



LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

www.lajpe.org

Volume 6

Number 1

March 2012



A publication sponsored by the Latin American Physics Education Network
and the Institute of Science Education



LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Electronic version of this journal can be downloaded free of charge from the web-resource:

<http://www.lajpe.org>

Production and technical support

Daniel Sánchez Guzmán
dsanchez@ipn.mx
Rocío Bonilla Castelán
chio@lapen.org.mx

Latin American Journal of Physics
Education is indexed in:

DOAJ

Dialnet

latindex

EBSCO
PUBLISHING

INDEX COPERNICUS
INTERNATIONAL

EDITORIAL POLICY

Latin American Journal of Physics Education (LAJPE) is a peer-reviewed, electronic international journal for the publication of papers of instructional and cultural aspects of physics. Articles are chosen to support those involved with physics courses from introductory up to postgraduate levels.

Papers may be comprehensive reviews or reports of original investigations that make a definitive contribution to existing knowledge. The content must not have been published or accepted for publication elsewhere, and papers must not be under consideration by another journal.

This journal is published quarterly (March, June, September and December), by the Latin American Physics Education Network (LAPEN) and the Institute of Science Education. Manuscripts should be submitted to cmoral@ipn.mx or lajpe@lapen.org.mx. Further information is provided in the "Instructions to Authors" on www.lajpe.org

Direct inquiries on editorial policy and the review process to: Cesar Mora, Editor in Chief, CICATA-IPN Av. Legaria 694, Col Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, CP 11500 México D. F.

Copyright © 2011 César Eduardo Mora Ley, *Latin American Physics Education Network*. (www.lapen.org.mx)
ISSN 1870-9095

INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Ann-Marie Pendrill, Göteborgs University (Sweden)
Bayram Akarsu, Erciyes University (Turkey)
Carl Wenning, Illinois State University (USA)
Diane Grayson, Andromeda Science Education (South Africa)
David Sokoloff, University of Oregon (USA)
Dean Zollman, Kansas State University (USA)
Edward Redish, University of Maryland (USA)
Elena Sassi, University of Naples (Italy)
Freidrich Herrmann, University of Karlsruhe (Germany)
Gordon Aubrecht II, Ohio State University (USA)
Hiroshi Kawakatsu, Kagawa University (Japan)
Jorge Barojas Weber, Universidad Nacional Autónoma de México (México)
Jorge Valadares, Universidade Aberta de Lisboa, (Portugal)
Laurence Viennot, Université Paris 7 (France)
Lillian C. McDermott, University of Washington (USA)
Marisa Michelini, University of Udine (Italy)
Marco Antonio Moreira, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (Brazil)
Minella Alarcón, UNESCO (France)
Orhan Karamustafaoğlu, Amasya University, (Turkey)
Pratibha Jolly, University of Delhi (India)
Priscilla Laws, Dickinson College (USA)
Ton Ellermeijer, AMSTEL Institute University of Amsterdam (Netherlands)
Verónica Tricio, University of Burgos (Spain)
Vivien Talisayon, University of the Philippines (Philippines)

EDITORIAL BOARD

Deise Miranda, Universidade Federal do Rio de Janeiro (Brasil)
Eduardo Moltó, Instituto Superior Pedagógico José Varona (Cuba)
Eduardo Montero, Escuela Superior Politécnica del Litoral (Ecuador)
Josefina Barrera, Universidade do Estado do Amazonas (Brasil)

Julio Benegas, Universidad Nacional de San Luis (Argentina)
Leda Roldán, Universidad de Costa Rica (Costa Rica)
Celso Ladera, Universidad Simón Bolívar (Venezuela)
Manuel Reyes, Universidad Pedagógica Experimental Libertador (Venezuela)
Mauricio Pietrocola Universidad de Sao Paulo (Brasil)
Nelson Arias Ávila, Universidad Distrital, Bogotá (Colombia)
Octavio Calzadilla, Universidad de la Habana (Cuba)
Ricardo Buzzo Garrao, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
Zulma Gangoso, Universidad Nacional de Córdoba (Argentina)

EDITOR-IN-CHIEF

César Mora, Instituto Politécnico Nacional (México)

ASSOCIATED EDITOR

Josip Slisko, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (México)

LATIN AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS EDUCATION

Volume 6, Number 1, March 2012

CONTENTS/CONTENIDO

Editorial	1-2
Papers/Artículos	
Towards a Conceptual Framework for Identifying Student Difficulties with Solving Real-World Problems in Physics, Martin Niss	3-13
Constructivist approach based 5E model and usability instructional physics, İsmet Ergin	14-20
Development of Problem Solving Confidence Questionnaire: Study of Validation and Reliability, Tolga Gok	21-26
Four Pedagogic exercises, D. N. Basu	27-30
Another look at the projectile motion, Célia A. de Sousa	31-38
Dragging a string over a step, Roberto De Luca	39-42
Bowing Effect on Energy Conservation in an Incline Experiment, Chunfei Li	43-46
Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos, M. A. M. Souza, D. Bazeia, L. Losano e R. Menezes	47-54
Determining the Maximum or Minimum Impedance of a Special Parallel <i>RLC</i> Circuit without Calculus, Kenneth V. Cartwright and Edit J. Kaminsky	55-58

Heat diffusion in a homogenous slab with an arbitrary periodical heat source: The case of heat source with square wave modulation function, J. B. Rojas-Trigos and A. Calderón	59-66
Thomas rotation and Mocanu paradox – not at all paradoxical, Z. K. Silagadze	67-71
Optimising digital combinational circuit using particle swarm optimisation technique, Ushie, James Ogri, Obu Joseph Abebe Etim, Iniobong prosper	72-77
Thermodynamics of Planck Oscillator in Microcanonical Ensemble, Prabitha, V. V., Vibha, A. V., R. K. Sathish, K. M. Udayanandan	78-81
Ondas de Calor Determinación de temperaturas del pasado, Leila Iannelli, Salvador Gil	82-88
Cambios de energía en un sistema debido a la transferencia de energía por calor: Una experiencia de laboratorio, Follari, Beatriz del R.; Lambrecht, Carmen; Dima, Gilda N.; Perrotta, M. Teresa; María Eugenia Carola	89-98
Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica-Ondas de Calor, Leila Iannelli, Salvador Gil	99-105
Dificultades en la aplicación del cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas del trabajo efectuado por un gas ideal: Conceptos y teoremas en acción, Manuel Sebastian Alvarez Alvarado	106-115
Introducción al formalismo gauge con ligaduras en los casos clásico y cuántico, Rafael Andrés Alemañ Berenguer	116-127
Dinámica clásica y cuántica de una partícula cargada en un campo magnetostático uniforme, Tonatiuh Miramontes Pérez, Victor David Granados García	128-136

Un análisis profundo del fenómeno dualidad onda partícula para la comprensión del mundo cuántico, Aarón Segura, Viviana Nieto y Esteban Segura	137-142
Aprendizaje activo de la física en alumnos de nivel secundario: Pre test de laboratorio sobre transformación de energía eléctrica en térmica, Dima, Gilda;Girelli, Marina; Reynoso Savio, María Fernanda	143-147
Uso de técnicas digitales para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos, Pablo Nuñez, Néstor Olivieri, María Llera y Eduardo E. Rodríguez	148-154
Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura, Manuel Sebastian Alvarez Alvarado	155-161
Characterisation of Cerium-Doped Lanthanum Bromide Scintillation Detector, Etim Iniobong Prosper, Obu Joseph Abebe, Ushie James Ogri	162-172
ANNOUNCEMENTS/ANUNCIOS	173-174

It is a pleasure to publish a new issue of LAJPE where we find interesting articles about research in Physics Education and several topics of theoretical and applied Physics. We thank for contributions of colleagues from Argentina, Bahamas, Brazil, Colombia, Denmark, Ecuador, Ethiopia, India, Italy, Mexico, Nigeria, Portugal, Russia, Spain, Turkey and USA. The presence of LAJPE in the World each time is biggest; therefore we are happy because the great number of contributions from developing countries. One of our aims is become a real support to Physics teachers in all educative levels, in this sense we are in the right way. But we need a lot of work of the educators and researchers, it is very important to share experiences and projects results from different culture, countries and educational systems. What we can expect from an on-line journal of Physics Education? In the editorial team perspective, we can say that meeting proceedings peer reviewed are very important. Also, the special issues devoted to specific topics and the regular are required. More citation in the research papers and books on Physics Education should be done, and then LAJPE papers should be mentioned in traditional and prestigious journals as *American Journal of Physics*, *The Physics Teacher*, *European Journal of Physics*, *Physics Education*, *Physics Review Special Topics*, *Physics Education Research*, *Brazilian Journal of Physics Education*, *Revista Mexicana de Enseñanza de la Física*, between others. Even in recent journals like the *European Journal of Physics Education* and the *Euro-Asian Journal of Physics and Chemistry Education*, for instance. On the other hand, also is important the LAJPE presence in journals on Science Education and related topics, because all citation can contribute for a better editorial reputation and to improve the image of the Physics Education as a science, further as a part of the Physics.

In the name of the editorial team we want to thank all our collaborators because your effort and for trust on us.

César Mora
Editor in Chief

Es un placer publicar un nuevo número de LAJPE en donde encontrarán artículos interesantes sobre investigación en Educación en Física y varios temas de Física Teórica y Aplicada. Agradecemos las contribuciones de los colegas de Argentina, Bahamas, Brasil, Colombia, Dinamarca, Ecuador, Etiopía, India, Italia, México, Nigeria, Portugal, Rusia, España, Turquía y los EE.UU. La presencia de LAJPE en el mundo cada vez es mayor, por lo que estamos contentos por el gran número de contribuciones de países en desarrollo. Uno de nuestros objetivos es convertirnos en un verdadero apoyo para profesores de Física en todos los niveles educativos, en este sentido estamos en el camino correcto. Pero necesitamos mucho trabajo de parte de educadores e investigadores, es muy importante compartir experiencias y resultados de proyectos de diferentes culturas, países y sistemas educativos. ¿Qué podemos esperar de una revista en línea de Educación en Física? En la perspectiva del equipo editorial, podemos decir que las actas de congresos revisadas por pares son muy importantes. Además, se requieren de números especiales dedicados a temas específicos y así como los números regulares. Se debe hacer más citas en trabajos de investigación y libros sobre Educación en Física, esto es, los artículos LAJPE deben ser mencionados en revistas tradicionales y prestigiosas tales como el *American Journal of Physics*, *The Physics Teacher*, *Revista Europea de Física*, *Educación Física*, *Física de Revisión Física Temas Especiales Investigación de la Educación*, *Revista Brasileña de Enseñanza de la Física*, *Revista Mexicana de Enseñanza de la Física*, entre otras. Incluso en revistas recientes tales como el *European Journal of Physics Education* y el *Euro-Asian Journal of Physics and Chemistry Education*, por ejemplo. Por otro lado, también es importante la presencia de LAJPE en revistas de Educación en Ciencias y de otros temas relacionados, porque todas las citas pueden contribuir de una mejor reputación editorial y para mejorar la imagen de la Educación en Física como una ciencia, más aún como una parte de la Física.

A nombre del equipo editorial queremos agradecer a todos nuestros colaboradores por su esfuerzo y la confianza puesta en nosotros.

César Mora

Editor en jefe

Towards a conceptual framework for identifying student difficulties with solving Real-World Problems in Physics



Martin Niss

IMFUFA, Department of Sciences, Roskilde University, Universitetsvej 1, 4000 Roskilde, Denmark.

E-mail: maniss@ruc.dk

(Received 27 January 2012, accepted 22 March 2012)

Abstract

This paper develops a conceptual framework for identifying the challenges and obstacles university students encounter when solving real-world problems involving Physics. The framework is based on viewing problem solving as a modelling process. In order to solve a real-world problem, the problem solver has to go through the steps and do the tasks of such a process. The paper presents a theoretical analysis of what it takes to solve three real-world problems, demonstrating how the framework presented captures the essential aspects of solving them. Moreover, it is argued that three steps critical for real-world problem solving – initial analysis of the problem situation, choice of relevant physical theory (the so-called paradigmatic choice) and mathematization – are not covered by existing models of problem solving in Physics. Finally, the existing research on student difficulties with problem solving in Physics is placed within the framework.

Keywords: Problem solving, real-world problems, university level.

Resumen

Este artículo desarrolla un marco conceptual para identificar los retos y obstáculos que los estudiantes universitarios encuentran en la resolución de problemas reales relacionados con la física. El marco está basado en la visualización de la solución de problemas como un proceso de modelado. Con el fin de resolver un problema del mundo-real, el solucionador de problemas tiene que pasar por los pasos y hacer las tareas de dicho proceso. El documento presenta un análisis teórico de lo que se necesita para resolver los tres problemas del mundo-real, demostrando cómo el marco que se presenta recoge los aspectos esenciales de su solución. Por otra parte, se argumenta que los tres pasos críticos para la resolución de problemas del mundo-real - análisis inicial de la situación del problema, la elección de la teoría de los aspectos físicos (la elección paradigmática llamada) y la matematización - no están cubiertos por los modelos existentes de resolución de problemas en física. Por último, la investigación existente sobre dificultades de los alumnos con la resolución de problemas en física se coloca en el marco.

Palabras clave: Resolución de problemas, problemas del mundo-real, nivel universitario.

PACS: 01.04. Fk, 01.40.E-, 01.40.ek

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

A major goal of Physics Education is to develop student competency in solving real-world problems using the concepts and theories of Physics. Since the 1960s, Physics educators and researchers have lamented that the type of problems so predominantly used in Physics education that they are called standard problems [1] are cleaned-up versions of real-world problems with much of the physical reasoning already done for the students due to the very formulation of the problems [2, 3, 4, 5]. Fig. 1 shows a typical example of a standard problem. In order to allow students to develop a broader problem-solving competency, other types of problems have been proposed [2, 3, 5, 6, 7].

As these problems supposedly simulate problems found in the real world, they are often called real-world problems.

The process of solving standard problems has been studied extensively, but only a few studies exist on the challenges and difficulties students encounter when solving real-world problems. In their study of high school students solving astronomy problems, Shin, Jonassen and McGee [8] concluded that solving both well- and ill-defined problems required domain-specific knowledge, but ill-defined problems in unfamiliar contexts also required planning and monitoring skills. Fortus [9] investigated the approaches of individuals with different physics backgrounds to both well-defined and real-world problems. He found that the skills needed to solve a well-

A pendulum consists of a small ball attached to one end of a light string of length L . The other end of the string is attached to hook fastened to the ceiling. A fixed peg is located vertically below the hook at a distance smaller than L . The ball is initially held at rest, with string taut and horizontal, and is then released. What must be the minimum distance between the hook and the peg so that the string is still taut when the ball reaches a point directly above the peg?

FIGURE 1. A standard problem: The pendulum problem.

defined problem in the domain of Newtonian mechanics were not sufficient to solve a real-world problem in the same domain that required making assumptions. Moreover, Fortus' results indicate that the step in the problem solving process causing most difficulties for the subjects studied was making reasonable assumptions concerning the problem.

Hence, real-world problems seem to present other difficulties for the problem solver than standard problems do. Unfortunately, we do not know much about what challenges and obstacles students encounter when solving real-world problems. The present paper is part of a general research program that aims at remedy this situation by identifying and characterizing these difficulties for problems posed by others and whose solutions require the use of Physics. This paper develops a conceptual framework that can be used in this endeavor.

A research framework is, 'a basic structure of the ideas (*i.e.* abstractions and relationships) that serve as the basis for a phenomenon that is to be investigated' [10, p. 458]. It provides a structure that can be used for conceptualizing and designing empirical research studies, allows sense making of data, and enables us to go beyond common sense. Lester distinguishes between different kinds of research frameworks. A theoretical framework guides research activities with reference to formal theory, *i.e.* a theory that has been developed by using an established, coherent explanation of certain sorts of phenomena and relationships, *e.g.* Piaget's theory of cognitive development. In contrast, *conceptual frameworks*, such as the one presented here, are put together from a number of sources, including various theories and aspects of practitioner knowledge. A conceptual framework is, 'an argument that the concepts chosen for investigation, and any anticipated relationships among them will be appropriate and useful given the research under investigation' [10, p. 460] and its aim is to contribute to both fundamental understanding and the development of teaching.

In order to obtain such a framework for the present purpose, we need a detailed description of the problem solving process. For standard problems, several such models exist [11, 12, 13, 14, 15], but none of them focuses on the solving of real-world problems. Hence, the aim in this paper is to answer the following research questions:

What stages are involved in solving real-world Physics problems? What are the tasks at each stage?

A systematic and sufficiently detailed description of these stages and tasks would give us an account of the challenges that solving a real-world problem poses for students. Whether these challenges are in fact *obstacles* for the students is a question that will be studied empirically in subsequent papers.

The research question is investigated theoretically by solving the three real-world problems presented in Fig. 2 and by analyzing the stages and tasks involved in the solutions. In order to systematically identify the stages and tasks required in the problem solving process, the problem solving process is seen as a modelling process, where the solution to a problem is obtained via a mathematical model that is either constructed for the purpose or selected from the physicists' arsenal of models. This perspective allows us to draw on the research on modelling in Physics Education, in particular the work of Hestenes and Halloun. The justification of the framework is based on a theoretical argument that the model actually captures the essential steps in solving the three problems.

II. STANDARD AND REAL-WORLD PROBLEMS

Standard problems can be characterized as follows [1]: A situation is described for which certain information is provided, typically as numerical values for the variables of the situation. The job of the problem solver is to determine the value of one of the other variables of the situation.

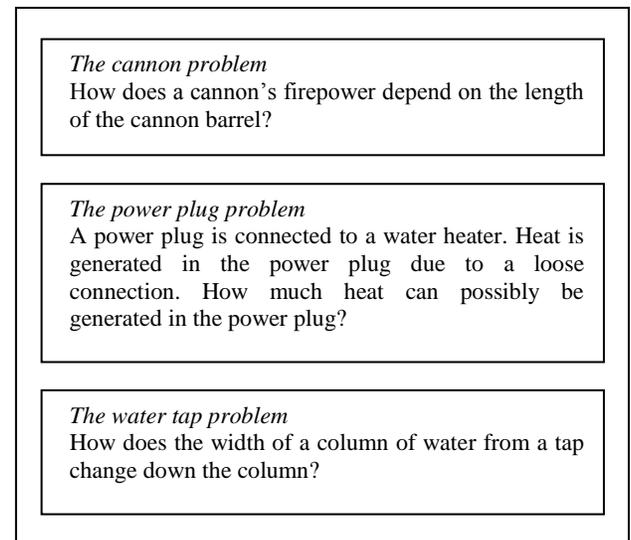


FIGURE 2. The real world problems considered in the paper. The cannon problem is taken from Højgaard Jensen (2003), the power plug problem from Højgaard Jensen (2004) and the water tap problem is an unpublished exam problem posed by Jens Højgaard Jensen.

Moreover, the problems are well-defined with the sought-after variable explicitly stated and only relevant variables appear in the problem statement.

To what extent are the so-called 'real-world problems' in the Physics Education literature (see, *e.g.* the problems in [4, 9]) related to problems found in real-world situations? On the one hand, the problems have some artificial features. For example, they are not set by the problem solvers themselves but by others, *e.g.* the teacher. This means that the problem framing stage of the problem solving process that some researchers emphasize as important in real-world problem solving (see, *e.g.* [18]) has already been done when the problem is presented to the solver. Consequently, 'real-world tasks' would perhaps be a more accurate name than 'real world problems,' but since the latter is used in the literature, it will also be used here. In addition, as the problems are set in a school context, they carry some connotations with them. Students can safely assume that the Physics of the problems has been covered in the classroom, that they can in fact be solved and that this can be done within a reasonable amount of time, etc. On the other hand, the problems also simulate aspects of problems in the real world. First, they refer to an authentic context: (A) The event described has taken place or has a fair chance of taking place; (B) the question posed in the task might actually be asked in the real-life event; (C) the data/information given in the problem is realistic in terms of the problem; and (D) the solution is consistent with what is regarded as an appropriate solution in the corresponding out-of-school situation.¹ Many standard problems do not fulfill points (A) and (B), *e.g.* who would like to know the answer to the problem in Fig. 1? Second, the steps required to solve the real-world problems correspond to those of solving a real-world task (except, of course, for the problem framing). More precisely, for a real-world problem the problem solver must make several decisions about (1) which specific variable(s) would be useful to answer the question; (2) which Physics concepts and principles could be applied to determine that variable; (3) what information would be needed; and (4) where or how that information could be obtained or estimated [2, 3, 20]. Moreover, the problem solver needs to make assumptions, approximations and idealizations of the problem situation [2, 9, 21, 22]. In contrast, standard problems do not require that the solver performs all or even most of these steps.

The three problems discussed in the present paper are formulated in everyday language; the situations described belong to the real world rather than an artificial physics world; their questions might actually be posed in the real-world situation, and their solutions require the application of Physics.

¹ This is an adaptation of a framework proposed by Palm [19] for describing the concordance between word problems in mathematics education and tasks in the real world beyond the mathematics classroom.

III. THE EXISTING MODELS OF THE PROBLEM SOLVING PROCESS

Several models of the problem solving process in Physics exist. One dominant model is that of Reif and colleagues [11, 12, 21] which concerns effective human problem solving in general. The procedures contained in their model should be used in conjunction with a domain-specific knowledge base, such as mechanics. The model, as expounded in [12], divides problem solving into four stages:

1. Problem description and analysis;
2. Construction of a solution to the problem;
3. Assessing the solution; and
4. Exploiting the solution

The knowledge base which is specific to the problem domain in question facilitates these stages. It contains declarative knowledge of concepts and principles as well as specific procedures facilitating their use.

In the first stage, the original problem is redescribed in a way that facilitates the subsequent search for its solution, including identifying and organizing relevant knowledge and describing it in convenient symbolic form. The resulting problem description assists the construction of the solution by limiting the domain of search and by allowing a ready application of the problem solver's knowledge base. Reif and Heller subdivide this stage into two fairly distinct stages. The one sub-stage, which we will call 1A, is where everyday knowledge is used to generate a basic description readily interpretable by the problem solver. The aim of this description is merely to translate the original problem into a form clearly describing the situation specified and the information to be found. This includes using diagrams and/or statements to describe the specified situation about the system and its properties, introducing convenient symbols, and identifying those denoting unknown values. The other sub-stage, which we will call 1B, is where the problem solver uses his/her specialized knowledge about the domain in question. This leads to a theoretical problem description in which the problem is described in terms of the concepts of the particular domain. This means that the entire body of theoretical knowledge about this domain is accessible when the solution of the problem is implemented. The theoretical analysis of a problem is usually followed by a qualitative analysis of the problem in which the main implications of applicable principles are explored qualitatively. Such an analysis may facilitate the subsequent solution by suggesting possible approaches and by helping to interpret physically the results of the mathematical analysis. When substage 1A and 1B is completed, the way is paved for the actual construction of the solution. Here, Reif and Heller focus mainly on generally applicable methods, such as constraint satisfaction. After a solution is constructed, how satisfactory it actually is in terms of *e.g.* completeness and internal consistency is assessed.

To solve a real-world problem, the problem solver has to go through the Reif and Heller's four stages listed above.

Sub-stages 1A and 1B play a particularly important role when solving real-world problems because these two steps take the problem from the real-world situation and put it into the realm of Physics. However, as will be argued below, their model, which in principle is applicable to all types of problem solving, is too general and simple to capture the complexity of translating a real-world problem into Physics.

Two recent models of the problem solving process, one developed in [14, 15], and the other in [13], modify the model by Reif and colleagues. These two models focus greatly on the role of Physics knowledge in the problem solving process, but neither of them is designed to characterize the possible challenges and obstacles students encounter due to the real-world aspect of the problem solving.

IV. MODELLING IN PHYSICS

Seeing problem solving as a modelling process allows us to focus particularly on the translation from the real world

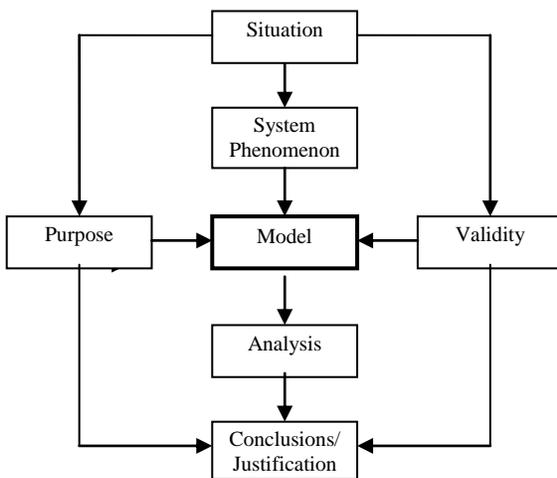


FIGURE 3. Modelling in Physics according to Hestenes (1995).

to the physical world. According to Hestenes [24], modelling in Physics typically begins with a real-world situation. Then the following steps are taken:

A. The system to be modelled is *identified* along with its relevant properties (identification of variables). This leads to the construction of a system schema and the selection of property descriptors.

B. A *model* is then constructed or selected and adapted from a collection of available models. The intended use or purpose greatly influences this step and a variety of purposes govern variations of the modelling process.

C. Empirical determination of the model's *validity* is obtained by comparing the model with the system in the original situation. This can involve designing and performing an experiment or simply checking the answer to a problem.

D. The previous step provides *justification* for the conclusions about the system and the situation which are drawn from the model.

E. In order to extract conclusions from the model, an analysis of the behavior of the model is required.

The model deployment scheme described in Fig. 4 shows that Halloun [25] builds on Hestenes' ideas, though some of the stages are reformulated and several new ones added. As will be argued below, the most important additional stages for the purpose of this article is the stage 'Paradigmatic choice: What theory? What model(s)?', which Halloun describes as follows, 'The problem solution would begin with the choice of an appropriate theory within the context of a specific scientific paradigm (e.g. the choice of Newton theory, Euler theory, or Hamilton-Jacobi theory for classical mechanics situations), followed by the choice of appropriate models' [25, p. 150-151]. Two distinct stages are involved in Halloun's paradigmatic choice. In the first stage, the overall theory is chosen and the appropriate model is chosen subsequently. The latter stage involves choosing an appropriate principle, e.g. conservation of energy, within the theory. Since these two stages may cause different difficulties for the students, we consider them to be separate steps and call them the 'paradigmatic choice' and the 'principle and concept choice,' respectively.

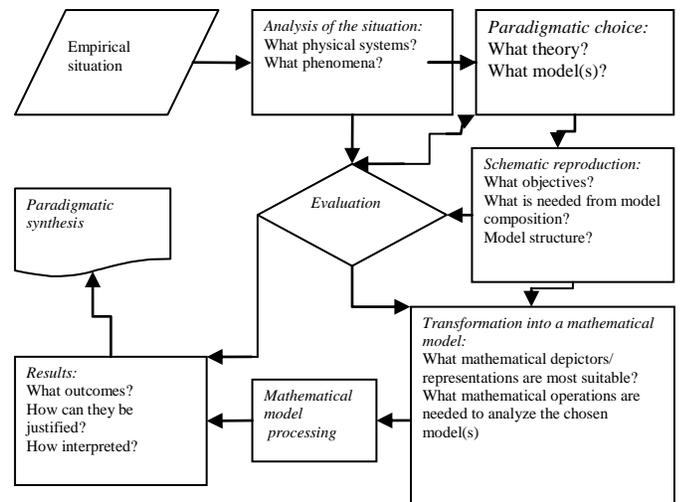


FIGURE 4. Model deployment according to Halloun (2004).

V. THREE EXAMPLES

To assist and illuminate our analysis, we consider solutions to three specific, real-world problems.

A. The power plug problem

The power plug problem can be solved using the following steps [17]:

1. A loose connection is a point in an electric circuit where the metal on one side of the connection is not in complete contact with the metal on the other side, effectively

reducing the cross-sectional area of the wire at the joint. Consequently, higher than normal resistance occurs at the joint, thus, causing it to heat up. For our purpose, the effect of the loose connection is for it to act as a resistor, so that when a current flows through the resistor, heat is generated. The heating of the loose connection must be equal to the power generated by the flow of the current through the resistor. Similarly, we can represent the effect of the water heater on the system using a resistor. Regarding the position of the resistors, it is natural to assume that the loose connection resistor is connected in series with the water heater, which is an external component. The role of the water heater is to affect the voltage drop over the former, since they are placed in a series.

2. We now have a physical model describing what is happening. It follows from the previous considerations that the relevant physical theory is electric circuit theory.

3. Within this theory, Joule's law can be used to calculate the heat generated due to the current flowing through a conductor or, equivalently, the power dissipated in a resistance. Moreover, we know that the current through a series of resistors is the same for each resistor.

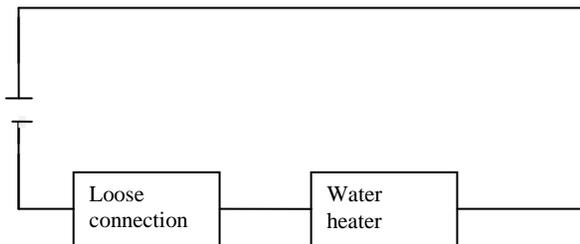


FIGURE 5. Electric diagram for the power plug problem.

4. These physical ideas can be turned into a mathematical model. First, we have to describe the situation in mathematical terms. We denote the resistance of the loose connection by R_l , and the current through it, I . Then we use Joule's law to calculate the power dissipated in the loose connection:

$$W_l = R_l I^2. \quad (1)$$

This does not solve the problem, because we want to reduce W_l to known quantities and I is unknown, while the mains voltage is assumed to be known, namely 220V, 110V, or whatever is the value in the country of residence. One might be tempted to simply use Ohm's law for voltage, $V=RI$ with R and V over the loose connection to eliminate I , but that does not work because we do not know the voltage over the loose connection. We call the resistance of the water heater R_h . Noting that for a series of resistors, the current through them is the same we thus replace the above with:

$$W_l = \frac{R_l V^2}{(R_h + R_l)^2}. \quad (2)$$

5. We now want to find for what values of R_l , W_l attains its maximum value. Thus we find the derivative with respect to R_l is given by:

$$\frac{dW_l}{dR_l} = V^2 \frac{(R_h + R_l - 2R_l)}{(R_h + R_l)^2}. \quad (3)$$

The power plug attains the maximum heating for the values of R_l when this is equal to 0. This happens when $R_l = R_h$.

6. Hence, we obtain:

$$W_{l,\max} = R_h \frac{V^2}{(R_h + R_h)} = \frac{1}{4} \frac{V^2}{R_h}. \quad (4)$$

7. The power delivered to the water heater W_h is V^2/R_h so the maximum loss is proportional to this power, which seems reasonable.

8. We can rewrite the maximum loss to get:

$$W_{l,\max} = \frac{1}{4} W_h. \quad (5)$$

Hence, the worst case scenario is that a fourth of the dimensioned power of the water heater is lost as heat due to the loose connection.

B. The cannon problem

The cannon problem can be solved as follows [16]:

1. The cannon's firepower is a measure of the destructiveness of its projectiles. We define the firepower to be the kinetic energy of the projectile when it leaves the barrel muzzle (we could also have chosen the muzzle speed). The ignition of the cannon gun powder causes an explosion in the cannon that expands the air below the projectile, which propels the projectile until the air fills the entire volume of the barrel.

2. The explosion and expansion of the gas in the cannon can be described with thermodynamics, while mechanics is appropriate for the motion of the projectile in the barrel.

3. We can use thermodynamics to calculate the work done by the expanding gas on the projectile during its motion through the barrel. Using the work theorem of mechanics we can relate this work to the kinetic energy. We furthermore have to make an assumption about the expansion process. We will assume that the explosion occurs without an exchange of heat between the gas and the barrel, *i.e.* it is an adiabatic expansion, but other reasonable assumptions could have been made as well.

4. Let V_0 be the small volume behind the projectile and V_L the volume of the barrel. Let P_0 and P be the pressures of the gas right after the explosion and during the expansion, respectively. We assume that the barrel is a cylinder and let L_0 denote the length of the barrel corresponding to the

initial volume V_0 and L the entire length of the barrel. Since we assume that it is an adiabatic process, we know that the pressure during the expansion is:

$$PV^\gamma = P_0V_0^\gamma. \quad (6)$$

Here γ is a characteristic constant of the gas.

The work done on the projectile is

$$W = \int_{V_0}^{V_L} PdV. \quad (7)$$

According to the work theorem, the kinetic energy gained by the projectile in the barrel is:

$$W = \Delta K. \quad (8)$$

Since the projectile is initially at rest ΔK is equal to the kinetic energy of the projectile when it leaves the cannon muzzle; this implies that the firepower is equal to W .

5. Evaluating the integral in Eq. 7, we get an expression for the work:

$$W = V_0^\gamma P_0 \int_{V_0}^{V_L} V^{-\gamma} dV = \frac{V_0^\gamma P_0}{\gamma - 1} \left(\frac{1}{V_0^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_L^{\gamma-1}} \right). \quad (9)$$

This can be rewritten in terms of the barrel length, using the assumption that it is a cylinder:

$$W = \frac{V_0 P_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (10)$$

6. For the firepower we obtain:

$$K = \frac{V_0 P_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\gamma-1} \right) = U_0 \left(1 - \left(\frac{L_0}{L} \right)^{\gamma-1} \right). \quad (11)$$

7. Here $\frac{V_0 P_0}{\gamma - 1}$ is identified as the internal energy of the gas

after the explosion U_0 . Hence, the firepower is equal to U_0 when the barrel length is long. This seems reasonable because in that case all the energy released by the explosion should be transferred to the projectile as none of it is lost to the surroundings as gas expansion.

8. The cannon's firepower dependence on the length is given by Eq. (11).

C. The water tap problem

The water tap problem can be solved in the following way:

1. We assume first that the column has a circular cross-section. The width of the column is then the diameter of this cross-section. The water leaves the tap with a certain flow rate. We assume that in a horizontal section of the water column, the water has a uniform flow rate. Gravity causes the water to accelerate as it falls, thus increasing the

flow rate as we go down along the column. Furthermore, we assume that the horizontal shape of the water column does not change.

2. Since this problem involves the flow of water, fluid dynamics can obviously be applied.

3. In order to apply these ideas, we need to make some choices. We neglect turbulence and assume that the flow is laminar. Since we assume a uniform flow rate through a horizontal cross-section, we get a continuity equation. Moreover, we assume that the viscosity can be neglected, so that Bernoulli's equation (a way of taking energy conservation into account) can be applied to the situation. Furthermore, we assume that the pressure down the water column is constant.

4. These ideas can be turned into a mathematical model. Let the tap be placed at the height h_0 above the sink and let it have a circular cross-sectional area of A_0 . We denote by v_0 the flow rate of the water leaving the tap. Bernoulli's

equation states that the quantity $\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh + p$, where v is the velocity; ρ is the water density; g is the gravitational acceleration; and h is the height above the sink, is constant down along the water column. In particular, the equation for what occurs just after the water has left the tap is:

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho gh_0 + p = \text{const.} \quad (12)$$

The atmospheric pressure has a constant value, p . So:

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho gh + p = \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho gh_0 + p. \quad (13)$$

The continuity equation gives that the cross-sectional area A times the flow rate v is constant down the column:

$$A \cdot v = \text{const.} \quad (14)$$

In particular, at the tap we get:

$$A_0 \cdot v_0 = \text{const.} \quad (15)$$

Hence:

$$A \cdot v = A_0 \cdot v_0. \quad (16)$$

The horizontal cross-section is circular, so $A = \pi d^2$ with d being the diameter.

5. These equations can be analyzed mathematically. Bernoulli's equation implies that:

$$v^2 - v_0^2 = 2g(h_0 - h). \quad (17)$$

Hence:

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h) + v_0^2}. \quad (18)$$

Combining this equation with the continuity equation yields:

$$A = \frac{A_0 \cdot v_0}{v} = \frac{A_0 \cdot v_0}{\sqrt{2g(h_0 - h) + v_0^2}}. \quad (19)$$

We then use that the cross-sectional area of the water is circular, so $d = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$.

6. We find that the width, *i.e.* the diameter, changes with height as

$$d = \frac{\sqrt{A_0 \cdot v_0}}{\sqrt{\pi} (2g(h_0 - h) + v_0^2)^{1/4}}. \quad (20)$$

Here v_0 , A_0 , and h_0 are constants of the system.

7. We find that the column gets thinner as we go down the column, a result that we should expect from our real world experience.

8. We get that the width changes with height according to Eq. (20).

VI. PROBLEM SOLVING AS MODELLING

It is evident that solving these three problems requires executing the actions that researchers see as characteristic of real world problem solving: the problem solver has to make the decisions, assumptions, approximations and idealization that are relevant for the problems.

Hestenes' and Halloun's diagrams of modelling in Physics can be adapted to model the process of solving real-world problems. Hestenes' diagram forms the backbone, but in modified form. First of all, Halloun's 'paradigmatic choice' is relevant for the problem solving process and some of Halloun's titles are more indicative than Hestenes', so they have also been chosen. On the other hand, two of Halloun's boxes, 'Schematic reproduction' and 'Paradigmatic synthesis,' represent unnecessary complications for the present purpose and are consequently left out here. All this leads to the diagram in Fig. 6, which shows the problem solving process.

The process begins with a real-world situation in which some problem is formulated. As this is typically not formulated in Physics terms, the problem needs to be put into a form that is amenable to investigation using Physics. To do so, making an initial *analysis of the situation* is necessary. The aim of this step is the identification of the physical system and the phenomenon that are to be modelled. This is done by identifying the relevant features of reality, selecting the objects, relations and so on that are relevant for the modelling. This process is typically based on specialized knowledge about the domain as well as physical knowledge. In this process the system is delineated from the context and some idealizations are done, explicitly or implicitly.

For the power plug problem and the cannon problem, this initial analysis is the first step. For the power plug case,

the analysis has three parts. First, the effect of the loose connection on the situation can be represented by an electrical resistor and this resistor should be placed in a series with the water heater. Second, the water heater does in fact play a role because it affects the current going

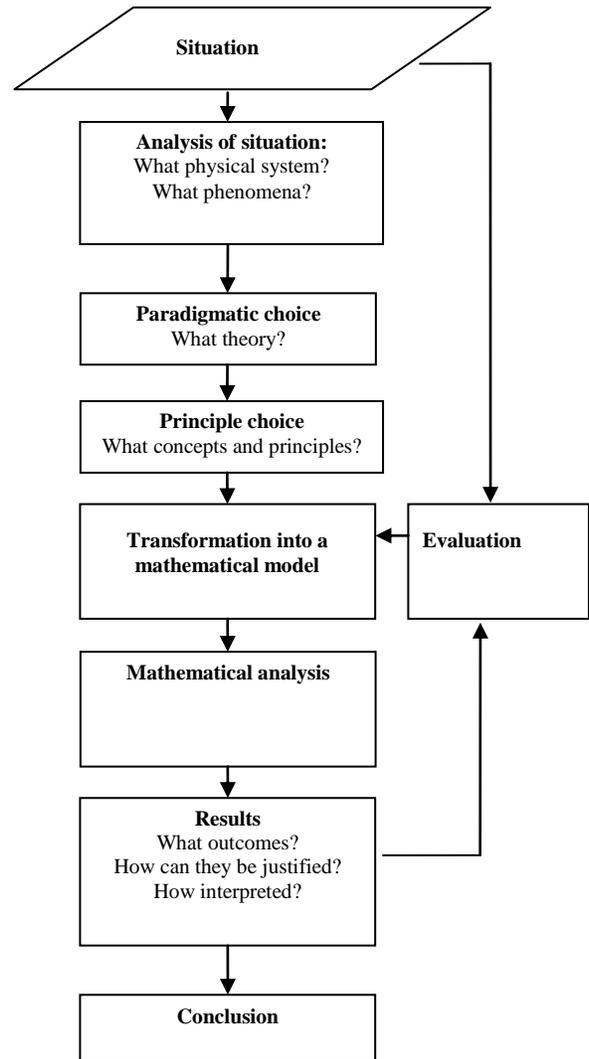


FIGURE 6. Problem solving as modelling.

through the loose connection. Third, the problem solver needs to identify relevant theoretical or special knowledge, *e.g.* that the heating is equivalent to the power generated by the current flowing through the resistor. The cannon problem requires an analysis of how the everyday notion of firepower should be interpreted in physical terms as kinetic energy (or perhaps as the muzzle speed) of the projectile. Moreover, it should be realized that the explosion of the gun powder propels the projectile.

In the next step, the machinery of Physics is brought to bear on the delineated system. This requires that the problem solver makes a *paradigmatic choice* of appropriate physical theory. This means choosing a way of seeing the

problem in physical terms and this choice subsequently affects how the problem is approached.

For the three problems, the paradigmatic choice is done in step 2. For the power plug problem and the water tap problem, this choice follows immediately from the initial analysis. For the cannon problem, however, the solver needs to find a strategy for determining the muzzle speed of the projectile. Which physical discipline would solve the problem? One might think that the problem could be attacked by purely mechanical means, for instance, by making a more or less ad hoc assumption about the acceleration of the projectile in the barrel. A more satisfactory solution, along the above lines (several other reasonable solutions with other types of expansion of the gas are possible), requires a certain realization on the part of the problem solver, namely that the solution to the problem involves a combination of a mechanical view point and a thermodynamic one. This requires the combination of two physical disciplines.

When the physical theory has been chosen, the solver has to choose a *physical principle* within this theory. This corresponds to step 3 for the three problems. In the power plug problem, the solver needs to realize both that Joule's law can be used to find the heat generated by the current flowing through a conductor as well as that the current through a series of resistors is the same for each resistor. The cannon problem requires that the solver realizes that the thermodynamic work can be used to obtain the mechanical kinetic energy. In the water tap problem, Bernoulli's equation or another version of energy conservation as well as the continuity equation are the basis of the solution to the problem.

The choices of paradigm and physical principle should lead to a physical model of the phenomenon in question. The physical model obtained can then be *transformed into a mathematical model*. Hestenes and Halloun do not provide many details about this stage, so it is necessary to extend their description. The setting up of the mathematical model requires a mathematization, *i.e.* a translation of the physical structure into a mathematical structure. This involves a description of the situation in mathematical terms (the volumes, pressures, lengths, etc.) as well as writing the mathematical equations described in the paradigmatic choice. During this stage, the abstract laws and principles, often mathematically formulated, are applied to the specific situation by an identification of the general mathematical structure of the situation. Thomas Kuhn's [26] discussion of Newton's second law can serve as an example. This law, Kuhn writes, is usually formulated as $f=ma$. In order to apply it, the solver needs to adapt it to the situation. For the free-fall, the laws reads: $mg = m \frac{d^2s}{dt^2}$; for the simple pendulum, it is transformed to: $mg \sin \theta = -ml \frac{d^2\theta}{dt^2}$; for a pair of coupled harmonic oscillators, it becomes two equations, the first being: $m_1 \frac{d^2s}{dt^2} + k_1s_1 = k_2(d + s_2 - s_1)$, etc. In all these situations, the problem solver has to identify the

relevant mathematical quantity, whether it is the height above the Earth, the angle, or the position along a pendulum trajectory of the object.

This is stage 4 for the three examples. The power plug problem requires that the solver realizes which variable will solve the problem and which are unknown. Moreover it is important to realize that Ohm's law for the voltage, $V=RI$ with R and V over the loose connection to eliminate I , do not work because we do not know the voltage over the loose connection. We call the resistance of the water heater R_h . In order to solve the cannon problem, the solver has to realize that the barrel length is related to barrel volume. The mathematization process for the water tap problem is quite involved. In order to apply Bernoulli's equation and the continuity equation, a mathematical preparation of the situation is needed that specifies the parameters that can describe the shape of the water and the flow of the water.

The model resulting from the previous deliberations can be *analyzed mathematically* using mathematical methods to obtain mathematical results and conclusions. These methods can be either analytical or numerical, *i.e.* they can involve the use of a calculator or a computer.

This is stage 5. For the power plug, it consists in finding a maximum of the equations, while an integral must be evaluated for the cannon problem. For the water tap, the equations must be manipulated to give the right answer.

The mathematical analysis leads to *results* for the behavior of the model. For the power plug problem and the cannon problem, this is stage 6.

The entire process is *evaluated* during the process with respect both to the original purpose as well as validity. The purpose largely governs the modelling process. The level of detail in the model is, for instance, governed by the purpose. Sometimes only a crude model is needed, while at other times a more elaborate model is relevant. The model furthermore needs to be valid; this is achieved by comparing the model with the system in the original situation.

For the power plug problem, it is reasonable that the value is proportional to the power of the water heater, while the result for the cannon problem is studied in a limit.

Finally, a *conclusion* about the real-world situation is drawn based on the obtained results.

VII. DISCUSSION

By seeing problem solving in Physics as a modelling process, the proposed framework is based on a systemic modelling of the challenges encountered by students solving real-world problems.

It is evident that the model indeed captures the stages of the process of solving the three example problems provided. Since there is nothing special about these three problems, it is reasonable to assume that the model captures the process of solving real-world problems more generally. Moreover, the model allows a focus on aspects of special importance for real-world problems that are rarely covered by previous models. For all three problems, the initial

analysis of the situation clearly plays an important role in the process of solving them. This is particularly true for the power plug problem, where, for example, this analysis is crucial and it is not all trivial to determine the relevant aspects of the loose connection. This aspect is much less present in the pendulum problem in Fig. 1, as illustrated by Reif and Heller's (1982) four-stage model analysis of the problem solving process. A basic description can immediately be given with diagrams and symbols and the goal stated as the determination of the value of parameter. Subsequently, a theoretical description could be provided. In contrast, in the real-world problem, considerations concerning how to prepare the situation to set up the theoretical description are required.

Another special feature of the present description of the problem solving process compared to previous approaches is the paradigmatic choice. For standard problems in Physics, the paradigmatic choice is of little importance as the problems have been prepared in such a way that it is rarely unclear which physical theory applies to the problem. Most Physics students are probably undoubtedly aware that the solution to the pendulum problem in Fig. 1 requires mechanics. This may not be the case for real-world problems as is particularly evident with the cannon problem. This problem requires an initial analysis of how the everyday notion of firepower should be interpreted in physical terms as kinetic energy (or perhaps as the muzzle speed) of the projectile. Here the problem solver needs to decide which physical discipline would solve the problem. One might think that the problem could be attacked by purely mechanical means, for instance, by making a more or less ad hoc assumption about the acceleration of the projectile in the barrel. A more satisfactory solution, along the above lines (several other reasonable solutions with other types of expansion of the gas are possible), requires a certain realization on the part of the problem solver, namely that the solution to the problem involves a combination of a mechanical view point *and* a thermodynamic one. This requires the combination of two physical disciplines. It thus requires that the solver is capable of realizing that the thermodynamic work can be used to obtain the mechanical kinetic energy.

The third aspect that is taken into account in the present model of the problem solving process is the mathematization process. The setting up of the mathematical model requires mathematization, *i.e.* a translation of the physical structure into a mathematical structure. This involves a description of the situation in mathematical terms as well as applying the Physics principle to the situation. Standard problems have typically been translated into mathematical language, which is not the case for real-world problems. For the power plug problem, we arrive at Eq. 1 when the mathematization is complete. Physical insight is required to realize that this equation is not sufficient. I is not an independent variable and focusing on V is preferable. At this point the water heater is taken into account to get Eq. 2.

Previous research on student difficulties with problem solving can be incorporated into the framework presented

here. The initial analysis of the situation involves what might be called a framing of the problem situation (see [27]), *i.e.* the determination of a certain perspective that guides the problem solver's interpretation of the situation. The framing of the situation constitutes a fundamental understanding of the situation. Based on established theories as well as more informal Physics, the framing includes a selection of the situation's relevant features as well as cutting out of irrelevant features. Sometimes this is based on more or less formal Physics ideas about what is going on and sometimes assumptions, *i.e.* 'less-than-fully established propositions that are used as a basis for continuing a problem solving process' [9, p. 87]. The framing is often a prerequisite for deciding which specific variables would be useful to answer the problem and what Physics concepts and principles could be applied to determine that variable. In the case of the power plug, *e.g.* the framing consists in pointing out that the loose connection can be represented as an electrical resistor with a certain constant resistance. This framing defines a certain perspective on the situation, which is particularly important for real-world problems as they are not prepared in advance.

Fortus [9] stresses that making assumptions is crucial when transforming a real-world problem into a well-defined question. He finds that two types of assumptions are involved: (a) assumptions about the Physics variables and the principles involved in the problem; and (b) assumptions about the absolute or relative magnitudes of the variables. Fortus emphasizes that assumptions of the first type are always involved when solving any Physics problems, whether standard or real world. Heller and Hollabaugh [3] point out, however, that standard textbook problems often specify the unknown variable in the last sentence, thus removing the necessity of making decisions about which specific variable would be useful to answer the problem. The identification of what exactly to look for in terms of physics quantities is much more straightforward for standard problems, with their formalized nature, than for the less formalized real-world problems. It is also natural to assume that this identification may cause difficulties for the students.

It has been widely recognized that a major obstacle faced by novices when they try to solve a standard Physics problem is translating from the verbal statement of the problem to a mental representation of the problem in terms of Physics (see, *e.g.* [1, 14, 15]). An adequate mental representation of the problem is the first requirement for successful problem solving. In order to obtain such a representation, one needs to infer deep features with the use of relevant background knowledge. Understanding why and how a feature is important thus involves conceptual knowledge of the problem. However, novices' representations are lacking and pose an impediment to their problem-solving proficiency [28, 29, 30]. Studies by Finegold & Mass [31] and McMillan & Swadener [32] indicate another difficulty. Poor problem solvers fail or are unable to carry out the necessary qualitative analysis to construct an adequate representation. We should expect

real-world problem solvers to encounter difficulties similar to the ones found for standard problems when they attempt to answer the well-defined question arrived at in the process described above.

