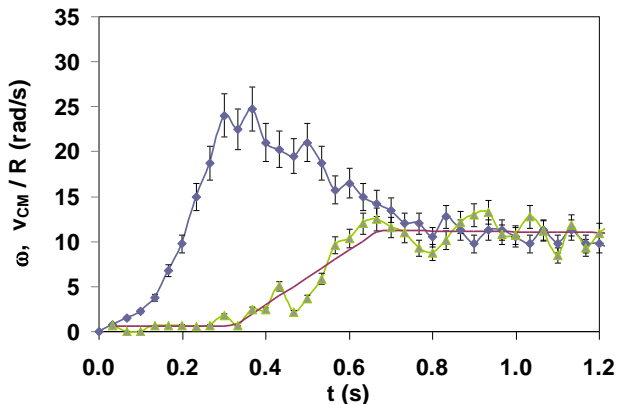


FIGURA 3. Evolución del cociente v_{CM}/R (azul) y de la velocidad angular ω (verde). La convergencia de las curvas verifica la condición de rodadura sin deslizamiento. Las líneas son indicativas de la tendencia de cada variable

IV. DISIPACIÓN DE ENERGÍA POR DESLIZAMIENTO

En esta experiencia consideramos el problema planteado en un texto universitario de Física en el que se estudia un cuerpo que está formado por un cilindro de radio r y masa

Uso de técnicas digitales para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos m al que se le han adosado dos discos de radio R y masa M en sus extremos.[7] La propuesta del problema es determinar cómo cambian las velocidades del cuerpo al rodar inicialmente cuesta abajo por un plano inclinado, apoyado sobre el cilindro, para luego continuar por el plano horizontal, apoyado sobre los discos (Fig. 4). El análisis teórico previo, suponiendo conservación de la energía mecánica, determina que al producirse el contacto de los discos con el plano horizontal (cambio de radio r a $R > r$) se produce un incremento de la velocidad del centro de masa y una disminución de la velocidad angular.

Esta hipótesis de conservación de la energía se puede contrastar mediante un experimento que muestra la trayectoria de un punto periférico y del centro de masa recurriendo a la fotografía de larga exposición. Por otro lado, la técnica de video y su análisis cuadro a cuadro permite estimar los valores de la energía mecánica a lo largo de todo el movimiento.

En este caso, se diseñó el dispositivo con un cilindro de madera de 15cm de largo y un radio de 1,2cm al que le adosaron dos CD en sus extremos. Se cubrió la cara circular del CD con papel negro opaco y se marcaron un punto en el centro y otro en la periferia con papel blanco. Los puntos están resaltados con tinta fluorescente, tal como se muestra en la imagen (Fig. 5).

Para realizar la experiencia se inclinó una pista de 120cm de longitud, con un ángulo de inclinación pequeño de entre 5° y 10° , y de este modo se logró el plano inclinado; la superficie horizontal fue provista por el piso del laboratorio. El cuerpo se soltó desde la parte elevada del plano inclinado de modo que la velocidad inicial fuera cero.

Todo el movimiento de rodadura sobre el plano y a continuación por el piso ocurre en unos pocos segundos. Para obtener mayor nitidez de la trayectoria en la fotografía se usa “luz negra” para iluminar la escena.

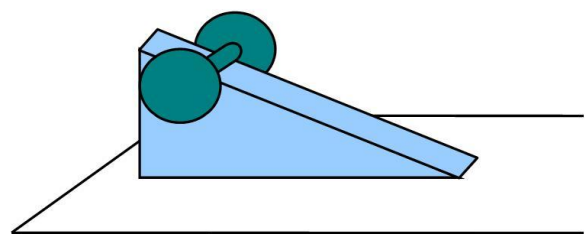


FIGURA 4. Esquema del problema, similar al que se encuentra en la bibliografía, Ref. [7].

En este caso, la iluminación elegida brinda mayor contraste de los puntos de interés y que permite captar movimientos más fugaces. Los otros recaudos técnicos que se mencionan en la primera experiencia son también válidos aquí.