The difficulties of making paradigmatic choices have not been researched. The reason could be that this step, which is crucial for real-world problem solving, seems to be much easier for most standard problems since their formulations often reveal which physical theory is relevant. Concerning the principle choice and concept choice, several empirical studies show that both cause difficulties for standard problems. Hardiman, Dufresne, and Mestre [33] found that beginning Physics students who had completed a Physics course had trouble identifying major laws or principles that could be applied to solve a problem. Other studies show that while students may be able to state the definitions of scientific concepts, they often do not know what to do to apply these definitions in specific cases [34, 35].

The intricacies of the mathematization process, which is critical to solving real-world problems, have not been studied to a large extent. While not intending to characterize difficulties, Redish [36] argued from a theoretical point of view that the ability to use mathematics in solving Physics problems requires something other than what is learned in the mathematics classroom. In particular, physicists interpret and use equations in a different way than mathematicians, because they combine conceptual physics and mathematical symbolism. On a much more specific level, Clement, Lochhead, and Monk [37] found that college students working on a word problems in mathematics had difficulties translating the English words from the problem statement into algebraic expressions.

To conclude, we provide a few remarks about the potential applications of the framework presented. This paper offers insights into the behavior of Physics students when faced with real-world problems. The identification of difficulties generic to the problem-solving process opens up the possibility of predicting where in the process of solving a given problem obstacles of different types might be expected to arise. This understanding can contribute to the planning of teaching, such as the identification of necessary prerequisite skills as well as the design of activities that scaffold the development of problem solving competency, in particular the design of tasks that address the challenges and obstacles presented in the framework. Finally, the framework, when it has been refined and further examined, may be useful as an instrument in research on problem solving in Physics. The work presented in this paper has advanced our progress towards achieving these goals.

REFERENCES

- [1] Maloney, D. P., *Research on problem solving: Physics*, In D. L. Gabel (Ed.), *Handbook of research on science teaching and learning*, (MacMillan, New York, 1994), pp. 327-354.
- [2] Crane, H. R., *Better teaching with better problems and exams*, *Physics Today* **22**, 134-135 (1969).
- [3] Heller, P. & Hollabaugh, M., *Teaching problem solving through cooperative grouping. Part 2: Designing problems and structuring groups*, *American Journal of Physics* **60**, 637-644 (1992).
- [4] Schultz, K. & Lochhead, J., *A view from physics*, In M. U. Smith (Ed.), *Toward a unified theory of problem solving: Views from the content domains*, (Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 1991), pp. 99-114.
- [5] Thompson, N. (1987), *Thinking like a Physicist*, (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [6] Kapitza, P. L., *Le livre du problème de physique*, (CEDIC, Paris, 1977).
- [7] Niss, M. & Højgaard, J. J., *Problemløsningskompetence opnået ved hjælp af uformaliserede opgaver: Erfaringer fra et fysikkursus på RUC*, *MONA*, 54-73 (2010).
- [8] Shin, N., Jonassen, D. H. & McGee, S., *Predictors of well-structured and ill-structured problem solving in an astronomy simulation*, *Journal of Research in Science Teaching* **40**, 6-33 (2003).
- [9] Fortus, D., *The Importance of learning to make assumptions*, *Science Education* **93**, 86-108 (2008).
- [10] Lester, F., *On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education*, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **37**, 457-467 (2005).
- [11] Heller, J. I. & Reif, F., *Prescribing effective human problem-solving processes: Problem description in physics*, *Cognition and Instruction* **1**, 177-216 (1984).
- [12] Reif, F. & Heller, J. I., *Knowledge structure and problem solving in physics*, *Educational Psychologist* **17**, 102-127 (1982).
- [13] Reinhold, P., Lind, G. & Friege, G., *Wissenszentriertes Problemlösen in Physik*, *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften* **5**, 41-62 (1999).
- [14] Savelsbergh, E. R., *Improving mental representations in physics problem-solving*, unpublished Ph. D. Thesis, Twente University, The Netherlands (1998).
- [15] Savelsbergh, E. R., Ferguson-Hessler, G. M. & de Jong, T., *The importance of an enhanced problem representation: On the role of elaborations in physics problem solving*, Paper presented at the Annual Meeting of the European Conference on Learning and Instruction (7th, Athens, Greece, 1997).
- [16] Højgaard, J. J., *Breddeopgaver nr. 11, 12 og 13*, *Kvant* **14**(1), 21 (2003).
- [17] Højgaard, J. J., *Opgave-hjørnet*, *Kvant* **15**(3), 31 (2004).
- [18] Roth, W. M., *Authentic School Science: Knowing and Learning in open-inquiry science laboratories*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1995).
- [19] Palm, T., *Word problems as simulations of real-world situations: A proposed framework*, *For the Learning of Mathematics* **26**, 42-47 (2006).
- [20] Shekoyan, V. & Etkina, E., *Introducing ill-structured problems in introductory physics recitations*, in L. Hsu, C. Henderson and L. McCullough (Eds.), *Physics Education*

Research Conference (American Institute of Physics, Melville, NY, 2007), pp. 192-195.

[21] Harper, K. A., Freuer, R. J. & Demel, J. T., *Cultivating problem solving skills via a new problem categorization scheme*, in L. McCullough, L. Hsu, P. Heron, (Eds.) *AIP conference proceedings*, 883, (American Institute of Physics, Melville, NY, 2007), pp. 141-144.

[22] Rigden, J., *Editorial: Problem-solving skill: What does it mean?*, *American Journal of Physics* **55**, 877 (1987).

[23] Reif, F., *Applying cognitive science to education: thinking and learning in scientific and other complex domains*, (The MIT Press, Cambridge, MA, 2008).

[24] Hestenes, D., *Modelling Software for learning and doing physics*, in C. Bernardini, C. Tarsitani & M. Vincentini (Eds.), *Thinking Physics for Teaching*, (Plenum, New York, 1995), pp. 25-66.

[25] Halloun, I., *Modelling Theory in Science Education*, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004).

[26] Kuhn, T. S., *Postscript*, in Kuhn, T. S. (ed.), *The Structure of Scientific Revolutions*, 3th Ed. (University of Chicago Press, Chicago, 1969).

[27] Bing, T. J. & Redish, E. F., *Analyzing problem solving using math in physics: Epistemological framing via warrants*, *Physical Review Special Topics: Physics Education Research* **5**, 020108-1-020108-15 (2009).

[28] Chi, M. T. H., Feltovich, P. J. & Glaser, R., *Categorization and representation of physics problems by experts and novices*, *Cognitive Science* **5**, 121-152 (1981).

[29] Larkin, J. H., *The Role of Problem Representation in Physics*, in D. Gentner & A. L. Stevens (Eds.) *Mental Models*, (Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1983).

[30] De Jong, T. & Ferguson-Hessler, M. G. M., *Knowledge of problem situations in physics: A comparison of good and poor problem solvers*, *Learning and Instruction* **1**, 289-302 (1991)

[31] Finegold, M. & Mass, R., *Differences in the processes of solving physics problems between good physics problem solvers and poor physics problem solvers*, *Research in Science and Technological Education* **3**, 59-67 (1985).

[32] McMillan, C. & Swadener, M., *Novice use of qualitative versus quantitative problem solving in electrostatics*, *Journal of Research in Science Teaching* **28**, 661-670 (1991).

[33] Hardiman, P. T., Dufresne, R. & Mestre, J., *The relation between problem categorization and problem solving among experts and novices*, *Memory and Cognition* **17**, 627-638 (1989).

[34] Labudde, P., Reif, F. & Quinn, L., *Facilitation of scientific concept learning by interpretation procedures and diagnosis*, *International Journal of Science Education* **10**, 81-98 (1988).

[35] Reif, F. & Allen, S., *Cognition for interpreting scientific concepts: A study of acceleration*, *Cognition and Instruction* **9**, 1-44 (1992).

[36] Redish, E. F., *Problem solving and the use of math in physics courses*, arXiv: physics/0608268v1 (2005).

[37] Clement, J., Lochhead, J. & Monk, G. S., *Translation difficulties in learning mathematics*, *The American Mathematical Monthly* **88**, 286-290 (1981).

Constructivist approach based 5E model and usability instructional physics



İsmet Ergin

Turkish Military Academy, Bakanlıklar 06654 Ankara, Turkey.

E-mail: ismet.ergin@gmail.com, or iergin@kho.edu.tr

(Received 19 January 2012, accepted 24 March 2012)

Abstract

In this study, the studies regarding the 5E model, which grounds on the constructivist approach in educational levels in the world and Turkey, and is used as an educational model and its properties were analysed and information were presented in respect of this model. In the study, which was performed in accordance with the descriptive scanning method in this research, primarily the papers, dissertations in magazines indexed in databases such as the Dissertation scanning center of the Board of Higher Education, Ebsco Host, Science Direct, Taylor and Francis and Web of Science etc. and the literature were scanned in a broad perspective. The dissertations, papers attained as a result of scanning were analysed by taking the grades of objective, conclusion and education into consideration. The 5E Model was developed by one of the leading names of the BSCS (Biological Science Curriculum Study) project, Rodger Bybee, and used in applications aimed at this project. The 5E Model grounds on the Constructivist Approach and the Model of Learning Ring. There is a good deal of "E" release in the literature. These are encountered as 3E, 4E, 5E, 7E etc., however, this study analyses the 5E Model. The 5E Model is consisted of the grades of Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate.

Keywords: Constructivist Approach, 5E Model, Physics Education and Teaching.

Resumen

En este trabajo, los estudios sobre el modelo 5E, que se fundamenta en el enfoque constructivista en los niveles educativos en el mundo y Turquía, además se utiliza como un modelo educativo y sus propiedades fueron analizados y la información fue presentada al respecto de este modelo. En el estudio, que se realizó de acuerdo con el método de análisis descriptivo, en esta investigación, sobre todo los trabajos, tesis en revistas indexadas en bases de datos como el centro de exploración Tesis de la Junta de Educación Superior, Ebsco Host, Science Direct, Taylor y Francis y la Red de Ciencia, etc y la literatura fueron analizadas en una perspectiva amplia. Las disertaciones, documentos obtenidos como resultado de la exploración se analizaron mediante adoptando los grados de objetivo, la conclusión y la educación en consideración. El modelo 5E fue desarrollado por uno de los principales nombres de la BSCS (Estudio Currículo de Ciencias Biológicas) del proyecto, Rodger Bybee, y se utiliza en aplicaciones destinadas a este proyecto. Los terrenos del Modelo 5E en el Enfoque Constructivista y el Modelo de Aprendizaje Anillo. Hay una buena parte de "E", liberación en la literatura. Éstos se encuentran como 7E 3E, 4E, 5E, etc., sin embargo, este estudio analiza el Modelo 5E. El modelo 5E está constituido por los grados de Envolver, Explorar, Explicar, Elaborar, Evaluar.

Palabras clave: Enfoque Constructivista, Modelo 5E, Educación Física y Enseñanza.

PACS: 01.40.Ha, 01.40.G-, 01.50.My, 81.15.Aa

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

A lot of researches were made in the area of learning theory and constructivist approach. Researches such as Jean Piaget, Eleanor Duckworth, George Hein, and Howard Gardner get the bottom of them. Biological Science Curriculum Study (BSCS) Team of which group leader is Rodger Bybee improved a learning model according to constructivist thinking named 5E. Bybee worked with the other educational researchers to develop 5E Model [1].

The BSCS 5E Model is the most effective way of engaging students in learning. Developed in the 1980s, the BSCS 5E instructional model is a hallmark of these

programs. First it is provided that students are engaged in the concepts through a short activity or relevant discussion. Next, students explore the concepts with the others by developing a common set of experiences. In the Explain, the teacher guides the students to develop an explanation for the concepts they have been exploring. In the Elaborate, the students extend their understanding or apply what they have learned in a new setting. In the Evaluate, the students and the teacher have an opportunity to evaluate the students' understanding of the concepts [2].

The 5E instructional model is based on a constructivist view. Because this model of learning is important, we summarize it before introducing the different phases of the 5E model. Constructivism is a dynamic and interactive

conception of human learning. Students redefine, reorganize, elaborate, and change their initial concepts through interactions among the environment, classroom activities and experiences, and other individuals. Learning individuals interpret objects and phenomena and internalize the interpretation in terms of their current concepts similar to the experiences being presented or encountered. In other words, changing and improving conceptions often require challenging the current conceptions and showing them to be inadequate. From a science teachers point of view the most important and psychological problem is to avoid leaving students alone an overall sense of inadequacy. If this occurs, educators have encouraged psychological problems.

If a current conception is challenged, there must be opportunity, in the form of time and experiences, to reconstruct a more adequate conception than the original one. In short, the students' construction of knowledge can be assisted by using sequences of lessons designed to challenge current concepts in order to provide opportunities for reconstruction of concept by themselves. This is one important justification for the 5E model and for other learning cycles [3].

What may be relevant to science and technology education today may become obsolete tomorrow due to constant technological advancement. Students need to develop skills to help them benefit from change rather than be put disadvantaged by it. Students need to think convergently and divergently to investigate challenges and problems as well as to think in complex and creative ways. These skills are higher-order thinking skills sometimes known as critical thinking skills. Although the age of students needs to be considered, Wilks has shown that higher-order thinking can and should be taught to students of all ages. In most primary schools, only lower levels of thinking are taught such as knowledge, comprehension and application. Students are encouraged to develop their memory, but not thinking skills. Higher levels of thinking include analysis, synthesis and evaluation. Learning experiences focus around these levels develops skills in problem solving, inferring, and estimating, predicting, generalizing and creative thinking. The development of higher-order thinking skills can benefit all students including younger students because they are encouraged to ask questions, answer them intelligently and share their ideas with others A constructivist view of teaching and learning incorporates higher-order thinking skills because it encourages exploration, inquiry and direct experience with materials and information and, in order to uncover students' preconceptions, students are encouraged to share experiences with others

Constructivism is seen as an orientation towards teaching and learning, a way of viewing how teaching and learning occur or simply a way of thinking about learning. Teachers do not view constructivism as a view of teaching and learning that can be followed to implement a teaching program. Nevertheless, it has been shown that constructivist theory can be implemented through many different teaching models or designs, one of these being the Five Es. The Five

Constructivist approach based 5E model and usability instructional physics

Es is a teaching model, based on Piagetian theory, which can be used to implement an implicit constructivist (more specifically neo-Piagetian, human or social-constructivist) view of teaching and learning. It is built around a structured sequence and designed as a tangible and practical way for teachers to implement constructivist theory. It purposefully promotes experiential learning by motivating and interesting students, as they are encouraged to engage in higher-order thinking. This is not to say that by following such a model, students will become intrinsically interested in the content presented and therefore motivated to construct meaning for themselves so that they will be able critically analyse and incorporate new views and different perspectives. Rather, the model provides a tangible referent for teachers to scaffold their developing expertise in structuring a learning environment that will facilitate students' interaction with a learning context in a critical, reflective and analytical way. The Five Es, as such, is an aid or organiser for the teacher to structure and sequence potential learning experiences in a systematic and synergistic way consistent with a constructivist view of teaching and learning. In itself, the Five Es is not an essential part of student learning. The Five Es is a model, scaffold or framework for the teacher [4, 18].

Researchers have offered alternative strategies to promote meaningful learning in science [5].

II. METHOD AND MATERIAL

Datas related with this research are the products of literature scanning made for postgraduate disquisition. Different ways were used to get data (continual publications, disquisition scanning service, other internet scanning services, books, journal...).

A. Findings

In the first part of disquisition, there are data related with learning models, 5E Model and its characteristics and also method used. It is deduced and made suggestions according to data got at the end of research.

B. 5E Model

The BSCS approach to the 5E Model is credited to Roger Bybee who developed the 5E model which will be used in the Applications of Research & Model Inquiry Lessons section of EJSE. Bybee's 5E model is as follows: Probably one of the earliest and foremost supporters of the Learning Cycle was the SCIS (Science Curriculum Improvement Study) program which adapted it and included it in its science curriculum. Although there are several "E" versions (e.g. 3E, 4 E, 5E, and other modifications) the basic premise is that children have an experience with the phenomena in the learning of the concept/topic [6].

When implementations of Constructivist approach are examined, some operators transformed three staggered circle model into five staggered circle model. This is 5E

Ismet Ergin

Model. This model consists of Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluate Phases [16]. On psychologic basis, 5E Model is based on structuring in mind theory [7].

Constructivist Approach based on the 5E Model is an established planning method in science education and is consistent with contemporary theories about how individuals learn. It is easy to learn and useful in creating opportunities to learn science. You can think of the learning cycle model as having five parts, though these parts are not discrete or linear.

Prior knowledge is an important determinant of learning and has been studied extensively in science education. From misconception research, there is widespread agreement that learners construct concepts from prior knowledge [8].

See Fig. 1, 5E Model and its phases according to the researcher Fig. 1 [9].

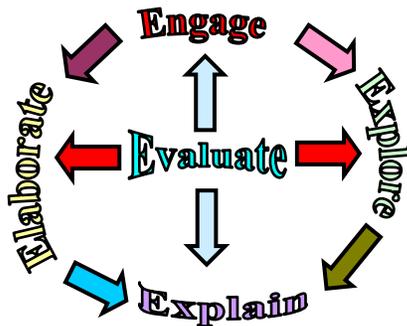


FIGURE 1. 5E model and its phases [9].

C. Why 5E Model in Physics Education?

The 5E encompasses the following: Principles Engagement taps student’s prior knowledge about a physics concept, Exploration gives students the chance to work with physics concepts in a “hands-on” format. Following the Exploration Phase is the Explanation phase, where the teacher and/or students explain the concept in greater detail, introducing students to relevant physics vocabulary. In the Extension phase of the physics lesson, the teacher facilitates deeper or broader understanding of the lesson. Often this phase involves activities that direct students for applying their knowledge to the new situations. Finally, the teachers can assess student understanding of the physics lesson through some type of assessment or Evaluation.

The 5E Model approach can result in:

1. Greater achievement in physics,
2. Better retention of concepts,
3. Improved attitudes towards physics,
4. Improved attitudes towards physics learning,
5. Improved reasoning ability, and
6. Superior process skills [10].

III. PHASES OF 5E MODEL

5E Model is implemented in five phases. They are Engage, Explore, Explain, Elaborate, Evaluation. Presentation of 5E model formed by a researcher is showed in Fig. 2. 5E learning model proposed by the researcher are presented the Fig. 3 [11].

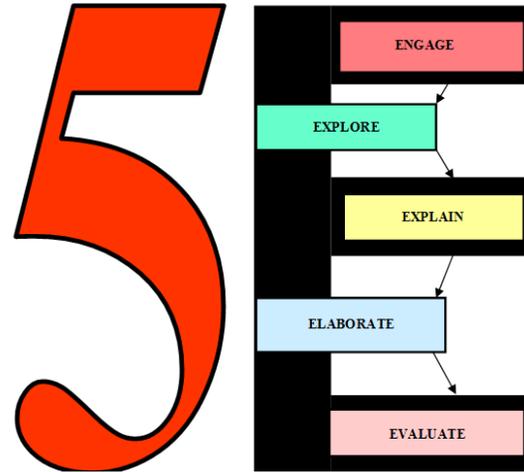


FIGURE 2. 5E model and its phases according to the researcher [11].

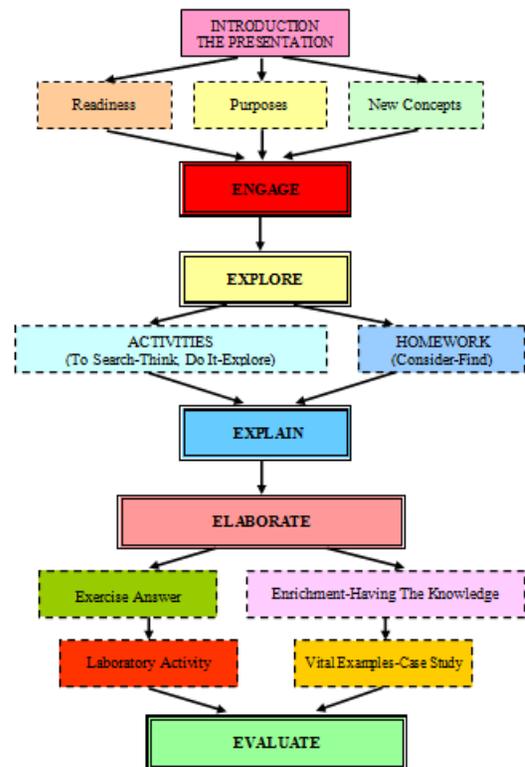


FIGURE 3. 5E teaching model designed by researcher [11].

A. Engage Phase



FIGURE 4. 5E model engage phase for the image [11].

In the first phase, you enable the student to engage in the learning task. The student mentally focuses on a problem, situation, or event. The activities of this phase should have connections with the past and the future activities. The connections depend on the learning task and the different dimensions of scientific literacy; they may be conceptual, procedural, or behavioral.

Asking a question, defining a problem, and showing a discrepant event are all the ways for enabling students to engage and focus them on the instructional task. The teacher's role is to present the situation and identify the instructional task. Moreover the teacher sets the rules and procedures for establishing the task.

A successful engagement results in students being puzzled and actively motivated in the learning activity. Here we are using the activity both in the constructivist and behavioral sense—that is, students are mentally and physically active; in other words, they have a “minds-on, hands-on” experience. If we combine the external events with the basic needs and interests of the students, instruction contributes to successful learning [3, 12, 13].

As synthesized by Berland and Reiser educators and educational researchers foster student engagement in scientific argumentation so they will articulate their ideas, make sense of complex phenomenon, and engage in the persuasive discourse of science [15].

B. Explore Phase



FIGURE 5. 5E model explore phase for the image [11].

Once you have engaged the students' interest in ideas, students need time to explore these ideas. You can specifically design exploration activities so that students in the class have common, concrete experiences that begin

Constructivist approach based 5E model and usability instructional physics building concepts, processes, and skills. To use Piagetian terms, engagement brings about disequilibrium, while exploration initiates the process of equilibration. Some of the key words used to describe the type of activities used in this phase are concrete and hands-on. Courseware can be used in the phase, but it should be carefully designed to assist the initial process of conceptual reconstruction.

The aim of exploration activities is to establish experiences that a teacher can use later to formally introduce a concept, process, or skill. During this the activity, the students have time in which they explore objects, events, or situations.

As a result of dear mental and physical involvement in the exploration activity, students will be able to establish relationships, observe patterns, identify variables, and question events.

The teacher's role in the exploration phase is only as a facilitator or a coach. It is only the teacher giving who always initiates the activity, but later on and allows students the time and opportunity to investigate objects, materials, and situations based on each student's own concepts about phenomena. If called upon, the teacher may coach or guide students through questions, suggesting avenues of activity or thought, and hints that may avoid frustration and begin the process of mental reconstruction. Use of concrete materials and experiences is essential. However, it is important to remember that the teacher's role is subordinate to the students' activity. The exploration phase is an excellent time to use cooperative learning [3, 12, 13].

C. Explain Phase

The word explanation means the act or process in which concepts, processes, or skills become plain, comprehensible, and clear. The process of explanation provides the students and teacher with a common use of terms relative to the learning task. In this phase, the teacher directs the attention of student specific aspects of the engagement and exploration experiences. First, students are asked to give their explanations. Second, teacher introduces scientific or technological explanations in a direct and formal manner. Explanations are the ways of ordering the exploratory experiences. The teacher should base the initial part of this phase on students' explanations and clearly connect the explanations to experiences in the engagement and exploration phases of the instructional model. The key to this phase is to present scientific concepts, processes, or skills in a simple, clear, and direct manner, and move to the next phase. You should not equate telling learning. The explanation phase can be relatively short because the next phase allows time for restructuring and extends this formal introduction to the concepts, processes, and skills.

The explanation phase can be teacher, textbook or technology-directed. Teachers have a variety of tech-request and strategies at their disposal. Educators commonly use oral explanations, but there are other strategies, such as reading, video, film, and educational Courseware. This phase continues the process of cognitive construction and provides scientific words for explanations. In the end,

Ismet Ergin

students should be able to explain exploratory experiences using common scientific terms. Students will not immediately express and apply the explanations-learning takes time. Students need time and experience to establish and expand concepts, Processes, and skills. For a summary of the explanation phase, see Fig. 6 [3, 12, 13].



FIGURE 6. 5E model explain phase for the image [11].

New opportunities to conduct compelling comparisons and track progress of individuals call for new research methods [14].

D. Elaborate Phase

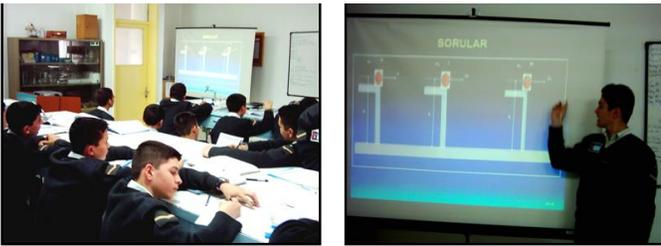


FIGURE 7. 5E model elaborate phase for the image [11].

Once students begin developing an explanation of their Reaming tasks, it is important to involve students in further experiences that extend or clarify the concepts, processes, or skills. The word explanation means the act or process in which concepts, processes, or skills become plain, comprehensible, and clear. The process of explanation provides the students and teacher with a common use of terms relative to the learning task. In some cases, students may still have misconceptions, or they may only understand a concept in terms of the exploratory experience. Elaboration activities provide further time and experiences that contribute to learning.

During the elaboration phase, students engage in discussions and information-seeking activities. The groups' goal is to identify and execute a small number of promising approaches to the task. During the group discussion, students present and defend their approaches to the instructional task. This discussion results in better definition and gathering of information that is necessary for successful completion of the task. The teaching cycle is not closed to the information from the outside. Students get information from each other, the teacher, printed materials, experts, electronic databases, and experiments they conduct. This is

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 6, No. 1, March 2012

called the information base. As a result of participation in the group's discussion, individual students are able to elaborate upon the conception of the tasks, information bases, and possible strategies for its completion.

Interactions within student groups are an application of Vygotsky's psychology to the teaching model. Group discussions and cooperative learning situations provide opportunities for students to express their understanding of the subject and receive feedback from others who are close to their own level of understanding.

The phase is also an opportunity to involve students in new situations and problems that require the application of identical or similar explanations. Fig. 7 is a summary of the elaboration phase of the teaching model [3, 12].

E. Evaluate Phase

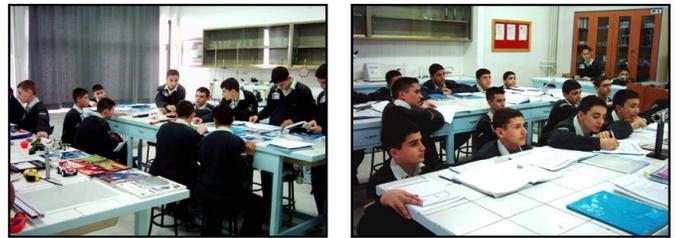


FIGURE 8. 5E model evaluate phase for the image [11].

At some point, students should receive feedback on their achievements. Informal assessment can be made in only the beginning of the teaching sequence. However the teacher can complete a formal assessment after the elaboration phase. As a practical educational matter, teachers must assess student learning. This is the phase in which teachers administer tests or performance activities to determine each student's understanding. This is also an important opportunity for the students to use the skills they have acquired and evaluate their own understanding. In addition, one justification for such a model lies in its providing adequate opportunities for all students to learn science.

The 5E instructional model is aligned with many processes involved in scientific inquiry. In science, the methods of scientific inquiry are an excellent means for students to evaluate their explanations. These methods are, after all, congruent with science. How well do student explanations stand up to review by peers and teachers? Is there need to reform ideas based on experience?



FIGURE 9. 5E model and its phases used in the researcher [11, 17].

Fig. 9, summarizes the evaluation phase. Fig. 9 provides additional details about what the teacher and the student do at different stages of the instructional model. We have provided descriptions of the methods and the activities that are both consistent and inconsistent with this model [3, 12, 13].

IV. RESULTS AND SUGGESTIONS

Of late years, until especially 1995, while curriculum has been renewed in many states of Canada, Australia, Ireland and Germany; continuous sweeping changes in Malaysia have attracted attention. Turkey is one of the countries affected from this development in last fifteen years. Changes made in science curriculum are the most striking instance of this. It takes attention that there are a lot of activities prepared according to constructivist approach in curriculum renewed in Turkey and other countries. Activities prepared according to constructivist approach and 5E Model is implemented in science curriculum prepared in Turkey and science books written according to this curriculum. Besides, Ministry of Education has published these activities in its web page. This study is very important in this regard, too. Some suggestions inferred thanks to results of research are given below.

According to 5E Model, While teaching a subject, giving examples from real world and wanting students to give examples similar to these the teachers given help students both research and link between real world and the subject. When the students have active roles in their learning, they learn and use the knowledge they have learned in the real world more easily. These make students more eager to science lessons to which they are usually reluctant.

When the subject is taught according to 5E Model, students use technological equipments more effectively. Using computer, internet and other technological equipments of students increases the effectiveness of this approach. In the implementation of 5E Model, Computers and computer-aided programs have been used. It is concluded that using computer is very effective for helping students understand the subject more perfectly. Using the computer in the learning atmosphere help they reach their goals more early.

Research related to 5E model and results of research show that 5E Model is a model which increases desire of researching, satisfies expectation of students, includes activities helping students have active roles in their learning. Because of this, Ministry of education should use this model in the curriculums which will be prepared.

According to result of this research; 5E Model is an approach that students have an active role in their learning. Besides, it is taken up seriously by them and it is thought to be an effective method. If teachers are trained before they begin to work, they will have an idea about characteristics and implementation of this model so they will have opportunities for implementing this method in their lessons.

REFERENCES

- [1] <<http://www.bsc.org>>. Buehler Challenger & Science Center, (20.05.2004).
- [2] <<http://www.miamisci.org/ph/1pintro5e.html>>. Constructivism and the Five E's. Miami Museum of Science&Planetarium. Experience the Real, (11.06.2004).
- [3] Trowbridge, L. W., Rodger, W. B., Janet, C. P., *Chapter 15. Models for Effective Science Teaching. Teaching Secondary School Science Strategies for Developing Scientific Literacy.*
- [4] Boddy, N., Merrill, K. W., An Imprint Of Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, Columbus, Ohio. (2000). Peter A., A Trial of The Five Es: A Referent Model for Constructivist Teaching and Learning. *Research in Science Education, Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, 33, 27-42* (2003).
- [5] Yilmaz, D., Ceren, T. and Semra, S., *The Comparative Effects of Prediction/Discussion -Based Learning Cycle, Conceptual Change Text, and Traditional Instructions on Student Understanding of Genetics*, International Journal of Science Education **33**, 607–628 (2011).
- [6] <<http://www.siue.edu/~eabusha/InquiryFiveEModel.html>>. Inquiry and the 5E Model (22.10.2004).
- [7] <<http://www.yok.gov.tr/egitim/ogretmen/kitaplar/ilkfen/ogrt/oaday1.doc>>. Ünite-1, Fen Bilimleri ve Fen Eğitimi, Öğretim Elemanı Kılavuzu (15.06.2004).
- [8] Cook, M., *Visual representations in science education: The influence of prior knowledge and cognitive load theory on instructional design principles*, International Journal of Science Education **90**, 1073–1091 (2006).
- [9] Lorschach, A. W., *The Learning Cycle as a Tool for Planning Science Instruction*. Illinois State University. <<http://www.coe.ilstu.edu/scienceed/lorschach/257lrcy.htm>>. (2004).
- [10] Fish, L., *Why Use the 5E Model for Teaching Science?*, *Tapestries Times* **1**, 2-3 (1999).
- [11] Ergin, İ., *An Example For The Effect of 5E Model On The Academic Success, Attitude and Recognition Level Of Students In Physics Education: "Projectile Motion In Two Dimensions"*, Ankara: Gazi University Institute of Education Sciences (Doctoral Thesis). (2006).
- [12] Maier, R. L., *5E Lesson Plan; Electromagnetic Spectrum*, Written for: Observing Earth from Space Seminar (<<http://www.msu.edu/user/maierrol/5E%20Lesson%20Plan.htm>> (21.10.2004).
- [13] Eisenkraft, A., Expanding the 5E Model. *The Science Teacher*, Published by the National Science Teachers Association **70**, 56-59 (2003).
- [14] Linn, M., *Technology and science education: Starting points, research programs, and trends*, International Journal of Science Education **25**, 727-758 (2003).
- [15] Berland, L. K. & Reiser, B. J., *Making sense of argumentation and explanation*, International Journal of Science Education **93**, 26–55 (2008).
- [16] Wilder, M. and Shuttleworth, P., *Cell Inquiry Cycle Lesson*, *Science Activities* **41**, 25-31 (2004).

Ismet Ergin

[17] <<http://www.mcps.k12.md.us/curriculum/science/instr/>> 5Estrategies.htm. 5E's Activities: 5E's Strategies for Teaching Science (22.03.2005).

[18] Aguilar, R. G. and López, O., *Low cost instrumentation for spin-coating deposition of thin films in an undergraduate laboratory*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 368-373 (2011).

Development of Problem Solving Confidence Questionnaire: Study of validation and reliability



Tolga Gok

Dokuz Eylul University, 35860, Torbali, Izmir, Turkey.

E-mail: gok.tolga@gmail.com

(Received 6 December 2011, accepted 13 February 2012)

Abstract

This study aimed to develop and validate a problem solving confidence questionnaire which would help teachers, instructors, and researchers to have better understanding of problem solving confidence of students. The participants of this scale were 950 undergraduate science and engineering students enrolled in the Introductory Calculus Based Physics. The development of the scale included the following three steps; item formulation, content validation and reliability calculation. The scale has 20 items allocated to two factors: (1) High Confidence; (2) Low Confidence. The scale items had a factor loading of at least .40. The results of the factor analysis revealed that the scale accounted for the 57.32% of the total variance. The alpha reliability coefficient was .92. According to these findings, the Problem Solving Confidence Questionnaire (PSCQ) is a valid and reliable instrument that can be used in the field of engineering and science education.

Keywords: Problem Solving, Problem Solving Confidence Questionnaire, Validation and Reliability.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo desarrollar y validar un cuestionario de confianza de solución problemas que ayudan a los maestros, instructores e investigadores para tener una mejor comprensión de la confianza en la resolución de problemas de los estudiantes. Los participantes de esta escala fueron 950 estudiantes de pregrado de ciencia e ingeniería inscritos en Cálculos Introductorio Basados en Física. El desarrollo de la escala incluye los siguientes tres pasos, artículo de formulación, validación de contenido y cálculo de la fiabilidad. La escala tiene 20 temas asignados a dos factores: (1) Alta Confianza, (2) Baja Confianza. Los elementos de la escala tenían un factor de carga de al menos 0.40. Los resultados del análisis factorial revelaron que la escala representó el 57.32% de la variación total. El coeficiente de confiabilidad alfa fue 0.92. De acuerdo con estos hallazgos, el cuestionario de confianza de solución problemas (PSCQ) es un instrumento válido y fiable que puede ser utilizado en el campo de la ingeniería y la educación científica.

Palabras clave: Resolución de problemas, Resolución de Problemas Cuestionarios para la Confianza, Validación y Confiabilidad.

PACS: 01.40. Fk; 01.40. gf

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Problem solving is viewed as a fundamental part of learning physics [1, 2]. Most researchers working on problem solving [3] agree that a problem occurs only when someone is confronted with a difficulty for which an immediate answer is not available. However, difficulty is not an intrinsic characteristic of a problem because it depends on the solver's knowledge and experience [4]. So, a problem might be a genuine problem for one individual but might not be for another. In short, problem solving refers to the effort needed in achieving a goal or finding a solution when no automatic solution is available [5].

Research on developing an effective general instruction for physics problem solving started at least 50 years ago [4] and changed after the late 1970's with the works of [1, 6, 7]. Most of the research during this period aimed to identify

the differences between experienced and inexperienced problem solvers. These studies showed that the experienced problem solvers were individuals with important knowledge, experience and training in physics, and so the process of reaching a solution was both easy and automatic for them. In contrast, the inexperienced problem solvers had less knowledge, experience and training in physics which mean that they were facing real problem.

In physics problem, inexperienced problem solvers tend to spend little time representing the problem and quickly jump into quantitative expressions [8]. Instructors have found that inexperienced problem solvers carry out problem solving techniques that include haphazard formula-seeking and solution pattern matching [1, 9]. By contrast, experienced problem solvers solve problems by interjecting another step of a qualitative analysis or a low-detail review of the problem before writing down equations [8]. This

qualitative analysis used by experienced problem solvers, such as a verbal description or a picture, serves as a decision guide for planning and evaluating the solution [6]. Although this step takes extra time to complete, it facilitates the efficient completion of further solution steps and usually experienced problem solver is able to successfully complete the problem in less time than an inexperienced problem solver [8].

A. The purpose of the research

In all science courses, students are encouraged to solve various problems for enhancing learning process. Especially in physics it may be difficult to state some fundamental concepts unless students solve many problems with drawings and numerical calculations. Therefore, in physics problem solving is accepted as difficult by most of the students. Most studies mentioned in the introduction part have been performed on general problem solving and on the differences between the experienced and inexperienced problem solvers. When the studies were examined, unfortunately, the author could not find any scale constructed on problem solving confidence as of 2011. In this study, the Problem Solving Confidence Questionnaire (PSCQ) was developed to fill a gap in the literature of physical and engineering sciences.

II. METHOD

Participants

The participants selected in this study were 950 science and engineering students who enrolled in Introductory Calculus Based Physics course for Spring 2008, Fall 2008, and Spring 2009 from different departments (Physics, Physics Engineering, Chemistry, Chemistry Engineering, and Petroleum Engineering) at a public university in the northwest part of US. Of the participants, 489 students (51.4%) were female while 461 (48.5%) were male. PSCQ was given to students who completed Introductory Calculus Based Physics course successfully. The author was present to answer any queries raised by the participants. The participants took about 10min to complete the entire set of scale. Participants' involvement in this study was voluntary and their confidentiality as well as anonymity was ensured as the participants were assigned and identified by a unique code known only to the investigator.

Procedures

The open literature was reviewed to develop the basis for problem solving confidence questionnaire [10, 11]. The number of 310 students was required to write an essay about their confidences during solving a physics problem. Also, several experts in physics and physics education and forty volunteer students from three different physics courses at the university were interviewed about problem

solving and confidence in problem solving. The items reported in the literature and obtained from essays and interviews were categorized to construct the items of the scale. PSCQ consisted of 20 affirmative and 11 negative statements. Respondents rated each item on a 5-point Likert scale, with the following scale anchors: 1=strongly disagree, 2=disagree, 3=undecided, 4=agree, 5=strongly agree. The validation and verification analyses were performed by giving the scale to science and engineering students. Some of the statistical analyses (Explanatory Factor Analysis "EFA", Cronbach's Alpha, etc.) were performed with SPSS 15.00 and the rest of them (Confirmatory Factor Analysis "CFA", etc.) were performed with LISREL 8.72. Validity of the scale was tested with the varimax rotation and principal component analyses. The items were selected considering the rule anticipating that the item factor load should be over .40 as a result of the varimax rotation [12]. The construct validity of the scale was obtained by Bartlett's test of sphericity. Further, as a result of the principal component analysis, the value of Kaiser-Meyer-Olkin was calculated. For reliability analysis of the scale, Cronbach's alpha was used to examine the reliability of the proposed items within each subscale of the scale. The eigenvalues for the factors, variance percentages and total variance percentages for the scale were obtained. Also, within the context of reliability analysis of the scale, Kolmogorov-Smirnov test was applied to test if the scale showed a normal distribution. Pearson product moment correlation analysis was performed between main scale and components.

III. RESULTS

The validity and reliability of the Problem Solving Confidence Questionnaire (PSCQ) were examined statistically.

The Validity Analysis

The validity analysis of the PSCQ was examined two categories which are EFA and CFA as follows.

Explanatory Factor Analysis Results of the PSCQ

The statistical analysis indicated that the result of Bartlett's test of sphericity [13] was 1735.969 for the scale ($p < .01$). The scale did not produce an identity matrix. Thus, multivariate normal distribution was accepted for factor analysis [14]. The value of .92 was obtained for KMO ($KMO > .60$) from the principal component analysis. KMO test was confirmed with the small partial correlations and sufficient distribution for the factor analysis. Rotation analysis was conducted with the principal component analysis and varimax method to identify the components. Two components having eigenvalues greater than 1.00 [15] were defined. The validity was confirmed with the total variance percentage greater than 41% [16].

Validity analysis enabled to include 20 items having the factor load of .40 in the scale. The items with lower factor load (<.40) were excluded. The factor distribution and factor load of these items are presented in Table I. Total item load of 20 selected items changed from .839 to .576.

The factors in the PSCQ were defined as *High Confidence and Low Confidence*. The calculated variance percentage for first factor including 14 items was 43.05. The variance percentages were obtained for second factor (6 items as 14.27). The eigenvalues for factors were 8.61 and 2.85 respectively. Also two factors accounted for 57.32% of total variance. It should be noted that *t*-values were found as significant with *p*<.01 when 27% high and 27% low group means were compared.

Confirmatory Factor Analysis Results of the PSCQ

To further assess the two-factor structure proposed by [17], a confirmatory factor analysis was conducted with LISREL 8.72 using maximum likelihood procedure as the technique for parameter estimation. The maximum likelihood procedure is among the most popular and robust methods for use in structural equation modeling [18].

The SEM (structural equation modeling) technique employs fit indices to provide estimates of how well the data fit the *a priori* hypothesized model. Because different indices reflect different aspects of model fit, multiple indices are typically reported. Also the chi-square statistic, the other fit indices selected for this study are: (a) the Goodness of Fit Index (GFI), (b) the Comparative Fit Index(CFI), (c) the Incremental Fit Index (IFI), (d) the root mean square error of approximation (RMSEA), and standardized root mean residual (SRMR).

TABLE I. The distribution of factors and factor loads of the items.

Items		High Confidence	Low Confidence
1	I like to solve to a problem	.839	.109
2	I enjoy solving a problem	.811	5.380E-02
3	I like to solve a numeric problem	.802	8.377E-02
4	I do my best to be successful in problem solving	.779	.107
5	I am interested in problem solving	.769	1.461E-02
6	I like to struggle with solving problem even if I cannot solve the problem	.761	4.238E-02
7	I like to solve problems from different sources	.756	6.396E-02
8	I struggle with a problem until I find the correct answer	.753	-3.033E-02
9	I try too hard when I cannot solve the problem	.744	.113
10	I am sure that I can solve a problem	.740	.154
11	I am self confident in problem solving	.740	.272
12	I am sure that I am able to solve even a difficult problem	.734	.260
13	I do my best for solving the problem no matter how difficult a problem	.699	.276
14	I lose track of time while solving a problem	.609	-2.059E-02
15	I demoralize if I cannot solve a problem	-4.265E-02	.773
16	I am stressed while solving a problem	9.479E-02	.766
17	I lose self confidence if I cannot solve a problem	.136	.735
18	I am upset when I find incorrect answer of a problem	-.172	.718
19	I am afraid of making numerical mistakes	.286	.634
20	Preconceptions prevent me from solving a problem	.290	.576

TABLE II. Confirmatory factor analysis's results.

Model	χ^2	χ^2 / df	GFI	CFI	IFI	RMSEA	SRMR
2-Factor	303.65	1.80	.90	.91	.92	.04	.02

Fig. 1 shows the path diagram for the 2-factor model for the PSCQ. As seen in Table II, there was a good fit. An examination of the modification indices in the LISREL revealed excessive co variances among the residuals of the observed variables.

The Reliability Analysis

The reliability analysis indicated the lowest and highest score as 29 and 95, respectively. The distribution of the scores was found to be normal from Kolmogorov-Smirnov test (*p*<.05). Cronbach's alpha reliability coefficient of the

scale was .92. Cronbach's alpha values for high and low confidence were .94 and .91, respectively.

IV. DISCUSSION

Over the last decade, researchers in science education have identified various student attitudes, behavior, and beliefs that shape and are shaped by student classroom experience [19, 20, 21]. Several scales have been created to measure various aspects of student's beliefs, attitudes, and expectations. The three most well-known surveys for probing student beliefs about the physical sciences are the Maryland Physics Expectation Survey (MPEX) [11], the Views about Science Survey (VASS) [22], and the Colorado Learning Attitudes about Science Survey (CLASS) [10]. Each of the three has a particular focus, mainly aspects of epistemology or expectations.

When the previous studies on this subject were examined, it can be realized that most of the research has

been conducted on the attitudes, beliefs, and behaviors of the students toward to the courses [10, 11, 21]. A scale hasn't been developed for revealing the state of the students while solving problem until today. It is known that students have difficulty while solving problem in engineering and physical sciences. This result was interpreted by the researchers as students insufficiently performance in problem solving. This was reported in this paper of Gok [23]. He defined the problem solving strategies of the students with the help of the problem solving strategy steps scale given in the paper. When the results of the study were examined, it was found that the students don't have any difficulty to determine the fundamental principle(s) of the problems. Although, the students could understand the related subjects easily, they couldn't solve the problems and check the results of the problems. This problem revealed the requirement of investigating the confidence of the students. This scale in this area was developed for filling this gap.

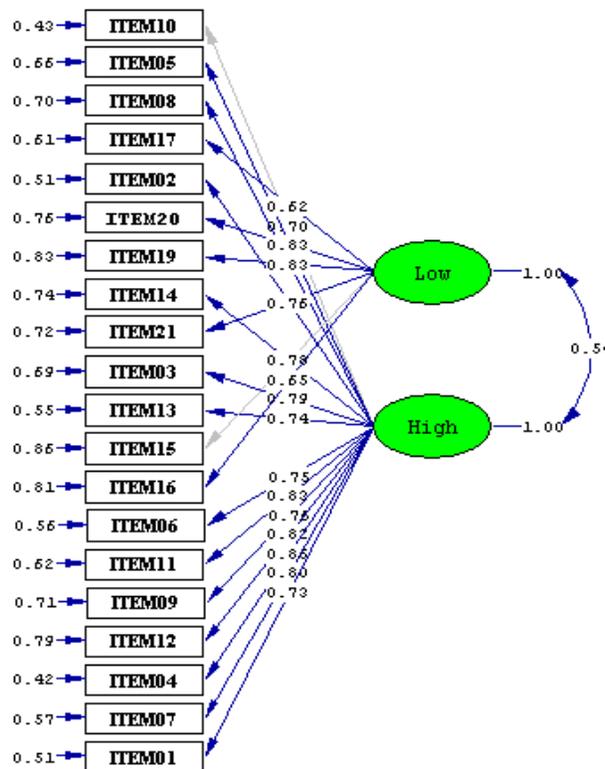


FIGURE 1. Path diagram of the two-factor model.

The author has developed and validated an instrument, the Problem Solving Confidence Questionnaire (PSCQ), which build on work done by existing scales. This scale probes the problem solving confidence of the science and engineering students while solving problem in the university level. The PSCQ was written to make the statements as clear and

concise as possible and suitable for use in a wide variety of physics courses. The statements are scored overall and in two categories which are High Confidence and Low Confidence. *High Confidence*: a person's confidence is high when challenging oneself to achieve their goals through education and continuous learning. High

confidence is not being a perfectionist, it's the knowledge and strength a person has. *Low Confidence*: It would be classified as a negative emotion or delusion, as it exaggerates one's limitations in capacity, quality and potential for growth.

Several design principles shaped the PSCQ and distinguish it from the previous scales. 1) It was designed to address a wider variety of issues that educators consider important aspects of solving problem. 2) The wording of each statement was carefully constructed and tested to be clear and concise and subject to only a single interpretation by both a broad population of students and a range of experts. This makes the scale suitable for use in many different courses covering a range of levels, and also allows most of the statements to be readily adapted for use in other sciences such as calculus, chemistry. 3) The expert and novice responses to each statement were unambiguous so scoring of the responses was simple and obvious. 4) The amount of time required to thoughtfully complete the scale was kept to 10 minutes or less by requiring clear and concise statements and using a simple response format. This also limits the scale to be less than about twenty statements. 5) The administration and scoring was designed to be easy. 6) The grouping of statements into categories of student confidence was subject to rigorous statistical analysis and only statistically robust categories were accepted.

The author performed a series of rigorous validation and reliability studies that involved several iterations to revise and refine the scale statements. The validation process included: interviews with and survey responses from physics faculty to establish the expert interpretation and response; interviews with students to confirm the clarity and meaning of statements; and administration of the scale to several hundred students followed by extensive statistical analysis of the responses including a detailed factor analysis to create and verify categories of statements. Revisions were made in this scale based on the results of the interviews and factor analysis and then the above validation studies were repeated with the new version of the scale.

Four experts underwent a series of interviews on the draft of the PSCQ. Their comments were used to hone the statements and remove any that could be interpreted more than one way. When this process was complete, eleven experts took the scale. Their answers confirmed the expert's point of view used in scoring. These experts were physicists who have extensive experience with teaching introductory courses and worked with thousands of students at the university. Some of these experts are involved with physics education research; others are simply practicing physicists interested in teaching. Student interviews on essays were carried out on draft by obtaining forty volunteers from different physics courses at the university. Care was taken to interview a diverse group of students by selecting from introductory courses catering to the full range of majors, having equal numbers of men and women.

Interviews consisted of first having the student take the scale with pencil and paper. Then, during the first ten

minutes, students were asked about their major, course load, best/worst classes, study habits, attitude about problem solving, class attendance and future aspirations, to characterize the student and his or her interests. After this, the interviewer read the statements to the students while the student looked at a written version. The students were asked to answer each statement using the 5-point scale and then talk about whatever thoughts each statement elicited. If the student did not say anything, he/she was prompted to explain his/her choice. After the first few statements, most students no longer required prompting. If the students asked questions of the interviewer, they were not answered until the very end of the interview. Interview results showed students and experts had consistent interpretations of nearly all of the statements. Finally, these interviews provided some new insights into students' confidence in problem solving.

Statistical analyses were used to test the validity of the sub-grouping of statements into categories. In this regard, the PSCQ is different from previous scales. There is no published statistical analysis of the MPEX, VASS categories. The statistical analysis of the PSCQ revealed good validity and internal consistency reliability according to Explanatory Factor Analysis. It was possible to state that the sample data was adequate for factor analysis according to statistical results. Then, the data was analyzed with principal component analysis to explore the component structure underlying the instrument. Later, Confirmatory Factor Analysis was used to determine the ability of a predefined factor model to fit an observed set of data. According to CFA results, adequate model fit was represented by GFI, CFI, and IFI values greater than .90 [18] and RMSEA values below .05 [24]. Estimates of the internal consistency reliability of the scale were determined by calculating Cronbach's alpha reliability coefficient. This analysis aimed to determine the extent to which items within a scale measure the same construct as other items within that scale. The result of the internal consistency reliability having the value of .92 is considered to be acceptable to good. Analysis revealed that the coefficient was high enough to be considered adequate, namely, all items lead to a higher alpha coefficient for the overall scale reliability. As a result it can be said that the PSCQ consisting of 20 items is a valid and reliable instrument to assess undergraduate science and engineering student perceptions on problem solving confidence.

REFERENCES

- [1] Reif, F. and Heller, J., *Knowledge structures and problem solving in physics*, Educational Psychologist **17**, 102-127 (1982).
- [2] Heller, P., Keith, R. and Anderson, S., *Teaching problem-solving through cooperative grouping. Part 1: Group versus individual problem-solving*, American Journal of Physics **60**, 627-636 (1992).
- [3] Dewey, J., *How we think*, (D. C. Heath & Company, London, 1910).

- [4] Garrett, R., *Problem-solving in science education*, Studies in Science Education **13**, 70-95 (1986).
- [5] Schunk, D., *Learning theories – An educational perspective*, (Prentice Hall, NJ, 2000).
- [6] Larkin, J. and Reif, F., *Understanding and teaching problem-solving in physics*, European Journal of Science Education **1**, 191-203 (1979).
- [7] Kohl, P. and Finkelstein, N., *Patterns of multiple representation use by experts and novices during physics problem solving*, Physical Review Special Topics-Physics Education Research **010111**, 1-13 (2008).
- [8] Larkin, J., *Processing information for effective problem solving*, Engineering Education **70**, 285-288 (1979).
- [9] Van, H. A., *Learning to think like a physicist: A review of research-based instructional strategies*, American Journal of Physics **59**, 891-897 (1991).
- [10] Adams, W., Perkins, K., Podolefsky, N., Dubson, M., Finkelstein, N. and Wieman, C., *A new instrument for measuring student beliefs about physics and learning physics: The CLASS*, Physical Review Special Topic Physics Education Research **2**, 010101 (2006).
- [11] Redish, E., Saul, J. and Steinberg, R., *Student expectations in introductory physics*, American Journal of Physics **66**, 212-224 (1998).
- [12] Coombs, W. and Schroeder, H., *An analysis of factor analytic data*, Personality and Individual Differences **9**, 79-85(1988).
- [13] Bartlett, M., *A note on multiplying factors for various chi-squared approximations*, Journal of the Royal Statistical Society **16**, 296–298 (1954).
- [14] Hair, J., Black, B., Babin, B., Anderson, R. and Tatham, R., *Multivariate data analysis*, (Prentice Hall, Upper Saddle River, 2006).
- [15] Pett, M., Lackey, N. and Sullivan, J., *Making sense of factor analysis*, (Sage, Thousand Oaks, CA, 2003).
- [16] Kline, R., *Principles and practice of structural equation modeling*, (Guilford Press, NY, 2005).
- [17] Chan, K., *Hong Kong teacher education students' epistemological beliefs and their relations with conceptions of learning and learning strategies*, The Asia-Pacific Education Researcher **16**, 199-214 (2007).
- [18] Hoyle, R. & Panter, A., *Writing about structural equation models*, In R. Hoyle (Ed.), *Structural equation modeling: Concepts, issues, and applications*, (158-176). (Sage, Thousand Oaks, CA, 1995).
- [19] Bransford, J., Brown, A. and Cocking, R., *How people learn*, (National Academy Press, Washington DC, 2002).
- [20] Hammer, D., *Student resources for learning introductory physics*, American Journal of Physics **68**, S52-S59 (2000).
- [21] Redish, E. F., *Teaching physics with physics suite*, (John Wiley & Sons, Place?, 2003).
- [22] Ibrahim, H. and Hestenes, D., *Views about sciences survey VASS*, Paper presented at the Annual Meeting of the National Association for Research in Science Teaching, St. Louis, MO, March 31-April 3 (1996).
- [23] Gok, T., *Development of problem solving strategy steps scale: Study of validation and reliability*, The Asia-Pacific Education Researcher **20**, 151-161 (2011).
- [24] Byrne, B., *Structural equation modeling with AMOS: Basic concepts, applications, and programming*, (Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2001).

Four Pedagogic exercises



D. N. Basu

Variable Energy Cyclotron Centre, 1/AF Bidhan Nagar, Kolkata 700 064, India.

E-mail: dnb@vecc.gov.in

(Received 17 January 2012, accepted 1 March 2012)

Abstract

This article describes four innovative pedagogical exercises: (i) The expression for relation between cross sections in the laboratory and the centre of mass systems provided in text books assumes zero or low Q values which needs to be corrected for the most general case when Q value of the reaction is not negligible compared to the masses of interacting nuclei. The general expression derived here can be used for elastic and inelastic cases involving zero, low or even very high Q values. (ii) The equation of oscillatory motion of a massive surface put horizontally on two wheels rotating with equal and opposite angular velocities is established. The time period of oscillation is related to the coefficient of dynamic friction between the surface and the wheels which facilitates the measurement of the coefficient of dynamic friction. (iii) The equation of motion of a fixed torque mass shedding vehicle moving against friction and its velocity at any instant of time are derived. This example is equivalent to motion of a mass shedding rocket moving by applying fixed force against atmospheric friction. (iv) The equation of the path of a missile directed at every instant of time towards a rectilinearly moving target and time taken to hit the target are derived. It provides equation of path for asteroid and comet destructing missiles as conceptualized by NASA projects.

Keywords: Cross Section in Lab and CM systems; Coefficient of dynamic friction; Equation of path of Missile.

Resumen

En este artículo se describen cuatro ejercicios pedagógicos innovadores: (i) La expresión de relación entre las secciones transversales en el laboratorio y el centro de masa de los sistemas de comunicación previstos en los libros de texto asumiendo los valores de Q bajos o nulos, los cuales se necesitan para ser corregidos para el caso más general, cuando el valor de Q de la reacción no es despreciable comparado con las masas de núcleos en interacción. La expresión general derivada aquí puede ser utilizada para los casos elásticos e inelásticos que implican los valores cero, bajos o incluso cuando Q tiene valores muy altos. (ii) La ecuación de movimiento oscilatorio de una superficie masiva puesta horizontalmente sobre dos ruedas giratorias con velocidades angulares iguales y opuestas es establecida. El período de tiempo de oscilación está relacionado con el coeficiente de fricción dinámica entre la superficie y las ruedas lo que facilita la medición del coeficiente de fricción dinámica. (iii) La ecuación de movimiento de un vehículo de diseminación de par fijo de masa en movimiento contra la fricción y su velocidad en cualquier instante de tiempo son derivados. Este ejemplo es equivalente al movimiento de masa de un cohete en movimiento aplicando una fuerza fija contra la fricción atmosférica. (iv) La ecuación de la trayectoria de un misil dirigido a cada instante de tiempo hacia un blanco en movimiento rectilíneo y tiempo necesario para alcanzar el objetivo son derivados. Se proporciona la ecuación de la trayectoria de asteroides y cometas destruyendo misiles según lo conceptualizado por proyectos de la NASA.

Palabras clave: Sección transversal en el laboratorio y los sistemas CM; Coeficiente de fricción dinámica, ecuación de la trayectoria de misiles.

PACS: 45.20.-d; 45.40.Aa; 45.50.Tn; 45.40.Gj.

ISSN 1870-9095

I. RELATION BETWEEN LABORATORY AND CENTRE OF MASS CROSS SECTIONS FOR HIGH Q VALUES

In this short note the non-relativistic expression for the relation between cross sections in the laboratory and the centre of mass systems derived in text books [1] is re-derived. Let m_1 be the mass of the projectile incident with velocity v_0 and kinetic energy $E = \frac{1}{2} m_1 v_0^2$ in the laboratory frame on a target of mass m_2 at rest. Let m_3 and m_4 be the masses of the interacting nuclei, respectively, after collision.

The centre of mass system of interacting particles is defined as a frame of reference where the sum of the momenta of all interacting particles is zero. Therefore, in the centre of mass system incident projectile and the target nuclei moves with momenta which are equal in magnitude and opposite in direction and hence

$$m_1(v_0 - v_{cm}) = m_2 v_{cm} \quad \Rightarrow \quad v_{cm} = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

where v_{cm} is the velocity of the centre of mass of the projectile-target system in the laboratory frame of reference. Obviously, $v_1 = v_0 - v_{cm}$ and $v_2 = v_{cm}$ are the

velocities of the projectile and the target, respectively, as observed in the centre of mass frame. Thus, the kinetic energy E_{cm} in the centre of mass frame of reference is

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E = \frac{1}{2} \mu v_0^2, \quad (2)$$

obtained using Eq. (1) where $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ is called the reduced mass of the projectile-target system and the magnitude of momenta of each particle $m_1(v_0 - v_{cm}) = m_2 v_{cm} = \mu v_0$ are equal in this frame of reference. The energy released (or absorbed) Q in the process of interaction is given by

$$(m_1 + m_2)c^2 = (m_3 + m_4)c^2 + Q, \quad (3)$$

which is always realized in the centre of mass frame of reference and c is the velocity of light in vacuum. Let v_3 and v_4 be the velocities of scattered projectile like and recoiling target like nuclei in the centre of mass system and θ_0 be the angle of scattering of the scattered projectile like nucleus of mass m_3 as observed in the laboratory system while θ be the corresponding angle as observed in the centre of mass system. Obviously, the two angles θ_0 and θ are related by

$$\tan\theta_0 = \frac{v_3 \sin\theta}{v_3 \cos\theta + v_2} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \gamma}, \quad \gamma = \frac{v_2}{v_3}, \quad (4)$$

obtained by constructing the velocity triangle. The following energy conservation equations in the centre of mass system

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= E_{cm} && \text{before collision} \\ \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} m_4 v_4^2 &= E_{cm} + Q && \text{after collision} \end{aligned} \quad (5)$$

can be used for evaluation of. In the centre of mass frame momenta of the two colliding nuclei are always equal in magnitude and opposite in direction at every instant of time and hence infinite time before and infinite time after collision as well, so that

$$m_1 v_1 = m_2 v_2, \quad m_3 v_3 = m_4 v_4. \quad (6)$$

Using Eq. (6) to eliminate v_1 and v_4 from Eq. (5), one obtains

$$\frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} = \frac{(m_1 + m_2) m_2 m_4}{(m_3 + m_4) m_1 m_3} \left(\frac{v_2}{v_3}\right)^2, \quad (7)$$

and therefore

$$\gamma = \frac{v_2}{v_3} = \left[\frac{m_1 m_3 (m_3 + m_4)}{m_2 m_4 (m_1 + m_2)} \frac{E_{cm}}{E_{cm} + Q} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

The relation between the differential cross sections measured in the laboratory system $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab}$ and the centre of mass system $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$ is given by

$$2\pi \sin\theta_0 d\theta_0 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = 2\pi \sin\theta d\theta \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}, \quad (9)$$

from the conservation of flux. Thus

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{\sin\theta d\theta}{\sin\theta_0 d\theta_0} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}. \quad (10)$$

Using Eq. (4), the above equation becomes

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{[1 + \gamma^2 + 2\gamma \cos\theta]^{3/2}}{|1 + \gamma \cos\theta|} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}. \quad (11)$$

The angle integrated cross sections are just the areas offered perpendicularly to the incident beam direction and therefore remain same in the laboratory and the centre of mass systems which means $\sigma_{lab} = \sigma_{cm}$.

The Eq. (8) provided above for is exact and there is no approximation involved and is valid for the most general case when Q value of the reaction is not negligible compared to the masses of the interacting nuclei. The term $\frac{(m_3 + m_4)}{(m_1 + m_2)}$ is missing in the corresponding expression of Ref. [1] which is valid only for Q values much smaller than the masses involved and is therefore an approximate expression. For elastic scattering $Q = 0$, $m_1 = m_3$, and $m_2 = m_4$ and then $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ [2] from the Eq. (8) above.

II. A LABORATORY METHOD OF MEASURING THE COEFFICIENT OF DYNAMIC FRICTION

Measurement of the coefficient of dynamic (or kinetic) friction between wheel and road (or any surface) is often needed. A useful laboratory method for measuring the coefficient of dynamic (not rolling) friction is described here. First an equation is derived for the motion to show that the restoring force is proportional to the displacement of the plate (surface) from its equilibrium position. Then the time period of the simple harmonic motion (SHM) executed by the surface is related to the coefficient of dynamic friction between the surface and the wheels establishing the feasibility of this method for measuring the coefficient of dynamic friction.

Let the centres of the axles of two wheels are d distance apart and they are coupled by belt in such a manner that when motor of one wheel drives it at a constant speed (which means constant angular velocity), the belt forces the other wheel to move in the opposite direction and with identical speed as the former. The wheels are kept vertical, on which the plate of mass M is placed whose dynamic friction coefficient against the given wheels is to be determined. Now at equilibrium condition, the plate rests

symmetrically on the two wheels with its centre of mass at $\frac{d}{2}$ distance from each of the axles. If the plate is now displaced it will execute periodic oscillations. Let x be the displacement at any instant of time t and R_1 and R_2 be the normal reactions on the two wheels at that instant of time. Obviously, at equilibrium condition these two forces of normal reactions are equal. When the centre of mass of the plate is displaced by x , its distances from the two axles are $\frac{d}{2} + x$ and $\frac{d}{2} - x$, respectively. Balancing moments of the weight of the plate (acting vertically downward from its centre of mass) against reaction force (acting vertically upward and passing through axle) about the first and the second axles yield

$$\begin{aligned} R_2 d &= \left(\frac{d}{2} + x\right) Mg, \\ R_1 d &= \left(\frac{d}{2} - x\right) Mg, \end{aligned} \quad (12)$$

respectively, where g is acceleration due to gravity. The frictional forces which are proportional to the normal reactions are, therefore, μR_1 and μR_2 , respectively, and they are acting in the opposite directions horizontally but unequal in magnitude except for the mean position with μ being the coefficient of dynamic friction. Hence, the restoring force is

$$\mu R_1 - \mu R_2 = -\frac{2\mu g M}{d} x, \quad (13)$$

where we have used Eqs. (12) for evaluating R_1 and R_2 . The equation of motion (Newtonian force equation) is

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{2\mu g M}{d} x, \quad (14)$$

which is the equation of a SHM. Its time period T of oscillation is, therefore, given by

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{2\mu g}}. \quad (15)$$

The coefficient of dynamic friction

$$\mu = \frac{2\pi^2 d}{g T^2}, \quad (16)$$

can now be measured by measuring the time period of oscillation T and distance d between the axles. It is obvious from the above equation that if the distance d between the axles is increased then the time period of oscillation T also increases. Obviously, for better accuracy, large separation between the axles is desired since it would not only lessen the errors involved in the measurement of separation distance d but also reduces the errors in the time period measurements.

III. THE EQUATION OF MOTION OF A MASS SHEDDING VEHICLE

A fixed torque vehicle applies fixed force since radii of its wheels are fixed. The problem of the motion of a mass shedding fixed torque vehicle moving against friction is equivalent to motion of a mass shedding rocket moving by applying fixed force against atmospheric friction provided frictional force is proportional to its variable mass which in turn is proportional to its length (atmospheric friction is likely to be proportional to its length since viscous drag depends upon the dimensions of the object).

Let M be the mass of a vehicle (including the fuel and the load) at the start of the journey which is shedding mass at a constant rate of r per unit time. The force that it applies to overcome frictional force and maintain its initial speed is $\mu g M$ which remains constant throughout as per the statement of the problem. The frictional force is assumed to be proportional to the weight of the vehicle at any instant with μ, g being the coefficient of friction and acceleration due to gravity, respectively. The net force at time t is obviously $\mu g M - \mu g (M - rt) = \mu g r t$ so that acceleration $\frac{dv}{dt}$ at time t is given by

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g r t}{M - r t}, \quad (17)$$

and hence velocity v at time t can be obtained from the following equation

$$v = \int \frac{\mu g r t}{M - r t} dt + c, \quad (18)$$

where c is a constant of integration. Changing variable from t to $x = rt$, one obtains

$$v = \frac{\mu g}{r} \int \frac{x}{M - x} dx + c. \quad (19)$$

The first term of the right hand side of the above expression can be integrated to provide

$$v = \frac{\mu g}{r} \left[M \ln \left(\frac{1}{M - x} \right) - x \right] + c. \quad (20)$$

which with the initial condition that when $t = 0$, $v = u$ yields $c = u + \frac{\mu g}{r} M \ln M$ where u is the initial velocity of the vehicle. Therefore, the velocity v at time t of a fixed torque mass shedding vehicle moving against friction is

$$v = u + \frac{\mu g}{r} \left[M \ln \left(\frac{M}{M - x} \right) - x \right]. \quad (21)$$

where $x = rt$ is the amount of mass shed up to time t .

In case of a rocket the term μg can be replaced by some other constant k and then it would mean that the engine of the rocket applies a constant force of magnitude kM necessary to overcome atmospheric friction required initially and the atmospheric friction at any instant of time

is proportional to its mass (which is proportional to its length) with k as the constant of proportionality.

IV. THE EQUATION OF PATH OF AN OBJECT TRACKING MISSILE

A missile is fired at a rectilinearly moving target when it is closest to it and hence the line joining the missile and the target is perpendicular to the straight line along which the target is moving with a constant velocity u . The missile is moving with a constant speed of v and is directed at every instant of time towards the moving target. Let l be the distance of closest approach when the missile starts moving towards the target. After time t , let $s(x, y)$ be the length of the curvilinear path travelled by the missile which is moving with a constant speed v . Since the missile is directed at every instant towards the rectilinearly moving target, the tangent on curvilinear path of the missile meets the target at any instant of time t and therefore

$$\begin{aligned} vt &= s(x, y) \\ ut &= y + (l - x) \frac{dy}{dx}, \end{aligned} \quad (22)$$

assuming that the line joining the missile and the target at $t = 0$ as the x-axis which is perpendicular to the straight line y-axis along which the target is moving with constant velocity u and position of the missile at $t = 0$ to be the origin of the co-ordinate system. From the above two equations one obtains

$$y + (l - x) \frac{dy}{dx} = \frac{u}{v} s, \quad (23)$$

which can be differentiated with respect to x to yield

$$\beta \frac{ds}{dx} = \frac{dy}{dx} + (l - x) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = (l - x) \frac{d^2y}{dx^2}, \quad (24)$$

where $\beta = \frac{u}{v}$ is a constant of motion. Putting $\frac{dy}{dx} = p$, the above equation reduces to

$$\beta \sqrt{1 + p^2} = (l - x) \frac{dp}{dx}. \quad (25)$$

Since $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $\frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + p^2}$.

Therefore, solution of the above equation is

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \beta \int \frac{dx}{(l-x)} + c_1, \quad (26)$$

where c_1 is a constant of integration. Evaluating the integrals on both sides provide

$$\sinh^{-1} p = -\beta \ln(l - x) + c_1, \quad (27)$$

But at $t = 0$, $x = 0$ and $p = \frac{dy}{dx} = 0$ since the x-axis is chosen in the direction perpendicular to the straight line y-axis along which the target is moving and position of the missile is chosen to be the origin of the co-ordinate system at $t = 0$. This initial condition yield $c_1 = \beta \ln l$ and $\sinh^{-1} p = \beta \ln \left(\frac{l}{l-x}\right)$. Therefore

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh \left[\beta \ln \left(\frac{l}{l-x}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{l}{l-x}\right)^\beta - \left(\frac{l}{l-x}\right)^{-\beta} \right], \quad (28)$$

and integrating both the sides of the above equation yields

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{l^{-\beta} (l-x)^{1+\beta}}{1+\beta} - \frac{l^\beta (l-x)^{1-\beta}}{1-\beta} \right] + c_2, \quad (29)$$

where c_2 is another constant of integration. Since at $t = 0$, both $x = 0$ and $y = 0$, imply $c_2 = \frac{l\beta}{1-\beta^2}$. Therefore the equation of the path of a missile directed at every instant towards rectilinearly moving target is given by

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{l^{-\beta} (l-x)^{1+\beta}}{1+\beta} - \frac{l^\beta (l-x)^{1-\beta}}{1-\beta} \right] + \frac{l\beta}{1-\beta^2}. \quad (30)$$

Let T be the time taken by the missile to hit the target after leaving the station. Then when $x = l$ and $t = T$, Eq. (22) provides

$$uT = y(x = l). \quad (31)$$

From Eq. (30), $y(x = l) = \frac{l\beta}{1-\beta^2}$ and therefore,

$$T = \frac{y(x=l)}{u} = \frac{l\beta}{u(1-\beta^2)} = \frac{lv}{v^2 - u^2}, \quad (32)$$

using $\beta = \frac{u}{v}$. The above equation tells that $v > u$ for the missile to hit the target.

V. SUMMARY

In this short note, we correct an expression for relation between differential cross sections in the laboratory and the centre of mass systems for binary collision, describe a method of measuring the coefficient of dynamic (or kinetic) friction, provide a solution of the simple rocket problem with air drag and solve the pursuit problem for a tracking missile such as the asteroid or comet destructing missiles.

REFERENCES

- [1] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, (McGraw-Hill, Kogakusha Ltd., 1955).
- [2] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, (Addison-Wesley, Publishing Company Inc., 1950).

Another look at the projectile motion



Célia A. de Sousa

*Departamento de Física, Universidade de Coimbra,
P-3004-516 Coimbra, Portugal.*

E-mail: celia@teor.fis.uc.pt

(Received 17 January 2012, accepted 23 March 2012)

Abstract

This paper discusses the traditional problem of the projectile motion by alternative approaches. The usual assumption of neglecting air resistance is considered. We verify that the vector method based on the whole position vector gives significant pedagogical advantage when compared with the decomposition method alone. We also show that the approaches stressing the concept of linear momentum and the conservation of energy play an essential role. The methodology based on the notion of first integrals of motion gives an overview on this topic, showing the interplay and complementarity of the different descriptions.

Keywords: Kinematics, projectile motion.

Resumen

Este artículo discute el problema tradicional del movimiento de un proyectil en enfoques alternativos. El supuesto habitual de dejar de lado la resistencia del aire es considerado. Verificamos que el método vectorial basado en la posición total del vector da ventaja pedagógica significativa cuando se compara solo con el método de descomposición. También se muestra que los enfoques dan hincapié al concepto de cantidad de movimiento y la conservación de la energía juega un papel esencial. La metodología basada en la noción de las integrales primeras del movimiento ofrece una visión general sobre este tema, mostrando la interacción y la complementariedad de las diferentes descripciones.

Palabras clave: Cinemática, movimiento de proyectiles.

PACS: 45.40.Gj; 45.20.dg; 01.40.gb

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Projectile motion is a topic that students of the scientific areas learn at secondary school. Even when this subject is revisited in the introductory courses of physics in the university, students are typically invited to memorize and apply a pre-established prescription. This methodology is based on the traditional decomposition into two independent motions. As a matter of fact, we can observe that the generality of the textbooks only consider this traditional approach that is followed by teachers in the classroom. At this level, it would be expected that students could be stimulated to apply new points of view to such a familiar problem.

Several articles and notes have discussed the problem of projectile motion in two-dimensions in the absence of air resistance [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. Some of them discuss interesting aspects like the orthogonality of initial and final velocities for the maximizing parabolic trajectory [3, 4]. In general, authors combine vectorial and analytical methods to obtain the main results. An alternative description which includes the concepts of angular momentum and torque to

solve some aspects of this problem has also been considered [8].

In the present paper the projectile problem is revisited. The usual assumption of constant acceleration of gravity \vec{g} and absence of air resistance will be made. Besides the traditional approach, three complementary methods are presented. The most straightforward method takes advantage of the whole position vector, with calculus being kept to a minimum. We report this situation by addressing two exploratory examples that are typically used by teachers to introduce this subject. A next step applies impulse-momentum and kinetic-energy theorems, stressing momentum and energy variables. Finally, a first integrals method gives an overview of the projectile problem, allowing a natural link between dynamical equations and constants of motion, *i.e.*, quantities whose values do not change along the entire path of the particle [9]. So, the variety of descriptions and points of view allows to get a deep understanding of this subject, making it a theoretical tool with a didactic interest in physics or mathematics courses. To prove the reliability of the nonconventional methods as powerful alternatives for solving problems of

projectile motion in two-dimensions, two illustrative problems are also included.

We remember that the existence of conserved quantities of an isolated mechanical system is associated with its invariance under the Galilean group. However, it is also possible to prove the existence of other constants of motion rather than the well known quantities arising from space-time symmetries as the laws of conservation of momentum and energy [10]. Some of the constants of motion can depend explicitly on time.

Independently of the method used, we will also show that the velocity vector plays a crucial role. Within the methodology addressing the law of conservation of energy, this is visible in the way the equation of the trajectory can be calculated. Here we suggest the condition of parallelism between the velocity vector and the tangent to the trajectory. So, this procedure also illustrates the application of simple mathematical tools to physics, a barrier that some students have difficulty to overcome. However, it is worthwhile showing that the problems suggested can be solved even with a simple high school level of algebra, which most students taking an intermediate physics course at the university are supposed to be familiar with.

II. TRADITIONAL TREATMENT

For convenience and comparative purposes, we start with a summary of the traditional approach to the projectile motion. This motion has a constant acceleration $\vec{a} = \vec{g}$, so the position vector as a function of time is given by

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \quad (1)$$

where \vec{r}_0 and \vec{v}_0 are the initial values of position and velocity vectors, respectively.

Using this approach, let us address an illustrative example of projectile motion which corresponds to the simpler physical situation ($\vec{r}_0 = 0$), being in general used by teachers to introduce this subject.

Example 1. A particle is thrown upward at an angle α to the horizontal and with an initial speed v_0 . Determine the time of flight of the particle, the maximum range and height, and the equation of the trajectory.

The traditional methodology is based on the decomposition of the two-dimensional motion into the horizontal and vertical components, where the discussion of the velocity vector and its components (see Fig. 1) play a fundamental role.

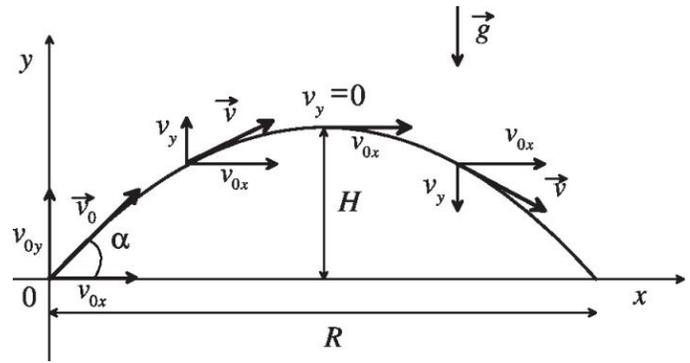


FIGURE 1. Parabolic trajectory of a projectile which leaves the origin with a velocity \vec{v}_0 at an angle α . The components and the velocity vector in four point of the path are shown.

The relevant quantities of the projectile problem are summarized in the following expressions:

$$\text{Range, } x = v_0 \cos \alpha t, \quad (2)$$

$$\text{Height, } y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (3)$$

$$\text{Time of flight, } T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (4)$$

$$\text{Maximum range, } R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad (5)$$

$$\text{Maximum height, } H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha, \quad (6)$$

$$\text{Parabolic trajectory, } y = \tan \alpha x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (7)$$

III. APPROACH BASED ON ELEMENTARY VECTOR ANALYSIS

After the presentation of the projectile motion, which starts with the equations of motion for each of the two dimensions, teachers can show the advantage and versatility of exploring geometrical and analytical aspects of the problem through whole vectors and its addition. The importance of using whole vectors in mechanics has been pointed out by Wheeler [11]. However, with few exceptions [12], this approach is absent from the literature and the classroom teaching. For *example 1*, the position vector of the projectile as a function of time follows directly from (1) with $\vec{r}_0 = 0$:

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2. \quad (8)$$

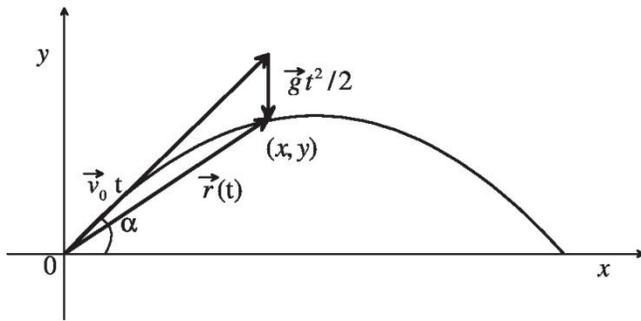


FIGURE 2. Position vector of a projectile with coordinates (x, y) at the instant t as the addition of two displacement vectors: the vector $\vec{v}_0 t$ if the gravity were absent, and the vector $\vec{g} t^2 / 2$ arising from the gravity.

This expression is represented in Fig. 2 showing the addition of two terms: (1) $\vec{v}_0 t$ is the displacement if no acceleration were present resulting from the initial velocity of the particle, and (2) $\frac{1}{2} \vec{g} t^2$ is the vertical displacement arising from the gravity. This deepens and gives a new insight to the meaning of the projectile problem as a superposition of two independent motions:

- (i) constant velocity motion in the horizontal direction;
- (ii) free-fall motion in the vertical direction with some initial velocity.

In addition, the time of flight t is a parameter that established the necessary link between the two components, which are completely independent of each other. This aspect is important for the methodology presented in section 5.

At this point teachers can show that (2) and (3) can be obtained directly from the projection of the vectors presented in Fig. 2. However, the purpose of this section is to point out a method that analyses whole vector instead of its components. An important point of this methodology starts with the rule of addition of vectors as illustrated. This is relevant bearing in mind the difficulties of students of introductory physics with vectorial calculus. This vectorial analysis is a good complement to the traditional approach of the previous section and is easily generalized to problems with other initial conditions. So, let us address a second general example where $\vec{r}_0 \neq 0$.

Example 2. A particle is thrown from the top of a building upward at an angle α to the horizontal and with an initial speed v_0 . The height of the building is h . Determine the time of flight and the maximum distance from the building when the particle reaches the ground (Fig. 3).

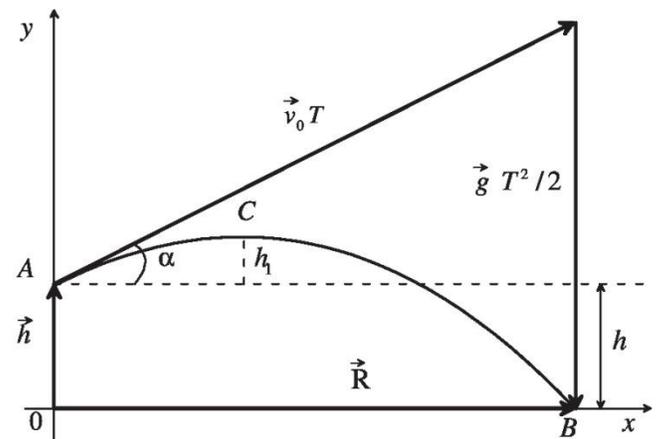
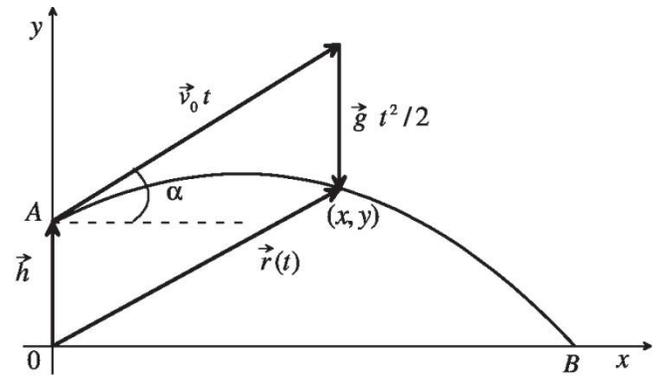


FIGURE 3. Kinematical quantities of a projectile problem at the instant t (upper) and at the total time of flight T (lower) where the range R is attained.

In this case the position vector at the instant t is given by the addition of three vectors:

$$\vec{r} = \vec{h} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2. \quad (9)$$

In Fig. 3, we illustrate this generalization showing the different displacements at a generic instant t and at the time of flight T .

As the given quantities are: v_0 , α and h , by using elementary trigonometry, the time of flight T and the maximum range R are easily calculated. To this purpose we write (see Fig. 3, lower part)

$$\frac{1}{2} g T^2 - h = v_0 T \sin \alpha, \quad (10)$$

$$R = v_0 T \cos \alpha. \quad (11)$$

From these two equations we obtain the time of flight:

$$T = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \left(1 + (1 + 2gh/v_0^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \right), \quad (12)$$

and the maximum range:

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \left(1 + (1 + 2gh/v_0^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \right). \quad (13)$$

In the limit $h = 0$ the Eqs. (4) and (5) for time flight and the maximum range, written in the previous section, are recovered.

IV. IMPULSE-MOMENTUM AND WORK-ENERGY THEOREMS: CONSERVATION OF MOMENTUM AND ENERGY

The impulse-momentum and work-energy theorems are tools that students usually appreciate to solve problems. However, teachers do not in general motivate students to look at these theorems to analyse projectile behavior. As a further step, we may introduce explicitly this point of view, showing that the conservation of energy can also be useful.

A. Analytical development

The impulse of a force over time produces a change in the momentum $\vec{p} = m\vec{v}$, where m is the mass of the particle. It is defined by the integral of the applied force over the time interval 0 and t , allowing for the so-called impulse-momentum theorem:

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \Delta \vec{p}, \quad (14)$$

which is the integral form of Newton's second law.

Let us illustrate the application of this procedure to *example 2*. Substituting $\vec{F} = m\vec{g}$ in this theorem and simplifying, we find the standard kinematic expressions

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha, \quad (15)$$

$$gt + v_y = v_{0y} = v_0 \sin \alpha. \quad (16)$$

It may be noted that the first of these equations corresponds to the conservation of the momentum along the x axis, which is a consequence of the absence of any force in the horizontal direction.

The work done by a force over displacement produces a change in the kinetic energy, K , of the particle upon it acts. The integral is now defined over a displacement, allowing for the work-energy theorem for the particle:

$$W = \int_0^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta K. \quad (17)$$

As the gravitational force is a conservative one, this is equivalent to the conservation of total mechanical energy of the system particle-Earth. In fact, a conservative force acts between the members of the system; the point of application of the force undergoes a displacement, and work is done by the force. The corresponding potential energy function $U(y)$ changes according to $W = -\Delta U$. So, we can write for the particular case of *example 2*, the law of conservation of energy

$$mgy + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = mgh + \frac{1}{2}m(v_{0x}^2 + v_{0y}^2), \quad (18)$$

where the zero point for potential energy is defined at $y = 0$.

Since $v_x = v_{0x}$, the previous equation can be simplified:

$$gy + \frac{1}{2}v_y^2 = gh + \frac{1}{2}v_{0y}^2. \quad (19)$$

We remark that (18) expresses the conservation of total mechanical energy: $E(v_x, y, v_y) = E_1(v_x) + E_2(y, v_y) = \text{const}$.

In fact, the total mechanical energy is given by $E(v_x, y, v_y) = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + mgy$ coming from the summation of

$$E_1(v_x) = \frac{1}{2}mv_x^2 \text{ and}$$

$$E_2(y, v_y) = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy, \text{ both constants.}$$

In this methodology we obtain the components of the velocity

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (20)$$

and

$$v_y = \pm (v_0^2 \sin^2 \alpha + 2g(h - y))^{1/2}, \quad (21)$$

where v_y is a function of y .

The last equations are very convenient to obtain the equation of the trajectory. In fact, since the velocity vector is tangential to the trajectory at every point, the differential equation of the trajectory of the particle follows directly from the requirement

$$d\vec{r} \wedge \vec{v} = 0, \quad (22)$$

¹ In the Hamiltonian or Lagrangian formalism we say that x is a cyclic coordinate, which implies that the x component of the momentum is a constant of motion. The conservation of energy comes from the absence of t in the energy function.

involving the vector cross product of \vec{v} and $d\vec{r}=dx\hat{i}+dy\hat{j}$, where \hat{i} and \hat{j} are the Cartesian unit vectors along x and y , respectively.

This condition can be expressed as

$$v_y dx - v_x dy = 0. \quad (23)$$

In this case, the insertion of (20) and (21) into (23) allows to obtain

$$\left(v_0^2 \sin^2 \alpha + 2g(h-y)\right)^{-1/2} dy - \frac{1}{v_0 \cos \alpha} dx = 0, \quad (24)$$

which on integration yields

$$\left(v_0^2 \sin^2 \alpha + 2g(h-y)\right)^{1/2} + \frac{gx}{v_0 \cos \alpha} = \text{const.} \quad (25)$$

It is worth noting that if $h=0$, then the equation of the parabolic trajectory (7) is recovered.

B. Application

Now, let us consider a problem, adapted from Serway and Beichner [12], that shows as the combination of the vectorial analysis with the conservation of energy can be a very convenient tool.

Problem 1. A particle of mass $m=0.5\text{ kg}$ is shot from point A at the top of a building. The particle has an initial velocity \vec{v}_0 with a horizontal component of 30 m/s . The height of the building is $h=60\text{ m}$ and the particle rises to a maximum height $h_1=20\text{ m}$ at point C , and reaches the ground at point B (see Fig. 3). Determine, using the value $g=9.8\text{ m/s}^2$:

- (i) the vertical component of \vec{v}_0 ,
- (ii) the time of flight of the particle and the maximum distance from the building when the particle reaches the ground,
- (iii) the work done by the gravitational force on the particle during its motion from A to B , and
- (iv) the horizontal and vertical components of the velocity vector when the particle reaches B .

Solution

- (i) The conservation of energy (18) applied to the initial position A and to point C where $v_y=0$, together with $v_x=v_{0x}$, allow to obtain the vertical component of the initial velocity:

$$v_{0y} = \sqrt{2gh_1} = 19.8\text{ m/s}. \quad (26)$$

Another look at the projectile motion

- (ii) The time of flight and the maximum range can be obtained by geometry as illustrated in the lower part of Fig. 3 (see also (10) and (11)), giving $T=6.1\text{ s}$ and $R=181.8\text{ m}$.
- (iii) The work can be provided by the variation of potential energy, yielding

$$W_{AB} = -(U_B - U_A) = mgh = 294.0\text{ J}. \quad (27)$$

- (iv) Applying again the conservation of energy to points A and B it is straightforward to calculate the components of the velocity at position B :

$$v_y = -\sqrt{2g(h_1+h)} = -39.6\text{ m/s}, \quad (28)$$

and

$$v_x = 30\text{ m/s}. \quad (29)$$

V. APPROACH BASED ON FIRST INTEGRALS OF MOTION

For advanced students, we can go further giving a new insight into the equations obtained in the previous sections. As already referred, the projectile motion can be decomposed into two components characterized by four dynamical variables: x , v_x , y and v_y . These dynamical variables, which specify the state of the system, are functions of time t , parameter which provides the necessary connection between the two components.

Meanwhile, there exist functions of the dynamical variables and, eventually of the time, the so-called integrals of motion [9], whose values remain constant during the motion, and depend only on the initial conditions. So, we present a methodology that allows to interpret the equations of the projectile problem as first integrals of motion, which corresponds to constants of motion. This method, here presented at an elementary level, was formulated in a more formal way [13], following a methodology proposed by Wittaker [14]. We remember that the traditional way to obtain constants of motion comes from a much more elaborated mathematical framework based on space-time symmetries and cyclic coordinates [9].

To discuss, from a pedagogical viewpoint, how constants of motion can be extracted and used to analyse the projectile behavior, let us consider the following illustrative problem [15], to be explicitly solved later.

Problem 2. An elastic ball is dropped on a long inclined plane at point A . It bounces, hits the plane again, bounces, and so on. Let us label the distance between the points of the first and the second hit d_{12} , and the distance between the points of the second and the third hit d_{23} . Find the ratio d_{12}/d_{23} .

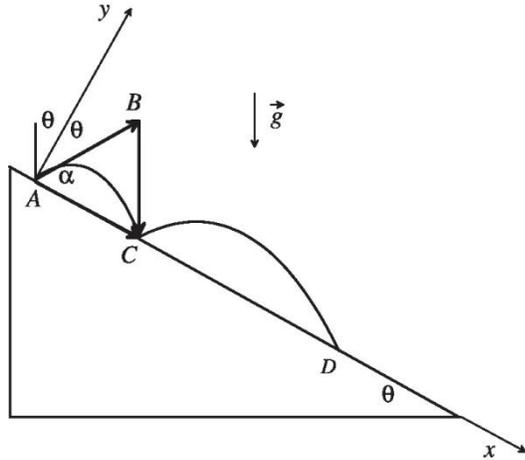


FIGURE 4. Trajectory of an elastic ball on an inclined plane. The triangle ABC is isosceles. The magnitude of the vectors indicated are given by $AB = v_0 t_C$ and $BC = \frac{1}{2} g t_C^2$, and θ and α are complementary angles.

A. Analytical development

The referential indicated in Fig. 4 is the most convenient to solve the problem. According to this referential, the relevant information can be written as

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \hat{i} + v_0 \sin \alpha \hat{j}, \tag{30}$$

$$\vec{g} = g \cos \alpha \hat{i} - g \sin \alpha \hat{j}. \tag{31}$$

We start with the definitions:

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \frac{dy}{dt} = v_y, \frac{dv_x}{dt} = g \cos \alpha, \frac{dv_y}{dt} = -g \sin \alpha. \tag{32}$$

As t is a common parameter of (32), we can also write

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dv_x}{g \cos \alpha} = \frac{dv_y}{-g \sin \alpha} = \frac{dt}{1}. \tag{33}$$

This leads to a set of rearrangements of the differential equations involved, which are going to be analyzed in detail. This procedure allows to find first integrals for this system which corresponds to constants of motion.

1. To obtain the first constant of motion C_1 , we start with the relation

$$v_x dv_x = g \cos \alpha dx, \tag{34}$$

showing that, by direct integration,

$$C_1 = \frac{1}{2} v_x^2 - g \cos \alpha x = \frac{1}{2} v_0^2 \cos^2 \alpha. \tag{35}$$

2. Analogously, from equation

$$v_y dv_y = -g \sin \alpha dy, \tag{36}$$

we get, on integration, a second constant of motion

$$C_2 = \frac{1}{2} v_y^2 + g \sin \alpha y = \frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \alpha. \tag{37}$$

Before pursuing, it should be emphasised that the constants of motion C_1 and C_2 are actually compatible with the conservation of total mechanical energy: $E(x, v_x, y, v_y) = E_1(x, v_x) + E_2(y, v_y) = \text{const}$, where

$$E_1 = m C_1 = \frac{1}{2} m v_x^2 - m g \cos \alpha x \text{ and}$$

$$E_2 = m C_2 = \frac{1}{2} m v_y^2 + m g \sin \alpha y, \text{ both constants.}$$

3. Once again, from the relation

$$dv_x = g \cos \alpha dt, \tag{38}$$

we get a new constant of motion

$$C_3 = v_x - g \cos \alpha t = v_0 \cos \alpha. \tag{39}$$

4. Analogously, from the equation

$$dv_y = -g \sin \alpha dt, \tag{40}$$

we obtain

$$C_4 = v_y + g \sin \alpha t = v_0 \sin \alpha. \tag{41}$$

The equations of motion (39) and (41) correspond to the impulse-momentum theorem along the x and y directions, respectively. The interesting point is that these two constants of motion C_3 and C_4 depend explicitly on time t . This is intimately related to the presence of a force along both axes x and y .

5. There are more three relations from (33):

$$v_x dv_y = -g \sin \alpha dx, \tag{42}$$

$$v_y dv_x = g \cos \alpha dy, \tag{43}$$

and

$$\frac{dv_x}{\cos \alpha} = -\frac{dv_y}{\sin \alpha}, \tag{44}$$

that yield the same conclusion:

$$C_5 = \frac{v_x}{\cos \alpha} + \frac{v_y}{\sin \alpha} = 2 v_0. \tag{45}$$

Straightforward mathematical manipulations show that this equation can also be obtained by combining Eqs. (39) and (41).

6. Finally, the differential equation $v_x dy - v_y dx = 0$ is also contained in (33), which on integration gives the equation of the trajectory as already illustrated in the previous section.

The mathematical derivations presented here can be simplified in situations, like *Example 1*, where v_x is itself a constant of motion [13].

So, starting with the dynamical equations, we can find constants of motion of this classical problem with two degrees of freedom. With some of these equations, it is easy to solve the problem proposed. The remaining equations can be used to check the solution of the problem we are dealing with.

B. Solution of problem 2

Applying (41) to the flight phase between first and second hit one can show that the time to get the maximum distance from the inclined plane is given by v_0/g . So, the time spent in each flight is $t_c = 2v_0/g$. The vectorial construction in Fig. 4, which shows that the triangle *ABC* is isosceles, confirms this result.

At point *C*, the components of the velocity can be calculated through (39) and (41), yielding

$$v_x = 3v_0 \cos \alpha, \quad (46)$$

and

$$v_y = -v_0 \sin \alpha. \quad (47)$$

After the elastic ball-plane collision the takeoff velocity components are $v_x = 3v_0 \cos \alpha$ and $v_y = v_0 \sin \alpha$. This indicates that in the next flight phase the maximum distance from the inclined plane is the same of the first flight and the range is larger.

The displacement along the plane follows from (35) and (46):

$$d_{12} = \frac{1}{2} \frac{v_x^2}{g \cos \alpha} - \frac{1}{2} \frac{v_y^2}{g} \cos \alpha = \frac{4v_0^2}{g} \cos \alpha. \quad (48)$$

Equation (37) confirms that $y=0$ at point *C*.

At point *D*, it is easy to show that the components of the velocity are:

$$v_x = 5v_0 \cos \alpha, \quad (49)$$

and

$$v_y = -v_0 \sin \alpha. \quad (50)$$

Another look at the projectile motion

This result indicated that the time of each flight is, in fact, the same.

Using a procedure similar to the previous one we obtain

$$d_{23} = \frac{8v_0^2}{g} \cos \alpha, \quad (51)$$

showing that

$$\frac{d_{12}}{d_{23}} = \frac{1}{2}. \quad (52)$$

The extra Eq. (45) can be used to check the values obtained for the components of the velocity at points *C* and *D*. We invite the reader to obtain other interesting aspects of this challenge problem as, for instance, the location of the maximum distance from the plane attained in each flight.

VI. CONCLUSIONS

We have discussed the projectile motion, where the usual assumption of constant acceleration of gravity and absence of air resistance have been considered. We started with two typical examples which are used as exploratory tools. We have verified that the vector method based on the whole position vector gives significant pedagogical advantage when compared with the decomposition method alone. If we look at several textbook problems, we verify that some aspects can be easily solved by the conjugation of this and other procedures.

For advanced students, the methodology based on the notion of first integrals of motion, gives an overview on this topic, showing the interplay and complementarity of the different descriptions. It can also provide the starting point for the discussion of constants of motion of any classical system. As a matter of fact, these approaches in a familiar problem help students to understand the dynamical content of the conservation laws, and can establish a natural bridge to introduce this topic of fundamental importance in several areas of physics.

In conclusion, the nontraditional approaches invite students to elaborate a general procedure and, after that, they can easily solve the problem. In this way they do not worry about "memorized equations". We verified that this procedure enhances the physical content of the subject when compared with the traditional method. In addition, it is worthwhile showing that this approach can be carried out even with a simple high school level of algebra, which most students of intermediate physics course are supposed to be familiar with. In fact, it should be emphasized that in the first examples no mathematics beyond elementary vectorial calculus and trigonometry was employed. Meanwhile, the more advanced method allows to focus on supplying the mathematical framework of the linear first-order differential equations. The advantage is that this is done in a context that the students were already familiar with from a physical point of view.

ACKNOWLEDGEMENTS

Work supported by FCT and Physics Department.