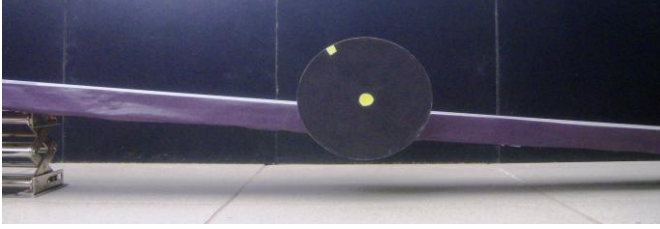


FIGURA 5. La imagen muestra el montaje del dispositivo para la captura de fotografías de larga exposición.

Las fotografías de larga exposición (Figs. 6 y 7) muestran la trayectoria realizada por el punto de la periferia y el central en el recorrido. Se observa una cicloide alargada sobre el plano inclinado (circunferencia generatriz de radio r) y, luego de una transición cuando los discos apoyan, una cicloide común en el plano horizontal (circunferencia generatriz de radio R). El intervalo de transición no puede ser modelado con el empalme de esas dos cicloides (ver APÉNDICE), lo que estaría indicando que en un breve intervalo después del choque con el plano horizontal el cuerpo rota y al mismo tiempo desliza. Es útil notar que en ese lapso actúa una fuerza de rozamiento en dirección horizontal y hacia delante que incrementa la velocidad del centro de masas y a la vez produce un torque que disminuye la velocidad angular ω . La Fig. 8 muestra el estudio del movimiento cuadro a cuadro a partir del video obtenido con una cámara digital HP-M525 que captura 17 cuadros por segundo. El incremento de velocidad del centro de masa resulta inferior al esperado bajo la suposición de que la energía mecánica se conserva. Esto representa una disipación de energía debido a la acción de la fuerza de rozamiento en el intervalo de contacto de los discos con el piso.

La presencia momentánea de dicha fuerza de rozamiento trae aparejada una variación de energía que se puede estimar en base a los datos extraídos del análisis cuadro a cuadro del movimiento. La Fig. 9 muestra la energía mecánica del cuerpo a lo largo de la trayectoria. Es notable cómo en el instante en que el cuerpo cambia su circunferencia generatriz (que coincide con el cambio de superficie) la energía decae abruptamente al producirse el deslizamiento de los discos en el piso. Ese instante se corresponde también con la transición entre las dos cicloides que describe el punto en la periferia, según queda evidenciado en la fotografía de larga exposición. El choque inelástico del cuerpo cuando abandona el plano inclinado y toma contacto con la superficie horizontal también contribuye a la disipación de la energía mecánica.

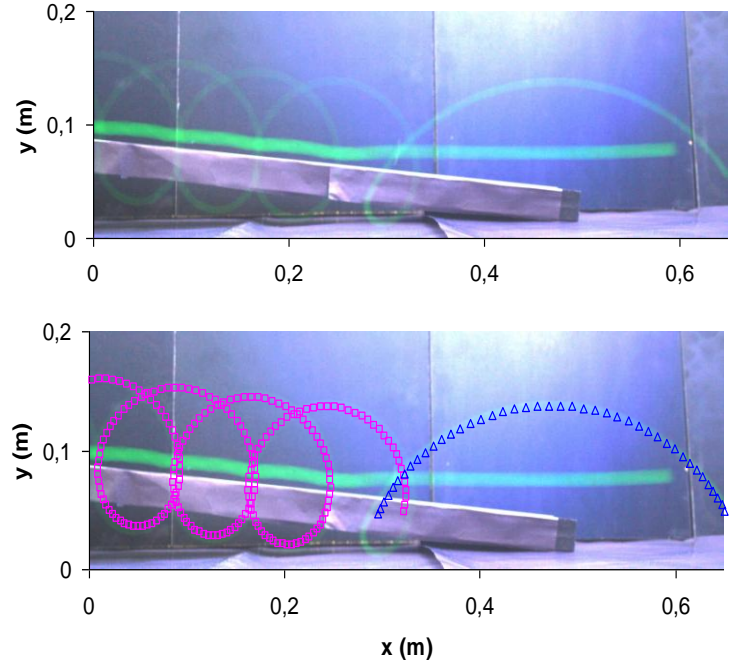


FIGURA 6. Trayectorias del punto de la periferia y del punto central, tal como se observan en las fotografías de larga exposición.