REFERENCES

- [1] Lichtenberg, D. B. and Wills, J. G., *Maximizing the range of the shot put*, Am. J. Phys. **46**, 546-549 (1978).
- [2] Lucie, P., *Projectile motion revisited*, Am. J. Phys. **47**, 139-141 (1979).
- [3] Palfy-Muhoray, R. and Balzarini, D., *Maximizing the range of the shot put without calculus*, Am. J. Phys. **50**, 181-181 (1982).
- [4] Bose, S. K., *Thoughts on projectile motion*, Am. J. Phys. **53**, 175-176 (1985).
- [5] Glaister, P., *Projectiles on inclined planes*, Phys. Educ. **27**, 269-272 (1992).
- [6] Day, L. H., *Can physics help win the case? A real-world application of an unusual two-dimensional projectile motion situation*, Phys. Educ. **42**, 621-624 (2007).
- [7] Ho, S. Y., Foong, S. K., Lim, C. H., Lim, C. C., Lin, K. and Kuppen, L., *Projectile motion on an inclined misty surface: I. Capturing and analysing the trajectory*, Phys. Educ. **44**, 253-257 (2009).
- [8] Bagchi, B. and Holody, P., *Study of projectile motion by angular momentum and torque*, The Phys. Teach. **29**, 376-377 (1991).
- [9] Landau, L. D. and Lifchitz, E. M., *Mechanics Course of Theoretical Physics Vol. 1*, 3rd Ed. (Pergamon, New York, 1976).
- [10] Prato, D. and Hamity, V. H., *Uniform function constants of motion and their first-order perturbation*, Eur. J. Phys. **26**, 391-399 (2005).
- [11] Wheeler, D., *Calculations with whole vectors: A really easy alternative to components*, Phys. Ed. **36**, 406-409 (2001).
- [12] Serway, R. A. and Beichner, R. J., *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*, 5th Ed. (Saunders College Publishing, Fort Worth, 2000), p. 240.
- [13] Plybon, B. F., *Conservation laws for undergraduates*, Am. J. Phys. **39**, 1372-1376 (1971).
- [14] Whittaker, E. T., *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, (Cambridge, London, 1927), p. 53.
- [15] Korsunsky, B., *Bounce, Bounce, Bounce...*, The Phys. Teach. **42**, 442-442 (2004).



Dragging a string over a step

Roberto De Luca

*Dipartimento di Fisica "E. R. Caianiello", Università degli Studi di Salerno.
Via Ponte don Melillo, 84084 Fisciano (SA), Italy.*

E-mail: rdeluca@unisa.it

(Received 6 February 2012, accepted 29 February 2012)

Abstract

A simple problem in Newtonian mechanics is considered. The problem consists in finding the maximum value of the length x_{UP} of the portion of string slowly dragged on a step of height h , when the string itself is initially placed to match the vertical profile of the step, the remaining part lying on the ground and the final portion being in static equilibrium during the dragging process. A straightforward analysis is required to find the solution. The problem can be proposed in a lecture or a demonstration in class on the role played by the coefficient of static friction in mechanics.

Keywords: Classical Mechanics teaching, static coefficient of friction.

Resumen

Un simple problema de la mecánica newtoniana es considerado. El problema consiste en encontrar el valor máximo de la longitud x_{UP} de la porción de cadena lentamente arrastrado en un paso de altura h , cuando la propia cadena se coloca inicialmente para que coincida con el perfil vertical del paso, la parte restante en el suelo y la porción final de estar en equilibrio estático durante el proceso de arrastre. Un análisis simple se requiere para encontrar la solución. El problema puede ser propuesto en una conferencia o una demostración en clase sobre el papel desempeñado por el coeficiente de fricción estática en la mecánica.

Palabras clave: Enseñanza de la Mecánica clásica, coeficiente de fricción estática.

PACS: 01.40.-d

ISSN 1870-9095

I. THE PROBLEM

Consider a rounded step of height h . A string of length L and linear mass density λ is initially placed in such a way that one end follows the vertical profile of the step and the remaining part lies on an horizontal rough surface as shown in Fig. 1a.

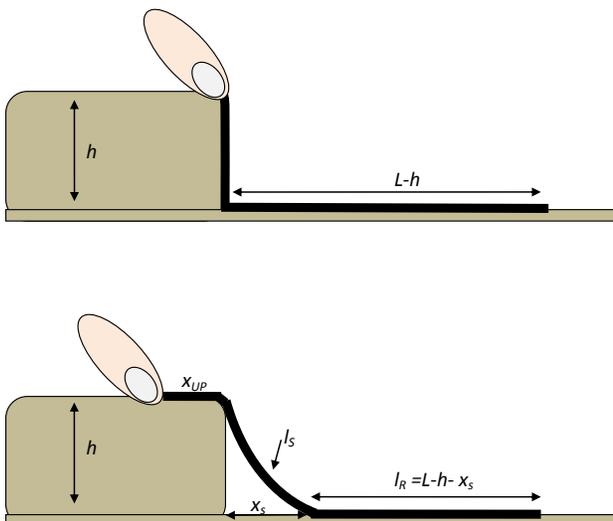


FIGURE 1. a) A portion of a string of length L lies over the vertical profile of a rounded step, the remaining part lies on a horizontal rough surface. The end of the vertical portion is held by a finger at the edge of the step. b) The string is slowly dragged by the finger over the step, while the other end is not moving: the suspended part of the string is seen to have length l_s .

The coefficient of static friction between the surface and the string is μ_s [1]. The string is then slowly dragged from the upper end over the step with a finger, as shown in Fig. 1b, until the other end starts moving.

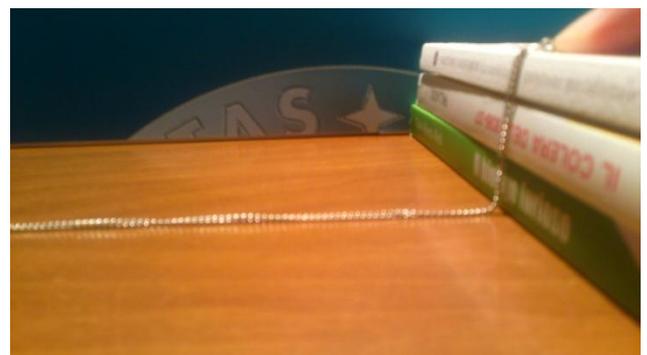




FIGURE 2. a) A small necklace of length L lies over the vertical profile of a pile of books, the remaining part lies on a horizontal surface. The end of the vertical portion is held by a finger at the edge of the step. b) The string is slowly dragged by the finger over the pile of books, while the other end is not moving: the suspended part of the string is seen to take the form of a catenary.

We notice that the portion of the suspended part of the string takes a form of a catenary. Just before the portion of the string lying on the horizontal surface starts moving, we record the value of the horizontal distance x_{UP} (see Fig. 1b) and the distance x_s between the closest point of contact of the string to the lower edge of the step. The evidence that the suspended portion of the string, of length l_s , takes the form of a catenary is well reproduced in Figs. 2a-b, where a small necklace is dragged above a pile of books. Notice that by varying the number of books in the pile one can change the value of h , so that the ratio L/h can be varied by keeping either h or L fixed.

II. THE SOLUTION

By considering the schematic diagrams in Figs. 3a and 3b, describing the forces acting on the suspended and horizontal portion of the string, respectively, we may find the conditions for static equilibrium. In particular, for the suspended portion of the string, by setting the resultant force equal to zero [1], we have:

$$\begin{aligned} T_A \cos \theta &= T_B \\ T_A \sin \theta &= m_s g \end{aligned} \quad (1)$$

Where $m_s = \lambda l_s$, and T_A and T_B are the moduli of the tensions at the cuts shown in Fig. 3a.

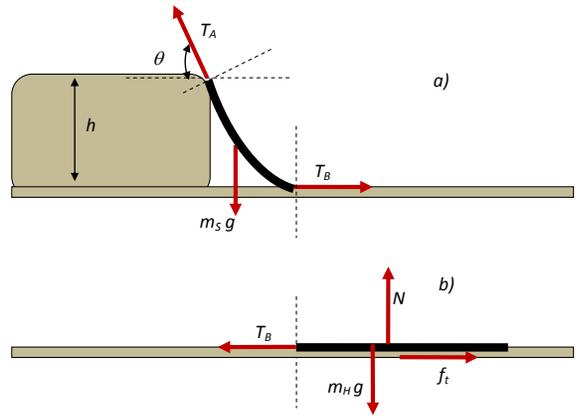


FIGURE 3. a) Suspended portion of the string. Only tensions at both orthogonal cuts are considered. b) Horizontal portion of the string: the friction f_t is sufficient to maintain the system in equilibrium.

On the other hand, for the horizontal portion we write:

$$\begin{aligned} f_t &= T_B \\ N &= m_H g \end{aligned} \quad (2)$$

where $m_H = \lambda l_R = \lambda(L - h - x_s)$ is the mass of the portion of the string lying on the horizontal surface, f_t and N are the moduli of the friction force and of the normal reaction, respectively. By now introducing the phenomenological relation $f_t \leq \mu_s N$ valid for static equilibrium of the system, we consider the case of incipient motion. Therefore, by eliminating the tensions T_A and T_B by means of (1) and (2) and by setting $f_t = \mu_s N$, we obtain:

$$\tan \theta = \frac{l_s}{\mu_s l_R} \quad (3)$$

The expression for l_s can be obtained by the equation of the catenary for the suspended portion of the curve. In fact, by fixing the origin of the x -axis at the same point B where the orthogonal cut to obtain tension T_B is made (see Figs. 3a-b), by taking x positive toward the left, the catenary equation can be written as follows [2]:

$$y(x) = \mu_s l_R \left[\cosh \left(\frac{x}{\mu_s l_R} \right) - 1 \right] \quad (4)$$

Therefore, since $dl = (1 + y'^2)^{1/2} dx$, y' being the derivative of y with respect to x , l_s can be obtained by the following integration:

$$l_s = \int_0^{x_s} \sqrt{1 + y'^2} dx = \mu_s l_R \sinh \left(\frac{x_s}{\mu_s l_R} \right) \quad (5)$$

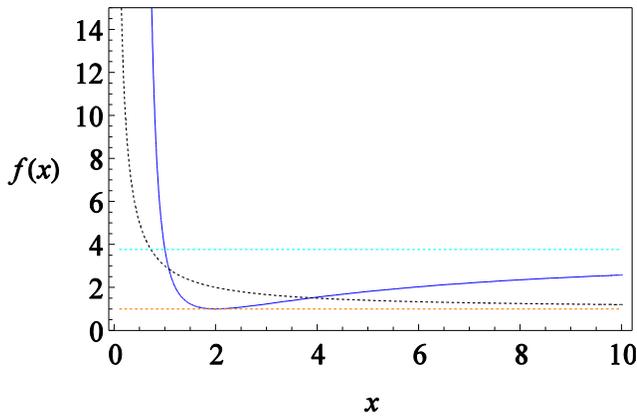
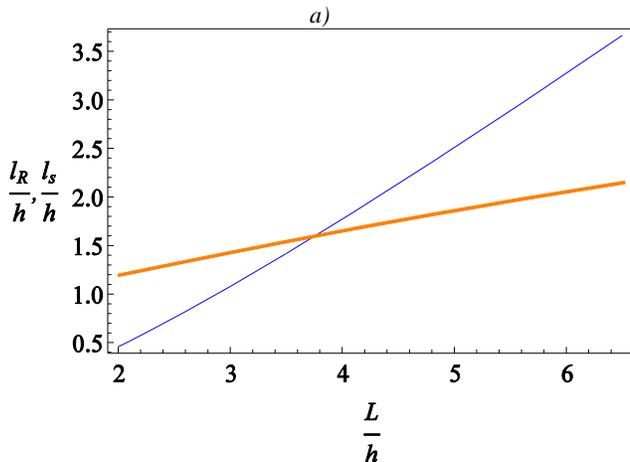


FIGURE 4. Graphical representation of the curves $f_1(x)$ and $f_2(x)$ corresponding, respectively, to the left hand side (blue full line) and to the right hand side (dotted black line) of (8) for $l=3.0$ and $\mu_S=0.5$. The cyan dotted line represents the right horizontal asymptote of $f_1(x)$, while the orange dotted line $f(x)=1$ represents the right horizontal asymptote of $f_2(x)$. Notice that $f(x)=1$ is tangent to $f_1(x)$ at its minimum point at $x=l-1$. Finally notice that only the left intersection at x_l between the curves $f_1(x)$ and $f_2(x)$ gives a meaningful solution for (8), being $x_l < l$.

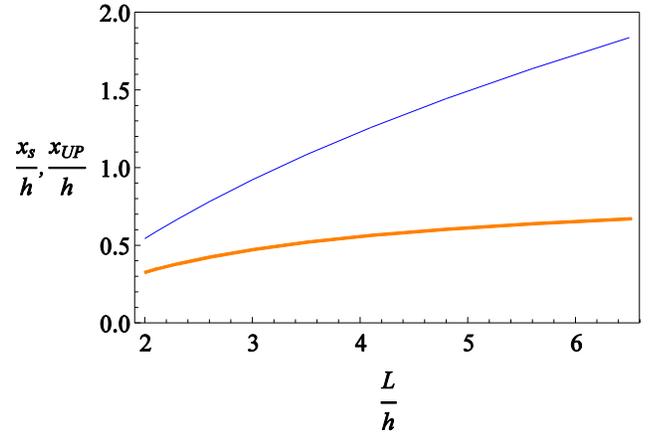
Eq. (4) can be used to obtain a relation between x_S and h , by setting $y(x_S)=h$, so that:

$$h = \mu_S l_R \left[\cosh\left(\frac{x_S}{\mu_S l_R}\right) - 1 \right]. \quad (6)$$

Recalling now that $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, by combining (3), (5), and (6), and by setting $l_R = L - h - x_S$, we have:



Dragging a string over a step
b)



c)

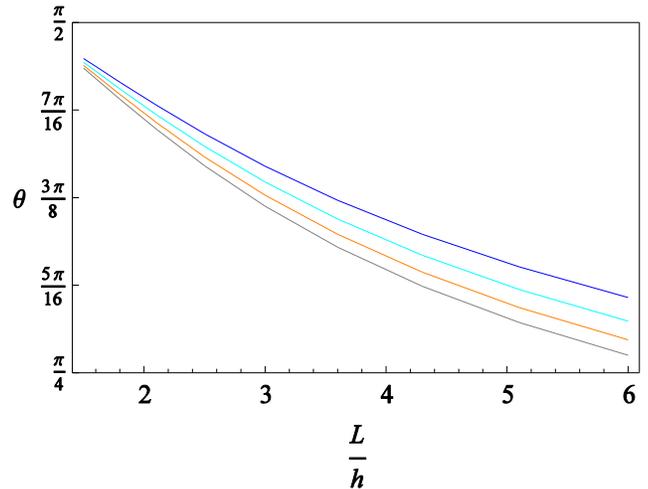


FIGURE 5. Graphical representation of the dependence of the quantities l_R , l_S , x_S , x_{UP} , and θ as functions of $l=L/h$. In particular, in a) l_R (blue line), and l_S (orange line) vs. l curves are reported for $\mu_S=0.5$. In b) x_S (blue line), and x_{UP} (orange line) vs. l curves are shown for $\mu_S=0.5$. Finally, in c) θ vs. l curves are plotted for $\mu_S=0.4$ (blue line), $\mu_S=0.5$ (cyan line), $\mu_S=0.6$ (orange line), and $\mu_S=0.7$ (gray line).

$$\cosh\left(\frac{L-h}{\mu_S l_R} - \frac{1}{\mu_S}\right) = 1 + \frac{h}{\mu_S l_R}; \quad (7a)$$

$$\cos \theta = \left(1 + \frac{h}{\mu_S l_R}\right)^{-1}. \quad (7b)$$

By solving numerically (7a) for l_R , we can obtain θ from (7b) and, by the knowledge of the latter two quantities, we can get l_S , $x_{UP}=L-l_S-l_R$, and x_S .

III. NUMERICAL RESULTS

We can solve Eq. (7a) numerically for $x=l_R/h$ in terms of the parameters μ_S and $l=L/h$. Let us thus write Eq. (7a) as follows:

$$\cosh\left(\frac{l-1}{\mu_S x} - \frac{1}{\mu_S}\right) = 1 + \frac{1}{\mu_S x}. \quad (8)$$

The functions $f_1(x)$ and $f_2(x)$ on the right and left hand side of Eq. (8), respectively, are represented in Fig. 4 for $l=3.0$ and $\mu_S=0.5$. By the rule we can argue from Fig. 4, for which only the left intersection represents the meaningful solution to (8), we obtain the solutions in terms of l , reported in Figs. 5a-c for fixed values of μ_S . Notice that, for increasing values of the normalized length of the string $l=L/h$, the quantities l_R , l_S , x_S , x_{UP} increase. However, as shown in Fig. 5a, the derivative of l_R with respect to l , for a given value of the latter normalized quantity, is always greater than the derivative of l_S for the same value of l . Similarly, in Fig. 5b we may notice that the derivative of x_S with respect to l , for a given value of the latter normalized quantity, is always greater than the derivative of x_{UP} for the same value of l . In Fig. 5c, finally, we may notice that the derivatives of all θ vs. l curves are negative for any value of l in the represented range of values of the latter quantity.

The behavior of the curves shown in Figs. 5a-b can be justified by the higher value the friction force obtained by increasing l , μ_S being kept constant.

In Figs. 6a-c we show the quantities l_R , l_S , x_S , x_{UP} , and θ in terms of the coefficient of static friction μ_S for fixed values of l . As it can be noted from the l -dependence of the distances l_S , x_S , and x_{UP} , a positive derivative with respect to μ_S is detectable in Figs. 6a-b, differently from the decreasing behavior of l_R for increasing values of μ_S in Fig. 6a. In Fig. 6c one notices that all curves attain a negative derivative. Furthermore, in the same Fig. 6c one may see that, for a fixed value of l , the angles θ are lower as μ_S increases from 0.4 to 0.7, coherently with what shown in Fig. 5c.

IV. CONCLUSIONS

By studying a rather straightforward problem, we are able to illustrate the role played by the coefficient of static friction in Newtonian mechanics. The solution to the problem can be found by elementary principles in mechanics and results can be represented graphically by means of numerical analysis. Furthermore, given the rather simple experimental setup required to reproduce the system in real terms, a classroom demonstration experiment can be performed to illustrate the meaning of the coefficient of static friction in mechanics. The content of the present work can be part of a lecture addressed to advanced high-school students or to first-year college students.

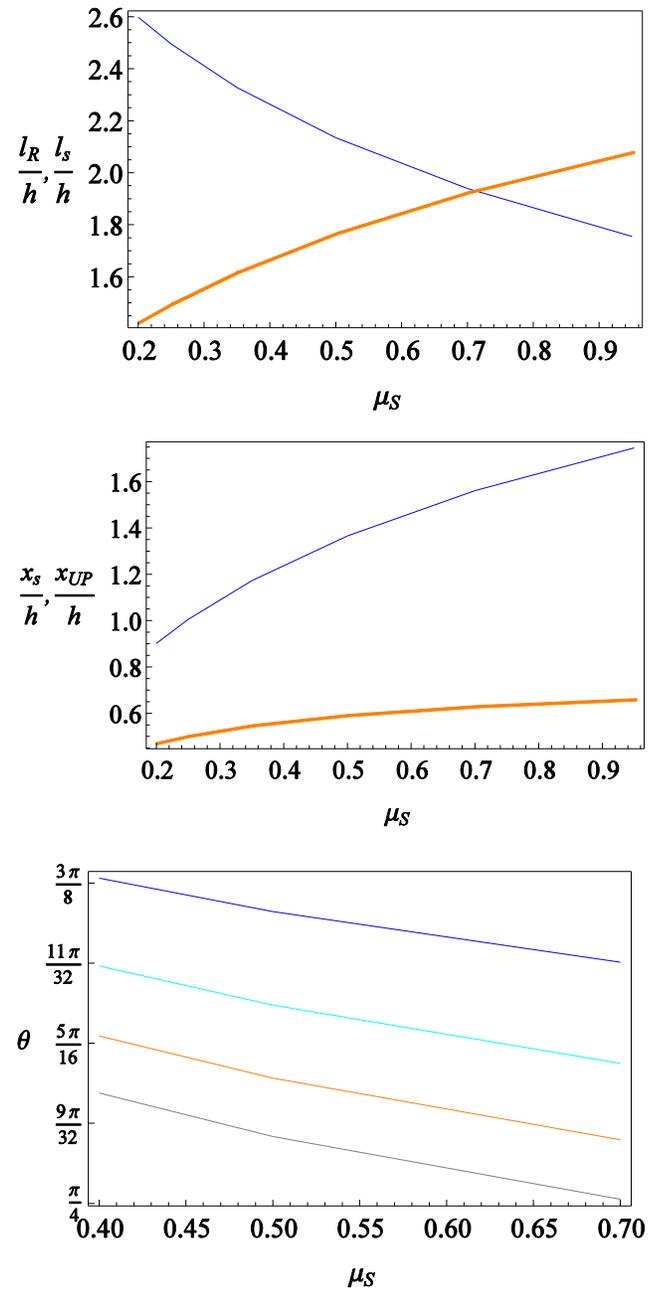


FIGURE 6. Graphical representation of the dependence of the quantities l_R , l_S , x_S , x_{UP} , and θ as functions of μ_S . In particular, in (a) l_R (blue line), and l_S (orange line) vs. μ_S curves are reported for $l=4.5$. In (b) x_S (blue line), and x_{UP} (orange line) vs. μ_S curves are shown for $l=4.5$. Finally, in (c) θ vs. μ_S curves are plotted for $l=3.5$ (blue line), $l=4.5$ (cyan line), $l=5.5$ (orange line), and $l=6.5$ (gray line).

REFERENCES

- [1] Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., *University Physics*, 5th Ed. (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1977).
- [2] Beer, F. P., Johnston, E. R., *Vector Mechanics for Engineers*, 3rd Ed. (McGraw-Hill, New York, 1977), pp. 297-299.

Bowing effect on energy conservation in an incline experiment



Chunfei Li

Department of Physics, Clarion University, Clarion, PA 16214.

E-mail: cli@clarion.edu

(Received 15 December 2011, accepted 28 February 2012)

Abstract

Incline experiments with a car travelling down dynamic track are performed to demonstrate mechanical energy conservation under the assumption that there is no friction. Data analysis revealed cases when mechanical energy seems to increase as the car travels down incline, contradictory to the expectation. A detailed examination leads to the conclusion that this is caused by the slight downward bowing of the dynamic track, the details of which are reported here. This result provides an explanation to the seemingly contradictory result. It can also be used to stimulate students to perform in-depth data analysis.

Keywords: Energy conservation, Incline, Bowing.

Resumen

Se realizaron experimentos de inclinación con un coche que circulaba por la pista dinámica para demostrar la conservación de la energía mecánica con el supuesto de que no hay fricción. El análisis de datos reveló casos en que la energía mecánica parece aumentar a medida que el coche se desplaza por una pendiente, en contradicción con la expectativa. Un examen detallado conduce a la conclusión de que esto es causado por la inclinación ligeramente hacia abajo de la pista dinámica, cuyos detalles se presentan aquí. Este resultado proporciona una explicación para el resultado aparentemente contradictorio. También se puede utilizar para estimular a los estudiantes para realizar un análisis en profundidad de datos.

Palabras clave: Conservación de la energía, inclinación, inclinado.

PACS: 01.40.Di, 01.40.Fk, 01.50.My, 01.55.+b

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Mechanical energy conservation is an important part in introductory physics and a variety of experiments are used to demonstrate this principle [1, 2, 3]. Among these, many of them are based on the usage of a car moving down an incline. Under the assumption that there is no friction, the theory predicts that when an object moves from one point to another, the mechanical energies, many times the summation of gravitational potential and translational/rotational kinetic energies, are conserved. In reality, friction exists and causes a net loss of mechanical energy, implying that a reduced total mechanical energy is not a surprise in this type of experiment. However, if a seemingly increased mechanical energy is observed, it deserves special attention. In a student experiment, the calculated value of mechanical energy of a car travelling down an inclined dynamic track was found to increase and the reason was analyzed here.

II. EXPERIMENTAL SET-UP

A picture and a schematic diagram for the experimental set-up are shown in Fig. 1. A PASCO dynamic track was raised in one end and a car is released from the top. The motion of the car was measured by a Vernier motion sensor. θ is used to represent the incline angle, which is measured by PASCO angle indicator. The distances from the sensor to the car and to the end of the track are called x and x_0 , respectively. Upon releasing a car at rest from the top, the position and speed of the car at different x values from the motion sensor were measured. The total mechanical energy ($TotE$) can be calculated as follows. The heights of the car relative to the leveled ground at different x positions can be calculated from the following Eq. (1)

$$h = \sin \theta (x_0 - x). \quad (1)$$

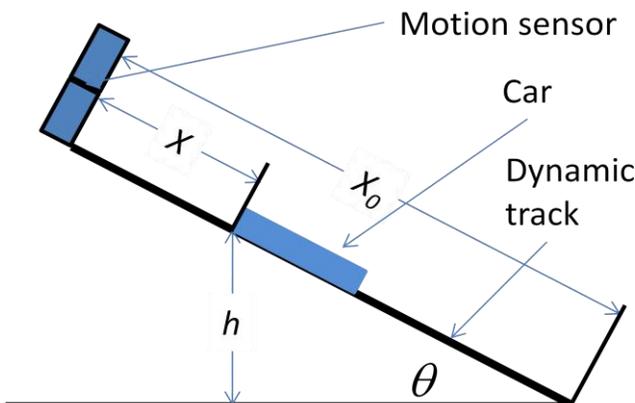


FIGURE 1. A picture and a schematic drawing of the experimental set-up. Parameters used in the text are defined in the schematic drawing.

The speed v can be read directly from Logpro, the software for motion sensor. Taking the leveled ground as the zero point, the gravitational potential energy PE has a value of mgh . The translational kinetic energy (KE) is $mv^2/2$. Here, m and g represent the mass of the car and free fall acceleration, respectively. The total mechanical energy $TotE$ is the summation of KE and PE .

Students are required to perform three experiments: at incline angles of 6° and 3° without load on the car and at incline angle of 3° with load. Then, values of x , $v(m/s)$, $h(m)$, $KE(J)$, $PE(J)$, and $TotE(J)$ are either read from the software or calculated for each experiment and a table as shown in Table I is filled. The position x ranges from approximately 0.6m to 1.1m with a step of approximately 0.1m. $TotE$ is used to evaluate the mechanical energy conservation. The value of $TotE$ at the first recorded position was taken as the reference point in calculating energy difference. Taking the case of incline angle = 6° as an example, the first recorded position is $x = 0.607m$. The energy percentage difference (% diff.) at $x = 0.998(m)$ is calculated from $[TotE(x=0.998m) - TotE(x=0.607m)]/TotE(x=0.607m)$. As the car travels down incline, a positive % difference implies an apparent mechanical energy increase. Here, the word apparent is used to emphasize that mechanical energy increase in the present experimental setting should not happen.

III. UNEXPECTED DATA AND EXPLANATION

Out of eight student groups, six groups observed that the total mechanical energy remains the same or decreases. The results of these six groups are easy to understand. They simply correspond to the case of virtually no friction or some friction to cause the mechanical energy to decrease. Two groups observed apparent energy gain, which deserves further discussion. Since such data is not expected, the experiment was repeated by the present author and similar data was obtained. Table I shows typical result showing apparent mechanical energy increase. There are four features in such data set. First, the apparent energy gain is observed in both 6° and 3° experiments. Second, the % difference increases as the car travels further down incline. Third, the magnitude of the % difference is higher for the case of 3° than that of 6° . Fourth, for the two 3° experiments, with and without load, the % differences are approximately the same.

TABLE I. A sample data set showing the apparent mechanical energy increase.

Incline Angle	Mass of Car	Mass of Load	Total Mass			
$=6^\circ$	$=0.502\text{ kg}$	$=0\text{ kg}$	$=0.502\text{ kg}$			
x (m)	V (m/s)	h (m)	KE (J)	PE (J)	TotE (J)	% diff.
0.607	0.467	0.177	0.0547	0.870	0.925	
0.691	0.657	0.168	0.108	0.827	0.936	1.1
0.803	0.846	0.156	0.180	0.770	0.949	2.6
0.895	0.972	0.147	0.237	0.722	0.959	3.7
0.998	1.10	0.136	0.304	0.669	0.973	5.2
1.114	1.24	0.124	0.386	0.610	0.996	7.6

Incline Angle	Mass of Car	Mass of Load	Total Mass			
$=3^\circ$	$=0.502\text{ kg}$	$=0\text{ kg}$	$=0.502\text{ kg}$			
Position	V (m/s)	h (m)	KE (J)	PE (J)	TotE (J)	% diff.
0.605	0.337	0.0887	0.0285	0.436	0.465	
0.688	0.488	0.0844	0.0598	0.415	0.475	2.1
0.800	0.633	0.0785	0.100	0.386	0.487	4.7
0.903	0.743	0.0731	0.139	0.360	0.498	7.2
0.981	0.804	0.0690	0.162	0.340	0.502	7.9
1.110	0.948	0.0623	0.226	0.306	0.532	14

Incline Angle	Mass of Car	Mass of Load	Total Mass			
$=3^\circ$	$=0.502\text{ kg}$	$=0.5\text{ kg}$	$=1.002\text{ kg}$			
Position	V (m/s)	h (m)	KE (J)	PE (J)	TotE (J)	% diff.
0.595	0.318	0.0892	0.0507	0.876	0.927	
0.699	0.509	0.0838	0.130	0.823	0.952	2.8
0.816	0.623	0.0777	0.194	0.763	0.957	3.3
0.885	0.732	0.0741	0.268	0.727	0.996	7.4
1.003	0.843	0.0679	0.356	0.666	1.022	10
1.091	0.923	0.0633	0.427	0.621	1.048	13

These summarized features lead to the prediction that this apparent mechanical energy gain is introduced by some systematic error, rather than random human errors. There are two possible explanations. First, it may be caused by the downward bowing of the dynamic track. Second, it may be introduced by the underestimation in reading the incline angle. A detailed explanation of these two ideas is provided in the following. Fig. 2 shows an exaggerated schematic drawing for the case of a bowed dynamic track. If the track is bowed, the car moves on the solid line arriving at a height $h(\text{bowed})$. If the track is straight, the car moves on the dotted line, arriving at a height $h(\text{straight})$. The speeds are denoted as $v(\text{bowed})$ and $v(\text{straight})$ for the two cases, respectively. Obviously, $h(\text{straight}) > h(\text{bowed})$ and $v(\text{straight}) < v(\text{bowed})$. These are equivalent to state that at x , $PE(\text{straight}) > PE(\text{bowed})$ and $KE(\text{straight}) < KE(\text{bowed})$. If no friction, $KE(\text{straight}) + PE(\text{straight})$ is equal to $KE(\text{bowed}) + PE(\text{bowed})$. And both of them are equal to the total mechanical energy at the reference point, the first recorded position. However, unaware of the bowing, the total energy calculation in student experiment was performed by adding $KE(\text{bowed})$ and $PE(\text{straight})$. $KE(\text{bowed}) + PE(\text{straight}) > KE(\text{bowed}) + PE(\text{bowed}) = TotE(\text{at reference point})$, which explains the apparent mechanical energy gain. The magnitude of the apparent mechanical energy gain ΔE can be calculated as follows

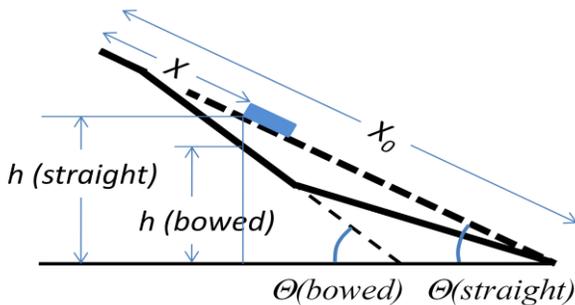


FIGURE 2. An exaggerated schematic diagram illustrating the effect of a downward bowed track.

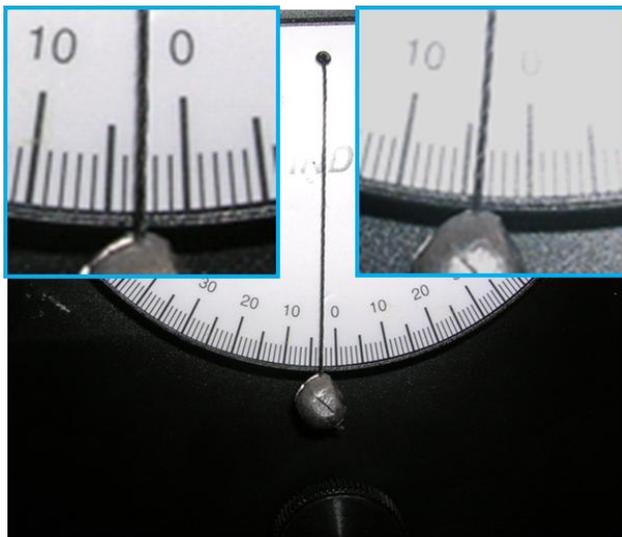


FIGURE 3. Reading of angle indicator at different locations.

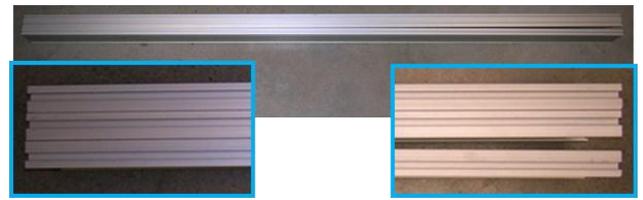


FIGURE 4. Pictures of three dynamic tracks placed next to each other.

$$\begin{aligned} \Delta E &= [KE(\text{bowed}) + PE(\text{straight})] - [KE(\text{bowed}) + PE(\text{bowed})] \\ &= PE(\text{straight}) - PE(\text{bowed}) \\ &= mgx \cdot [\sin(\theta(\text{bowed})) - \sin(\theta(\text{straight}))] \\ &\approx mgx \cdot \cos(\theta(\text{straight})) \cdot \Delta\theta \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta\theta = \theta(\text{bowed}) - \theta(\text{straight})$ represent the incline angle difference caused by track bowing. These considerations explain the observed features well. First, since the apparent mechanical energy gain is caused by the bowing of the track, it should be independent of the nominal incline angle of the track. This is in agreement with the observed feature one. Based on Eq. (2), ΔE is linearly proportional to x , which explains the observed feature two. For a fixed $\Delta\theta$, ΔE increases with the decrease of $\theta(\text{straight})$, which explains the enhanced effect for the case of 3° relative to that of 6° described above as feature three. It is believed that the bowing of the track pre-exist, independent of the incline angle and car load, explaining the observed feature four.

The second possible explanation to the apparent mechanical energy gain is as follows. Based on this idea, the track is straight, but the reading of the incline angle is lower than the true value $\theta(\text{true})$ because of human error. If one replaces $\theta(\text{bowed})$ with $\theta(\text{true})$, the same argument described above holds true and the apparent contradict is solved. However, this idea is not favored because of the following reasons. First, the angle reading was checked by multiple persons. Second, remember that if a group observes apparent energy gain in 6° experiment, the same group observes an enhanced effect in the 3° experiment. It is hard to imagine a group of multiple members read the angles with lower values consistently in all their experiments. The degree of misreading can be estimated. For this purpose, different incline angles are tried in the calculation of $TotE$ until the % difference is close to zero, which is expected for an ideal case. The angle that makes the apparent mechanical energy increase to be zero is called $\theta(\text{fit})$. $\theta(\text{fit})$ obtained from the data shown in Table I is 2° higher than the recorded one, independent of the recorded angles are 6° or 3° . $\theta(\text{fit})$ corresponding to the data of other group is in the order of 1° different from the recorded one. With the instrument provided, such a misreading is unlikely.

Further efforts were made to confirm the bowing of the track. First, the bowing of suspicious track was examined by angle indicator, where the angle indicator was moved downward from the top and the angle change was

Chunfei Li

monitored. A typical picture of the angle indicator is shown in Fig. 3. The upper left inset shows an enlarged picture when it is placed on top of the track for 3° incline angle experiment. Another picture was taken when the angle indicator is approximately 0.8m away from the top and is shown as an inset in the upper right corner of Fig. 3. It is clear that the incline angle has changed from 3° to 4° , consistent with previous analysis. Further, the bowing was examined by lining up three tracks, two good ones and one “bad” one, next to each other as shown in Fig. 4. In the picture, the two good ones are on top and the “bad” one is on the lower part. The left ends have been pressed together so that there are no gaps between tracks. An enlarged picture of the left end is shown on the lower left corner of Fig. 4. On the right end, there is no gap between the two good tracks while a gap is observed between the “bad” one and the good ones. The inset on the lower right corner of Fig. 4 shows the gap clearly, illustrating the bowing of the “bad” dynamic track.

The results and analysis presented here is helpful for teaching. Although solid evidence can be provided as shown here in Figs. 3 and 4, one to two degree bowing will not be noticed to an unprepared mind. In performing mechanical energy conservation experiments, it is easy to remember and recognize the effect of friction, which causes the total mechanical energy to decrease. When faced with an apparent mechanical energy gain as described here, people become frustrated and tend to simply blame human errors. Further, teachers can actively use such results to remind students that all the analysis of experimental data is based on some assumptions, which are true only to certain

extent [4]. The deformation of bowing is most likely caused by improper usage and handling. Therefore, the present result also serves as a reminder that extra care should be taken in using these instruments.

IV. CONCLUSION

In an energy conservation experiment of an assumed frictionless car travelling down an incline of a dynamic track, apparent mechanical energy gain up to approximately 10% was observed. The effect is more enhanced with the 3° incline angle than that of 6° . The magnitude of energy gain increases with the distance the car travels. The phenomenon is explained successfully as the effect of bowed track. This result is helpful to others who perform similar experiments.

REFERENCES

- [1] Niculescu, A., *A Rolling Sphere Experiment*, Phys. Teach. **44**, 157-159 (2006).
- [2] Taylor, R. and Noll, E. D., *Controlling All Variables in an Experiment*, Phys. Teach. **36**, 115–117 (1998).
- [3] Calvini, P., *Dynamics of a tape that unwinds while rolling down an incline*, Am. J. Phys. **51**, 226-230 (1983).
- [4] Amato, J. C. and Williams, R. E., *Turning a Common Lab Exercise into a Challenging Lab Experiment: Revisiting the Cart on an Inclined Track*, Phys. Teach. **48**, 322–323 (2010).

Campos escalares reais e a quebra espontânea de simetria: Uma descrição analítica para defeitos topológicos



M. A. M. Souza¹, D. Bazeia², L. Losano² e R. Menezes²

¹ Coordenação de Física, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Piauí, Campus Parnaíba, 64215-000, Parnaíba, Piauí, Brasil.

² Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-970, João Pessoa, Paraíba, Brasil.

E-mail: msouza.ifpi@gmail.com, msouza@ifpiparnaiba.edu.br.

(Received 5 December 2011, accepted 26 February 2012)

Resumo

Neste trabalho estudamos a dinâmica de modelos descritos por um potencial $V(\phi)$, onde ϕ representa um campo escalar real, a partir do fenômeno de quebra espontânea de simetria. Este mecanismo leva o sistema a apresentar dois estados distintos, isso pode ser representado em meios contínuos como um processo de transição de fase e/ou pelo surgimento de defeitos topológicos. Tais defeitos são soluções estáticas, estáveis e de energia finita, de uma equação diferencial não-linear de segunda ordem. Apresentamos também as equações de Bogomol'nyi, onde escrevemos o potencial de um dado modelo em termos de uma função superpotencial e o problema de resolver uma equação de segunda ordem reduz-se a encontrar as soluções de duas equações de primeira ordem cujas soluções, denominadas estados BPS, identificam os estados de menor energia e os setores topológicos do modelo.

Palavras-chave: Campo escalar, quebra espontânea de simetria, defeitos topológicos, superpotencial, estados BPS.

Abstract

In this paper we study the dynamic models described by a potential $V(\phi)$, where ϕ represents a real scalar field, from the phenomenon of spontaneous symmetry breaking. This mechanism causes the system to have two distinct states; this can be represented in continuous media as a process of phase transition and / or the appearance of topological defects. Such defects are static solutions, stable and finite energy of a nonlinear differential equation of second order. We also present Bogomol'nyi's equations, where we write the potential of a given model in terms of a superpotential function and the problem of solving a second-order equation reduces to finding the solutions of two first order equations whose solutions, called BPS states, identify the lowest energy states and topological sectors of the model.

Keywords: Scalar field, spontaneous symmetry breaking, topological defects, superpotential, BPS states.

PACS: 11.10.-z, 11.27.+d, 98.80. Cq.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUÇÃO

Os estudos de sistemas físicos arraigados à dinâmica de campos escalares reais é algo de bastante interesse no meio científico. Estamos falando de uma classe de fenômenos passíveis de uma descrição exata com base nos princípios físicos da teoria de campos. As aplicações se estendem desde sistemas de matéria condensada até Cosmologia e Física de altas energias.

Como exemplo, podemos citar que algumas das vertentes mais modernas da Cosmologia utilizam o campo escalar para descrever o campo do inflaton [1, 2, 3], que seria responsável pela aceleração cósmica do universo na sua fase inicial, ou ainda, poderíamos falar de modelos de quintessência [4, 5, 6, 7], que atribuem a energia escura aspectos da dinâmica de campos escalares na fase atual do universo. Temos também em matéria condensada a

descrição de defeitos topológicos em meios elásticos contínuos [8, 9], associados a irregularidades nos campos que descrevem a ordenação da estrutura dos materiais. Esses defeitos surgem da quebra de simetria, que levam a uma transição de fase do sistema, e podem ser vórtices, kinks, paredes de domínio, etc.

Do ponto de vista matemático, os defeitos topológicos também são definidos como solução estável de uma equação diferencial não-linear, que possui energia finita e localizada.

II. CAMPOS ESCALARES REAIS

Em teoria de campos defini-se campo escalar real como sendo uma função real do quadrvetor $x^\mu = (t, \mathbf{x})$ no espaço

de Minkowski. Para um único campo escalar real $\phi = \phi(x^\mu)$ em D+1 dimensões podemos escrever a ação como:

$$S = \int d^{D+1}x L(\phi, \partial_\mu \phi), \quad (1)$$

onde a densidade de lagrangeana L é função do campo e de suas derivadas. A dinâmica de modelos descritos por um único campo escalar real pode ser analisada a partir da densidade de lagrangeana:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (2)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial que depende do sistema físico considerado. As equações de movimento são escritas em 1+1 dimensão como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3)$$

Para um campo estacionário a Eq. (3) se reduz a:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dV}{d\phi}, \quad (4)$$

e a densidade de energia é a componente temporal do tensor energia-momento:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g^{\mu\nu} L, \quad (5)$$

que é dada por:

$$T^{00} = \rho(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi), \quad (6)$$

onde temos somente a contribuição gradiente e potencial para a densidade de energia dadas pelo primeiro e segundo termos de (6), respectivamente. A energia de uma dada configuração de campo é o resultado da integração da densidade de energia em todo o espaço, em 1+1 dimensão temos:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx \rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) \right], \quad (7)$$

as soluções de interesse físico são aquelas com energia finita, também denominadas soluções solitônicas, por serem soluções de uma equação diferencial não linear com energia concentrada e são representadas por $\phi(x)$. Elas conectam os mínimos do potencial. É claro que as soluções triviais (zeros do potencial) obedecem à condição $V(\phi = \phi_0) = 0$ e satisfazem ainda $V(\phi = \phi_0) = 0$, isto é, elas são os mínimos do potencial. As soluções não-triviais obedecem ainda às condições de contorno:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_i \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{d\phi}{dx} = 0. \quad (8)$$

Esses limites devem ser obedecidos para garantir que a energia do sistema seja finita. Em verdade estamos impondo condições sobre a densidade de energia do modelo, de modo que nos extremos de integração a densidade de energia seja nula. A primeira condição de contorno em (8) tem aspectos peculiares, ela não só estabelece que nos extremos o campo ϕ seja um dos zeros do potencial, e conseqüentemente uma solução trivial, como também mostra que o comportamento assintótico das soluções pode apresentar comportamentos distintos nos extremos. De forma mais clara queremos dizer que existem duas possibilidades para o valor de ϕ nos extremos. Primeiro, a solução tem o mesmo comportamento assintótico, ou seja, $\phi(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \phi_i$. Segundo, a solução tem comportamento assintótico diferente, $\phi(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \phi_i$ e $\phi(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \phi_j$ com $i \neq j$, quando existir outra solução trivial ϕ_j , que satisfaça $V(\phi_j) = 0$. Essas possibilidades são caracterizadas pela corrente topológica:

$$j_T^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (9)$$

A densidade de carga associada à equação (9) é dada por:

$$\rho_T^0 = \frac{1}{2} \varepsilon^{01} \partial_1 \phi = \frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx}, \quad (10)$$

que, por sua vez, nos leva a uma carga conservada:

$$Q = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) dx = \frac{1}{2} \phi(\infty) - \frac{1}{2} \phi(-\infty) = \frac{1}{2} \phi_1 - \frac{1}{2} \phi_2, \quad (11)$$

de onde podemos especificar dois tipos de soluções distintas: as soluções topológicas com $Q \neq 0$ ($\phi_1 \neq \phi_2$), isto é, conectam mínimos distintos; e as soluções não topológicas com $Q = 0$ ($\phi_1 = \phi_2$), que ligam um mínimo a ele mesmo. As soluções topológicas são configurações do campo que mudam de valor de um extremo a outro, seja por um decrescimento ou crescimento de ϕ e vice-versa, já as soluções não topológicas possuem o mesmo valor do campo em ambos os extremos.

III. QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA

O conceito de simetria está intimamente relacionado com o conceito de isometria, assim como suas operações geométricas associadas de reflexão, rotação e translação. De forma geral, podemos dizer que um sistema é simétrico se o mesmo não muda as suas características e/ou propriedades frente a alterações dos parâmetros que o descrevem. As aplicações desse princípio têm grande utilidade em sistemas físicos, biológicos, em descrições matemáticas por meio da teoria de grupos e na geometria.

Em Física a aplicação mais importante de simetria está no teorema de Noether [10], que estabelece que para cada simetria contínua em um sistema físico existe uma correspondente lei de conservação. Assim, pode-se mostrar que a conservação de momento linear está associada à simetria de translação ou paridade do sistema. A conservação de energia associa-se a uniformidade temporal e a carga elétrica a uma simetria de calibre, entre outras.

Pode-se dizer que um sistema possui sua simetria quebrada quando as alterações promovidas neste, alteram suas características e/ou propriedades. Fenômenos como esse aparecem em mecanismos de transição de fase em sistemas de matéria condensada, como em cadeias poliméricas de poliacetileno [11]. Também podemos encontrar quebra de simetria em modelos cosmológicos, essa quebra de simetria é responsável pelo surgimento de defeitos topológicos no universo primordial que seriam cordas cósmicas ou monopolos magnéticos.

Em teoria de campos, um dos mecanismos de quebra de simetria de grande interesse é aquele que promove a geração de massa para o campo. Inicialmente, dizemos que uma teoria descrita por uma densidade de lagrangeana $L(\phi)$, onde ϕ representa um campo escalar real, é simétrica se esta torna-se invariante frente a transformação $L(\phi) \rightarrow L(-\phi)$, o estado de vácuo é degenerado e os estados possíveis transformam-se um no outro em detrimento dessa simetria. Dos modelos descritos por potenciais polinomiais, o modelo $\lambda\phi^4$ é o mais simples que apresenta o fenômeno de quebra espontânea de simetria, ele possui a forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (12)$$

com μ e λ constantes reais, onde λ representa a constante de acoplamento de auto-interação do campo. Os fatores numéricos são introduzidos por conveniência, algumas características desse modelo são:

- i) possui simetria de reflexão $\phi \rightarrow -\phi$, ou simetria Z_2 ;
- ii) Hamiltoniana dada por:

$$H = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \mu^2 \phi^2 \right] + \frac{1}{4} \phi^4; \quad (13)$$

- iii) se $\mu > 0$ e $\lambda > 0$ o mínimo do potencial está em $\phi = 0$, sendo este um mínimo global, conforme Fig. 1;
- iv) se $\mu < 0$ e $\lambda > 0$ aparecem dois mínimos em $\phi_{\pm} = \pm (-\mu/\lambda)^{1/2}$, o que possibilita o fenômeno de quebra espontânea de simetria, ver Fig. 1.

Para $\mu < 0$, a simetria é quebrada, pois o sistema sai de um único estado de vácuo para a possibilidade de se encontrar em dois estados distintos de mínima energia. A massa quadrática associada ao campo tem valor expresso por:

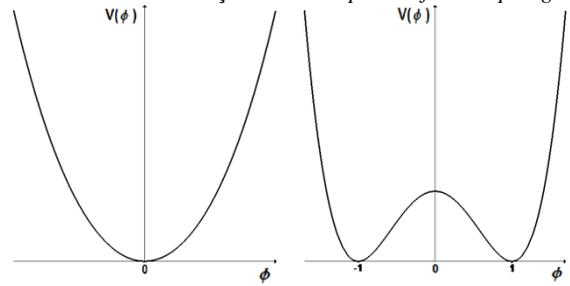


FIGURA 1. Potencial do modelo ϕ^4 para $\mu = 1$ e $\lambda = 2$ (a esquerda) e para $\mu = -2$ e $\lambda = 2$ (a direita).

$$m^2 = \left. \frac{d^2V}{d\phi^2} \right|_{\phi^2 = -\mu/\lambda} = -2\mu. \quad (14)$$

Sabemos que o campo é uma entidade física que permeia todo o espaço e conseqüentemente não possui massa. Entretanto, o surgimento de dois estados de vácuo e a conseqüente quebra de simetria gera massa para o campo, que, por sua vez, localiza-se nos mínimos do potencial. O que estamos calculando na verdade é a massa da partícula clássica associada ao campo nos estados de mais baixa energia, dependendo do modelo podemos ter mais de um valor de massa associada. Uma vez que $\phi = 0$ não é mais um mínimo global, podemos estudar o lagrangeano em torno dos novos estado de vácuo definindo um novo campo. Vamos fazer o deslocamento $\phi \rightarrow \chi = \phi \pm (-\mu/\lambda)^{1/2}$ de modo que o potencial pode ser reescrito, a menos de uma constante aditiva, como:

$$V(\chi) = -\mu\chi^2 \mp \sqrt{-\mu\lambda}\chi^3 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4. \quad (15)$$

A lagrangeana para esse novo potencial e com o novo campo χ fica:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + \mu\chi^2 \mp \sqrt{-\mu\lambda}\chi^3 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4. \quad (16)$$

A nova lagrangeana dada por (16) possui um termo cúbico que viola a simetria Z_2 . As propriedades do modelo expresso pelo campo χ são:

- i) o estado de vácuo corresponde a $\chi = 0$;
- ii) sua massa é positiva, dada por $m = \sqrt{2|\mu|}$;
- iii) apresenta uma interação cúbica χ^3 .

Existem ainda outros mecanismos desse tipo, como por exemplo: a quebra espontânea de simetria de um grupo contínuo de simetria, como o grupo de rotações $SO(2)$, que para dois campos escalares ϕ_1 e ϕ_2 , leva ao surgimento de massa para um dos dois campos, enquanto o outro permanece sem massa. Esse campo sem massa é denominado de Bóson de Goldstone [12]. Podemos ainda citar o mecanismo de Higgs [13, 14] no modelo padrão. Para este caso, o estado de vácuo do campo de Higgs é constante e tem valor igual a 246 GeV. A existência de um

estado de vácuo diferente de zero quebra espontaneamente a simetria de calibre da interação eletrofraca, esse mecanismo gera massa para os bósons de calibre Z_0 , W^+ e W^- , mediadores dessa interação.

IV. DEFEITOS TOPOLÓGICOS

Uma definição matemática para defeito seria dizer que ele é uma solução, com energia finita, de uma equação diferencial não linear. Do ponto de vista físico, um defeito topológico é a região de transição entre fases distintas de um sistema, em suma, é a região em que o sistema muda suas características e/ou propriedades.

Geralmente, os defeitos estão associados a alguma quebra de simetria que dá origem a um conjunto não trivial de estados degenerados, como os dipolos magnéticos nos domínios de um material ferromagnético [15]. No regime de baixas temperaturas, a quantização do fluxo magnético em super condutores como o hélio superfluido gera o aparecimento de defeitos, denominados vórtices [9]. Em cosmologia temos os monopolos magnéticos, introduzidos por 't Hooft [16], ou cordas cósmicas, propostas por Nielsen e Olesen [17], que são defeitos associados ao processo de transição de fase do universo primordial, quando a temperatura do mesmo diminuiu até um valor crítico T_c , gerando esses objetos exóticos. Em 1961, Skyrme apresentou o primeiro defeito topológico tridimensional decorrente da teoria de campo não linear, já em 1966, Nambu antecipou a existência de tais defeitos na teoria quântica de campos e Rather, estudando excitações em partículas elementares, verificou o aparecimento de defeitos quânticos, cuja energia adicionada aos estados de energia da partícula completavam o espectro observado [18].

Iremos estudar o defeito topológico que aparece na teoria de campos escalares, o kink. Vamos utilizar o potencial do modelo ϕ^4 , que é dado, no sistema adimensional de unidades, por:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (17)$$

O potencial (17) pode ser visto na Fig. 2. A equação de movimento para o caso estacionário tem a forma:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \phi(\phi^2 - 1). \quad (18)$$

Utilizando o método da quadratura para resolver (18) temos:

$$\frac{d\phi}{dx} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d\phi}{dx} \frac{dV}{d\phi} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right) = \frac{d}{dx} (V(\phi)).$$

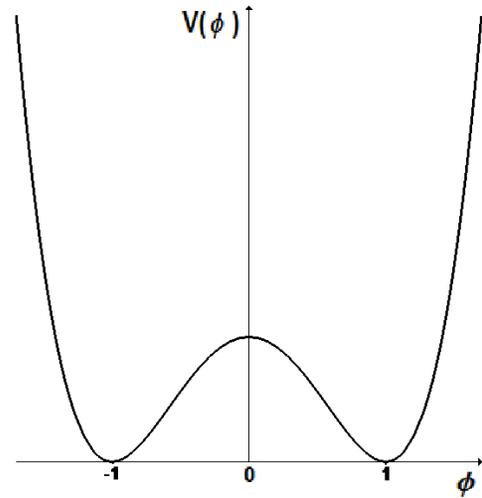


FIGURA 2. Potencial do modelo ϕ^4 .

Integrando, obtemos:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi) + C}, \quad (19)$$

que são duas equações diferenciais de primeira ordem, onde C é uma constante de integração. Lembrando que como estamos trabalhando com campos escalares reais, $V(\phi)$ deve ser positivo definido para que ϕ seja real. Fazendo a constante C igual zero, separando as variáveis e integrando, obtemos:

$$\phi = \pm \tanh(x - x_0). \quad (20)$$

Impor que a constante C seja nula, está assegurando na verdade que a energia das soluções seja finita, uma vez que a presença dessa constante na densidade de energia acarretaria na divergência da integral utilizada para determinar o valor da energia. A solução com sinal positivo em (20) é denominada kink e a com sinal negativo anti-kink. Essas soluções são topológicas por terem limites assintóticos diferentes, elas conectam os diferentes mínimos do potencial, que também são soluções triviais $\phi_{\pm} = \pm 1$, com energia nula.

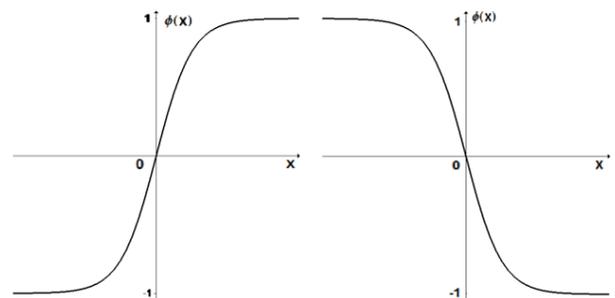


FIGURA 3. O kink, a esquerda, e o anti-kink, a direita, ambos centrados na origem.

Quando os kinks estão imersos em duas ou mais dimensões eles são chamados paredes de domínio e suas energias se transformam em densidades de energia. A Fig. 3 representa o kink e o anti-kink dado por (20), onde escolhemos o centro em $x = 0$. A separação entre os zeros do potencial definem um setor topológico com carga $Q = \pm 2$ e com energia dada por:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \sec h^2(x) dx = \frac{4}{3}, \quad (21)$$

onde utilizamos a Eq. (7) em que a densidade de energia do kink é $\rho(x) = \text{sech}^4(x)$, mostrada na Fig. 4. A figura mostra que a densidade do kink é finita e distribuída de forma simétrica em torno da origem.

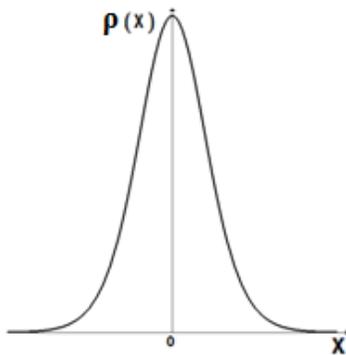


FIGURA 4. Densidade de energia do kink.

V. EQUAÇÕES DE BOGOMOL'NYI

Um método alternativo para investigar a presença de defeitos topológicos em modelos de campos escalares, consiste em identificar as soluções denominadas de BPS (Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield) [19, 20]. As soluções BPS são definidas por dois estados de mínima energia e identificam os setores topológicos do modelo. O método foi proposto por E. B. Bogomol'nyi em 1976, embora em 1975 M. K. Prasad e C. M. Sommerfield já tivessem publicado um trabalho sobre o assunto. A idéia central está no fato de que para potenciais não negativos, cujos zeros são mínimos globais, podemos escrever:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2, \quad (22)$$

onde $W_\phi = dW/d\phi$ e $W(\phi)$ são funções contínuas do campo, esta última é denominada superpotencial e está associada a descrição de setores bosônicos reais em teorias supersimétricas [21, 22, 23, 24]. Para o potencial do modelo ϕ^4 temos o superpotencial associado dado por:

$$W(\phi) = \phi - \frac{1}{3} \phi^3. \quad (23)$$

Podemos reescrever as equações de movimento para as soluções estáticas $\phi = \phi(x)$, utilizando a expressão (22), assim temos:

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = W_\phi W_{\phi\phi}. \quad (24)$$

A energia para as soluções de (24) é obtida a partir de:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + W_\phi^2 \right], \quad (25)$$

onde reescrevemos a Eq. (7) em termos do superpotencial. Completando os quadrados em (25) encontramos:

$$E = E_B + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{d\phi}{dx} \mp W_\phi \right)^2, \quad (26)$$

sendo

$$E_B = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx}, \quad (27)$$

o que leva a:

$$E_B = W[\phi(x \rightarrow \infty)] - W[\phi(x \rightarrow -\infty)] = |\Delta W|. \quad (28)$$

Como as soluções fisicamente aceitáveis são as de energia finita, as configurações de menor energia são as de maior interesse para nossa descrição, logo o campo deve ser escolhido de modo que E seja mínima, assim devemos ter:

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm W_\phi, \quad (29)$$

ou seja, a segunda integral em (26) deve ser nula e E_B é energia mínima do sistema, também conhecida como energia de Bogomol'nyi. O interessante está no fato de que se derivarmos a equação (29) obtemos (24), o que mostra que esta última pode ser resolvida a partir da anterior, e o problema de resolver uma equação de segunda ordem se reduz a encontrar as soluções de duas equações de primeira ordem [25, 26]. A expressão (29) é conhecida na literatura como equação de Bogomol'nyi. Outra vantagem desse método é que podemos calcular as energias usando somente a função $W(\phi)$ por meio de seus limites assintóticos sem conhecer as soluções. Outro ponto a salientar está relacionado ao fato de que as energias gradiente e potencial são degeneradas:

$$E_p = E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} dx W(\phi)^2 = \frac{E_B}{2}. \quad (30)$$

VI. ESTABILIDADE LINEAR

Na teoria de campo escalar torna-se necessário o estudo da estabilidade linear das soluções estáticas das equações de movimento, haja vista que tais equações são não-lineares. Para isto basta considerar pequenas perturbações em torno das soluções. O objetivo é linearizar as equações de movimento e obter o potencial de estabilidade e os autovalores associados [27]. Vamos inserir uma perturbação em primeira ordem, escrevemos a solução para o campo como:

$$\phi(x, t) = \phi_s(x) + \xi(x, t), \quad (31)$$

onde $\xi(x, t)$ representa uma pequena flutuação em torno da solução estática $\phi_s(x)$. Substituindo na Eq. (3) obtemos:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (32)$$

Só que agora $V=V(\phi_s + \xi)$, fazendo a expansão em série de Taylor em torno de $\xi = 0$ e considerando os termos de primeira ordem em ϕ_s , encontramos:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \phi_s}{dx^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi=\phi_s} + \xi \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (33)$$

Utilizando (4) obtemos uma equação para ξ da forma:

$$\left. \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi}{dx^2} + \xi \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 0. \quad (34)$$

Trata-se de uma equação diferencial parcial, para resolvê-la basta aplicar o método de separação de variáveis, fazendo $\xi(x, t) = \zeta(x)T(t)$ e substituindo em (34) obtemos as equações:

$$\left. \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T \right| = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} - \xi U = -\omega^2 \zeta \quad (36)$$

sendo:

$$U = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s}. \quad (37)$$

Uma solução de (35) é dada por:

$$T(t) = \cos(\omega t). \quad (38)$$

A Eq. (36) é uma equação de autovalor do tipo Schrödinger [34, 35, 36], que pode ser reescrita como:

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + U \right) \xi = \omega^2 \xi \Rightarrow H \xi_n(x) = \omega_n^2 \xi_n(x), \quad (39)$$

em que H é o respectivo operador Hamiltoniano e ξ_n representa o conjunto de auto-funções de H . A estabilidade é assegurada se o Hamiltoniano for não-negativo, ou seja, se seus auto-valores forem positivos, já que auto-valores negativos fariam que $T(t)$ divergisse assintoticamente, caso ω seja negativo as soluções de (35) deixam de ser exponenciais complexas, e passam a ser exponenciais reais, de modo que para t tendendo ao infinito, a solução explode. Uma forma de verificar que H é não-negativo é averiguar se o mesmo pode ser fatorado na forma $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$, e de fato podemos escrever H em (39) como:

$$H = \left(-\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right) \left(\frac{d}{dx} \pm W_{\phi\phi} \right), \quad (40)$$

onde podemos fazer

$$S_{\pm}^{\dagger} = -\frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s} \quad e \quad S_{\pm} = \frac{d}{dx} \pm [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}, \quad (41)$$

em que S_{\pm}^{\dagger} representa o conjugado hermitiano de S_{\pm} , logo H pode ser fatorado. Na Mecânica Quântica os autovalores equivalem ao valor esperado do hamiltoniano H tomado entre dois estados ortogonais, de modo que podemos escrever:

$$\omega_n^2 = \langle \xi | H | \xi \rangle = \langle \xi | S^{\dagger} S | \xi \rangle, \quad (42)$$

$$\omega_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_n|^2 dx. \quad (43)$$

Assim, podemos ver que $\omega \geq 0$, isto é, todos os modos são positivos ou nulos, logo as soluções BPS são linearmente estáveis mediante pequenas perturbações do campo. Temos também que o modo zero $\xi_0(x)$ é dado por:

$$S_{\pm} \xi_0 = 0 \Rightarrow \frac{d\xi_0}{dx} = \pm W_{\phi\phi} \xi_0, \quad (44)$$

$$\xi_0(x) = A e^{\pm \int dx [W_{\phi\phi}]_{\phi=\phi_s}}, \quad (45)$$

onde A é uma constante de normalização. Pode-se provar [28] de uma forma geral, que o modelo que é positivo definido pode ser escrito em termos de uma função superpotencial, e conseqüentemente, sempre terá suas soluções topológicas estáveis.

Como exemplo, vamos estudar a estabilidade das soluções do modelo ϕ^4 definido por (17), que são dadas por (20), onde iremos considerar o kink com centro na origem. O potencial de estabilidade é calculado usando a expressão (37), ou seja:

$$U(x) = \left. \frac{d^2 V}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_s} = 4 - 6 \operatorname{sech}^2(x). \quad (46)$$

A Eq. (46) é o potencial de Pöschl-Teller modificado, bem estudado na literatura [29]. Graficamente, ele está representado na Fig. 5. Para esse tipo de potencial os autovalores para o espectro discreto são dados por:

$$E_n = n(4-n), \quad (47)$$

onde $n = 0$ e $n = 1$. O modo zero possui energia nula e o primeiro estado excitado energia $E_1 = 3$. O auto-estado normalizado para $n = 0$ é

$$\xi_0(x) = \sqrt{\frac{3}{4}} \operatorname{sech}^2(x). \quad (48)$$

O potencial de Pöschl-Teller modificado possui modo zero e os seus autovalores são positivos, o que determina a estabilidade das soluções estáticas do modelo ϕ^4 . Este resultado era esperado, uma vez que este modelo é positivo definido e tem um superpotencial associado dado por (23).

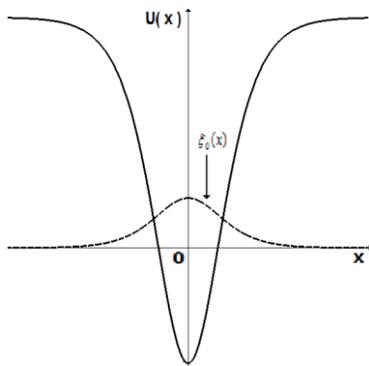


FIGURA 5. O potencial de estabilidade para o modelo ϕ^4 e o respectivo modo zero (48).

VII. CONCLUSÕES

Diante dos resultados expostos neste trabalho podemos concluir que em um processo de transição de fase, o sistema passa a apresentar dois estados distintos de mínima energia, o que corresponde ao aparecimento de defeitos topológicos (kinks). Para modelos supersimétricos, estes defeitos são as soluções de uma equação diferencial de primeira ordem e são denominados estados BPS, são as configurações do campo escalar real ϕ que minimizam a energia do sistema e identificam os setores topológicos do modelo conectando os vácuos do potencial. A estabilidade das soluções estáticas é assegurada se o Hamiltoniano associado à equação de autovalor tipo Schrödinger do modelo estudado for não negativo e puder ser fatorado na forma $H_{\pm} = S_{\pm}^{\dagger} S_{\pm}$, o que evidencia o fato do potencial de estabilidade

apresentar modo zero bosônico normalizado e auto-valores de energia positivos.

AGRADECIMENTOS

M. A. M Souza agradece à Vanda Santana pela revisão ortográfica, ao programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal da Paraíba pelo suporte e logística e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq, pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

- [1] Guth, A., *Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*, Phys. Rev. D **23**, 347-356 (1981).
- [2] Linde, A., *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. B **108**, 389-393 (1982).
- [3] Albrecht, A. and Steinhardt, P., *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. B **48**, 1220-1223 (1982).
- [4] Caldwell, R., Dave, R. and Steinhardt, P., *Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation-of-State*, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582-1585 (1998).
- [5] Carroll, S., *Quintessence and the Rest of the World*, Phys. Rev. Lett. **81**, 3067-3070 (1998).
- [6] Peebles, P. and Ratra, B., *The cosmological constant and dark energy*, Rev. Mod. Phys. **75**, 559-666 (2003).
- [7] Padmanabham, T., *Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum*, Phys. Rep. **380**, 235-320 (2003).
- [8] Abrikosov, A., *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Sov. Phys. JETP **5**, 1174-1182 (1957).
- [9] Zurek, W., *Cosmological Experiments in Condensed Matter Systems*, Phys. Rep. **276**, 177-221 (1996).
- [10] Noether, E., *Invariante Variationsprobleme*, Math. phys., 235-257 (1918).
- [11] Su, W., Schrieffer, J. and Heeger, A., *Solitons in Polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. **42**, 1698-1701 (1979).
- [12] Goldstone, J., Salam, A. and Weinberg, S., *Broken Symmetries*, Phys. Rev. **127**, 965-970 (1962).
- [13] Higgs, P., *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*, Phys. Rev. Lett. **13**, 508-509 (1964).
- [14] Higgs, P., *Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons*, Phys. Rev. **145**, 1156-1163 (1966).
- [15] Weiss, P., *L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique*, J. Phys. **6**, 661-690 (1907).
- [16] 't Hooft, G., *A two-dimensional model for mesons*, Nucl. Phys. B **75**, 461-863 (1974).
- [17] Nielsen, H. and Olsen, P., *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B **61**, 45-61 (1973).
- [18] Vilenkin, A. and Shellard, E., *Cosmic String and other Topological Defects*, (Cambridge, UK, 1994).

M.A.M. Souza, L. Losano, D. Bazeia e R. Menezes

- [19] Bogomol'nyi, E., *The stability of classical solutions*, Sov. J. Nucl. Phys. **24**, 449-454 (1976).
- [20] Prasad, M. and Sommerfield, C., *Exact Classical Solution for the 't Hooft Monopole and the Julia-Zee Dyon*, Phys. Rev. Lett. **35**, 760-762 (1975).
- [21] Fred, C., Avinash, K. and Uday, S., *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, World Scientific, New Jersey (2001).
- [22] Morris, J. and Bazeia, D., *Supersymmetry breaking and Fermi balls*, Phys. Rev. D **54**, 5217-5222 (1996).
- [23] Edelstein, J., Trobo, M., Brito, F. and Bazeia, D., *Kinks inside supersymmetric domain ribbons*, Phys. Rev. D **57**, 7561-7569 (1998).
- [24] Shifman, M., Vainshtein, A. and Voloshin, M., *Anomaly and quantum corrections to solitons in two-*

- dimensional theories with minimal supersymmetry*, Phys. Rev. D **59**, 045016-045041 (1999).
- [25] Bazeia, D., Menezes, J. and Santos, M., *Complete factorization of equations of motion in Wess-Zumino theory*, Lett. B **521**, 418-420 (2001).
- [26] Bazeia, D., Menezes, J. and Santos, M., *Complete factorization of equations of motion in supersymmetric field theories*, Nucl. Phys. B **636**, 132-140 (2002).
- [27] Rajaramam, R., *Solitons and Instantons*, (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [28] Bazeia, D. and Santos, M., *Classical stability of solitons in systems of coupled scalar fields* Phys. Lett. A **217**, 28-30 (1996).
- [29] Morse, P. and Feshbach, H., *Methods of Mathematical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953).

Determining the maximum or minimum impedance of a special parallel RLC circuit without calculus



Kenneth V. Cartwright¹ and Edit J. Kaminsky²

¹*School of Mathematics, Physics and Technology, College of The Bahamas, P. O. Box N4912, Nassau, Bahamas.*

²*Department of Electrical Engineering, EN 809A Lakefront Campus, University of New Orleans, New Orleans, LA 70148, USA.*

E-mail: kvcartwright@yahoo.com

(Received 27 December 2011, accepted 13 March 2012)

Abstract

We show that the maximum or minimum impedance of a special parallel RLC studied in a previous paper can be found analytically, without using calculus. In fact, we show that the maximum or minimum value occurs when the driving frequency ω is equal to $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$, a fact that was determined graphically in that previous paper. Furthermore, we show that either the maximum or minimum value is given by $R(\rho^2 + 1)/(\rho^2 + 3)$, where $\rho = \sqrt{L/C}/R$. Also, for $\rho^2 \ll 3$, the minimum impedance $Z_{\min} \approx R(1 + 2\rho^2/3)/3 \approx R/3$, whereas for $\rho^2 \gg 3$, the maximum impedance $Z_{\max} \approx R(1 - 2/\rho^2) \approx R$.

Keywords: Parallel RLC circuit, maximum or minimum impedance, maximum or minimum without calculus.

Resumen

Demostramos que la impedancia máxima o mínima de un circuito RLC en paralelo estudiado en una publicación reciente puede ser derivada analíticamente sin usar cálculo. De hecho, mostramos que el valor máximo o mínimo ocurre cuando la frecuencia de conducción ω es igual a $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$, un hecho que fue determinado en forma gráfica en dicha publicación. Mostramos además que el valor máximo o mínimo es $R(\rho^2 + 1)/(\rho^2 + 3)$, donde $\rho = \sqrt{L/C}/R$. Para $\rho^2 \ll 3$, la impedancia mínima es $Z_{\min} \approx R(1 + 2\rho^2/3)/3 \approx R/3$, mientras que para $\rho^2 \gg 3$, la impedancia máxima es $Z_{\max} \approx R(1 - 2/\rho^2) \approx R$.

Palabras Clave: Circuito RLC en paralelo, impedancia máxima o mínima, máximo o mínimo sin cálculo.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.Ha, 84.30.Bv

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Ma *et al.*, studied the interesting parallel RLC circuit of Fig. 1 in [1], for two specific cases: (i) $R_1 = R_2 = 0$ and $R_3 = R$ and (ii) $R_1 = R_2 = R_3 = R$.

They showed how the impedance Z as seen by the source varied with the angular frequency ω of the source. In fact, they plotted the normalized impedance Z/R as a function of the normalized angular frequency $\gamma = \omega/\omega_o$, where $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$ for various values of the dimensionless parameter given by $\rho = \sqrt{L/C}/R$. For case (i), they showed *graphically* that when $\omega = \omega_o \triangleq 1/\sqrt{LC}$, the impedance magnitude Z is a maximum value equal to R .

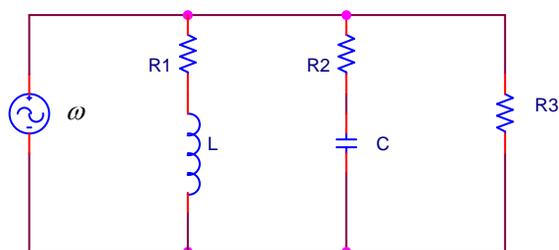


FIGURE 1. Schematic diagram of the parallel RLC circuit studied in [1], [2] and [3].

This result was apparently unexpected, as the authors state: “It is surprising to see that regardless of the ρ values,

$|Ze^{i\phi}/R|$ reaches to 1 (sic) when $\gamma=1$.” However, Cartwright and Kaminsky [2] showed that this result could be predicted mathematically without the use of calculus.

For case (ii), the authors of [1] also showed *graphically* that for $\omega = \omega_o \triangleq 1/\sqrt{LC}$, the impedance magnitude Z is a maximum or a minimum value, except in the case of $\rho = 1$, when the impedance is independent of frequency. In fact, a plot of the relationship between the normalized impedance Z/R and the normalized angular frequency $\gamma = \omega/\omega_o$ for various ρ values is given in Fig. 4 of [1] and a similar graph is given in Fig. 2 in Section II below. From these graphs, it does appear that the maximum or minimum Z occurs when $\gamma=1$, as noted in [1]. However, it would be rewarding to show analytically that this is indeed the case. In fact, this is the purpose of this paper, *i.e.*, to show mathematically that the maximum or minimum impedance does occur at $\gamma=1$. Furthermore, we do this algebraically, *i.e.*, without calculus. The maximum or minimum impedance value will then be determined by simply substituting $\gamma=1$ into the equation relating normalized impedance and γ , *i.e.*, Eq. (4) below.

For completeness, we also mention that Cartwright *et al.* [3] recently studied the circuit of Fig. 1 in detail for $R_1 = R, R_2 = 0$ and $R_3 = \infty$. In fact, the maximum impedance and the frequency at which it occurs ($\gamma \neq 1$) were derived for this case, without using calculus.

II. DERIVATION OF Z FOR THE CIRCUIT OF FIG. 1.

As given in [1], the complex impedance $\hat{Z} = Ze^{i\phi}$ for the circuit of Fig. 1, case (ii) is given by

$$\frac{\hat{Z}}{R} = \frac{Ze^{i\phi}}{R} = \left(1 + \frac{1}{1+i\omega L/R} + \frac{1}{1-\frac{i}{\omega RC}} \right)^{-1}. \quad (1)$$

Eq. (1) can also be written in terms of the dimensionless quantities γ and ρ . Indeed, as given in [1],

$$\frac{\hat{Z}}{R} = \frac{Ze^{i\phi}}{R} = \left(1 + \frac{1}{1+i\gamma\rho} + \frac{1}{1-i\rho/\gamma} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Using straightforward mathematical operations, Eq. (2) becomes

$$\frac{Ze^{i\phi}}{R} = \frac{\gamma(\rho^2+1)+i\rho(\gamma^2-1)}{\gamma(\rho^2+3)+i2\rho(\gamma^2-1)}. \quad (3)$$

Hence, it follows that

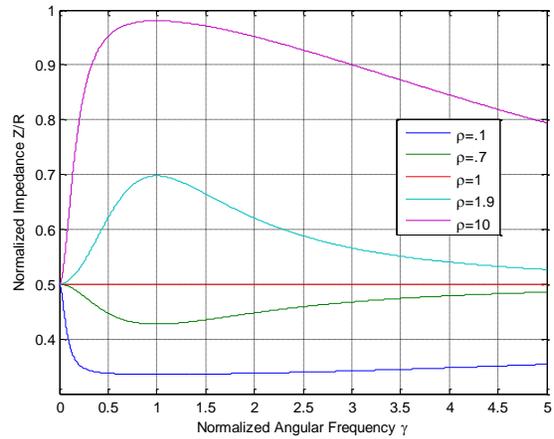


FIGURE 2. Relationship between the normalized impedance magnitude Z/R and the normalized angular frequency $\gamma = \omega/\omega_o$ for various $\rho = \sqrt{L/C}/R$ values.

$$\frac{Z}{R} = \left| \frac{Ze^{i\phi}}{R} \right| = \sqrt{\frac{\gamma^2(\rho^2+1)^2 + \rho^2(\gamma^2-1)^2}{\gamma^2(\rho^2+3)^2 + 4\rho^2(\gamma^2-1)^2}}. \quad (4)$$

Note that Eq. (4) can be used to generate the curves in Fig. 2. However, neither Eq. (3) nor Eq. (4) is given in [1], so it is unclear what method the authors of [1] used to produce their curves, although they likely simply used Matlab to compute the magnitude of their Eq. (6).

Interestingly, when $\rho=1$, Eq. (4) becomes $Z/R=1/2$, *i.e.*, the impedance is no longer a function of the radian frequency ω , in agreement with Fig. 2.

Furthermore, when $\gamma=1$, Eq. (4) gives

$$\frac{Z}{R} = \frac{\rho^2+1}{\rho^2+3}. \quad (5)$$

So, if we can show analytically that the maximum or minimum occurs at $\gamma=1$, then Eq. (5) would give that minimum or maximum Z value.

In order to find the minimum or maximum of Eq. (4) without calculus, it will be necessary to write Eq. (4) in terms of the quotient of polynomials in γ . Hence, to accomplish this, notice that Eq. (4) can be rewritten as

$$\frac{Z}{R} = \sqrt{\frac{\gamma^2\left(\frac{\rho^2+1}{\rho}\right)^2 + (\gamma^2-1)^2}{\gamma^2\left(\frac{\rho^2+3}{\rho}\right)^2 + 4(\gamma^2-1)^2}}. \quad (6)$$

Furthermore,

$$\frac{Z}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^4 + (A-2)\gamma^2 + 1}{\gamma^4 + (B-2)\gamma^2 + 1}}, \quad (7)$$

where $A = \left(\frac{\rho^2 + 1}{\rho}\right)^2$ and $B = \left(\frac{\rho^2 + 3}{2\rho}\right)^2$.

III. NON-CALCULUS DERIVATION OF THE MAXIMUM OR MINIMUM Z FOR THE CIRCUIT OF FIG. 1

Now that a mathematical expression has been determined in Eq. (7) for the normalized impedance magnitude, we can show how its maximum or minimum value can be obtained.

We note that Eq. (7) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \frac{Z}{R} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma^4 + (B-2)\gamma^2 + 1 + (A-B)\gamma^2}{\gamma^4 + (B-2)\gamma^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{(A-B)\gamma^2}{\gamma^4 + (B-2)\gamma^2 + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{A-B}{\gamma^2 + \gamma^{-2} - 2 + B}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{A-B}{(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2 + B}}. \end{aligned} \quad (8)$$

There are now three cases to consider: $A = B, A > B$ and $A < B$.

A. Impedance when $A=B$

When $A = B, \rho = 1$ and Eq. (8) becomes $Z/R = 1/2$ as mentioned earlier.

B. Maximum Impedance when $A > B$

When $A > B$, it is easily shown that $\rho > 1$. Hence, as is evident from Fig. 2, there is a maximum value of Z . Furthermore, from Eq. (8), it is clear that the impedance is maximized if $\frac{(A-B)}{(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2 + B}$ is maximized. As $A - B$ is

positive, $\frac{(A-B)}{(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2 + B}$ is maximized when $(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2$ is

minimized, *i.e.*, when $\gamma = 1$.

Hence, we have shown analytically that the impedance is maximized when $\gamma = 1$ for $\rho > 1$; therefore, its maximum value is given by Eq. (5). Alternatively,

substituting $\gamma = 1$ into Eq. (8) gives the maximum impedance as

$$\frac{Z_{\max}}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 + 3} = \frac{1 + \frac{1}{\rho^2}}{1 + \frac{3}{\rho^2}} = \left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) \left(1 + \frac{3}{\rho^2}\right)^{-1}. \quad (9)$$

Recall that for small x , $(1+x)^{-1} \approx 1-x$ (see *e.g.*, [4]); therefore, for large ρ^2 , *i.e.*, $\rho^2 \gg 3$, $\left(1 + \frac{3}{\rho^2}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{3}{\rho^2}$. Hence, Eq. (9) becomes (ignoring powers higher than second order),

$$\frac{Z_{\max}}{R} \approx 1 - \frac{2}{\rho^2} = 1 - 2 \frac{RC}{L} = 1 - 2 \frac{\tau_C}{\tau_L}, \quad (10)$$

where $\tau_L = L/R$ and $\tau_C = RC$ are time-constants of the circuit.

Furthermore, for large ρ^2 , $\frac{2}{\rho^2}$ is small compared to one:

therefore, Eq. (10) reduces to $Z_{\max} \approx R$.

C. Minimum Impedance when $A < B$

When $A < B$, it is easily shown that $\rho < 1$. Hence, as is evident from Fig. 2, there is a minimum value of Z .

We can rewrite Eq. (8) as

$$\frac{Z}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{B-A}{(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2 + B}}. \quad (11)$$

Note that $B - A$ is positive. Furthermore, from Eq. (11), it is clear that the impedance is minimized if $\frac{B-A}{(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2 + B}$ is

maximized, which occurs when $(\gamma^1 - \gamma^{-1})^2$ is minimized, *i.e.*, when $\gamma = 1$.

Hence, we have shown analytically that the impedance is minimized when $\gamma = 1$ for $\rho < 1$; therefore, its minimum value is given by Eq. (5). Alternatively, substituting $\gamma = 1$ into Eq. (11) gives the minimum impedance as

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\min}}{R} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 + 3} = \frac{\rho^2 + 1}{3 \left(1 + \frac{\rho^2}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{3} (\rho^2 + 1) \left(1 + \frac{\rho^2}{3}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

For small ρ^2 , i.e., $\rho^2/3 \ll 1$, or $\rho^2 \ll 3$, $\left(1 + \frac{\rho^2}{3}\right)^{-1} \approx 1 - \frac{\rho^2}{3}$.

Hence, Eq. (12) becomes

$$\begin{aligned} \frac{Z_{\min}}{R} &\approx \frac{1}{3}(\rho^2 + 1)\left(1 - \frac{1}{3}\rho^2\right) \approx \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\rho^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{L}{R}\frac{1}{RC}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\tau_L}{\tau_C}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

For small ρ^2 , $\frac{2}{3}\rho^2$ is small compared to one: therefore, Eq. (13) reduces to $Z_{\min} \approx R/3$. Again, in deriving Eq. (13), we ignored powers higher than second order.

IV. CONCLUSIONS

We have shown that the maximum or minimum impedance of the parallel circuit of Fig. 1 can be determined without calculus. In fact, we have determined that the maximum or minimum impedance is given by Eq. (5), i.e., $\frac{Z}{R} = \frac{\rho^2 + 1}{\rho^2 + 3}$.

Furthermore, we have shown that for $\rho^2 \ll 3$, the

minimum impedance $Z_{\min} \approx R(1 + 2\rho^2/3)/3 \approx R/3$, whereas for $\rho^2 \gg 3$, the maximum impedance $Z_{\max} \approx R(1 - 2/\rho^2) \approx R$.

Finally, we would like to point out that these theoretical results can be verified with PSpice simulation as was done in [2]. However, the details are not that different from what was done in [2] and hence the PSpice simulation is not reported here.

REFERENCES

- [1] Ma, L., Honan, T. and Zhao, Q., *Reactance of a parallel RLC circuit*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 162-164 (2008).
- [2] Cartwright, K. V. and Kaminsky, E. J., *A Further Look at the "Reactance of a Parallel RLC Circuit"*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 505-508 (2011).
- [3] Cartwright, K. V., Joseph, E. and Kaminsky, E. J., *Finding the exact maximum impedance resonant frequency of a practical parallel resonant circuit without calculus*, The Technology Interface International Journal **1**, 26-34 (2010). Available from <http://www.tijj.org/issues/winter2010/files/TIJJ%20fall-spring%202010-PDW2.pdf>.
- [4] Mungan, C. E., *Three important Taylor series for introductory physics*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 535-538 (2009).

Heat diffusion in a homogenous slab with an arbitrary periodical heat source: The case of heat source with square wave modulation function



J. B. Rojas-Trigos and A. Calderón

Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, del Instituto Politécnico Nacional. Av. Legaria #694, Col. Irrigación, C. P. 11500, México D. F.

E-mail: jrojast@ipn.mx

(Received 16 November 2011, accepted 14 January 2012)

Abstract

As it has been mentioned in a previous work, the starting point in the study of heat transfer problems is the heat diffusion equation, and their solution reflects not only the boundary conditions consistent to the experimental setup, but also the kind of modulation considered for the heat source. There, the solutions of the heat diffusion equation were found for Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions type, and for an arbitrary modulation function, which the only requirement that the modulation function had an expansion in Fourier basis. From these general solutions, the temperature distributions (as function of relative frequency and relative position) were calculated, under the assumption that the heat source had the sinusoidal modulation inherit from the modulation of the optical excitation, and for all three boundary conditions mentioned before, since this kind of modulation is usually used in the standard models in Photothermal Science and Techniques. However, this kind of modulation is in fact an approximation for the real experimental conditions, since mechanical modulators (choppers) are frequently used in Photothermal experiments with modulated light. In this present work, the temperature distributions are calculated, considering a square wave modulation for Dirichlet, Neumann and Robin boundary conditions, and in the case of Robin boundary conditions, the influence of different Biot numbers in the thermal response, are also presented and discussed.

Keywords: Diffusion equation, homogenous solid, Photothermal techniques, square wave modulation, thermal diffusivity, thermal wave.

Resumen

Como se ha mencionado en trabajos previos, el punto de partida en el estudio de los problemas de transferencia de calor es la ecuación de difusión de calor, y su solución no solo refleja las condiciones de frontera compatibles con el sistema experimental, sino también el tipo de modulación tomado en cuenta para la fuente de calor. Así, las soluciones de la ecuación de difusión de calor fueron calculadas para las condiciones de frontera de los tipos Neumann, Dirichlet, y Robin, y para una función de modulación arbitraria, con el único requisito de que la función de modulación tuviera una expansión en base de Fourier. A partir de estas soluciones generales, la distribución de temperatura (como la función de la frecuencia relativa y la posición relativa) fueron determinadas, bajo la suposición de que la fuente de calor tuviera una modulación sinusoidal heredada de la excitación óptica, y para las tres condiciones de frontera antes mencionadas, ya que este tipo de modulación se utiliza generalmente en los modelos estándar en las Ciencias y Técnicas Fototérmicas. Sin embargo, este tipo de modulación es una aproximación a las condiciones experimentales reales, ya que los moduladores mecánicos (choppers) se utilizan frecuentemente en experimentos Fototérmicos con luz modulada. En el presente trabajo, las distribuciones de temperatura son calculadas, considerando una modulación de onda cuadrada para las condiciones de frontera Neumann, Dirichlet y de Robin, y en el caso de condiciones de frontera de Robin, la influencia de diferentes números de Biot en la respuesta térmica, también se presentan y discuten.

Palabras clave: Ecuación de difusión, sólidos homogéneos, técnicas Fototérmicas, modulación de onda cuadrada, difusividad térmica, onda térmica.

PACS: 02.30.Jr, *43.35.Ud, 44.04.+e, 44.25.+f, 44.27.+g, 65.40.-b, 66.30.Xj, 66.70.-f

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

When an experiment that involves heat transfer phenomena [1, 2], such as Photothermal (PT) measurement techniques does [3], is conceived to use modulated light as excitation,

there are many ways to accomplish a useful modulation, *i.e.* a controllable modulation. In several measurement systems, photodiodes and laser diodes controlled by a signal generator are used to generate a modulated optical excitation, with the convenience of having various options

in the kind of modulation for the amplitude (even a very good approximation to a sinusoidal modulation). Nevertheless, the most common way to generate modulated optical excitation still is by means of a mechanical modulator (chopper), since it is a cheap option and easy to implement in any laboratory. The continuous light beam, becoming from the light source, emerges from the chopper as a square pulse train, this is, as a square wave. In Fig. 1, a comparison between the sinusoidal and the square wave modulations is presented.

To include the square wave (SW) modulation into the heat diffusion equation (HDE), an expansion in Fourier

basis can be carried out, and so, the coefficients C_m of the Fourier series of the SW were calculated to be:

$$C_m = \frac{\text{Sinc}(m/2)}{2} \cdot \exp(-im\pi/2). \quad (1)$$

Where the Sinc function, is the cardinal sine function [4]. From Eq. (1), is clear that only the odd harmonics will contribute to the SW function, and therefore, only the odd harmonics are relevant in the thermal response, for the SW case, calculated from the general solutions of the HDE by the Green's function technique [2, 4].

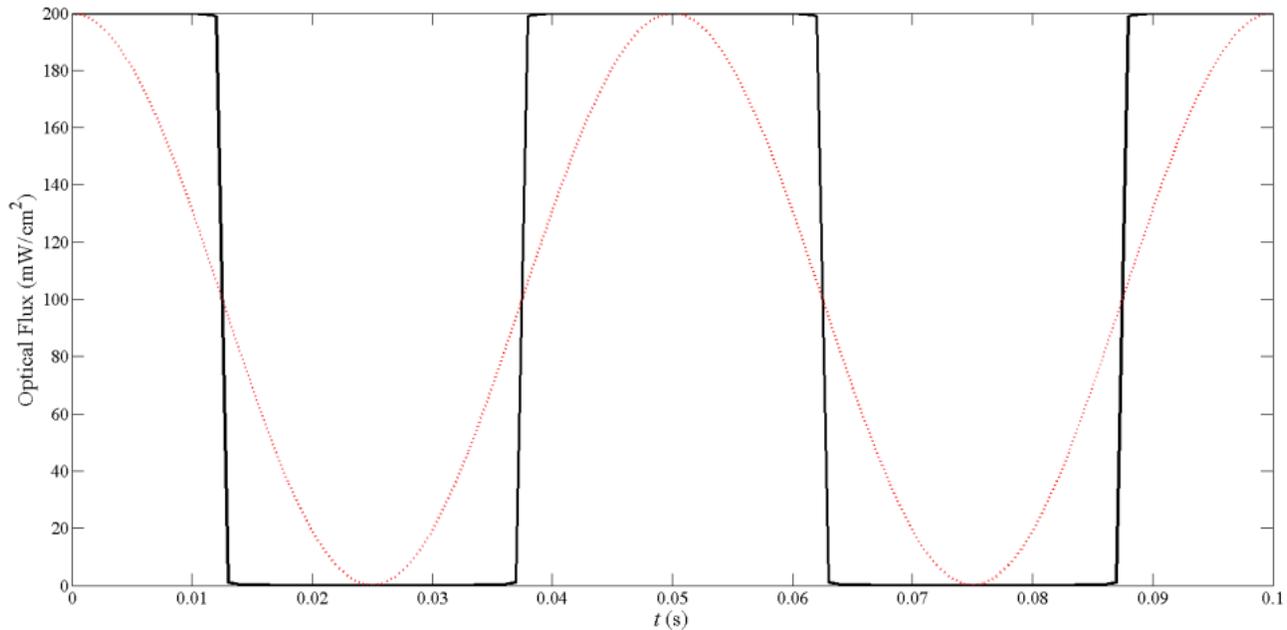


FIGURE 1. Comparison between the sinusoidal modulation (red dotted line) and the square wave modulation (black solid line) of an optical excitation flux.

II. SOLUTIONS OF THE HEAT DIFFUSION EQUATION

Be a lineal, homogenous and isotropic slab, such that its geometry and the flux's direction of the incident light beam sustain a cylindrical symmetry, as Fig. 2 schematizes.

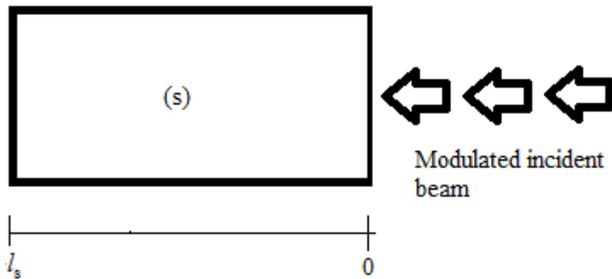


FIGURE 2. Scheme of the geometry of the system.

Referring us to our previous work [5], where the method of solving the heat diffusion equation is described in detail, at next, the solutions under Dirichlet, Neumann and Robin boundary type conditions are described for the SW modulation. As well as the previous work, relative position $z^* = z/l_s$ and relative frequency $\nu = f/f_c$ are used to discuss the theoretical predictions, being l_s the thickness of the slab, and f_c the characteristic frequency [6].

A. Dirichlet boundary condition

In this case $A_f = A_r = 1$ y $B_f = B_r = 0$. The restriction implies the continuity of the temperature distribution across the interfacial surfaces, therefore, the response on the frequency domain to be:

$$\theta_D(\omega', z^*) = \sum_m \frac{A_m r_s}{(r_s^2 - 1)} [H(\omega', z^* - l_s) F(\omega', z^*) - \dots \dots - H(\omega', z^*) F(\omega', z^* - l_s) \exp(-\beta l_s)] \quad (2)$$

Where:

$$H(\omega', \zeta) \equiv \frac{\text{Sinh} \sigma_s \zeta}{\sigma_s \text{Sinh} \sigma_s l_s}, \quad (3)$$

$$F(\omega', \zeta) \equiv 1 - \exp(-\beta \zeta) [r_s \text{Sinh} \sigma_s \zeta + \text{Cosh} \sigma_s \zeta],$$

$$r_s \equiv \frac{\beta}{\sigma_s} \quad ; \quad A_m = \sqrt{2\pi} \frac{(1-R) I_0 \eta}{\kappa_s} C_m.$$

In the previous equations, $\sigma_s \equiv (1+i)/\mu_s$ is the complex thermal diffusion coefficient, defined by means of the thermal diffusion length [6, 7] $\mu_s \equiv (2\alpha_s/\omega')^{1/2}$, being α_s the thermal diffusivity of the sample (s). By means of the Inverse Unitary Fourier Transform of Eq. (2), the temperature distribution (under Dirichlet boundary conditions) in time domain is given by:

$$\Theta_D(t, z^*) = \sum_m \frac{\theta_D(\omega_m, z^*)}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega_m t). \quad (4)$$

In the calculations values of $\beta l_s = 300$ (i.e. the sample is optically opaque) and were considered, and the results are presented in Fig. 3 for the SW modulation, and in order to make a comparison between the behavior of the thermal response for sinusoidal and the SW modulations, Fig. 4 shows the theoretical calculations at $z^* = 0.5$, in relative frequency domain.

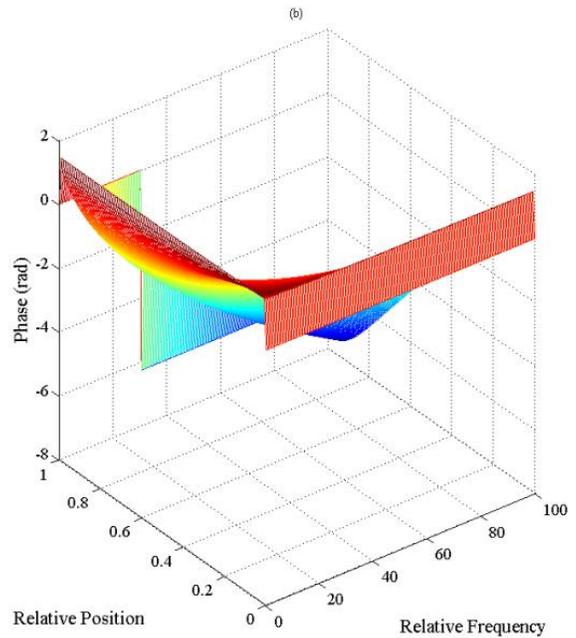
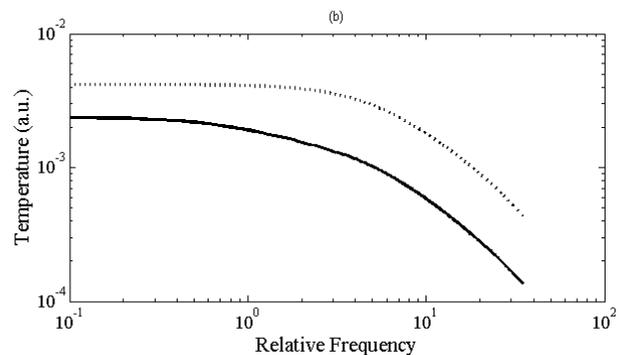
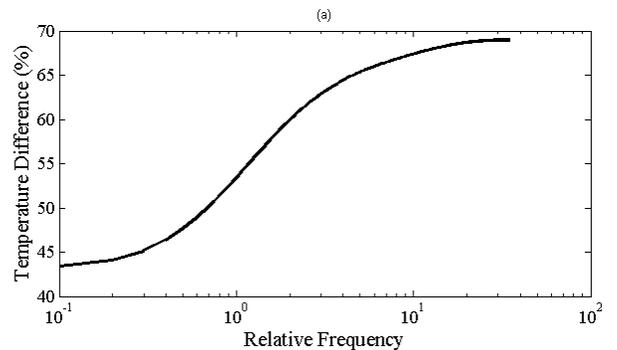
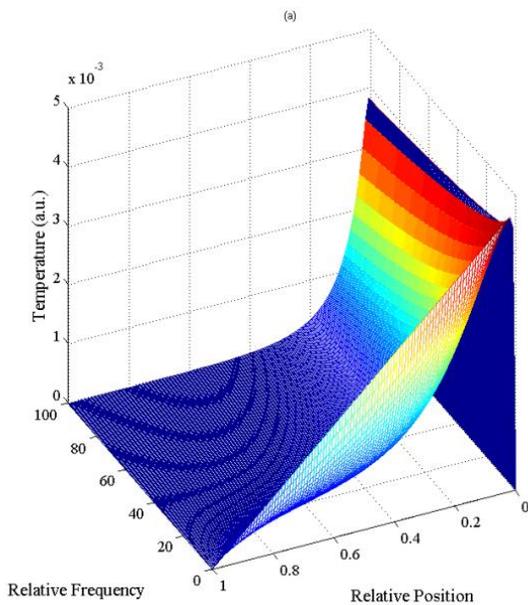


FIGURE 3. Calculation of: (a) Amplitude of the temperature variations, and (b) Phase of the temperature variations, as function of relative position and frequency. Dirichlet boundary conditions were considered.