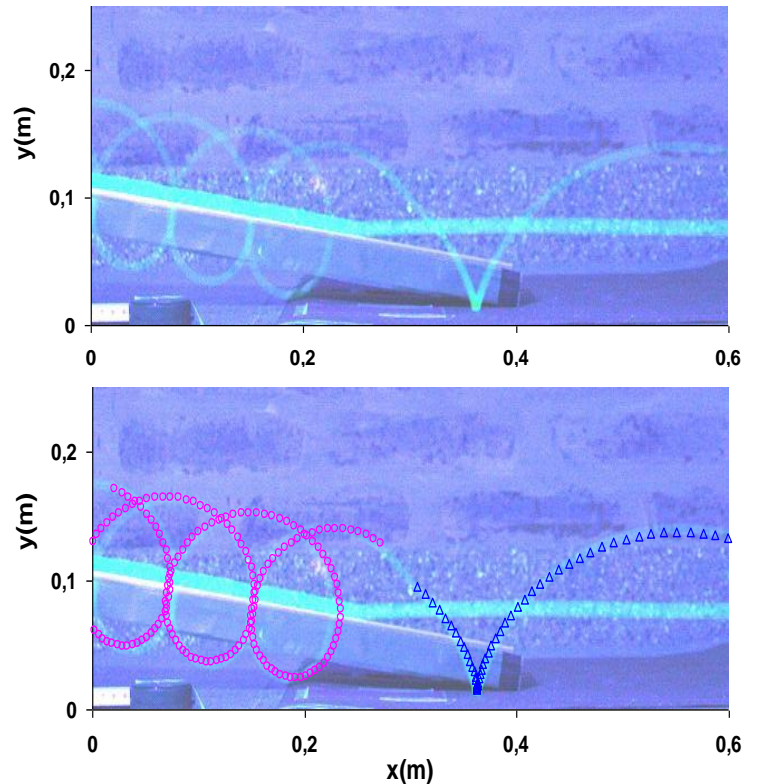


FIGURA 7. Según la posición del punto periférico en el momento de contacto de los discos con el plano horizontal, se generan distintas trayectorias que enlazan a las cicloides.

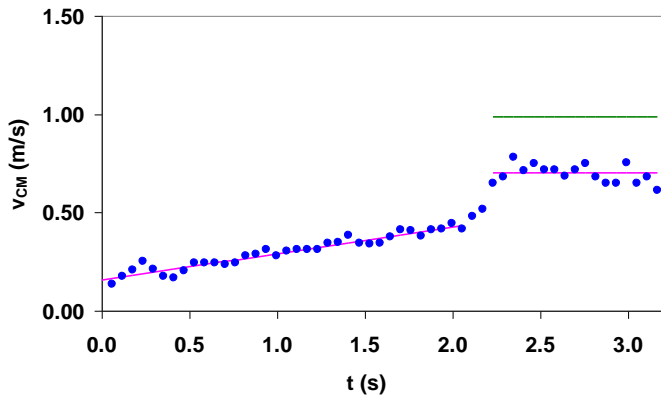


FIGURA 8. Velocidad del centro de masas del cuerpo que rueda. La velocidad creciente corresponde al trayecto sobre el plano inclinado. Se observa el cambio de la velocidad cuando los discos apoyan sobre el plano horizontal. La línea verde indica el valor esperado de la velocidad en el plano horizontal si se conservara la energía mecánica.

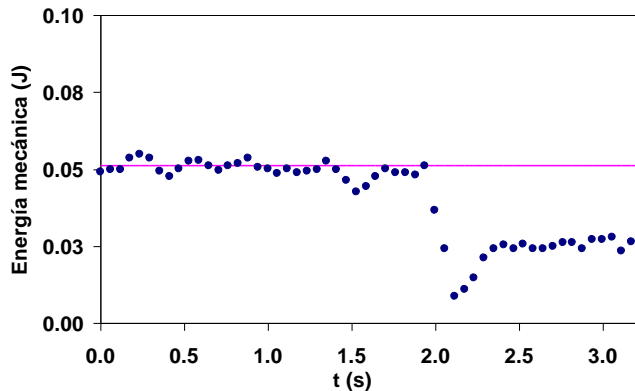


FIGURA 9. Energía mecánica evaluada del cuerpo. Se observa un cambio en la energía en el momento en que los discos tocan el plano horizontal.