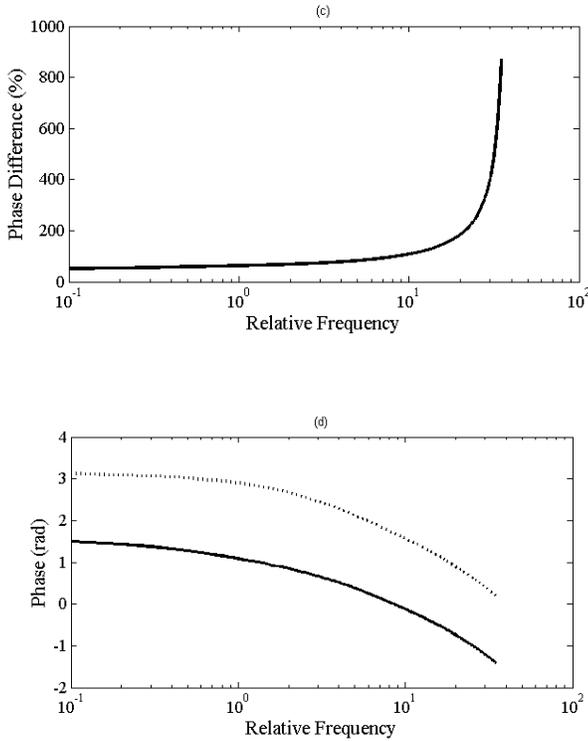


FIGURE 4. Percentage difference in (a) Amplitude and (c) Phase difference of the temperature, as function of relative frequency, between the sinusoidal and SW modulations. Comparison between the thermal responses in: (b) Amplitude and (d) Phase Difference, as function of relative frequency, for sinusoidal (dotted line) and SW (solid line) modulations. Dirichlet boundary conditions were considered.

From Fig. 4 it can be seen that for very small and very large values of the relative frequency, the behavior of the thermal response under the sinusoidal and SW modulations differs almost by a constant factor. This can be explained because the two models converge to each other when the thermal response of the sample lies in the thermally thin or thick regimes, since the contribution of the higher harmonics in the SW modulation are negligible. However, for values of 0.37 to 3.7 for the relative frequency, the higher harmonics contribute to the temperature distribution in such way that their influence cannot be neglected. This range for the relative frequency can be associated to a transition from the thermally thin regime to the thermally thick regime. Also, from Fig. 4(a) it follows that the temperature difference reaches its greatest rate of change, with a change in its concavity, around f_c , highlighting the importance of the characteristic frequency in the thermal response.

B. Neumann boundary conditions

In this second case, $A_f = A_r = 0$ y $B_f = B_r = k_s$, and so, the continuity of the heat flux across the interfacial surfaces is guarantee. In such case, the response on the frequency domain will be:

$$\theta_N(\omega', z^*) = \sum_m \frac{A_m r_s}{(r_s^2 - 1)} \left[M(\omega', z^* - l_s) S(\omega', z^*) - \dots \right. \quad (5)$$

$$\left. \dots - M(\omega', z^*) S(\omega', z^* - l_s) \exp(-\beta l_s) \right].$$

Where:

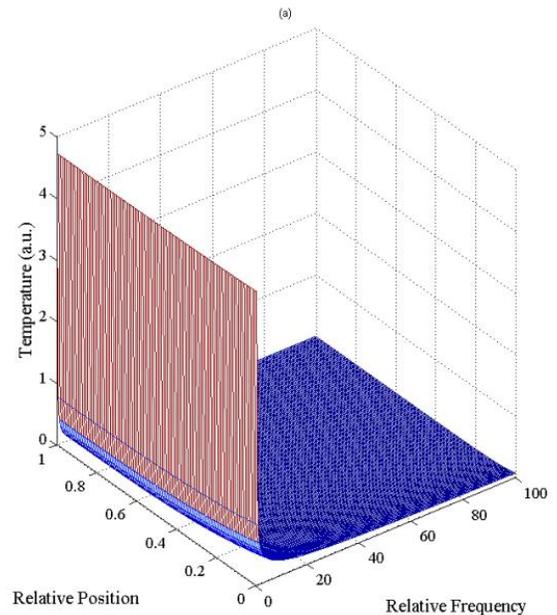
$$M(\omega', \zeta) \equiv \frac{\text{Cosh } \sigma_s \zeta}{\sigma_s \text{Sinh } \sigma_s l_s}, \quad (6)$$

$$S(\omega', \zeta) \equiv r_s - \exp(-\beta \zeta) [\text{Sinh } \sigma_s \zeta + r_s \text{Cosh } \sigma_s \zeta].$$

In similar way, applying the Inverse Unitary Fourier Transform to Eq. (5), the temperature distribution (under Neumann boundary conditions) in time domain is given then by:

$$\Theta_N(t, z^*) = \sum_m \frac{\theta_N(\omega_m, z^*)}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega_m t). \quad (7)$$

In the calculations a value of $\beta l_s = 300$ was considered.



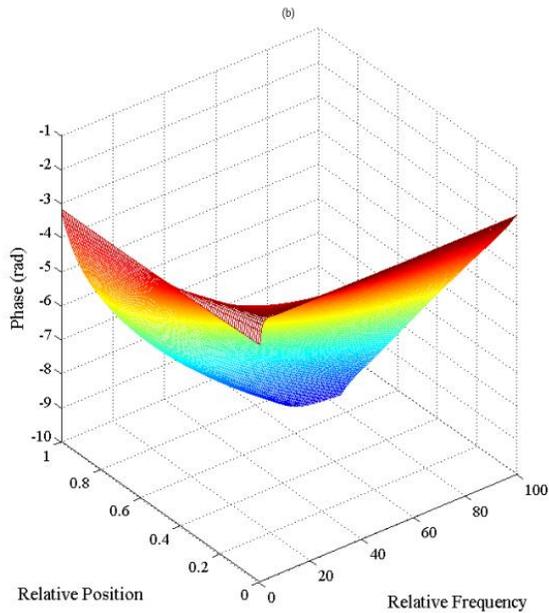


FIGURE 5. Calculation of: (a) Amplitude of the temperature variations, and (b) Phase of the temperature variations, as function of relative position and frequency. Neumann boundary conditions were considered.

In order to make a comparison between the behavior of the thermal response for sinusoidal and the SW modulations, Fig. 6 shows the theoretical calculations at $z^* = 0.5$, in relative frequency domain. Also, it shows that for values around of 1 to 10 for the relative frequency, the contributions of higher harmonics must be taken into account. In this range for the relative frequency, a transition from the thermally thin to thermally thick regimes occurs, and the difference of the model under the sinusoidal and SW modulations strongly depends on the frequency. Thus, for the Neumann boundary conditions, the transition interval between the thermally thin regime and the thermally thick regime is broader than the Dirichlet case.

Also, from Fig. 6(a) it follows that the temperature difference reaches its greatest rate of change, with a change in its concavity, around $\nu = 3.7$.

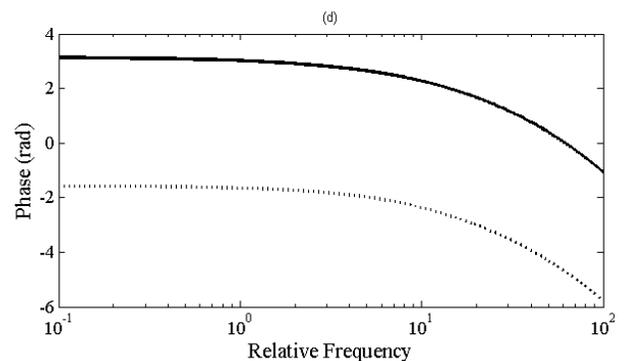
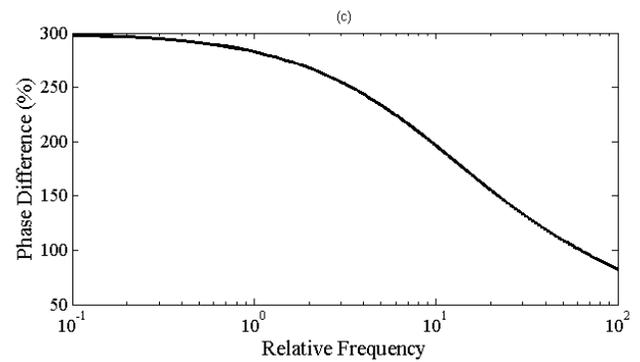
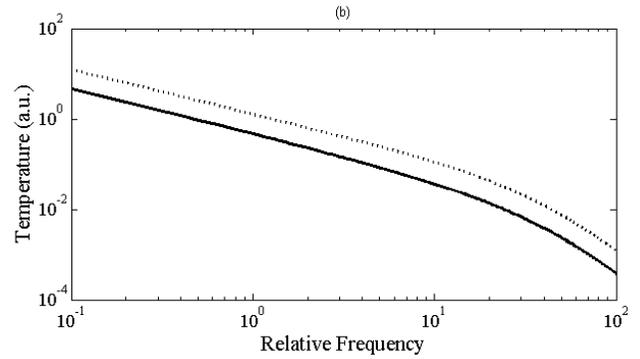
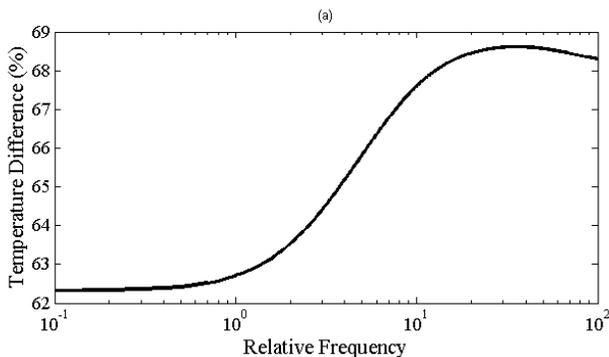


FIGURE 6. Percentage difference in (a) Amplitude and (c) Phase difference of the temperature, as function of relative frequency, between the sinusoidal and SW modulations. Comparison between the thermal responses in: (b) Amplitude and (d) Phase Difference, as function of relative frequency, for sinusoidal (dotted line) and SW (solid line) modulations. Neumann boundary conditions were considered.

C. Robin boundary conditions

This third case, also known as impedance boundary conditions, $A_r = A_f = h$, and $B_r = B_f = k_s$. In this kind of boundary conditions, h represents the overall heat exchange coefficient, and depends on the surrounding medium as well the physical properties of the sample. So, the homogenous Robin boundary condition states that the total

heat flux is conserved, taking into account the conductive, convective and radiative heat fluxes.

If we considered that the Biot number $Bi_s \equiv hl_s k_s^{-1}$ [8, 9] is a simple index of the ratio of the heat transfer resistance of and at the surface of the sample (and therefore qualifies the ability of it to exchange heat through their surfaces), it is possible to define a coefficient e_s as:

$$e_s = \frac{Bi_s \mu_s}{\sqrt{2} l_s} \exp(-i\pi/4). \tag{8}$$

The coefficient e_s is a dimensionless quantity, being a function not only of the solid sample and its surroundings, but also a function of the modulation frequency, diminishing at the time that the modulation frequency gets larger. The response on the frequency domain to be:

$$\theta_R(\omega', z^*) = \sum_m \frac{A_m r_s}{(r_s^2 - 1)} \left\{ \frac{[(W_{(-)} \circ V)(\omega', z^* - l_s)] Q_{(+)}(\omega', z^*) - [(W_{(+)} \circ V)(\omega', z^*)] Q_{(-)}(\omega', z^* - l_s)}{\sigma_s [(1 - e_s^2) \text{Sinh} \sigma_s l_s - 2e_s \text{Cosh} \sigma_s l_s]} \right\}. \tag{9}$$

In Eq. (9), \circ , denotes the function composition operator, and the following definitions were used:

$$Q_{(\pm)}(\omega', \zeta) \equiv W_{(\pm)}(r_s, 1) - \exp(-\beta\zeta) \left[r_s (W_{(\pm)} \circ V)(\omega', \zeta) + (W_{(\pm)} \circ U)(\omega', \zeta) \right],$$

$$W_{(\pm)}(X, Y) \equiv X \pm e_s Y, \tag{10}$$

$$U(\omega', \zeta) \equiv (\text{Sinh} \sigma_s \zeta, \text{Cosh} \sigma_s \zeta) \quad ; \quad V(\omega', \zeta) \equiv (\text{Cosh} \sigma_s \zeta, \text{Sinh} \sigma_s \zeta).$$

The temperature distribution, under Robin boundary conditions, in time domain is written finally as:

$$\Theta_R(t, z^*) = \sum_m \frac{\theta_R(\omega_m, z^*)}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega_m t). \tag{11}$$

For Robin boundary condition, values of $\beta l_s = 300$ and $Bi_s = 0.5$ were considered for the calculation of the temperature variation surface, showed in Fig. 7.

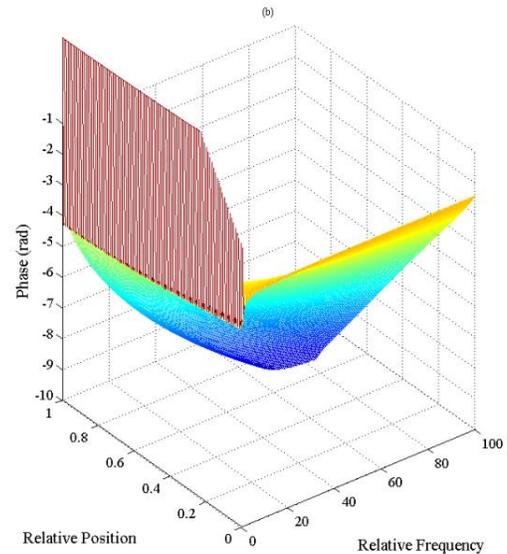
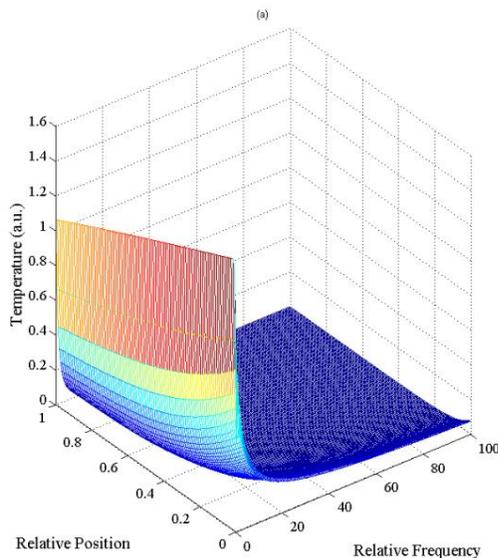


FIGURE 7. Calculation of: (a) Amplitude of the temperature variations, and (b) Phase of the temperature variations, as function of relative position and frequency. Robin boundary conditions were considered.

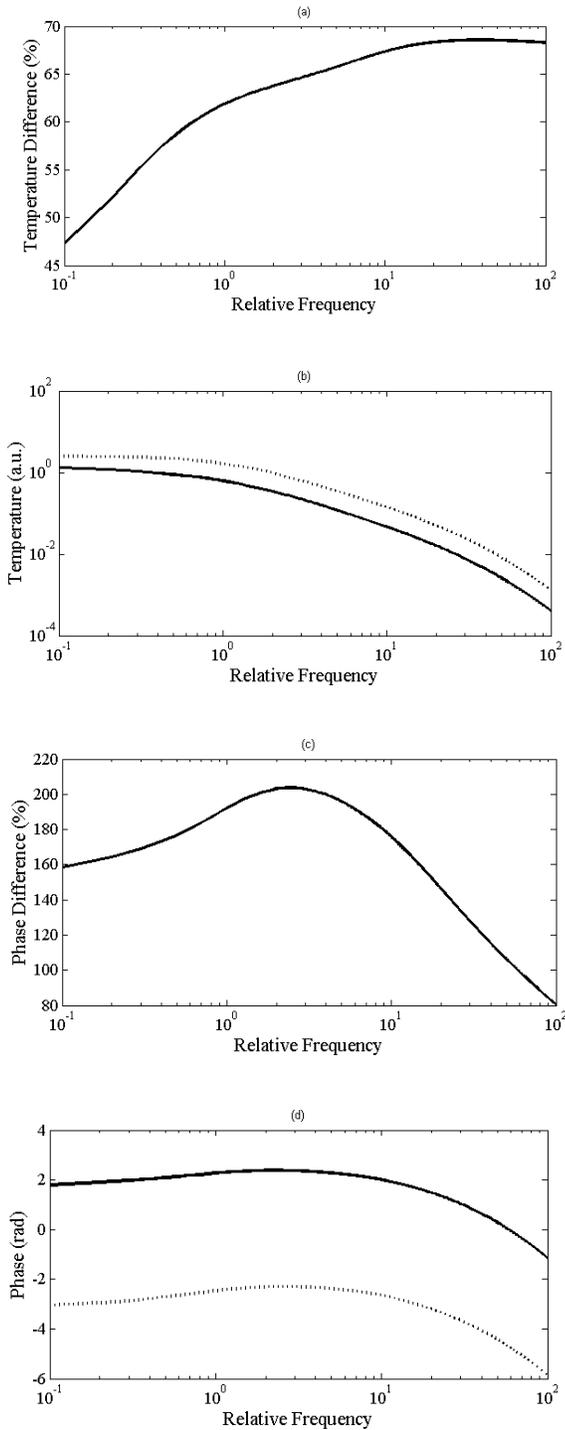


FIGURE 8. Percentage difference in (a) Amplitude and (c) Phase difference of the temperature, as function of relative frequency, between the sinusoidal modulation and SW. Comparison between the thermal responses in: (b) Amplitude and (d) Phase Difference, as function of relative frequency, for sinusoidal (dotted line) and SW (solid line) modulations. Robin boundary conditions were considered.

Figure 8 shows an even more strong dependency on the relative frequency of the percentage difference between the sinusoidal and SW modulations (especially in the phase

difference calculations), since the contribution to the thermal response due to the overall heat exchange depends on the modulation frequency.

Again, the influence of Bi_s appears through the coefficient e_s , modulated by the thermal diffusion length, which is a function of the modulation frequency. In Fig. 9, different values of Bi_s number are used for the calculation of the temperature distribution (at $z^* = 0.5$), and the results are compared to the solutions under Neumann boundary condition, in the relative frequency domain, and for the SW modulation.

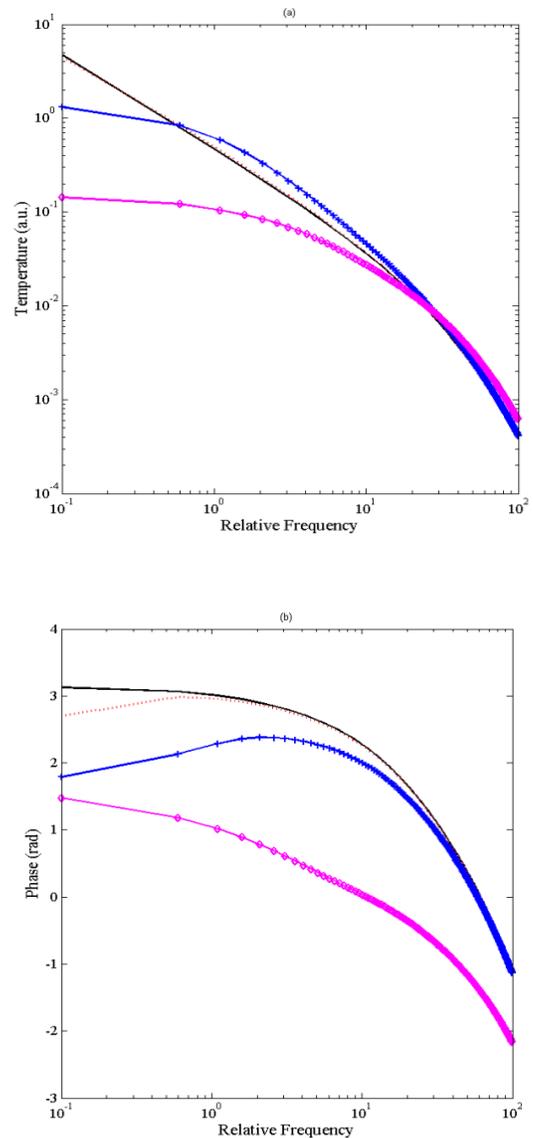


FIGURE 9. Comparison of the behavior of: (a) Amplitude and (b) Phase of the temperature variations as function of relative frequency, for Square wave modulation. The solid black line represents the solutions under Neumann boundary conditions. The calculations under Robin boundary conditions were performed for different values of Bi_s : 0.05(dotted red line), 0.5 (blued plus sign) and 5 (pink diamonds).

There are some differences in the influence of Bi_s for a SW modulation, in comparison to the sinusoidal modulation. As before, the thermal response for different Bi_s numbers tends to equalize at greater relative frequencies, but the behavior of the phase difference is quite distinctive from the calculated for the sinusoidal modulation, and these differences are strongly dependant to the relative frequency, due to the contributions of the higher harmonics for the SW results [10].

III. CONCLUSIONS

From the previous analysis, a carefully selection of the frequency range must be done in consideration to approximate the current modulation by a sinusoidal modulation, when a mechanical modulator is used in the experimental set up. If the modulation frequency guarantees that the thermal response is near or lies into one of the thermal regimes, there is not loss of reliability on the comparison between the experimental data with a model of PT generation signal based in a sinusoidal modulation. But, when there is a strong possibility that the frequency range is so that the sample makes a transition to one thermal regime to another, the correct modulation function must be used in the PT signal generation model, otherwise, the difference between the model and the experimental data will strongly depend on the modulation frequency, which is of course, an undesirable situation. Also, when the thermal response is suitable to be influenced by convective and radiative components to the heat flux, it is not sufficient to take into account the value of the Biot number alone, because its significance, speaking on terms of the thermal regime, is mixed to the thermal diffusion length, which is dependant of the modulation frequency [11].

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), México, Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional (SIP-IPN) and Comisión de Operación y Fomento de

Actividades Académicas del Instituto Politécnico Nacional (COFAA-IPN), México.

REFERENCES

- [1] Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., *Conduction of heat in solids*, (Clarendon Press, Oxford UK, 2000).
- [2] Mandelis, A., *Diffusion-wave fields. Mathematical methods and Green functions*, (Springer Verlag, New York, 2001).
- [3] Almond, D. P. and Patel, P. M., *Photothermal science and techniques*, (Chapman & Hall, London, 1996).
- [4] Friedman, B., *Principles and techniques of applied Mathematics*, (Dover Publications Inc., New York, 1990).
- [5] Rojas-Trigos, J. B. and Calderón, A., *Heat diffusion in a homogenous slab with an arbitrary periodical heat source: The case of the sinusoidal modulation function*, Latin Amer. J. Phys. Educ. **5**, 712-719 (2011).
- [6] Calderón, A., Muñoz, H. R. A., Tomas, S. A., Cruz-Orea, A., Sánchez, S. F., *Method for measurement of the thermal diffusivity in solids: Application to metals, semiconductors, and thin materials*, J. Appl. Phys. **84**, 6327-6329 (1998).
- [7] Rojas-Trigos, J. B., Calderón, A. and Marín, E., *A practical model for the determination of transport parameters in semiconductors*, J. Mater Sci. **46**, 7799-7805 (2011).
- [8] Marín, E., Lara-Bernal, A., Calderón, A. and Delgado-Vasallo, O., *On the heat transfer through a solid slab heated uniformly and continuously on one of its surfaces*, Eur. J. Phys. **32**, 783-791 (2011).
- [9] Salazar, A., Apiñaniz, E., Mendioroz, A. and Oleaga, A., *A thermal paradox: which gets warmer?*, Eur. J. Phys. **31**, 1053-1059 (2010).
- [10] Rojas-Trigos, J. B., Calderón, A. and Marín, E., *Thermal diffusivity measurement in solids by means of the Photoacoustic technique Mater. Res. Soc. Symp. Proc.*, Materials Research Society **1242**, 33-39 (2010).
- [11] Rojas-Trigos, J. B., Bermejo-Arenas, J. A. and Marín, E., *On heat transfer through a solid slab heated uniformly and periodically: determination of thermal properties*, Eur. J. Phys. **33**, 135-148 (2012).

Thomas rotation and Mocanu paradox – not at all paradoxical



Z. K. Silagadze^{1,2}

¹Department of physics, Novosibirsk State University, 630 090, Novosibirsk, Russia.

²Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS, 630 090, Novosibirsk, Russia.

E-mail: silagadze@inp.nsk.su

(Received 4 February 2012, accepted 23 March 2012)

Abstract

Non-commutativity of the Einstein velocity addition, in case of non-collinear velocities, seemingly gives rise to a conflict with reciprocity principle. However, Thomas rotation comes at a rescue and the paradox is avoided. It is shown that such a resolution of the so called Mocanu paradox is completely natural from the point of view of basic premises of special relativity.

Keywords: Physics Education, Special relativity, Thomas rotation, Mocanu paradox

Resumen

La no-conmutatividad de la suma de la velocidad de Einstein, en el caso de las velocidades no-alineadas, al parecer da lugar a un conflicto con el principio de reciprocidad. Sin embargo, la rotación de Thomas llega como un rescate y la paradoja se puede evitar. Se demuestra que dicha resolución de la llamada paradoja de Mocanu es completamente natural desde el punto de vista de las premisas básicas de la relatividad especial.

Palabras clave: Enseñanza de la Física, Relatividad especial, rotación de Thomas, paradoja de Mocanu.

PACS: 03.30.+p, 03.50.De

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

It should be clear, after a hundred years of development of special relativity, that to search a logical contradiction or paradoxes in it is the same as to search a logical inconsistency in non-Euclidean geometry (in fact, special relativity is a kind of non-Euclidean geometry – the Minkowski geometry of space-time). Surprisingly, however, such efforts have never been abandoned. Some “paradoxes” are helpful nevertheless because their resolution reveals the roots of our confusion and, therefore, enhances our comprehension of special relativity.

The Mocanu paradox [1, 2, 3] is an interesting paradox of this kind whose resolution makes clear some our misconceptions about space and time, deeply rooted in Newtonian intuition, which are notoriously hard to eliminate in physics students even after years of study of modern physics.

Although the resolution of this “paradox” is already available in the literature (see [3, 4, 5, 6]), “their arguments and mathematical formulas in terms of coordinates do not give an evident physical explanation of the paradox, though it became clear that the paradox was related somehow to the Thomas rotation” [6].

It is the aim of this article to demonstrate by elementary means that there is nothing especially paradoxical about the Thomas rotation as far as it is considered with regard to the Mocanu paradox. To emphasize the physical concepts involved, rather than mathematical formalism, we consider not the most general case of the Mocanu paradox. However, the special case considered already involves all necessary ingredients.

II. THE MOCANU PARADOX

Suppose a reference frame S' moves with the velocity v with respect to the frame “at rest”, S , along its x -axis, and a frame S'' moves with the velocity v' with respect to the frame S' along its y' -axis. It is assumed that the corresponding axes of the frames S and S' are parallel to each other, as do axes of the frames S' and S'' . Then the velocity \vec{u} of S'' relative to S is given by the relativistic velocity addition law

$$u_x = \frac{v'_x + v}{1 + \frac{v'_x v}{c^2}} = v, \quad u_y = \frac{v'_y}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right)} = \frac{v'}{\gamma},$$

$$u_z = \frac{v'_z}{\gamma \left(1 + \frac{v'_x v}{c^2}\right)} = 0,$$

where γ is the Lorentz factor corresponding to the velocity v

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

According to the reciprocity principle [7], if S' moves relative to S with velocity \bar{v} , then S moves relative to S' with velocity $-\bar{v}$. Therefore, in the frame S'' , the frame S' moves along the y'' axis with the velocity $-v'$, while in the frame S' , the frame S moves along the x' axis with the velocity $-v$. Compared to the previous situation, the roles of the x and y axes are interchanged, as are the roles of v and v' (with additional change of sign). Therefore, the velocity addition formula gives the velocity \bar{u}' of the frame S relative to S''

$$u'_x = -\frac{v}{\gamma'}, \quad u'_y = -v', \quad u'_z = 0, \quad (2)$$

where γ' corresponds to the velocity v' .

Of course, it is possible to obtain all this by using the general formula for relativistic addition of non-collinear velocities [3]

$$\bar{u} = \bar{v} \oplus \bar{v}' = \frac{\bar{v} + \bar{v}'}{1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}'}{c^2}} + \frac{1}{c^2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\bar{v} \times (\bar{v} \times \bar{v}')}{1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{v}'}{c^2}}, \quad (3)$$

from which a non-commutativity of this addition is clearly seen, but for our purposes even simpler particular case of this formula for the velocity \bar{v} collinear to the x -axis, (1), suffices if carefully used.

According to the reciprocity principle, the velocity of S'' relative to S should be $-\bar{u}' = \bar{v}' \oplus \bar{v}$, but it clearly does not equal to $\bar{u} = \bar{v} \oplus \bar{v}'$. And this constitutes the content of the Mocanu paradox: what is the correct velocity of S'' relative to S , $\bar{v} \oplus \bar{v}'$ or $\bar{v}' \oplus \bar{v}$, and how we can account for the reciprocity principle in this case?

We can discard a possibility that the reciprocity principle is violated from the very beginning. In fact, it is possible and even preferable to base special relativity on this intuitively evident principle, instead of highly counter-intuitive second postulate (see [8] and references therein).

III. RESOLUTION OF THE MOCANU PARADOX

The key idea in resolution of the Mocanu paradox is the realization of the fact that space in special relativity is in fact more relative than space in the non-relativistic physics [6], although this can hardly be guessed by merely comparing the Galilean transformation $x' = x - vt$, which describes relativity of space for non-relativistic observers, to its relativistic counterpart $x' = \gamma(x - vt)$. In words of Minkowski, "space by itself, and time by itself are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality" [9].

The vectors $\bar{v} \oplus \bar{v}'$ and $\bar{v}' \oplus \bar{v}$ are defined in different reference frames S and S'' , and, therefore, in different spaces. It makes no sense to compare them unless the axes of S and S'' are made parallel in some well defined way.

Axes of the S and S' , as well as axes of the S' and S'' frames are assumed to be parallel, as mentioned above. What conclusion we can draw then about the mutual orientation of the S and S'' frames axes?

In the frame S' , the x'' axis is given by the equation (we will drop z -coordinate as it is irrelevant in our planar case)

$$y' = v't'.$$

Then, according to Lorentz transformations, we conclude that in the frame S the x'' axis is given by the equation

$$y = v'\gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right).$$

Therefore, from the point of view of S , the x'' axis is inclined clockwise relative to the x axis by an angle α so that

$$\tan \alpha = \beta\beta'\gamma. \quad (4)$$

There is nothing paradoxical in this change of inclination. At least nothing more paradoxical than the lack of absolute simultaneity from which it stems. Note that such a change of inclination is used to resolve some pole-and-barn type paradoxes [10, 11].

Analogously, y'' axis is given in the frame S' by the equation $x' = 0$, which in the frame S transforms into

$$\gamma(x - vt) = 0.$$

Therefore, y'' axis is given in the frame S by the equation $x = vt$ and, consequently, remains parallel to the y axis. Fig. 1 summarizes the orientations of the x'' and y'' axes as seen by an observer in the S reference frame.

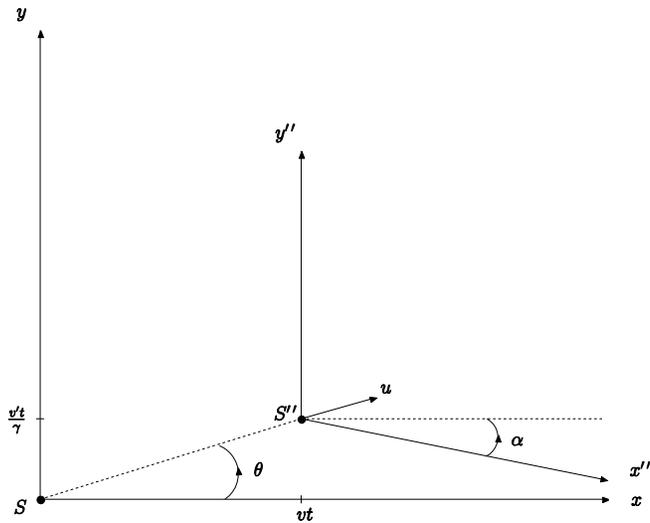


FIGURE 1. Orientations of the S'' axes as perceived in the frame S .

We need some refinement here. Because of the finite speed of light, we should distinguish between what Rindler calls [12] world-picture and world-map. World-picture is what an observer actually sees at any given moment of time, a snapshot which records distant objects at different moments of the past. World-map, on the contrary, is the set of events that the observer considers to have occurred in the world at that instant of time. Special relativity operates with world-maps, Lorentz transformation being an instrument which relates two world-maps of different inertial frames. Therefore, when we speak rather loosely about what an observer sees or perceives, actually we have in mind the world-map of this observer. With this caveat, let us continue and find how the situation described by Fig. 1 is transformed in the frame S'' .

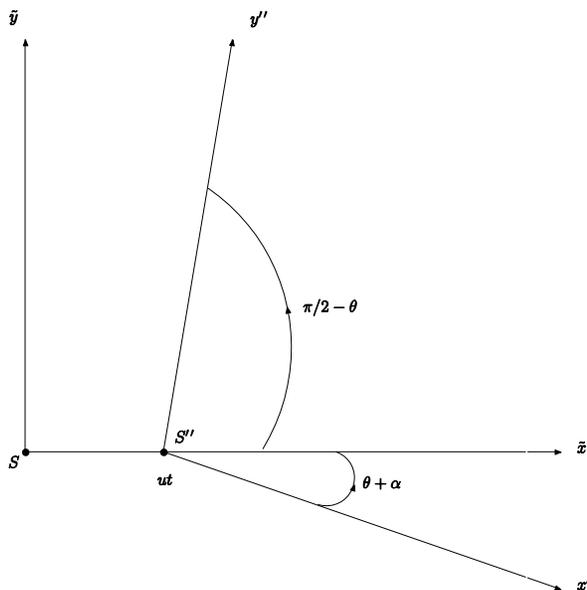


FIGURE 2. Orientations of the S'' axes as perceived in the frame S relative to the \tilde{x} and \tilde{y} axes.

Thomas rotation and Mocanu paradox – not at all paradoxical
 First of all, let us introduce another set of axes \tilde{x}, \tilde{y} and \tilde{x}'', \tilde{y}'' , so that \tilde{x} and \tilde{x}'' are parallel to \tilde{u} and, therefore, S and S'' equipped with these axes are in a standard configuration. In these new axes, Fig. 1 is changed into Fig. 2.

But

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{\beta'}{\beta\gamma} + \beta\beta'\gamma}{1 - \beta'^2} = \frac{\gamma\beta'\gamma'^2}{\beta},$$

and

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta = \frac{\beta\gamma}{\beta'}.$$

Therefore, the equation which defines x'' axis in the frame S looks like

$$\tilde{y} = -\frac{\gamma\beta'\gamma'^2}{\beta}(\tilde{x} - ut), \quad (5)$$

while the equation for the y'' axis is

$$\tilde{y} = \frac{\beta\gamma}{\beta'}(\tilde{x} - ut). \quad (6)$$

Let us apply now the Lorentz transformation

$$\tilde{x} = \gamma_u(\tilde{x}'' + ut''), \quad t = \gamma_u\left(t'' + \frac{u}{c^2}\tilde{x}''\right), \quad \tilde{y} = \tilde{y}'',$$

to change world-map from S to S'' . As a result, we get from (5)

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' &= -\frac{\gamma\beta'\gamma'^2}{\beta}\gamma_u(1 - \beta_u^2)\tilde{x}'' = \\ &= -\frac{\gamma\beta'\gamma'^2}{\beta\gamma_u}\tilde{x}'' = -\frac{\beta'\gamma'}{\beta}\tilde{x}'', \end{aligned} \quad (7)$$

where at the last step we have used

$$\gamma_u = \gamma_{\tilde{v} \oplus \tilde{v}'} = \gamma\gamma'\left(1 + \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{v}'}{c^2}\right) = \gamma\gamma'.$$

Analogously, (6) transforms into

$$\tilde{y}'' = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma_u}\tilde{x}'' = \frac{\beta}{\beta'\gamma'}\tilde{x}''. \quad (8)$$

Equations (7) and (8) show that, from the point of view of an observer in the frame S'' , x'' and y'' axes are inclined with respect to the \tilde{x}'' axis (and, hence, with respect to the

line of relative motion) with angles $-\theta''$ and $\pi/2 - \theta''$ respectively, as shown in Fig. 3.

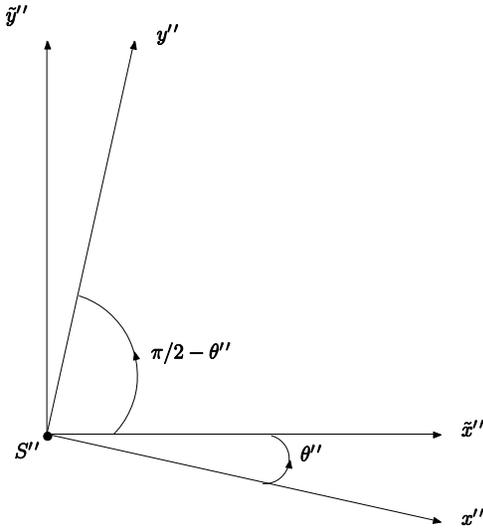


FIGURE 3. Orientations of the S'' axes x'' and y'' as perceived in the frame S'' relative to the \tilde{x} and \tilde{y} axes.

At that

$$\tan \theta'' = \frac{\beta' \gamma'}{\beta}. \tag{9}$$

While naively one should expect the inclination angle θ'' to be the same angle θ by which the x axis is inclined with respect to the \tilde{x} axis in the frame S , as it would be in the case of parallel x and x'' axes of non-relativistic situation, it is not, because

$$\tan \theta = \frac{\beta'}{\beta \gamma}. \tag{10}$$

As we see, although axes of the frames S and S' , as well as S' and S'' , were rendered parallel, the very same axes of the frames S and S'' turned out not to be parallel in any meaningful way. Space for relativistic observers are more relative than for non-relativistic observers and we should be very careful while interpreting the results of several consecutive non-collinear boosts.

The difference $\varepsilon = \theta'' - \theta$ is the notorious Thomas rotation and it provides a ready explanation of the Mocanu paradox: an observer in the frame S'' really perceives $-\vec{u}$ as the velocity of the frame S , in agreement with the reciprocity principle, but projects this vector of relative velocity onto x'' and y'' axes to get its components.

$$u'_x = -u \cos \theta'' = -\frac{u}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta''}} = -\frac{v}{\gamma'},$$

$$u'_y = u'_x \tan \theta'' = -v',$$

where we have used

$$u = v \sqrt{1 + \frac{\beta'^2}{\beta^2 \gamma^2}} = v \sqrt{1 + \frac{\beta'^2}{\beta^2} (1 - \beta^2)} =$$

$$v \sqrt{\frac{1}{\gamma'^2} + \frac{\beta'^2}{\beta^2}} = \frac{v}{\gamma'} \sqrt{1 + \tan^2 \theta''}.$$

As we see, Thomas rotation resolves the Mocanu paradox and reconciles the reciprocity principle with the non-commutativity of relativistic velocity addition.

IV. CONCLUDING REMARKS

Thomas rotation and Thomas precession are often considered as obscure relativistic effects which have generated a huge, sometimes confusing literature [13]. Nevertheless, this phenomena “can be quite naturally introduced and investigated in the context of a typical introductory course on special relativity, in a way that is appropriate for, and completely accessible to, undergraduate students” [14]. I think the Mocanu paradox provides a very useful possibilities in this respect.

The resolution of the paradox presented in this article was essentially given by Ungar [3] years ago. I hope, however, that the above presentation is simpler and clarifies some confusion. For example, it is claimed in [3] that an observer in S sees the axes of S'' rotated relative to his own axes by a Thomas rotation angle ε . However, this is not correct. The observer in S “sees” what is depicted in Fig. 1. Thomas rotation angle, ε , emerges when we compare the orientation of S'' axes, as actually seen by an observer in S'' , to the naive expectation of the observer in S what the observer in S'' should see if the transitivity of parallelism is assumed between different inertial reference frames.

Thomas rotation is very basic phenomenon in special relativity which follows quite naturally from its basic premises, as was demonstrated above. It is as basic as the time dilation and length contraction and is no more paradoxical than these well known effects of special relativity. Of course, this does not mean that it is trivial. It took years before “evidence that Einstein’s addition is regulated by the Thomas precession has come to light, turning the notorious Thomas precession, previously considered the ugly duckling of special relativity theory, into the beautiful swan of gyrogroup and gyrovector space theory” [15]. At this more advanced level, you can enjoy also other non-Euclidean facets of relativistic velocity space [16], from which the geometrical meaning of Thomas rotation, first discovered by the famous French

mathematician Émile Borel long before Thomas found the precession effect [17], becomes evident.

ACKNOWLEDGEMENTS

The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, and in part by Russian Federation President Grant for the support of scientific schools NSh-5320.2012.2.

REFERENCES

- [1] Mocanu, C. I., *Some difficulties within the framework of relativistic electrodynamics*, Arch. Elektrotech. **69**, 97–110 (1986).
- [2] Mocanu, C. I., *On the relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation*, Found. Phys. Lett. **5**, 443–456 (1992).
- [3] Ungar, A. A., *The relativistic velocity composition paradox and the Thomas rotation*, Found. Phys. **19**, 1385–1396 (1989).
- [4] Ungar, A. A., *The Relativistic Composite-Velocity Reciprocity Principle*, Found. Phys. **30**, 331–342 (2000).
- [5] Good, I. J., *Lorentz matrices: A review*, Int. J. Theor. Phys. **34**, 779–799 (1995).
- [6] Matolesi, T., Goher, A., *Spacetime without Reference Frames: An Application to the Velocity Addition Paradox*, Stud. Hist. Philos. Mod. Phys. **32**, 83–99 (2001).
- [7] Berzi, V., Gorini, V., *Reciprocity principle and the Lorentz transformations*, J. Math. Phys. **10**, 1518–1524 (1969).

- Thomas rotation and Mocanu paradox – not at all paradoxical* [8] Silagadze, Z. K., *Relativity without tears*, Acta Phys. Polon. B **39**, 811–885 (2008).
- [9] Minkowski, H., *Space and Time*, In: Lorentz, H. A., Einstein, A., Minkowski, H., Weyl, H., *The Principle of Relativity: A Collection of Original Memoirs on the Special and General Theory of Relativity*, (Dover, New York, 1952), p. 75.
- [10] Shaw, R., *Length Contraction Paradox*, Am. J. Phys. **30**, 72–72 (1962).
- [11] Iyer, C., Prabhu, G. M., *Differing observations on the landing of the rod into the slot*, Am. J. Phys. **74**, 998–1001 (2006).
- [12] Rindler, W., *Relativity: Special, General, and Cosmological*, (Oxford University Press, Oxford, 2001).
- [13] Malykin, G. B., *From the history of physics: Thomas precession: Correct and incorrect solutions*, Phys. Usp. **49**, 837–853 (2006).
- [14] Costella, J. P., McKellar, B. H. J., Rawlinson, A. A., Stephenson, G. J., *The Thomas rotation*, Am. J. Phys. **69**, 837–847 (2001).
- [15] Ungar, A. A., *Beyond the Einstein Addition Law and Its Gyroscopic Thomas Precession. The Theory of Gyrogroups and Gyrovectors Spaces (Fundamental Theories of Physics, Vol. 117)*, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001).
- [16] Rhodes, J. A., Semon, M. D., *Relativistic velocity space, Wigner rotation and Thomas precession*, Am. J. Phys. **72**, 943–960 (2004).
- [17] Walter, S., *The Non-Euclidean Style of Minkowskian Relativity*, In: Gray, J. (ed.): *The Symbolic Universe*, (Oxford University Press, Oxford, 1999), pp. 91–127.

Optimising digital combinational circuit using particle swarm optimisation technique



Ushie, James Ogri, Obu Joseph Abebe Etim, Iniobong prosper

*Department of Physics, Department of Physics, Department of Physics,
University of Calabar, University of Calabar, University of Calabar, Calabar.*

E-mail: ushjames@yahoo.com, abebeobu@yahoo.com, ini2etim@yahoo.com.

(Received 28 November 2011, accepted 27 February 2012)

Abstract

Human methods of circuit minimisation are tedious and limited to systems with four or five numbers of inputs. In order to save time and labour involved in designing digital combinational logic circuit, a standard algorithm that is suitable for digital combinational logic circuit with little modification which handle circuit with more than five inputs variables is developed. Employing MATLAB, the circuits were coded into particles using Particle Swarm Optimisation (PSO) techniques. This was then used to optimise a full-adder circuit. The result obtained, after optimisation for full-adder circuit using PSO technique is shown to have a minimum number of gates (five gates) compared to human designer method which has six gates.

Keywords: Digital combinational logic circuit, Human designer method, MATLAB, Particle Swarm Optimisation.

Resumen

Los métodos humanos de minimización de circuitos son tediosos y se limita a los sistemas con cuatro o cinco números de entrada. Con el fin de ahorrar tiempo y mano de obra involucrada en el diseño de circuitos digitales de lógica combinatoria, se desarrolló un algoritmo estándar que es adecuado para el circuito digital de lógica combinatoria con muy pocas modificaciones que se encarga del circuito con más de cinco variables de entrada. Con el empleo de MATLAB, los circuitos fueron codificados en partículas usando técnicas de optimización por enjambre de partículas (PSO). Este se utilizó entonces para optimizar un circuito sumador completo. El resultado obtenido, después de la optimización de circuito sumador completo utilizando la técnica de PSO se demuestra que tienen un número mínimo de puertas (cinco puertas) en comparación con el método de diseño humano que tiene seis puertas.

Palabras clave: Circuito digital de lógica combinatoria, método de diseño humano, MATLAB, Optimización por enjambre de partículas.

PACS: 07.50.Ek, 07.05.Tp, 07.05.Mh

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

In digital circuit, minimisation is required to reduce the component count and size in a circuit, thereby reducing cost, physical size and weight, and hence increase system reliability and lowers power consumption, which is a prime requirement in modern circuit. There are several methods of circuit minimisation, examples, human methods (Boolean algebra, Karnaugh Map, Quine' McCluskey, etc.) and computational intelligence method such as Genetic Algorithm [1] Fuzzy Logic, Artificial Neural Network (ANN) and Particle Swarm Optimisation (PSO), [2]. The computational intelligence method has a significant advantage over the human methods because it has the ability being automated through programming.

The process of minimisation can be viewed as an optimisation process in that they both seek the best solution for a physical model [3]. In other words, it is a technique used for improving or increasing the value of a model.

Examples of classical methods of optimisation include the gradient method, steepest descent and simplex method. They are useful in finding the optimum of continuous and differentiable function. These techniques, however, have limited scope in practical applications [4], since most day-to-day practical problems involve objective functions that are not continuous and differentiable. The limitation of the classical methods of optimisation has necessitated the development of modern optimisation methods.

Here, we have developed a code (see appendix) using PSO techniques for digital minimisation (written in MATLAB) and then used it to optimise a full-adder circuit.

II. THEORY OF PSO

Particle Swarm Optimisation (PSO) is a population-based stochastic optimisation technique developed by Eberhart and Kennedy [5] following inspiration got from the social

Ushie, James Ogri, Obu Joseph Abebe Etim, Iniobong prosper behaviour of a flock of birds or school of fish [6]. In PSO, population of potential solutions called particles “are flown” in search of the required solution, and each particle is updated in the process. The search and update process resembles the social interaction of the swarm of birds or a school of fish as they seek a common objective in a multi-dimensional search space. Each particle in the swarm keeps a record of the best “position” it has attained in the search space with respect to the objective function called the personal best (pbest), while the swarm keeps record of the overall best “position” attained by any particles, called global best (gbest). Each particle profit from the discoveries and it previous experience of the other particle during the exploration and search process, as they seek to achieve higher objective function values.

PSO differ from traditional optimisation method in that population of potential solution is used in the search, direct fitness information is used instead of function derivatives, and relative knowledge is used to guide the search, [7].