V. CONCLUSIONES

Estas técnicas permiten realizar mediciones de magnitudes que usualmente son difíciles de efectuar por la complejidad de fenómenos tales como las rotaciones, deslizamientos y las trayectorias en general diversas de cuerpos rígidos. Para el estudio de estos fenómenos los dispositivos no son de gran sofisticación, se requieren elementos técnicos que actualmente están muy difundidos como son la cámara de video y la cámara fotográfica digital.

En particular, de la cámara fotográfica digital se aprovecha el modo de larga exposición que resulta adecuado para la captación de trayectorias de puntos de interés en un determinado movimiento. Cada escenario de obtención de imágenes requiere un montaje que debe tener en cuenta cuestiones de iluminación y contraste de colores para su mejor apreciación, que se van mejorando con el ensayo y error.

Es fundamental lograr imágenes suficientemente claras como para realizar los análisis de las experiencias expuestas. Subordinado a lo anterior queda la posibilidad de aplicar sobre las imágenes capturadas consideraciones estéticas para ilustrar mejor los fenómenos a estudiar.

Por su parte, la cámara de video digital permite reconstruir el movimiento estudiado a partir de posiciones y tiempo que posibilita la observación del video cuadro por cuadro. Además es posible captar, en ciertos cuadros, momentos de interés específicos del movimiento.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto “Experimentos en contexto para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia y la tecnología” del Instituto de Industria de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). Agradecemos a los responsables del Laboratorio de Física del Instituto de Ciencias de la UNGS la sesión de instrumental necesario para los experimentos presentados.

REFERENCIAS

- [1] Gettys, W., et al., *Física para ingeniería y ciencias, Tomo 1* (McGraw-Hill, México, 2005).
- [2] Sears, F., et al., *Física Universitaria, Vol 1.* (Pearson Educación, México, 2004).
- [3] Tipler, P., *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1* (Reverté, España, 2001).
- [4] Searway, R., *Física, Tomo 1* (Mc Graw-Hill, México, 1999).
- [5] Bedford, A. y Fowler, W., *Dinámica. Mecánica para ingeniería. Tomo 1* (Addison Wesley Iberoamericana, Estados Unidos, 1996).
- [6] Ingard, U. y Kraushaar, W., *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas* (Reverté, España, 1972), p. 378.
- [7] Resnick, R., Halliday y D. Krane, K., *Física, Vol. 1* (CECSA, México, 1997), p. 297.
- [8] Lea, S. y Burke J., *Física. La naturaleza de las cosas, Vol 1* (International Thomson Editores, México, 1998).
- [9] Hewitt, P., *Rolling spool*, Phys. Teach. **48**, 566 (2010).
- [10] Laws, P. y Pfister, H., *Using Digital Video Analysis in Introductory Mechanics Projects*, Phys. Teach. **36**, 282 (1998).
- [11] Gil, S., Reisin, H. D. y Rodríguez, E. E., *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768-775 (2006).
- [12] *Data Point*, disponible como shareware en: <http://www.xannah.org/datapoint/>. Consultado en octubre de 2011.
- [13] Swartz, Clifford E., *Used Math* (American Association of Physics Teachers, 1993).

TRAZADO DE CICLOIDES

Para trazar las cicloides sobre las fotografías de larga exposición se han considerado las ecuaciones de la cicloide generada por un punto periférico P al rotar el cuerpo sobre los discos de radio R, cuando el cuerpo se desplaza en el plano horizontal; y las ecuaciones de las cicloides generadas por el mismo punto P debidas a la rotación sobre la generatriz del cilindro de radio r e inclinada un ángulo β debido al plano inclinado.

Cuando el cuerpo rueda sin deslizar sobre el plano horizontal, la cicloide que describe un punto de la periferia se puede representar por [13]:

$$\begin{aligned} x &= R(a - \text{sen } \alpha), \\ y &= R(1 - \text{cosa}). \end{aligned} \tag{A1}$$

Aquí, α es el ángulo de rotación del cuerpo. Por su parte, las ecuaciones de la cicloide que genera el mismo punto P al rodar el cuerpo sobre el cilindro de radio r se pueden obtener mediante la suma de vectores **a** y **b** en el sistema (x, y) solidario al plano inclinado, como se observa en la Fig. 10:

$$c = a + b. \tag{A2}$$

El vector **a** ubica el centro de la cara circular respecto de O y el vector **b** corresponde a la posición de P visto desde el centro O'.

$$c = (ra - R\text{sen}\alpha; r - \text{cosa}). \tag{A3}$$

Las coordenadas del vector **c** describen la cicloide generada por el punto P al rotar sobre la generatriz del cilindro de radio r.