III. ALGORITHM FOR EVOLVING COMBINATIONAL CIRCUIT USING PSO

The PSO algorithm used for evolution and minimisation of digital combinational logic circuits was first implemented by Venus and Ganesh [2]. It runs as follows:

- i. Initialise a population of particles with random “position” and “velocity” in n-dimensional of the problem space i
- ii. Evaluate the fitness of each particle in the swarm to obtained pbest.
- iii. Compare each particle’s fitness with its previous best fitness obtained. If the current value is better than pbest, then set pbest equal the current value and pbest location equal to the current location in n-dimensional space.
- iv. Compare pbest of particle with each other and update the swarm gbest location with the greatest fitness.
- v. Change velocity and position of the particle according to Eqs. (1) and (2).
- vi. Repeat step (ii) to (v) until convergence is reached based on some designed multiple criteria or it iteration limit expires.

The equation for updating particle’s velocity and position are;

$$V_{IN} = W * V_{IN} + C_1 * rand_1 * (P_{IN} - X_{IN}) + C_2 * rand_2 * (P_{IN} - X_{IN}), \quad (1)$$

$$X_{IN} = X_{IN} + V_{IN}, \quad (2)$$

where V_{IN} and X_{IN} represent the velocity and position of the i^{th} particle with n-dimensions respectively, $rand_1$ and $rand_2$ are two random functions, W is inertial weight which controls the exploration and exploitation of the search space because it dynamically adjust velocity (from 0.4 to 0.9m/s), C_1 and C_2 are acceleration constants which change the velocity of a particle towards pbest and gbest.

IV. EVOLUTION OF A DIGITAL LOGIC CIRCUIT USING PSO

We used the particle swarm theory described above to evolve digital logic circuits by implementing the basic process of hardware evolution as illustrated in Fig. 1. The “desired” circuit refers to the circuit required to map 100% exactly the output for corresponding inputs typically given by the truth table for digital circuits. After each generation, the fitness is evaluated against the desired function to be implemented, given by the truth table. If the output of the circuit is equal to the output of the truth table for the corresponding inputs, then the fitness is increased by one. This is carried out for all inputs listed in the truth table. This process is repeated until the fitness value of the gbest particle is equal to the number of the truth table outputs.

In order for the system to know the function of each gate the switch case selection of the MATLAB were used and after each case, wordings such as AND gate, OR gates etc were used and each switch case represent a gate, the basic gate used in this study is comprised of AND, OR, NOT, XOR and a wire. A wire means no gate.

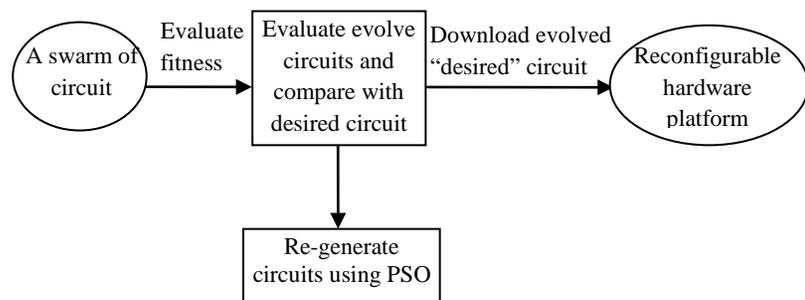


FIGURE 1. “Desired” circuit hardware evolution.

The matrix shown in Fig. 2 represents a circuit with M rows and N columns. The elements of the circuit are the logic gates which are selected from a predefined library of 1 or 2-input and 1-output gates. The inputs to the first column of the matrix come from the truth table of the function to be implemented. For all other columns, the input may come from any of the previous column outputs.

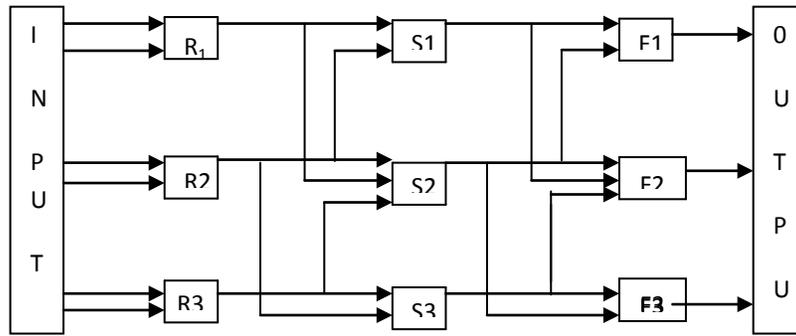


FIGURE 2. Structure of random matrix (inputs to each gate are obtained from gates in the previous columns), Venus and Ganesh [2].

A. Coding an input circuit

The gate selection for the circuit is done at random according to Eqs. (1) and (2). After each generation the expression is evaluated, approximated and compared to Fig. 2 to know the gate or input selected. A MATLAB program was coded and simulated for the implementation of the PSO algorithm. The MATLAB program is then applied to modify the matrix of each particle. This process is repeated until the gbest particle is equal to the number of the truth table outputs. The program samples 3 inputs variable to a circuit and gates from; AND, OR, NOT, XOR and WIRE to evolve circuit of desired interest.

For circuit evolution with PSO one matrix is used to represent gates/inputs interconnectivity. The size of the matrix in this case is 7 by 3. Elements in first and third column represent the inputs while the elements in the second column represent the gates. As illustrated in Fig. 3, gate is represented as: AND=1, OR=2, XOR=3, NOT=4 and WIRE=5.

The inputs are as well represented for convenience as follows;

A=1 ~A=2 B=3 ~B=4 C=5 ~C=6 R₁=7
R₂=8 R₃=9 S₁=10 S₂=11 S₃=12

F₁=F₂=F₃=F_{OUT} third column output, R₁, R₂ & R₃) first column gate output.

(S₁, S₂ & S₃) second column gate output

	AND	OR	XOR	NOT	WIRE
1(A)	1	2	3	4	5
2(~A)					
3(B)					
4(~B)					
5(C)					
6(~C)					
7(R ₁)					
8(R ₂)					
9(R ₃)					
10(S ₁)					
11(S ₂)					
12(S ₃)					
13(F)					

FIGURE 3. Gate/input interconnectivity representation.

This map illustrates the relationship between the coding of the numbering of the elements in the matrix and its actual interpretation in digital circuit as explain bellow. For example, considering the circuit of matrix as presented x₁ below. Individual elements of the matrix can be explained as follow:

X (1, 1) = 1 indicates that the input at this point is A=1, X (1, 2)=1 indicates an AND gate.

X (1, 3) = 3 in the third column shows that the second input to the AND gate is B = 1.

X (2, 1) = 3 indicates that the input at this point is B=1, X (2, 2) =2 indicates an OR gate.

X (2, 3) = 5 indicates that the second input to the OR gate is C = 1.

When the input or gate in the matrix indicates 0, it implies NO input or NO gate as in X (3, 1), X (3, 2), X (3, 3), X (5, 1), X (5, 2), X (5, 3), X (6, 1), X (6, 2), X (6, 3) and X (7, 3). X (4, 1) =7 indicates that the input at this point is R₁ (R₁ output of first column gate as indicated in Fig. 1), X (4, 2) =3 indicates an XOR gate.

X (4, 3) = 8 indicates that the input at this point is R₂ (R₂ output of first column gate as indicated in Fig. 2).

X (7, 1) =10 indicates that the input at this point is S₁ (S₁ output of first column gate as indicated in Fig. 1). X (7, 2) =4 indicates a NOT gate.

For implementation of the full adder circuit, individually initialised circuit were presented in matrix form as given in Eqs. (3 – 7) below:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 10 \end{bmatrix} \quad (7)$$

The full-adder truth table generally used for both human design method and the PSO method is shown Table I. However, the full-adder circuit obtained by human design methods have three inputs and two outputs as are shown in Fig. 4.

TABLE I. Full adder truth table.

S/N	A	B	C _{IN}	S	C _{OUT}
1	0	0	0	0	0
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1
5	1	0	0	1	0
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	1	1

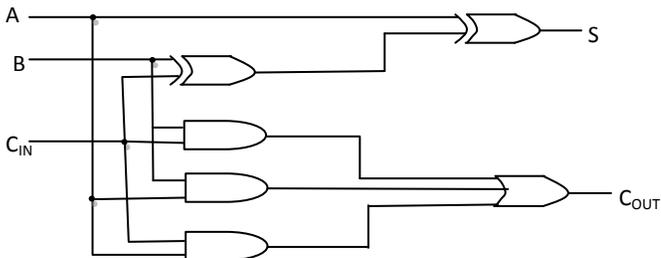


FIGURE 4. Full-adder circuit by human design method.

V. RESULTS

The summary of sum result for 1st, 50th, 100th, and 101st, iterations for the gbest matrix [Eq. (8), Eqs. (9-11), Eqs. (12-14), and Eq. (15), respectively], and their corresponding circuit (Figs. 5 - 7) are as presented below. Notice that the circuit for 1st and 50th iterations are the same since they have the same number of fitness.

Summary of sum result for 1st iteration

$$F_{out2} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$\begin{aligned} \text{best fitness} &= [4 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 4] \\ \text{maximum fitness} &= [4 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 4] \end{aligned}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

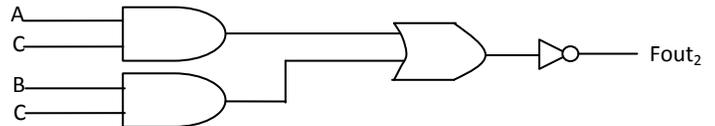


FIGURE 5. gbest of initial sum circuit used.

Summary of sum result for 50th iteration

$$\begin{aligned} F_{out1} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ F_{out2} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ F_{out3} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \\ F_{out4} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ F_{out5} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \\ \text{best fitness} &= [5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5] \\ \text{maximum fitness} &= [5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5] \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Summary of sum result for 100th iteration

$$\begin{aligned} F_{out1} &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ F_{out3} &= [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ F_{out5} &= [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \\ \text{best fitness} &= [6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6] \\ \text{maximum fitness} &= [6 \quad 4 \quad 6 \quad 2 \quad 6] \end{aligned}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (12) \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (14)$$

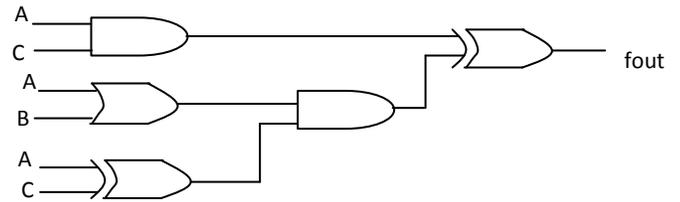


FIGURE 8. Carry gbest for the Initial Circuit

Summary of carry result for 100th iteration

$F_{out1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $F_{out2} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$
 $F_{out4} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $F_{out5} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$
 best fitness = [7 7 6 7 7]
 maximum fitness = [7 7 6 7 7]

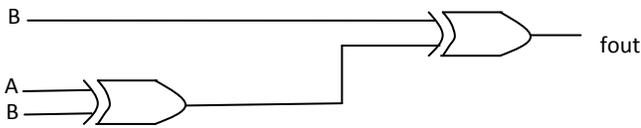


FIGURE 6. Sum gbest Circuit for 100th Iteration.

Summary of sum result for 101st iteration

$F_{out5} = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$
 best fitness = [6 6 6 6 8]
 maximum fitness = [6 6 6 2 8]

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \\ -2 & -1 & -2 \\ 10 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (20)$$

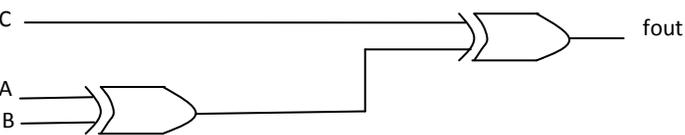


FIGURE 7. Sum gbest Circuit for 101ST Iteration.

The summary of carry result for 1st, 100th, and 358th, iterations for the gbest matrix [Eq. (16), Eqs. (17-21), and Eq. (22), respectively], and their corresponding circuit (Figs. 8 - 9) are as presented below.

Summary of carry result for 1st iteration

$F_{out4} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$
 best fitness = [4 1 4 7 4]
 maximum fitness = [4 1 4 7 4]

$$X_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Summary of carry result for 358th iteration

$F_{out1} = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1]$
 best fitness = [7 7 8 7 7]

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 11 \end{bmatrix} \quad (22)$$

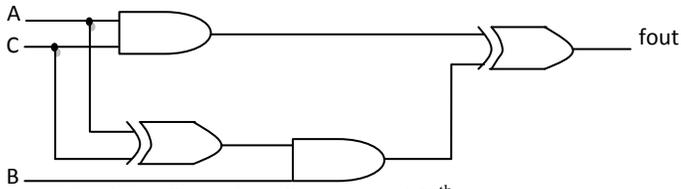


FIGURE 9. Carry gbest Circuit after 358th

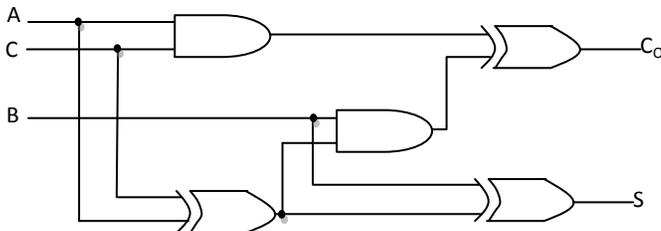


FIGURE 10. Minimised Full Adder Circuit using PSO.

VI. SUMMARY AND CONCLUSION

We have minimised a full-adder circuit using PSO method, from six gates (2 XOR, 3 AND and 1 OR gates) obtained from human-designer method to five gates (3 XOR, and 2 AND gates). The five components designed, evolved circuit using PSO satisfies the “desired” circuit in this case that is expected to have a fitness of eight. From our work, we determined that the gbest of the carry circuit evolved for the 358 generations and the gbest of the sum evolved for the 101 generations.

After the simulation of PSO-designed circuit on an electronic work bench, it was seen that the PSO approach is an improvement over the human designer method because it has minimum number of gates as summarised in the truth

table illustrated in Table II. The result presented in the truth table shows that the output of the simulated circuit are the same with that of full-adder truth table.

TABLE II. Simulated outputs for corresponding input.

S/N	A B C	SU M	CARRY
1	0 0 0	OFF	OFF
2	0 0 1	ON	OFF
3	0 1 0	ON	OFF
4	0 1 1	OFF	ON
5	1 0 0	ON	OFF
6	1 0 1	OFF	ON
7	1 1 0	OFF	ON
8	1 1 1	ON	ON

TABLE III. Comparing PSO and human designer for full adder circuit.

HD2	PSO
6 GATES	5 GATES
2 XOR, 3 AND and 1 OR gates	3 XOR, and 2 AND gates

REFERENCES

- [1] Sulshil, J. L., *Genetic Learning for Combinational Logic Design* (2003), sulhi@csunr.edu/<http://www.cs.unr.edu/~sushil> 05/08/2006.
- [2] Venus, G. G. and Ganesh, K. V., *Evolving Digital Circuit Using Particle Swarm* (2003), <http://www.ieee+plore.ieee.org> 12/12/2005.
- [3] Beale, E. M., *Introduction to Optimisation*, (John Wiley Sons, New York, 1988), pp. 1-2.
- [4] Rao, S. S., *Optimisation: Theory and Application*, (Wiley, Delhi, 1978), pp. 1, 284-289, 193 and 298.
- [5] Kennedy, J. and Eberhart, R. C., *Particle Swarm Optimisation* (1995),
- [6] Hu, X., *Particle Swarm Optimisation Tutorial* (2002), www.ncbi.nlm.nih.gov 11/05/2005.
- [7] Paquet, U. and Engelbrecht, A. P., *Training Vector Machine with Particle Swarm* (2003), <http://www.ieee+plore.ieee.org> 15/12/2006.

Gibbs Paradox in Grand Canonical Ensemble



R. K. Sathish, K. M. Udayanandan

Department of Physics, Nehru Arts and Science College, Kerala, 671 328, India.

E-mail: udayanandan_km@rediffmail.com

(Received 19 February 2012, accepted 27 March 2012)

Abstract

Boltzmann Correction Factor (BCF) $N!$ is used in Micro Canonical Ensemble (MCE) and Canonical Ensemble (CE) as a dividing term to reduce the over counting of the states while finding the number of states and partition function. For Grand Canonical Ensemble the indistinguishability was taken into account while deriving the Partition Function (PF) and hence generally the BCF doesn't appear for GCE. We show here that BCF comes as a multiplying factor for harmonic oscillators in GCE for entropy to be extensive.

Keywords: Ensembles, Boltzmann correction factor.

Resumen

El Factor de Corrección de Boltzmann (FBC) $N!$ se utiliza en Ensamble Micro Canónico (MCE) y Ensamble Canónico (CE) como un término divisorio para reducir el exceso de conteo de los estados, mientras encontramos el número de estados y la función de partición. Se ha tomado en cuenta la indistinguibilidad para el Gran Ensamble Canónico mientras se derivaba la Función de Partición (PF) y por lo tanto generalmente el BCF no aparece para la GCE. Mostramos aquí que ese BCF se presenta como un factor de multiplicación de osciladores armónicos en GCE para entropía extensiva.

Palabras clave: Ensembles, corrección del factor de Boltzmann.

PACS: 03.65.Ge.,05.70-a,05.20.Gg,05.20-y

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

Gibbs paradox is an unphysical situation developed when two ideal gases were mixed. When two samples of ideal gases of same temperature and particle density were mixed, it was found that the entropy of the mixed system is different from the sum of the entropies of individual system, which was unsubstantial because of the extensive property of entropy. This problem was resolved by Gibbs in an ad-hoc fashion by dividing the number of microstates of an ideal gas by $N!$.

In this paper, we revisit the Gibbs paradox in the context of harmonic oscillators. Equivalence of ensembles is a fundamental requirement in statistical mechanics. At all temperatures CE and MCE are same while at high temperature and low density GCE must be equivalent to MCE and CE. Another fundamental concept is the extensiveness of entropy. In this short communication we show that for classical harmonic oscillators in MCE and CE formalism the extensiveness of entropy can be established without dividing the number of micro states and partition function by BCF. But in GCE we multiply the partition function by a factor to make the entropy extensive. Then we can get the same thermodynamics for the three ensembles without considering the concept of indistinguishability. It is

the extensive nature of the entropy that makes the three ensembles equivalent.

In section II the Jacobian transformation technique is used to obtain the number of microstates Ω . Then using the Boltzmann relation, $S=k \ln\Omega$ the entropy was calculated. In section III, we obtained the partition function and from this partition function Helmholtz free energy was calculated. From Helmholtz free energy, entropy is obtained using the standard relation. In section IV, the grand partition function is obtained for both Fermi and Bose system and the value of the $\ln Z$ for both systems at high temperature is obtained. This makes the three ensembles equivalent. Then when the entropy was evaluated, using standard relation, it was found to be not extensive in nature. To make it extensive we used the Boltzmann corrective factor $N!$. The grand partition function is multiplied with BCF to make entropy extensive.

II. MICRO CANONICAL ENSEMBLE

The Jacobian transformation technique can be applied in the case of transformation in phase space. Phase space is a space spanned by generalized co-ordinates and generalized momenta. Hence the equation of transformation between

two phase space spanned by q_i 's and p_i 's and Q_i 's and P_i 's is

$$dq_i dp_i = J dQ_i dP_i. \quad (1)$$

Consider N independent Harmonic oscillators. Each Harmonic Oscillator will have three degrees of freedom. Then energy

$$E = \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_i^2 \right]. \quad (2)$$

Rearranging

$$\sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{p_i^2}{2mE} + \frac{1}{2} \frac{m\omega^2}{E} q_i^2 \right] = 1. \quad (3)$$

Putting

$$q_i = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} Q_i, \quad (4)$$

$$p_i = \sqrt{2mE} P_i, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^{3N} (P_i^2 + Q_i^2) = 1. \quad (6)$$

This is a transformation in phase space. Using the transformation equations we transform to a phase space spanned by Q_i 's and P_i 's. Thus the volume between the two phase space is related by an equation

$$\int d^{3N} q_i d^{3N} p_i = J^{3N} \int d^{3N} Q_i d^{3N} P_i. \quad (7)$$

If we denote $X_i = Q_i$ for $i = 1 \dots 3N$

$X_{i+3N} = P_i$ for $i = 1 \dots 3N$ the Eq. (6) can be represented as

$$\sum_{i=1}^{6N} X_i^2 = 1. \quad (8)$$

Thus we get

$$\int d^{3N} q_i d^{3N} p_i = J^{3N} \int d^{6N} X_i \quad (9)$$

$$\int d^{3N} q_i d^{3N} p_i = J^{3N} V_{6N}. \quad (10)$$

Where V_{6N} is the volume of the sphere with unit radius in $6N$ dimensional space. J can be obtained from the transformation equation.

$$J = \begin{vmatrix} \left(\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \right)^{3N} & 0 \\ 0 & (\sqrt{2mE})^{3N} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$J = \left(\frac{2E}{\omega} \right)^{3N}. \quad (12)$$

Using the relation

$$V_n = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, \quad (13)$$

n -dimensional volume $V_{6N} = \frac{\pi^{3N}}{(3N)!}$. Thus phase space volume

$$\int d^{3N} q_i d^{3N} p_i = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{2\pi E}{\omega} \right)^{3N}. \quad (14)$$

Hence the number of micro states Ω becomes

$$\Omega = \frac{\text{Phase space volume}}{h^{3N}}. \quad (15)$$

$$\Omega = \frac{1}{(3N)!} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^{3N}, \quad (16)$$

where $\hbar = \frac{h}{2\pi}$; h =Planck constant. Using the expression for Ω , the entropy of the system is

$$S = k \ln \left[\frac{1}{(3N)!} \left(\frac{E}{\hbar\omega} \right)^{3N} \right], \quad (17)$$

where k = Boltzmann constant.

Using Stirling formula

$$S = 3Nk \left[\ln \left(\frac{E}{3N\hbar\omega} \right) + 1 \right]. \quad (18)$$

Using the expression

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{V,N} = \frac{1}{T}, \quad (19)$$

we get

$$E = 3NkT. \quad (20)$$

Hence

$$S = 3Nk \left[\ln \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right) + 1 \right]. \quad (21)$$

III. CANONICAL ENSEMBLE

The thermodynamics for CE is obtained from the partition function

$$Q_N = \sum_r e^{-\beta\epsilon_r}. \quad (22)$$

Using the usual techniques of SM we get

$$Q_N = \left[\frac{1}{\hbar\omega\beta} \right]^N. \quad (23)$$

Helmholtz free energy

$$A = -kT \ln Q_N = -3NkT \ln \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right). \quad (24)$$

Entropy

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{V,N}, \quad (25)$$

which gives S as

$$S = 3Nk \left[\ln \left(\frac{E}{N\hbar\omega} \right) + 1 \right]. \quad (26)$$

IV. GRAND CANONICAL ENSEMBLE

There are large numbers of systems with classical energy exhibiting quantum properties. Hence we take the quantum statistics for finding the partition function in GCE which is,

$$Z = \prod_i \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}), \quad (27)$$

Gibbs Paradox in Grand Canonical Ensemble
for Fermi Dirac case and

$$Z = \prod_i \frac{1}{\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i})}, \quad (28)$$

for Bose Einstein case.

Evaluating $\ln Z$ we get

$$\ln Z = \left(\frac{1}{\hbar\beta\omega} \right)^3 g_4(z), \quad (29)$$

for Bose systems

$$\ln Z = \left(\frac{1}{\hbar\beta\omega} \right)^3 f_4(z), \quad (30)$$

for Fermi systems where $g_4(z)$ and $f_4(z)$ are Bose-Einstein and Fermi-Dirac functions. For high temperature $g_4(z)$ and $f_4(z)$ becomes z . Hence

$$\ln Z = \left(\frac{1}{\hbar\beta\omega} \right)^3 z, \quad (31)$$

for both systems. Using the basic expression for obtaining N

$$N = z \frac{\partial \ln Z}{\partial z}, \quad (32)$$

we get

$$z = N(\hbar\beta\omega)^3, \quad (33)$$

Helmholtz free energy

$$A = -kT \ln Z + NkT \ln z, \quad (34)$$

which gives

$$A = -kTN + NkT \ln N \left(\frac{\hbar\omega}{kT} \right)^3. \quad (35)$$

Using the expression for entropy we get

$$S = 4Nk + Nk \ln \left[\frac{1}{N} \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3 \right]. \quad (36)$$

R. K. Sathish, K. M. Udayanandan

This equation is not equivalent to equations for S in MCE and CE and the most notable factor is that it is not **extensive**. To make it extensive we have to add $\ln N!$ to the obtained entropy. Then

$$S = 3Nk \left[\ln \left(\frac{E}{N\hbar\omega} \right) + 1 \right]. \quad (37)$$

which is extensive and equal to the earlier equations obtained.

V. CONCLUSIONS

In this short communication we want to show that BCF comes in GCE contrary to the belief that they are necessary in MCE and CE only. The expression for the grand partition function must be modified for harmonic oscillators as

$$Z = N! \prod_i \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon_i}), \quad (38)$$

for Fermi Dirac case and

$$Z = N! \prod_i \frac{1}{\ln(1 - ze^{-\beta\epsilon_i})}, \quad (39)$$

for Bose Einstein case. It is interesting to see that it is only necessary for harmonic oscillators and not for any other systems.

REFERENCES

- [1] Pathria, R. K. and Beale, P. D., *Statistical Mechanics*, 3rd Ed., (Elsevier, India, 2011).
- [2] Huang, K., *Statistical Mechanics*, 2nd Ed., (John Wiley and sons, India, 2009).
- [3] Reif, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, 1stEd, (McGraw Hill Book Co., Singapore, 1984).
- [4] Mc Quarrie, D. A., *Statistical Mechanics*, 1st Ed, (Viva Books Private Limited, India, 2008).

Ondas de Calor

Determinación de temperaturas del pasado



Leila Iannelli, Salvador Gil

Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, 79) Av. 25 de Mayo y (34)
Francia, San Martín (1650), Buenos Aires, Argentina.

E-mail: sgil@unsam.edu.ar

(Recibido el 29 de Diciembre de 2012; aceptado el 5 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio experimental de ondas de calor en una barra metálica. Este experimento permite determinar la difusividad y la conductividad térmica del material. El experimento es de bajo costo y fácil de realizar en un laboratorio de enseñanza. Además ilustra un modelo para la determinación de temperaturas del pasado, midiendo las temperaturas a distintas profundidades de la Tierra. Este método es uno de los procedimientos que se han empleado para determinar las temperaturas de la Tierra en el pasado. Estos estudios son de fundamental importancia para conocer la historia térmica de la Tierra y evaluar las posibles causas antropogénicas del calentamiento global que estamos observando en el presente.

Palabras clave: Ecuación de Fourier, ondas de calor, experimentos de bajo costo, velocidad de propagación, amortiguamiento de la amplitud de la onda térmica, modelo de acción de ondas, transferencia de calor.

Abstract

In this work we carried out an experiment to study heat waves on a metal bar. This experiment allows the determination of the diffusivity and thermal conductivity of the material; it is low cost and easy to perform in a teaching laboratory. In addition, it illustrates a model for the determination of past temperatures and measuring temperatures at different depths of the Earth. This method is one of the several proxies used to determine the temperature of the past. These studies are of fundamental importance to know the Earth's thermal history and assess the potential anthropogenic contribution to the global warming we are experiencing presently.

Keywords: Fourier equation, heat waves, low-cost experiments, propagation speed, damping of the amplitude of the thermal wave, wave action model, heat transfer.

PACS: 07.05.Fb, 44.10.+i, 72.15.Eb, 91.35.Dc, 01.50.My, 01.50.Pa, 01.90.+g

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los desafíos científicos de mayor interés y relevancia en esta primera parte del tercer milenio, es poder predecir la evolución de las condiciones climáticas del planeta y dilucidar con la mayor certeza posible el origen y las causas del calentamiento que ha venido ocurriendo en la Tierra durante el último siglo. Nuestra civilización se desarrolló durante estos últimos milenios, que sucedieron a la última glaciación, ocurrida hace unos 10000 años [1, 2]. Durante ese período la temperatura media de la Tierra era de unos 5°C más baja que en la actualidad.

La tendencia de la temperatura de los últimos 50 años indica que la misma se está elevando a razón de unos $2.0 \pm 0.2^\circ\text{C}/\text{siglo}$, ver Fig. 1. De persistir esta tendencia, en dos siglos habrá ocurrido un incremento de temperatura de magnitud comparable a la ocurrida en unos 10000 años. Esta posibilidad podría ser una seria amenaza para toda la humanidad.

Es crucial para el futuro de nuestra civilización dilucidar si estas tendencias térmicas, Fig. 1, son consecuencia de la

actividad humana o se producen por causas naturales [1, 2, 3, 4].

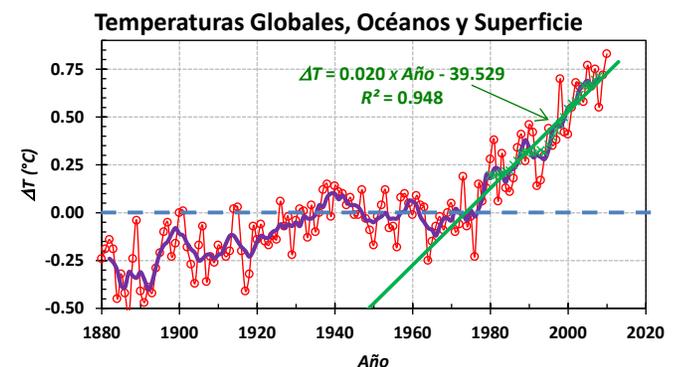


FIGURA 1. Incremento de las temperaturas medias globales de la Tierra y los Océanos entre 1880-2010, respecto de la media de 1951-1980. La línea de trazos es el valor medio entre 1951 y 1980, tomado como referencia. Los círculos son las medias anuales y la línea gruesa violeta es la media móvil de 5 años. La línea recta verde es un ajuste a la media móvil de los últimos 30 años. Fuente: NASA GISS [2, 3].

Existe un importante consenso en la comunidad científica en relación a que el incremento de CO_2 y otros gases de efecto invernadero (GEI) como el CH_4 , óxidos de nitrógeno (NO_x), Clorofluorocarbonos, ozono, etc., en la atmósfera está relacionado con este calentamiento [1, 4].

Resulta tentador asociar el aumento de CO_2 en la atmósfera con el uso intensivo de combustibles fósiles que ha tenido lugar a partir del inicio de la revolución industrial, más notablemente a partir de la segunda mitad del siglo XX. Hay fundados indicios que sugieren que el incremento de las temperaturas globales es consecuencia, en buena medida, de la actividad humana [4, 5, 6].

Se sabe que existen causas naturales que afectan el clima de la Tierra. La ocurrencia de la última glaciación es una evidencia de ello. Entre las causas naturales que pueden afectar el clima de la Tierra se encuentran: alteraciones en la emisión energética del Sol; erupciones volcánicas, que con sus cenizas y/o aerosoles afectan el balance energético y variaciones en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol (precesión del eje de la Tierra, variaciones en la excentricidad de la órbita, etc.).

Hay una gran evidencia que indica que la Tierra tiene oscilaciones climáticas cuasiperiódicas. En otras palabras, los períodos de glaciaciones se han venido produciendo con cierta regularidad durante los últimos 2 millones de años. Milutin Milankovitch (1879-1958) propuso un modelo astronómico para explicar sus causas. Esta teoría se basa en que la Tierra además de su movimiento de rotación y traslación, se mueve en una órbita elíptica que tiene una variación en su excentricidad de unos 100ka (1ka=1000 años). Además el eje de la Tierra que tiene una inclinación (*tilt*) de unos 23° , respecto de la normal al plano de la elíptica, que genera las estaciones del año, tiene una precesión de unos 26ka. Esto es: cada 13ka las estaciones se invierten o sea a veces en el sur en enero es verano y en la otra parte del ciclo es invierno. Por otro lado, el ángulo de inclinación de la Tierra (respecto de la normal de la eclíptica) oscila entre 21.5° y 24.5° en unos 41ka, este movimiento se denomina nutación. Como es de suponer estos movimientos presentan acoplamientos entre ellos que generan los llamados ciclos de Milankovitch que tiene períodos de aproximadamente 22ka, 41ka y 98ka, en los que se han observado alteraciones importantes del clima.

Esta teoría no está libre de críticas y dista de ser una teoría universalmente aceptada, pero tiene una importante apoyatura observacional [5, 10].

Para poner a prueba los modelos de clima es necesario conocer las temperaturas del pasado. Sin embargo, los registros térmicos estándares, es decir aquellos basados en observatorios meteorológicos terrestres, son confiables a partir de fines del siglo XIX y para pocos sitios; principalmente de Europa. Por lo tanto, conocer temperaturas del pasado se ha transformado en un desafío de gran importancia e interés científico. Afortunadamente existen varias técnicas para determinar las temperaturas del pasado.

Una de ellas se basa en la abundancia isotópica del oxígeno (relación $\delta^{18}\text{O}=\text{O}^{18}/\text{O}^{16}$) e hidrógeno (relación $\delta^2\text{H}=\text{H}^2/\text{H}^1$) en grandes bloques de hielos (Groenlandia,

Antártida, etc.). En estas regiones de la Tierra, la nieve que cae no se derrite, sino que se acumula por capas. Estas precipitaciones varían con las estaciones del año, formando estratificaciones similares a las capas de la corteza de un árbol. Contando estas capas puede conocerse la época en que se formó un determinado estrato. Además, en estas capas se acumula aire representativo de esa época, lo que permite conocer la concentración de GEI del pasado. Por otro lado, el agua formada con isótopos más pesados (H_2^{18}O o DHO) tiene un punto de evaporación más alto que el del agua común. De este modo, la concentración de estos isótopos ($\delta^2\text{H}$ o $\delta^{18}\text{O}$) en las nubes varía con la temperatura ambiente, por lo tanto las concentraciones de los isótopos ^2H y ^{18}O en las distintas capas de hielo de la Antártida y Groenlandia, dan información de las temperaturas planetarias existentes en el pasado. Las proporciones medias de los isótopos naturales en la Tierra es conocida: la abundancia natural de ^{18}O es de 0.24% de todo el oxígeno y la abundancia de ^2H es de 0.015% de todo el hidrógeno [5].

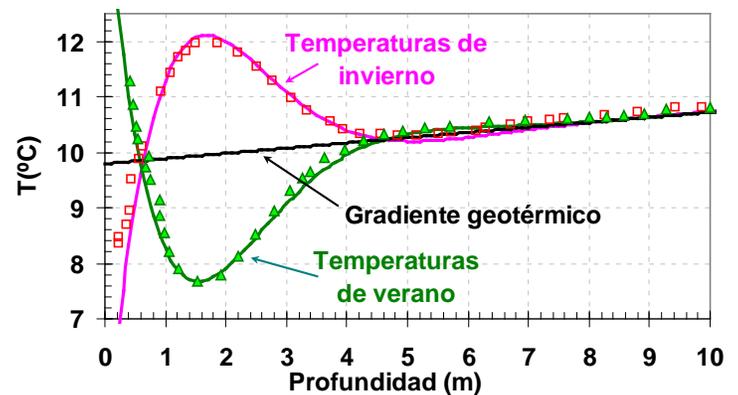


FIGURA 2. Perfil de temperaturas en función de la profundidad para dos momentos del año, verano e invierno. La superficie del suelo sigue la temperatura ambiente, pero entre 1 a 2m la temperatura es representativa de la estación anterior. Los datos representados por símbolos rojos y verdes, fueron tomados de la Ref. [11]. Las líneas continuas son ajustes usando el modelo descrito en este trabajo, Ec. (14). Los perfiles térmicos dependen de la ubicación geográfica. La línea recta representa el gradiente térmico de la Tierra que varía entre 10°C y $100^\circ\text{C}/\text{km}$ [7, 8, 9].

Otra técnica experimental para conocer las temperaturas del pasado consiste en estudiar los perfiles térmicos de la tierra a distintas profundidades, como los ilustrados en la Fig. 2, [11, 12]. De hecho, esta técnica experimental es la que deseamos explorar en este trabajo.

II. MODELO TEÓRICO

El calor se transfiere básicamente por tres procesos distintos: conducción, convección y radiación. En un medio sólido a temperaturas no muy altas, el mecanismo

dominante es la conducción. Para ser más específicos, consideramos una barra metálica delgada, rodeada de un material aislante y temperaturas menores a 70°C, de modo que el mecanismo principal de propagación de calor es fundamentalmente la conducción. Tomamos el eje x coincidente con el eje de la barra. La conducción del calor se describe por la Ley de Fourier [13, 14]:

$$P = \frac{dQ}{dt} = -K \cdot A \frac{dT}{dx}, \quad (1)$$

donde $P = dQ/dt$ es la potencia transferida a través del área A transversal al eje de la muestra (Fig. 3), dT/dx es el gradiente térmico y K es la constante de conductividad térmica de la barra.

Consideramos el elemento infinitesimal, de longitud dx , ilustrado en la Fig. 3(b). La temperatura del mismo, en un dado instante t es $T(x,t)$.

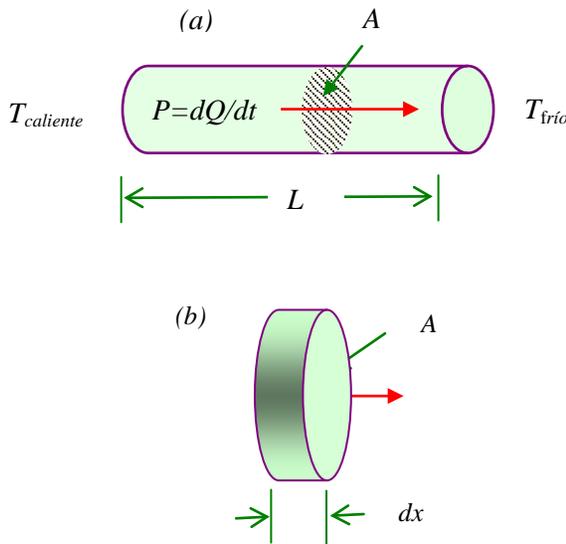


FIGURA 3. (a) Transmisión del calor a lo largo de una barra de metal aislada por los lados laterales. La barra, de longitud L con un extremo caliente ($T_{caliente}$) y el otro frío ($T_{frío}$). (b) Transmisión de calor a través de un elemento de materia de espesor infinitesimal dx .

Denotamos con ρ y c a la densidad y calor específico del material del que está hecho la barra, respectivamente. Del balance de energía tenemos:

$$\frac{dQ}{dt} = (\rho A dx) c \frac{dT}{dt} = -K \cdot A \left[\frac{dT}{dx} \Big|_x - \frac{dT}{dx} \Big|_{x+dx} \right], \quad (3)$$

que puede reescribirse como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K}{\rho \cdot c} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right], \quad (4)$$

Ondas de Calor Determinación de temperaturas del pasado o bien

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (5)$$

donde $k = K/c \cdot \rho$ es la *difusividad* del material que, como vemos, depende de la conductividad térmica, densidad y calor específico. En el caso tridimensional, esta expresión puede generalizarse como:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \nabla^2 T(x,t), \quad (6)$$

que se conoce como ecuación de difusión del calor o ecuación de Fourier-Biot.

Ondas térmicas en una barra semi-infinita. Modelo I:

Consideremos el caso de una barra cuya longitud L sea mucho mayor que su diámetro. Su extremo izquierdo ($x=0$) se encuentra en contacto con una fuente térmica que tiene una temperatura que varía como:

$$T_a(t) = T_a^0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + T_{b0}, \quad (7)$$

donde T_a^0 es la amplitud de la oscilación térmica alrededor del valor medio T_{b0} , $\omega_0 = 2\pi/p_0$ es la frecuencia, p_0 su período y ϕ_0 la fase inicial de oscilación. Este modelo también se puede utilizar para describir un sistema semi-infinito unidimensional, por ejemplo la Tierra, donde la fuente de calor está en la superficie que es calentada por el Sol.

En primer término suponemos que la fuente térmica tiene una temperatura constante, T_{b0} , mientras que el extremo derecho ($x=L$) de la barra está a una temperatura fija T_{00} . En este caso es de esperar que en el estado estacionario la temperatura de la barra sea descrita por una función $T_b(x)$ dada por:

$$T_b(x) = T_{b0} - \frac{(T_{b0} - T_{00})}{L} x = T_{b0} - m \cdot x, \quad (8)$$

aquí T_{b0} es la temperatura del extremo derecho que supondremos que coincide con la fuente caliente. En este análisis hemos despreciado las pérdidas de calor por otros mecanismos, como ser convección o radiación, pues suponemos que la aislación térmica de la barra minimiza las pérdidas por convección. También suponemos que la temperatura de la barra no es mucho mayor que la temperatura ambiente. Más específicamente suponemos que $T_{00} < 70^\circ\text{C}$, por tanto los efectos de radiación son despreciables frente a la conducción.

Volviendo al caso en el que la temperatura del extremo izquierdo esté sometido a una temperatura oscilante, del tipo descrita por la Ec. (7), podemos suponer que, en estado estacionario, la temperatura media (promedio temporal) de la barra vendrá dada por la Ec. (8).

Definiendo la temperatura normalizada $\theta(x,t) = T(x,t) - T_b(x)$, siendo $T_b(x)$ el promedio temporal de la temperatura de la barra en la posición x , la Ec. (5) se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (9)$$

ya que $\partial^2 T_b / \partial x^2 = 0$. Esta ecuación lineal puede resolverse por separación de variables [15]. Su solución para condiciones de borde periódicas, Ec. (7), puede escribirse como [15, 16]:

$$\theta(x,t) = A_0 \exp(-x/\mu_0) \cos(\omega_0 t \pm x/\mu_0 + \phi_0), \quad (10)$$

esta expresión representa una onda térmica atenuada que se propaga con velocidad v_0 hacia la derecha (-) o hacia la izquierda (+), dependiendo del signo del argumento de la función coseno. Aquí μ_0 representa la distancia de penetración de la onda. Reemplazando (10) en (9) obtenemos:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2k}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{p_0 \cdot k}{\pi}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (11)$$

con

$$\lambda = \sqrt{4\pi \cdot k p_0} = \text{longitud de onda}, \quad (12)$$

y la velocidad de propagación de la onda es:

$$v_0 = \sqrt{4\pi \cdot k / p_0} = \frac{\lambda}{p_0}, \quad (13)$$

de este modo, la expresión (10) también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \theta(x,t) &= A_0 \exp(-x/\mu_0) \cos(x/\mu_0 \pm \omega_0 t + \phi_0), \\ &= A(x) \cos(x/\mu_0 \pm \omega_0 t + \phi_0), \end{aligned} \quad (14)$$

las constantes A_0 y ϕ_0 dependen de las condiciones de borde del problema. $A(x)$ es la amplitud de la onda a la distancia x . El parámetro $\mu_0 = \lambda/2\pi$ tiene las unidades de longitud y es indicativo de la longitud a la cual penetra la onda térmica. Para $x=0$:

$$\theta(x=0,t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0), \quad (15)$$

es decir, en el punto $x = 0$ tenemos que la temperatura oscila periódicamente con frecuencia ω_0 .

Según la Ec. (14), una onda térmica penetra con amplitud apreciable, distancias del orden de μ_0 . La amplitud se atenúa a $1/e^2 \approx 0.135$ (13.5%) de su valor inicial para una distancia $x = 2 \cdot \mu_0 = 0.32 \lambda$.

Según la Ec. (11), a medida que el período p_0 de la onda es mayor, mayor será la penetración de la onda térmica. Este resultado explica por qué las variaciones diarias de temperatura sólo penetran en el suelo hasta unos 50cm (con $k_{tierra} \approx 3.8 \text{ m}^2/\text{s}$ y $p_0 = 24\text{h}$ resulta $\mu_0 \approx 10\text{cm}$, $\lambda \approx 60\text{cm}$) [17, 18], en cambio las variaciones anuales ($p_0 = 365$ días) penetran en la Tierra hasta unos 4 ó 5 m ($\mu_0 \approx 2\text{m}$ y $\lambda \approx 8\text{m}$), ver Fig. 2, [11, 12]. Las temperaturas asociadas a la última era glacial ($p_0 \approx 10000$ años) estarían entre unos 200 a 300m de profundidad. De este modo, en las profundidades de la Tierra, quedan registradas las temperaturas del pasado.

Este fenómeno de las ondas térmicas, de poseer una penetración que depende de la frecuencia o período de la onda, tiene un equivalente electromagnético (para ondas que se propagan en conductores) y se conoce genéricamente como *efecto piel*.

III. EXPERIMENTO

Para este experimento se utilizó una barra metálica de aluminio comercial (AA/ASTM 5052) de 50cm de longitud y 1.5cm de diámetro. Uno de los extremos se redujo con un torno a fin de conectarlo al calefactor de un soldador de estaño (estándar). Se realizaron cinco perforaciones en la barra equiespaciadas, en las cuales se introdujeron los sensores térmicos (basados en circuitos integrados, LM35). Se utilizó grasa siliconada para lograr un buen contacto térmico entre los sensores y la barra. Las temperaturas se monitorearon usando un sistema de adquisición de conectado a una computadora personal (PC). La barra fue recubierta con un aislante térmico de espuma de polietileno, que se usa para tubos de refrigeración, con el objetivo de minimizar las pérdidas de calor por convección. El calefactor fue encendido periódicamente con un interruptor automático de período regulable. En la Fig. 4 se muestra un diagrama esquemático del modelo experimental.

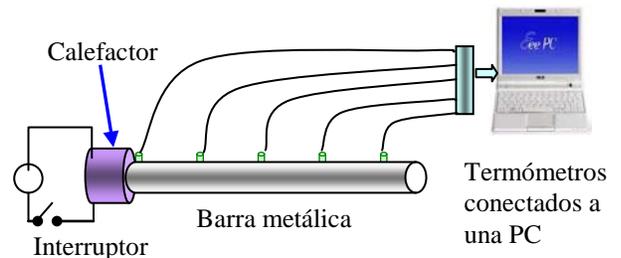


FIGURA 4. Arreglo experimental, barra metálica de aluminio, conectada a un calefactor que puede ser encendido de modo periódico.

IV. RESULTADOS

Se eligieron dos períodos de excitación para las ondas térmicas, $p_0=270\text{s}$ y 146s . Para cada período se encendió la

fuente térmica (oscilante) hasta que se alcanza un régimen estacionario. Esto significa que la temperatura media temporal de cada termómetro se mantiene constante, $T_b(x)$. Operacionalmente, se puede verificar si la barra llegó al estado estacionario graficando las temperaturas $T_{máx}(x)$ y $T_{mín}(x)$ en función de x . Si la relación entre estas variables es lineal, esto es indicativo de que estamos en condiciones estacionarias.

La tasa de medición utilizada para registrar las temperaturas fue de 1Hz. Cuando se llega al estado estacionario, los valores medios temporales de las mediciones, permiten obtener la función $T_b(x)$, Ec. (8).

Las Figs. 5 y 6 ilustran los resultados de $\theta(x,t) = T(x,t) - T_b(x)$, para los dos períodos utilizados.

Las Figs. 5 y 6 indican que el calor se propaga en forma de ondas, con amplitudes decrecientes. El termómetro que se encuentra más cerca del calefactor (curva de color azul) tiene mayor amplitud que aquellos que están más alejados.

El cálculo de la constante de difusividad se realizó mediante dos métodos diferentes, que se resumen en la Tabla I. El método 1 consiste en obtener los resultados del logaritmo de la amplitud máxima de cada termómetro ($A(x)$) dividido la amplitud del primer termómetro (A_0), como función de su posición (profundidad). Como se ve en la Fig. 7, la dependencia de $\ln(A(x)/A_0)$ como función de la posición (x) es aproximadamente lineal, siendo la atenuación mayor para el período mayor, en concordancia con la expectativa teórica, Ec. (14).

La Fig. 7 muestra que los datos se pueden ajustar bien por una línea recta, cuya pendiente es la inversa de la distancia de penetración de la onda, μ_0 , a partir de la cual se pudo obtener el valor de la constante de difusividad térmica mediante la Ec. (11).

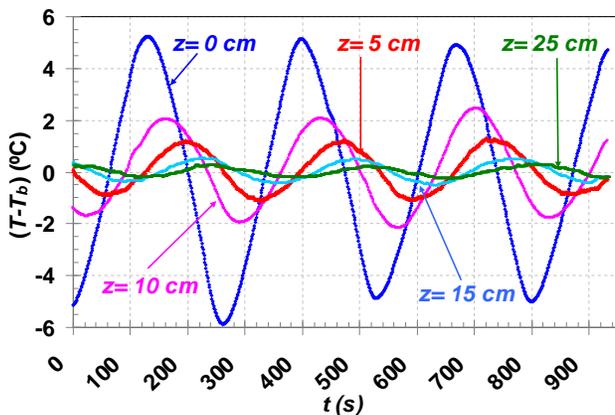


FIGURA 5. Variación de la temperatura en distintas posiciones (profundidades) de la barra metálica como función del tiempo. Los valores máximos y mínimos para los distintos termómetros, se alcanzan en distintos tiempos. El período de la señal es: 270s.

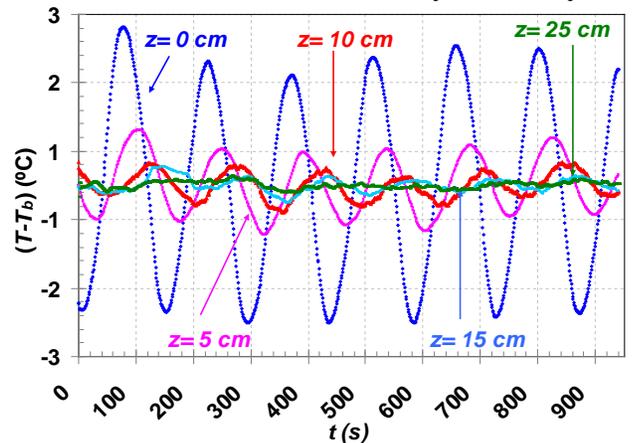


FIGURA 6. Variación de la temperatura en distintas posiciones (profundidades) de la barra metálica como función del tiempo. Los valores máximos y mínimos para los distintos termómetros, se alcanzan en distintos tiempos. El período de la señal es: 146s.