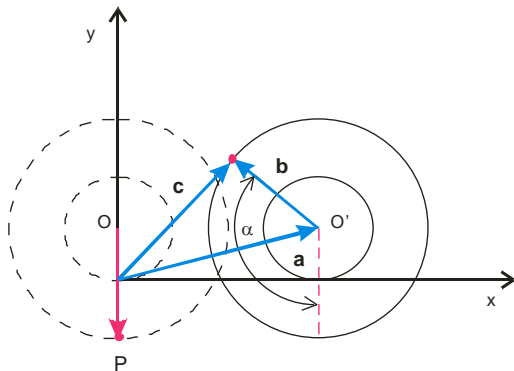


FIGURA 10. El cuerpo rota el ángulo α y se traslada la distancia OO'. Las coordenadas del punto P dadas por el vector **c** describen la ecuación de la cicloide. Este vector se obtiene de la suma de los vectores **a** (centro del cuerpo en el sistema (x, y)) y del vector **b** que corresponde a la posición relativa de P respecto del centro O'.

Finalmente debemos expresar al vector **c** rotado el ángulo β del plano inclinado respecto del sistema (x, y). Para ello se puede considerar la siguiente suma de vectores (ver Fig. 11):

$$c = s + t, \tag{A4}$$

donde **s** = (y' sen β; y' cos β) y **t** = (x' cos β; -x' sen β).

Considerando que x' e y' son las ecuaciones de la cicloide según lo expresado en (A3), obtenemos la expresión del vector **c** rotado el ángulo β.

$$c = (y' \text{sen} \beta + x' \text{cos} \beta, y' \text{cos} \beta - x' \text{sen} \beta). \tag{A5}$$

Es decir que la ecuación de la cicloide generada en el plano inclinado es:

$$\begin{aligned} x &= (r - R \text{cos } \alpha) \text{sen} \beta + (ra - R \text{sen} \alpha) \text{cos } \beta, \\ y &= (r - R \text{cos } \alpha) \text{cos } \beta - (ra - R \text{sen} \alpha) \text{sen} \beta. \end{aligned} \tag{A6}$$

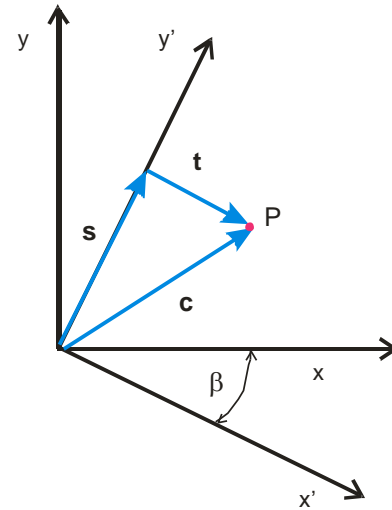


FIGURA 11. El punto P en el sistema (x, y) puede ser ubicado si se considera, por ejemplo, al vector **c** como la suma del vector **s** y del vector **t**.

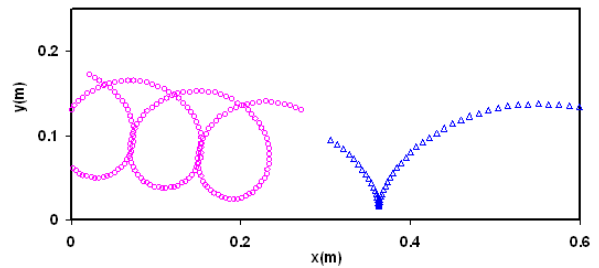


FIGURA 12. Las cicloides generadas según las ecuaciones para el plano inclinado y el plano horizontal a partir de los parámetros r, R y β. El ajuste de estos parámetros permite establecer sobre la fotografía dónde hay rodadura y dónde no.

Las cicloides se pueden generar (Fig. 12) en una planilla de cálculo en función del ángulo de giro α y de los parámetros r , R y β . Luego, se pueden superponer a las fotografías de larga exposición para ajustarlas convenientemente a los datos experimentales.