El método 2 consiste en medir la velocidad de propagación de la onda térmica. Para ello se determina el tiempo, t , en el que la onda térmica pasa por un máximo (o mínimo) para cada termómetro. Se graficó la posición x de cada termómetro en función del tiempo, t , que demoró la onda en llegar a cada uno. La Fig. 8, muestra los resultados para los dos períodos de excitación utilizados.

En la Fig. 8, la pendiente de la línea recta es la velocidad de propagación de la onda en la barra metálica, v_0 , a partir de cuyo valor se puede obtener el de la constante de difusividad, Ec. (13). En la Tabla II se indican los valores de velocidad obtenidos.

Los valores obtenidos de la constante de difusividad térmica, determinados por ambos métodos, se muestran en la Tabla I, con sus respectivos errores y para cada uno de los períodos utilizados. También en esta tabla se encuentran los valores tabulados de las constantes de difusividad térmica para algunas aleaciones comerciales del aluminio.

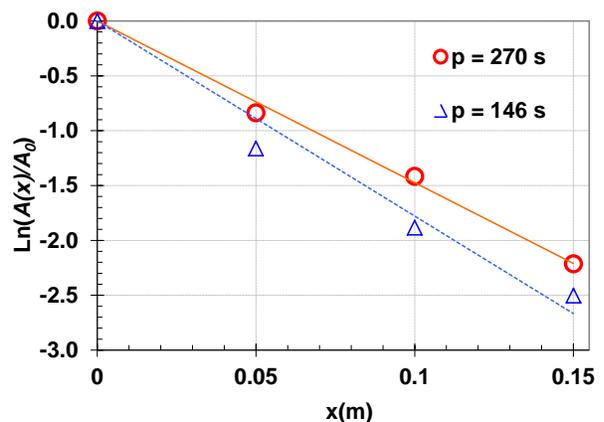


FIGURA 7. Logaritmo de la amplitud térmica máxima para cada termómetro, dividida la amplitud del primero, en función de la posición, x . La distancia x se mide a partir del extremo de la barra en contacto con el soldador. Los triángulos corresponden a $p_0=146$ s y los círculos a $p_0=270$ s.

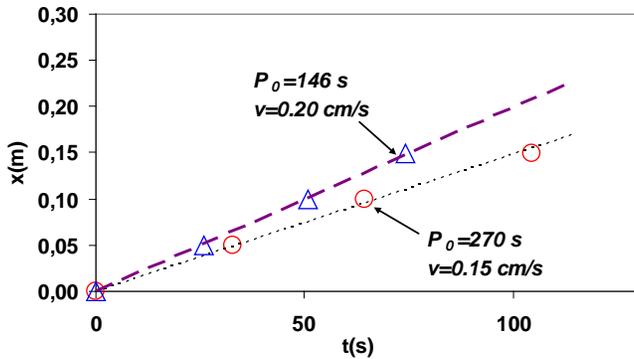


FIGURA 8. Gráfico del perfil de profundidad en función del tiempo que tardó en producirse la máxima temperatura en cada uno de los termómetros. La línea indica la tendencia lineal que describen los puntos.

TABLA I. Tabla comparativa entre los valores de las constantes de difusividad térmica tabulados y los hallados experimentalmente por dos métodos distintos en una barra de aluminio. Para el aluminio puro, el valor de $k = 97.53 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$. Para aleaciones comerciales de aluminio, como la que se usó en este trabajo, AA/ASTM 5052, los valores tabulados de k varían entre 50 y $60 \times 10^{-6} \text{m}^2/\text{s}$ [19].

Constante de difusividad térmica	k experimental ($\text{m}^2/\text{s} \times 10^{-6}$) $p_0 = 270 \text{ s}$	k experimental ($\text{m}^2/\text{s} \times 10^{-6}$) $p_0 = 146 \text{ s}$	k Tabulado ($\text{m}^2/\text{s} \times 10^{-6}$)
Método 1	54 ± 6	68 ± 18	50 - 100
Método 2	47 ± 4	46 ± 2	
Promedio ponderado	53 ± 1	59 ± 1	
Mejor k	49 ± 3		

Debido al hecho que las ondas de período corto (alta frecuencia) decaen más rápido que las ondas de períodos largos (baja frecuencia), las variaciones diarias, $p_0 = 1$ día, decaen a unos 50cm de la superficie. Las ondas térmicas anuales, $p_0 = 1$ año, penetran un par de metros. En cambio las asociadas a las glaciaciones, $p_0 \approx 10 \text{ ka}$, se encuentran a unos 500m [1, 7].

TABLA II. Tabla comparativa entre los valores de la velocidad de propagación hallados experimentalmente por el método 2 en los diferentes períodos de excitación.

Velocidad de propagación	v_0 experimental (cm/s) $p_0 = 270 \text{ s}$	v_0 experimental (cm/s) $p_0 = 146 \text{ s}$
Método 2	0.147 ± 0.006	0.200 ± 0.004

De este modo, midiendo las temperaturas a mayores profundidades nos permite conocer las temperaturas prevalentes en épocas cada vez más tempranas.

V. CONCLUSIONES

Este trabajo ilustra un sistema experimental sencillo y de bajo costo, para estudiar ondas térmicas y determinar la difusividad para distintos metales. Los resultados de difusividad se correlacionan bien, dentro de los errores experimentales, con los tabulados para estos materiales.

Se observa que las ondas de calor se propagan con una velocidad finita a través de la barra metálica. La amplitud de la onda térmica se va atenuando a medida que nos alejamos de la fuente de calor, siendo la atenuación tanto más rápida cuanto mayor es la frecuencia de la fuente excitadora.

Este experimento ilustra al mismo tiempo el fenómeno de difusión de calor y una técnica experimental para determinar las temperaturas del pasado en la Tierra.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a Federico Ariganello por su participación en las primeras fases de este proyecto. Agradecemos la lectura del manuscrito y las sugerencias realizadas por A. E. Schwint. Asimismo agradecemos la colaboración de Oscar Romanelli y Javier Fernández Vázquez en la construcción del dispositivo experimental. Por último, agradecemos a la Asociación Física Argentina por la asistencia otorgada a través del Proyecto INVOFI, que permitió para desarrollar este proyecto.

REFERENCIAS

- [1] Calentamiento global, en Wikipedia. <http://es.wikipedia.org/wiki/Calentamiento_global>, Consultado el 17 de Diciembre de (2011).
- [2] GISS Surface Temperature Analysis, NASA, Goddard Institute for Space Studies (GISS), Nov. (2011), <<http://data.giss.nasa.gov/gistemp/graphs3/>>, Consultado el 20 de Diciembre de (2011).
- [3] Hansen, J., Sato, M., Ruedy, R., Lo, K., Lea, D. W. and Medina-Elizade, M., *Global temperature change*, Proc. Natl. Acad. Sci. **103**, 14288-14293, doi: 10.1073/pnas.0606291103 (2006).
- [4] World Meteorological Organization, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), Fourth Assessment Report: Climate Change (2007), <http://www.wmo.int/pages/partners/ipcc/index_en.html>, Consultado el 16 de Diciembre de (2011).
- [5] Alley, R. B. and Bender, M. D., *Greenland Ice Cores: Frozen in Time*, Scientific American **273**, 80-85 (1998).
- [6] Mastrandrea, M. D. and Schneider, S. H., *Resource Letter GW-2: Global Warming*, Am. J. Phys. **76**, 608-614 (2008).
- [7] Mann, M. E. et al., *Optimal surface temperature reconstructions using terrestrial borehole data*, J. Geophys. Res. **108**, (D7), 4203-4212 (2003).

- [8] Jones, P. D., Parker, D. E., Osborn, T. J. and Briffa, K. R., *Global and hemispheric temperature anomalies – land and marine instrumental records*. In Trends: A Compendium of Data on Global Change. Carbon Dioxide Information Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, U. S. Department of Energy, Oak Ridge, Tenn., U.S.A (2005), <<http://cdiac.esd.ornl.gov/trends/temp/jonescru/jones.html>> Consultado el 23 de Diciembre de (2011).
- [9] Gradiente geotérmico, en Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/Gradiente_geot%C3%A9rmico >, Consultado el 20 de Diciembre de (2011).
- [10] Muller, R. A., MacDonald, G. J., *Ice Ages and Astronomical Causes: Data, Spectral Analysis, and Mechanisms*, (Springer-Verlag Telos, N. Y., 2000). <<http://muller.lbl.gov>>, <<http://muller.lbl.gov/pages/iceagebook/IceAgeTheories.html>>, Consultado el 18 de Diciembre de (2011).
- [11] Redfield, A. C., *Terrestrial Heat Flow through Sal-Marsh Peat*, Science **148**, 1291-92 (1965).
- Ondas de Calor Determinación de temperaturas del pasado*
- [12] Pollack, H. N. and Chapman, D. S., *Underground Records of Changing Climate*, Scientific American **268**, 44-50 (1993).
- [13] Giancoli, D. C., *Física - Principios con Aplicaciones*, (Prentice Hall, México, 1997).
- [14] Cengel, Y. A., *Heat transfer, a practical approach*, (The Mc Graw-Hill Co. N. Y, 2003).
- [15] Spiegel, M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, (McGraw Hill, N. Y., 1980).
- [16] Bodas A., Gandía, V. and López-Baezab, E., *An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves*, Am. J. Phys. **66**, 528-533 (1998).
- [17] McIntosh, G. and Sharratt, B. S., *Thermal Properties of soil*, The Phys. Teach. **39**, 458-460 (2001).
- [18] Iannelli, L. y Gil, S., *Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica-Ondas de Calor*, Enviado a LAJPE, Dic. (2011).
- [19] ASM *Aerospace Specification Metals*, Pompano Beach, FL. USA. <<http://www.aerospacemetals.com/>>, consultado el 21 de Diciembre de (2011).

Cambios de energía en un sistema debido a la transferencia de energía por calor: una experiencia de laboratorio



Follari Beatriz del R.¹, Lambrecht Carmen¹, Dima Gilda N.¹, Perrotta M. Teresa¹, María Eugenia Carola²

¹Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de La Pampa, Av. Uruguay N° 151. Te: 02954-425166, Fax: 02954-432535.

²Instituto María Auxiliadora, Av. Roca N° 63.

E-mail: dimascari@cpenet.com.ar

(Recibido el 26 de Diciembre de 2011; aceptado el 14 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo se presenta una guía experimental para evaluar los cambios en la temperatura de un sistema cuando se le transfiere energía por calor y relacionarlos con las variables que intervienen antes del cambio de fase. La propuesta forma parte de las actividades presentadas en un Proyecto de Investigación, el cual propone elaborar, implementar y evaluar estrategias didácticas tomando como hilo conductor la energía, en Primero y Segundo año del nivel Polimodal del Instituto María Auxiliadora de Santa Rosa La Pampa, Argentina. Para la elaboración de esta guía de laboratorio nos basamos en dos aspectos relevantes: por un lado dar continuidad a los conceptos de energía, sistema, energía interna, y el calor y el trabajo como procesos de transferencia que modifican la energía del sistema y por otra parte, implementar las etapas de predicción, observación y contrastación, propias del Aprendizaje Activo. Creemos que esta propuesta permitirá integrar los nuevos conceptos dados en segundo año con los tratados en primero en referencia a la energía, logrando una visión más amplia y unificada de la Ciencia y en particular de la Física. La metodología utilizada puede ser una herramienta valiosa para favorecer el aprendizaje significativo.

Palabras clave: Energía, calor, temperatura, guía experimental, Aprendizaje Activo.

Abstract

The present work presents an experimental guide to evaluate temperature's changes in a system when energy through heat is transferred and relate those temperature's changes with the variables that take part before the phase transition. This proposal is part of several activities presented in a Research Project which proposes, taking energy as a guide, to elaborate, to implement and to evaluate didactic strategies at First and Second year of Polimodal at Instituto Maria Auxiliadora from Santa Rosa La Pampa, Argentina. In order to elaborate this laboratory guide we based on two relevant aspects: on the one hand, to give continuity to concepts like energy, system, internal energy, heat and mechanical work as a transference process that modify the system energy; and, on the other hand, to implement prediction, observation and contrasting stages, typical of Active Learning. We believe that this proposal will allow us to combine new concepts taught at Second year with the ones already taught at First year referring to energy, obtaining a wider and unified vision of the Science and, particularly, of Physics. The methodology utilized could be a valuable tool in order to favor the significant learning.

Keywords: Energy, heat, temperature, experimental guide, Active Learning.

PACS: 01.40.E-, 01.40.ek, 01.40.gb

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Existen abundantes investigaciones educativas sobre tópicos tales como dificultades de aprendizaje e ideas previas, pero no sucede lo mismo respecto de investigaciones que tratan sobre estrategias didácticas referentes a la transferencia de contenidos al aula y su evaluación [1, 2, 3, 4].

En general, se observa que en la totalidad de los niveles educativos el concepto de energía es presentado de manera

disociada, restringiéndolo a situaciones en las que sólo interviene la energía mecánica sin mencionar otros tipos de energía. En los textos tradicionales [5, 6, 7] los fenómenos térmicos generalmente no se explican en términos de transferencia de energía entre sistemas, estableciéndose escasa o nula vinculación entre éstos y lo estudiado en mecánica. Esta situación está cambiando paulatinamente.

Algunas de las nuevas ediciones muestran más cuidado al tratar la energía, incluyendo el concepto de sistema y energía interna. Al momento de presentar el calor y la

temperatura se observa una continuidad conceptual con mecánica, reforzando la idea de calor como proceso de transferencia de energía [8, 9, 10, 11].

Las autoras de este trabajo se encuentran desarrollando un Proyecto de Investigación¹ en el cual se elabora y evalúa una estrategia de enseñanza sobre energía en el nivel Polimodal dando continuidad a lo estudiado en primer año (mecánica) con lo que se trata en segundo año (calor y temperatura) buscando evitar la disociación que suele observarse. Creemos que una continuidad y coherencia conceptual en la presentación de los distintos fenómenos estudiados en Física a lo largo de la educación media favorecería el aprendizaje significativo [12, 13, 14, 15].

La estrategia didáctica tendrá en cuenta los resultados de la investigación educativa relacionados con energía y con las preconcepciones de los alumnos sobre dicho tema, para ayudarlos a interpretar de las transferencias y diferentes transformaciones energéticas.

En una estrategia basada en la enseñanza tradicional, el docente es el emisor de los contenidos conceptuales mientras que los estudiantes tienen un rol de receptor pasivo [16, 17, 18, 19, 20].

Las ideas de los estudiantes no se hacen explícitas, no se promueve la discusión entre pares y en general, el laboratorio se utiliza para confirmar lo “aprendido”. Las conexiones entre conceptos, representaciones formales y el mundo real, con frecuencia están ausentes después de la enseñanza tradicional. Una estructura de trabajo conceptual coherente, no es normalmente un logro de este tipo de enseñanza [21]. En particular el estudio de la energía se encuentra muy alejado del marco social y tecnológico en el cual el alumno se mueve.

Preocupados porque nuestra labor docente ayude en los procesos de enseñanza y aprendizaje, diseñamos acciones basadas en el Aprendizaje Activo que ponen el énfasis en el rol activo de quien aprende con el fin de que sea el alumno el responsable de la construcción de su propio conocimiento [22]. De esta forma los estudiantes son capaces de construir conceptos que luego de aprendidos pueden ser transportados a otros contextos y a distintas situaciones [23, 24]. Es de suma importancia el rol del docente para el desarrollo de las actividades, dado que debe actuar como facilitador o guía de la tarea a desarrollar [23, 24, 25].

Intentamos plantear el trabajo de laboratorio con una aproximación que apunte a unificar conceptos, procedimientos y técnicas de trabajo y que no quede en el mero hecho de ser una etapa de “verificación” de conceptos y/o leyes físicas. En esta aproximación se recurre a la secuencia *predecir, observar, contrastar* y a partir de ella se favorece que el alumno coteje las diferencias entre las

creencias con las que llega a la clase experimental y las leyes de la Física que gobiernan el mundo real.

En el presente trabajo mostramos cómo una experiencia, de características tradicionales, puede ser realizada de tal manera que promueva el Aprendizaje Activo. La tarea experimental tiene por objetivo evaluar los cambios en la temperatura de un sistema cuando se le transfiere energía por calor y relacionarlos con las variables que intervienen antes y del cambio de fase.

A. La experiencia

La tarea de laboratorio se puso en práctica en el segundo año del nivel Polimodal, modalidad Ciencias Naturales, del Colegio María Auxiliadora de Santa Rosa, La Pampa, en el año 2011. Los alumnos que realizaron la experiencia fueron 36. Se presentó luego de que los alumnos han trabajado en clase los conceptos de temperatura como una medida de la energía cinética traslacional promedio de los átomos que contribuye a la energía interna del sistema y el calor como un proceso por el que se transfiere energía a través de la frontera del sistema, debido a una diferencia de temperatura.

La experiencia es conocida: se utilizan ciertas cantidades de agua que se colocan en un recipiente sobre un mechero para medir las variaciones de temperatura que se producen. Se irán registrando las temperaturas del agua a intervalos regulares de tiempo hasta que se produzca la ebullición. Seguidamente se repite la experiencia pero ahora con una masa de otra sustancia, leche o agua azucarada (ver Anexo).

Tradicionalmente, se pretende que a través de este laboratorio los alumnos puedan encontrar o comprobar la relación $Q = c_e m \Delta T$, donde Q es la energía transferida por calor, c_e el calor específico, m la masa y ΔT la variación de temperatura que experimenta el sistema. Generalmente, en este tipo de prácticas se presenta una guía pauta en la que se indica a los alumnos los pasos a seguir. Si se desea que ellos construyan el concepto, se plantean entonces una serie de preguntas que los lleven a identificar las relaciones directas y las inversas a fin de llegar en conjunto a la expresión deseada. Si, en cambio, se propone la experiencia como comprobación de la ecuación ya trabajada en clase, se realiza la misma y se solicita un informe en el que se pueda concluir que la expresión se verifica.

Para la elaboración de este laboratorio, basado en el aprendizaje activo, tuvimos en cuenta dos aspectos relevantes: uno referente a lo conceptual y otro a lo metodológico. Nuestra propuesta, a diferencia del trabajo de laboratorio tradicional, realiza un tratamiento conceptual e integrado de energía: esto es, procura dar continuidad entre el concepto de energía, sus transferencias y transformaciones estudiados en el año anterior en mecánica, con los conceptos de calor y temperatura que se estudian en segundo año.

En primer año se hizo hincapié en el concepto de sistema y en el hecho de que la energía del mismo puede modificarse si se permite su transferencia, desde el medio al

¹ “La energía como concepto integrador en mecánica y calorimetría: elaboración aplicación y evaluación de una estrategia didáctica en el nivel secundario”. Proyecto del Dpto. de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UNLPam. Aprobado según Resolución CD N° 191/10. Proyecto incluido dentro del Programa de Incentivos para los Docentes-Investigadores.

sistema o viceversa a través de la frontera. Entre los mecanismos que hacen posible este cambio de energía, destacamos el trabajo y el calor.

Las energías del sistema pueden tomar distintas formas: cinética, potencial e interna. Un cambio de temperatura significa un cambio de la energía interna (cinética microscópica), también esta energía cambia en un cambio de fase (potencial interna). Esto está contemplado en la ecuación:

$$Q + W_{\text{ext}} = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{\text{in}},$$

donde: Q es la transferencia de energía por calor; W_{ext} es el trabajo de las fuerzas externas; ΔE_c es la variación de energía cinética; ΔE_p es la variación de la energía potencial y ΔE_{in} es la variación de energía interna del sistema bajo estudio [8, 9, 10, 11].

En nuestra experiencia, se evalúa el cambio de energía interna que experimenta el sistema cuando se le transfiere energía por calor. Se pide a los estudiantes que tomen nota de los cambios de temperatura que experimenta la muestra y que luego construyan un gráfico de temperatura en función del tiempo. El análisis de las gráficas los conducirá a encontrar que $\Delta E_{\text{in}} = c_e m \Delta T$, antes de que se produzca la ebullición. De manera cualitativa se hace un análisis de la $\Delta E_{\text{in}} = L \cdot m$ durante el proceso de cambio de fase en la ebullición. Este aspecto se profundiza con un trabajo de laboratorio posterior [12].

La otra diferencia con la forma tradicional de desarrollar el tema, es la utilización de la metodología de Aprendizaje Activo. En el diseño de la guía que utilizan los alumnos para realizarla, se respetan las etapas *predecir*, *observar* y *contrastar*, a fin que el alumno coteje las diferencias entre las ideas con las que llega a la clase experimental y los resultados de la experiencia, para que sea consciente de las ideas que debe modificar (ver Anexo).

Etapa de predicción: Se presenta a los estudiantes de manera escrita una serie de preguntas relacionadas con el tema de estudio, las que deben ser respondidas de manera individual y volcadas en su "Hoja de Predicciones", antes de comenzar con la experiencia. Seguidamente los alumnos discuten sus predicciones en grupos pequeños. Las opiniones más comunes de toda la clase deben registrarse en el pizarrón, a efectos de que una vez finalizada la tarea experimental, los estudiantes cotejen sus predicciones con el resultado hallado. El docente no debe hacer comentarios sobre si las predicciones son correctas o incorrectas.

Etapa de observación: los estudiantes, organizados en distintos grupos, llevan a cabo la experiencia. Los resultados encontrados serán volcados en la "Hoja de Resultados" y luego puestos en común bajo la guía del profesor.

La discusión de los resultados obtenidos, que se registran en el pizarrón, se realiza en una clase posterior. Se

espera que este camino lleve al reconocimiento de las variables que intervienen, de las relaciones directas o inversas y a construir el concepto de calor específico, así como expresar el cambio de energía interna como $\Delta E_{\text{in}} = c_e m \Delta T$, reconociendo que este cambio se produjo por ingreso de energía por calor al sistema, hasta llegar a la ebullición. También se puede observar que durante la ebullición la temperatura se mantiene constante.

Cada grupo de alumnos graficará los resultados, contestará las preguntas que se proponen y elaborará un informe escrito.

Etapa de contrastación: es el último paso de la estrategia, se devolverá a cada estudiante su hoja de predicciones para que contraste los resultados obtenidos con sus ideas anteriores. Estos serán analizados y justificados adecuadamente y se registrarán en la "Hoja de Resultados", la que los alumnos se llevarán para estudiar.

II. ANÁLISIS Y RESULTADOS

A. De las predicciones de los alumnos

En la Tabla I se presentan los resultados de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas de la "Hoja de Predicciones".

Los distintos grupos de trabajo discuten sus predicciones, llegan a un acuerdo, se da por completada la etapa de predicción y se disponen a desarrollar la experiencia.

Luego de analizar las predicciones podemos decir que la mayoría de los estudiantes conoce que al colocar un recipiente con líquido sobre un mechero encendido, el tiempo para alcanzar la misma temperatura, depende de la cantidad y características de la sustancia. Pensamos que contestan en forma correcta porque está muy relacionado con la vida cotidiana.

Respecto a que sucede con la temperatura cuando la sustancia hierve, se observa que la mayoría cree que la temperatura continúa aumentando luego de que comienza la ebullición, desconociendo que la temperatura se mantiene constante en esta etapa. Además en su vida cotidiana no son conscientes que distintas sustancias alcanzan su punto de ebullición a diferentes temperaturas.

También creemos que no les preocupa o no les llama la atención saber que la energía que transfiere el mechero en un cierto tiempo, es la misma, independientemente de la cantidad y característica de la sustancia. Además, se nota que el funcionamiento del mechero no lo tuvieron en cuenta para contestar la pregunta o lo desconocen.

TABLA I. Predicciones de los estudiantes.

PREGUNTAS	PREDICCIONES
<p>N° 1: <i>A dos masas (volúmenes) iguales de sustancias diferentes, inicialmente a igual temperatura, se las coloca sobre mecheros encendidos. El tiempo que necesitan para llegar a la misma temperatura final ¿es el mismo? Justificar</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • La mayoría de los estudiantes, veinticinco (69%) contesta en forma correcta: <i>“No es lo mismo porque es relativo a las propiedades de cada sustancia”</i> • Cinco (14%) contestan que depende de la sustancia pero no justifican. • Seis estudiantes (17%), consideran que necesitan el mismo tiempo, dado que tienen el mismo volumen.
<p>N° 2: <i>Dados 50 ml y 100 ml de una misma sustancia ¿cuál necesita más tiempo para alcanzar la misma temperatura?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Contestan en forma correcta veintidós estudiantes (61%) contestan en forma correcta: <i>“Necesita más tiempo la de 100 ml porque es más cantidad”</i> • Dos (6%) contestan que necesita más tiempo la de 100 ml y no justifican. • Doce (33%) escribieron frases tales como: <i>“ambos el mismo tiempo”</i>; <i>“ninguna, la cantidad no influye en la temperatura”</i>.
<p>N°3: <i>Si ahora cada uno de los volúmenes anteriores se los deja el mismo tiempo sobre mecheros encendidos ¿cuál recibe más energía? Justificar.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • En una primera aproximación aceptamos como respuesta correcta que la energía transferida por el mechero es la misma. Sólo contestan de esta forma cuatro estudiantes. (11%): <i>“Ninguna, ya que la energía dada por el mechero es la misma”</i>. • Contestan bien sin justificar siete (19%). • Contestan que recibirá más energía el de mayor volumen veinticinco alumnos (69%).
<p>N° 4: <i>Teniendo en cuenta el funcionamiento del mechero explicar cómo se transfiere energía a la sustancia.</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Ninguno contesta en forma correcta. • Contestan en forma regular treinta y dos (89%): <i>“El calor que trasmite el fuego una vez encendido el mechero”</i>. Dentro de este grupo la mitad menciona <i>“el flujo del mechero le trasmite energía calórica a la sustancia que está sobre él”</i>, <i>“que le trasmite “energía”</i>. • Dos no contestan (6%) • Otros dos dicen: <i>“por medio del fuego”</i>, <i>“por el calor”</i>.
<p>N°5: <i>¿Qué ocurre con la temperatura una vez que la sustancia hierve (ha alcanzado el punto de ebullición)? Justificar</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Un alumno solamente responde correctamente esta cuestión • Un 22% lo hace de manera regular, esto es porque hablan de que la temperatura alcanza su punto máximo, o que se mantiene por un ratito. • 64% de estos estudiantes dice que la temperatura aumenta o que las partículas de la sustancia se encuentran en constante movimiento. • Observamos que un 11% no responde la cuestión.
<p>N°6: <i>Trazar una gráfica cualitativa de la variación de la temperatura en función del tiempo. Explicar brevemente por qué las dibujaste así. ¿Hay diferencias en estas gráficas cuando se cambia de sustancia?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Contestan en forma correcta cinco estudiantes. (14%): <i>“Cuando se cambia la sustancia cambia el tiempo que se necesita para que la temperatura aumente”</i>. • Contestan en forma regular dieciséis (44%): <i>“Cuanto más calor se le inyecte más va aumentando la temperatura.”</i>. Dentro de éstas respuestas hay cuatro que escriben <i>“Si, varía más rápido la temperatura de una que otra”</i>. • En esta cuestión once alumnos (31%) consideran que ambas sustancias aumentan su temperatura al mismo tiempo. • No responden cuatro estudiantes (11%).
<p>N°7: <i>Al comparar agua con leche ¿cuál de ellas crees que hervirá a menor temperatura? ¿Y si pusieras aceite o alcohol?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Siete estudiantes contestan en forma correcta. (19%): <i>“Hervirá a menor temperatura la leche y el alcohol”</i>. • Contestan en forma regular dieciocho (50%): <i>“Las dos hierven a menor temperatura. Y en el otro el alcohol se calienta a menor temperatura.”</i>. • Diez alumnos (28%) piensan que el agua hervirá antes que la leche. Y que el aceite lo hace antes que el alcohol. • Un estudiante (3%) no responde.
<p>N°8: <i>Al tomar como sistema solamente la sustancia, ¿es posible estimar la energía que absorbe para elevar su temperatura?, ¿de qué factores depende?</i></p>	<ul style="list-style-type: none"> • Dieciocho estudiantes (50%) contestan que si es posible estimar la energía necesaria para elevar su temperatura. • Doce (33%) no contestan • Seis (17%) dicen: <i>“no es posible”</i>. • Respecto de los factores de los cuáles depende, nueve estudiantes (25%) contestan en forma correcta ya que mencionaron la mayoría de ellos, <i>“depende del calor que reciben, del volumen que tenga y de la sustancia”</i>. • Seis (17%) nombraron sólo un factor, por lo que se le consideró regular: <i>“ya que depende del calor”</i>. • Veintiún estudiantes (58%) no respondieron.

B. De la puesta en común

En la clase posterior al desarrollo de la experiencia, vuelven a formarse los grupos y empiezan a discutir las preguntas de la “Hoja de Resultados” y se realiza una puesta en común con la guía de la profesora.

Se efectuó un primer análisis sobre la forma de las gráficas de temperatura en función del tiempo obtenidas con el propósito de distinguir entre la zona previa a la ebullición y la zona durante la ebullición. A continuación se muestra el gráfico obtenido por un grupo de alumnos (Fig. 1).

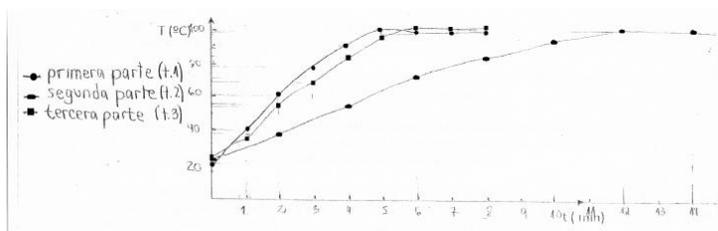


FIGURA 1. Gráfico obtenido por uno de los grupos luego de realizar la experiencia de laboratorio.

Luego se analizó la primera zona, haciendo notar la forma aproximadamente lineal que obtuvieron y las diferentes pendientes para cada caso. La docente presenta el concepto de calor específico como la constante de proporcionalidad entre la energía transferida por calor con la masa y variación de temperatura del sistema, lo que significa un aumento de la energía interna. Además hace hincapié en que esta constante es propia de cada sustancia.

Otro aspecto sobre el que se trabaja es el funcionamiento del mechero y el hecho de que la energía que entrega a la muestra es (en primera aproximación) proporcional al tiempo durante el cual se coloca el

recipiente con agua o leche sobre él. Se discute también si es posible calcular Q a partir de los datos medidos. La conclusión a la que arriban es que necesitan conocer el calor específico de la sustancia.

En el tratamiento del tema se tiene siempre presente la ecuación de conservación de la energía que estudiaron en mecánica:

$$Q + W_{ext} = \Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{in}$$

Se les hace notar que W_{ext} es cero y que no hay cambios de energía cinética ni potencial macroscópicos. El cambio de energía interna se traduce en un aumento de temperatura, que ellos han medido:

$$\Delta E_{int} = c_e m \Delta T$$

Si bien las preguntas de la “Hoja de Resultados” no son idénticas a las de la “Hoja de Predicciones” las cuestiones que se indagan son las mismas aunque luego de la experiencia se pregunta con más detalle.

C. De los resultados obtenidos luego de realizar la experiencia

Cada grupo contó con un equipo experimental. Las cantidades de agua y de leche se midieron con un vaso de precipitado, ya que en la escuela no se cuenta con una balanza.

El desarrollo de la experiencia fue satisfactorio y todos los grupos trabajaron con entusiasmo.

Se muestra en el Tabla II las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas de la “Hoja de Resultados”.

TABLA II. Conclusiones de los estudiantes.

Pregunta	CONCLUSIONES
1.- Comparar los gráficos obtenidos con los de tu predicción.	<ul style="list-style-type: none"> Sólo un grupo registra las diferencias que existen al comparar los gráficos de sus predicciones con los obtenidos en la hoja de resultados: “...se diferencian fundamentalmente en el hecho de que en la predicción, creíamos que la temperatura aumentaría de manera ilimitada hasta evaporarse. En cambio, a través de la experiencia, logramos observar que esto no es así, sino que una vez que la sustancia llega a su punto de ebullición, la temperatura de la misma se mantiene constante. Esto lo podemos visualizar en el gráfico realizado luego de la experiencia”. Es importante aclarar que, con el acompañamiento de la docente, los grupos discutieron los resultados hallados.
2.- ¿Qué conclusión se puede extraer de comparar las gráficas correspondientes a la primera y segunda parte?	<ul style="list-style-type: none"> Los cinco grupos, tanto en lo que expresaron como en las gráficas que realizaron contestan correctamente. Dos grupos pudieron también encontrar la relación entre los tiempos: “El recipiente con menor cantidad de sustancias tardará menos tiempo en alcanzar su punto de ebullición. En cambio, en el recipiente que contenía el doble de la misma sustancia, tardará el doble de tiempo en alcanzar la máxima temperatura”.
3.- ¿Qué se puede decir al comparar las gráficas	<ul style="list-style-type: none"> Todos los grupos responden que los puntos de ebullición de las sustancias son

<p>correspondientes de la primera parte y la tercera parte?, ¿hay diferencias?</p>	<p>aproximadamente iguales, lo cual se observó en los gráficos realizados: <i>“La leche alcanza con mayor rapidez su punto de ebullición, mientras que el agua necesita más tiempo, podemos observar minúsculas diferencias pues al estar la leche pasteurizada, cuenta con características muy similares al agua”</i>. (En realidad era leche descremada).</p>
<p>4.- ¿Qué se puede decir de los calores específicos del agua y de la leche? ¿Podrías estimar el valor del calor específico de la solución a partir de los datos que se tiene?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Dos grupos observan que los calores específicos son muy cercanos ya que necesitan tiempos casi iguales para que dos cantidades iguales alcancen la temperatura de ebullición, sin mencionar si lo pueden calcular o no. • Otros dos grupos agregan a lo anterior, que para estimar el calor específico necesitarían conocer la cantidad de energía transferida por calor, lo que no pueden medir: <i>“al tratarse de sustancias muy similares, el calor específico de cada una también lo es, el cual en ambos casos es aproximadamente $c = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}$. No se puede estimar a partir de nuestros datos pues necesitaríamos medir energía”</i>. • Un grupo no responde.
<p>5.- ¿Es posible estimar la energía que absorben las sustancias tomando como datos sólo las medidas obtenidas? Si no es así ¿qué se debería saber? ¿Hay alguna manera de saber cuánta energía es transferida por minuto? ¿Qué otros efectos deberían tenerse en cuenta?</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Para esta situación, todos los grupos aclararon que con sólo los datos obtenidos no es posible estimar la energía absorbida. Dos grupos hablan de <i>“grado de calor para calcular dicha energía”</i> (en realidad deberían haber mencionado temperatura, energía que entrega el mechero, etc). • A modo de ejemplo se presenta lo que dijo un grupo: <i>“No, no es posible estimar la energía que absorben las sustancias tomando como datos sólo las medidas obtenidas ya que como $Q = \Delta E_{int}$ y $\Delta E_{int} = c m \Delta t$, se deberían considerar la masa de cada una de ellas, dado que no conocemos, al igual que su calor específico. No hay manera de saber cuánta energía es transferida por minuto en estos casos, por los mismos motivos ya expresados, lo que ni siquiera nos permite calcular Q. Además, entran en juego otros factores, como el hecho de que la llama se mantenga siempre igual, que el jarrito no sea movido, etc.”</i>
<p>6.- Al tomar como sistema solamente la sustancia ¿Cómo plantearías la ecuación de conservación de la energía?, ¿te parece adecuada para ésta experiencia?, si no es así ¿cómo la escribirías ahora?, (piensa la situación en la cual se está lejos del punto de ebullición y durante la ebullición).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Tres grupos parten de la ecuación general y reconocen como única energía que varía la interna. <i>“Entonces, como $W + Q = \Delta E_{int}$ y la energía fue transferida por calor, por lo tanto, $Q = \Delta E_{int}$”,</i> concluyendo correctamente. • Un grupo escribe la ecuación general pero no la aplica a la situación. • Otro grupo no responde.

Luego de analizar las respuestas que los estudiantes han dado en la “Hoja de Resultados”, podemos decir que en todos los grupos se representaron correctamente las gráficas de la temperatura en función del tiempo, para diferentes cantidades de una misma sustancia y las correspondientes a distintas sustancias.

Respecto a las comparaciones de las gráficas de la parte 1 y 2 (igual sustancia y distintas cantidades), notamos que la experiencia les permitió a los estudiantes comprobar las predicciones que fueron correctas y modificar aquéllas que fueron erróneas. En particular esto último se observó en todo un grupo.

La experiencia también ayudó a corregir la idea respecto de que la energía que proporcionaba el mechero dependía de la masa/volumen considerado.

Dado que en la “Hoja de Resultados” no se pregunta explícitamente sobre el comportamiento de la sustancia una vez alcanzado la ebullición, a pesar que todos realizaron correctamente las gráficas de temperatura en función del tiempo, sólo un grupo menciona que la temperatura permanecerá constante. En la puesta en común la docente hace hincapié en la parte del gráfico correspondiente a la ebullición, justificando qué sucede durante ese proceso.

En este laboratorio se pretende solamente incorporar el concepto de calor específico y los cambios que se producen cuando se transfiere energía por calor fuera de los cambios de fase. Se les presenta el hecho de que la temperatura se

mantiene constante durante la ebullición. En una experiencia de laboratorio posterior se profundiza y trabaja con lo que sucede en un cambio de fase, en particular la fusión del agua al pasar de su estado sólido al líquido, para introducir el concepto de calor latente de fusión, extenderlo al de vaporización y llegar a que $\Delta E_{int} = L \cdot m$ [26].

Finalmente, la profesora les devolvió sus “Hoja de Predicciones” y les pidió que compararan sus respuestas con sus predicciones personales a fin de que cada uno tomara conciencia de las ideas que debía modificar. Esta etapa es muy importante para el aprendizaje.

En clases posteriores se realizarán problemas de lápiz y papel; se les propondrá resolver en grupo Problema Ricos en Contexto [27] referidos al tema en cuestión; luego defenderán sus resultados con fundamento científico ante el resto del alumnado y del docente.

III. CONCLUSIONES

Por las respuestas a la pregunta de las predicciones podemos inferir que los alumnos sabían que la temperatura aumenta si colocamos el vaso con líquido sobre el mechero, pero sólo unos pocos tenían la idea de que ésta aumentaba sólo hasta un cierto límite. La experiencia les mostró que la temperatura alcanza un valor máximo en el momento en

que comienza la ebullición. Éste será el punto de partida para la próxima experiencia de laboratorio.

La forma aproximadamente lineal obtenida para el primer tramo de la gráfica de temperatura en función del tiempo, permitió introducir adecuadamente el concepto de calor específico. Las respuestas de los distintos grupos a las preguntas 2, 3 y 4 de la “Hoja de Resultados” muestran un buen nivel de interpretación de los conceptos tratados. Lamentablemente, se utilizó leche descremada y las diferencias entre las gráficas de ésta y el agua son demasiado pequeñas para ser detectadas en esta experiencia sencilla.

Esta falla en el diseño de la experiencia dificultó la tarea del docente para que los estudiantes entiendan que el calor específico es propio de cada sustancia.

De acuerdo a los resultados obtenidos, pensamos que esta experiencia de laboratorio, basada en el Aprendizaje Activo de la Física, además de favorecer el aprendizaje significativo, contribuyó para a que los estudiantes interpreten los cambios de energía que se ponen en juego en un sistema antes y durante un cambio de fase.

Por último, estamos convencidos que esta metodología ayudará a integrar los conceptos referidos a la energía dados en primer año con los tratados en segundo año acerca de la transferencia de energía por calor, favoreciendo así una visión más amplia e integrada de la ciencia y de la física en particular.

REFERENCIAS

[1] Sanmartí, N., *Contribuciones y desafíos de las publicaciones en el área de educación en ciencias en la construcción y consolidación de la identidad del área: la experiencia de la revista*, Enseñanza de las Ciencias **26**, 301-310 (2008).

[2] Guisasola, J., Almodí, J. M., Zubimende, J. L. y Zuza, K., *Campo magnético: diseño y evaluación de estrategias de enseñanza basadas en el aprendizaje como investigación orientada*, Enseñanza de las Ciencias **23**, 303-320 (2005).

[3] Moreira, M. A., *Una visión toulminiana respecto de la “disciplina”*. Investigación en Educación en Ciencias: el rol del foro institucional, Conferencia dictada en el Séptimo Simposio en Educación en Física, Santa Rosa, La Pampa, Argentina (2004).

[4] De Pro Bueno, A., *Planificación de unidades didácticas por los profesores; análisis de tipos de actividades de enseñanza*, Enseñanza de las Ciencias **17**, 411-429 (1999).

[5] Serway, R., *Física, tomo I y II*, (Ed. McGraw-Hill, México, 1999).

[6] Tipler, P. A., *Física, tomo I y II*, (Reverté, Barcelona, España, 1994).

[7] Young, H. D., *Physics*, (Addison-Wesley Publishing Company, U.S.A, 1992).

[8] Serway, R., Faughn, J., *Física, Volumen I y II*, 6^{ta} Ed. (Thomson, Editores S. A., México, 2006).

[9] Tipler, P. A. y Mosca, G., *Física para la Ciencia y la Tecnología*, Volumen 1 (Reverté, Barcelona, 2005).

[10] Resnick, R, Halliday, D. y Krane, K *Física, volumen I y II*, (Compañía editorial continental, México, 2004).

[11] Sears, F., Freedman, M., Young, H. y Zemansky, M., *Física universitaria, Volumen I y II*, (Pearson Educación, México, 2004).

[12] Follari, B., Perrotta, M. T., Dima, G. N., Gutiérrez, E. E. *Una aplicación del teorema de conservación de la energía como problema integrador*, Revista Brasileira de Ensino de Física **33**, 1311-1316 (2011).

[13] Dima, G. N., Follari, B., Perrotta, M. T., Gutiérrez, E. E., *Estrategia para la enseñanza de la energía y su conservación desde una perspectiva integradora, en las carreras universitarias de química y geología*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 273-28 (2011).

[14] Perrotta, M. T., Follari, B., Dima, G. N., Gutiérrez, E. E., *Energía: planificación de la unidad didáctica en el nivel polimodal*, Enviado a Revista Enseñanza de la Física para su evaluación (2011).

[15] Perrotta, M. T., Follari, B., Dima, G. N., Gutiérrez, E. E., *La energía: y su conservación. Aplicación en una situación problemática*, Cuaderno Brasileiro de Ensino de Física **27**, 513-527 (2010).

[16] Antúnez, G. C., Pérez, S. M. y Petrucci, D., *Lo que dicen los docentes sobre aprendizaje y enseñanza de física en el laboratorio*, Memorias en CD del Noveno Simposio de Investigación en Física (SIEF9), p. 8. Sesión A2-Área Temática 2. Rosario, Santa Fe (2008).

[17] Redish, E., *Teaching Physics with the Physics Suite*, (Wiley, U.S.A, 2004).

[18] Cotignola, M., Bordogna, C., Punte, G., Capagnini, O., *Reorganización e integración curricular en un curso universitario inicial de Física*, Revista de Enseñanza de la Física **14**, 27-37 (2001).

[19] McDermott, L. C. y Shaffer, P., *Tutoriales para Física Introductoria*, (Prentice Hill, Buenos Aires, 2001).

[20] Porlan, R., Rivero, A. y Martín, R., *Conocimiento profesional y epistemología de los profesores II: estudios empíricos y conclusiones*, Enseñanza de las Ciencias **16**, 271-288 (1998).

[21] McDermott, L. C., *Investigación en Educación en la Física*, Revista Enseñanza de la Física **11**, 17-20 (1998).

[22] Benegas, J. y Villegas, M., *La Enseñanza Activa de la Física: la Experiencia de la UNSL*, IX Conferencia Inter-Americana sobre Educación en la Física. San José -Costa Rica (2006).

[23] Thornton, K. R. and Sokoloff, R. D., *Assessing student learning of Newton's laws: The Force and Motion Conceptual Evaluation and the evaluation of active learning laboratory and lecture curricula*, American Journal of Phys. **66**, 338-352 (1998).

[24] Sokoloff, R. D. and Thornton, K. R., *Using Interactive Lecture Demonstrations to create an active learning environment*, The Physics Teacher **36**, 340 (1997).

[25] Benegas, J., Sokoloff, D., Laws, P., Zavala, G., Gangoso, Z. y Alarcón, H., *Manual de entrenamiento 4to. Taller Regional del Cono Sur sobre Aprendizaje Activo de Física: Termodinámica y Fluidos (AATyF - Córdoba 2011)*,

Follari Beatriz del R., Lambrecht Carmen, Dima Gilda N., Perrotta M. Teresa y María Eugenia Carola
(Universidad Nacional de San Luis, San Luis, Argentina, 2011).
[26] Follari, B., Lambrech, C., Dima, G., Perrotta, M. T., Carola, M. E., *El concepto unificador de la energía en las clases experimentales: Transferencia de energía por calor*,

Memorias en CD de la XVII Reunión Nacional de Educación en Física, Córdoba, Argentina. Trabajo N° 76, p. 12 (2011).
[27] Heller, K., Heller, P., *Cooperative Group Problem Solving in Physics*, (University of Minnesota, 1999).

ANEXO TRABAJO DE LABORATORIO N ° 1

Cambios en la energía de un sistema en el caso del aumento de temperatura y en los cambios de fase de diferentes sustancias cuando se transfiere energía por calor

- Analizar la relación entre la transferencia de energía por calor entregada y la temperatura para:

- a) masas diferentes de una misma sustancia
- b) masas iguales de distinta sustancia.

- Expresar cualitativamente la conservación de la energía durante el proceso de cambios de estado de una sustancia.

Materiales a utilizar: Vasos de precipitados, termómetro, mechero, tela de amianto, trípode, soporte, balanza, cronómetro, agua y leche o agua con azúcar.

Para realizar esta experiencia será necesario que enciendan el mechero y coloquen sobre el fuego sólo la tela de amianto para que se temple durante dos o tres minutos. Tomarán nota de la temperatura ambiente del laboratorio. Medirán cómo varía la temperatura de distintas cantidades de masa de agua y de cantidades de masas iguales de distintas sustancias en el transcurso del tiempo, cuando se colocan sobre el mechero. Mantendrán a éste encendido durante toda la experiencia y la llama con la misma intensidad. El termómetro no deberá tocar las paredes ni el fondo del recipiente, como indica la figura. Primero realizarán las predicciones que se detallan a continuación. Luego llevarán a cabo la experiencia registrando los resultados para analizar y contrastar con sus predicciones. Por último elaborarán sus conclusiones.

Nombre y Apellido:.....

Fecha:.....

Hoja de Predicciones

1.- A dos masas iguales de sustancias diferentes, inicialmente a igual temperatura, se las coloca sobre mecheros encendidos. El tiempo que necesitan para llegar a la misma temperatura final ¿es el mismo?, justificar.

2.- Dadas 100 g y 200 g de una misma sustancia ¿cuál necesita más tiempo para alcanzar la misma temperatura?, justificar.

3.- Si ahora cada una las masas anteriores se las deja el mismo tiempo sobre mecheros encendidos ¿cuál recibe más energía?, justificar.

4.- Teniendo en cuenta el funcionamiento del mechero explicar cómo transfiere energía a la sustancia.

5.- ¿Qué ocurre con la temperatura una vez que la sustancia hierve (ha alcanzado el punto de ebullición)?, justificar.

6.- Trazar una gráfica cualitativa de la variación de la temperatura en función del tiempo. Explicar brevemente por qué las dibujaste así. ¿Hay diferencias en estas gráficas cuando se cambia de sustancia?

7.- Al comparar agua con una solución de agua con azúcar o con leche ¿Cuál de ellas crees que hervirá a menor temperatura? ¿Y si pusieras aceite o alcohol?

8.- Al tomar como sistema solamente la sustancia, ¿es posible estimar la energía que absorbe cierta sustancia para elevar su temperatura?, ¿de qué factores depende?

Nombre y Apellido:.....

Fecha:.....

Hoja de Resultados

Esta hoja te va a servir para estudiar. Haz en ella todas las anotaciones que creas conveniente.

Actividades a realizar.

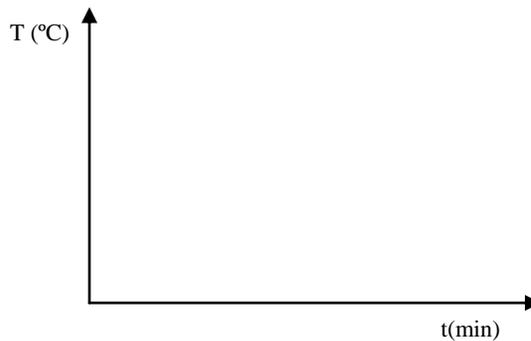
• **Primera parte:**

Colocar 100g de agua de la canilla en un vaso de precipitados. Introducir en dicho vaso un termómetro. Leer la temperatura y luego calentar con el mechero el vaso de precipitados, y se sugiere tomar la temperatura cada minuto. Continuar la lectura hasta registrar tres veces la misma temperatura. Registrar en la Tabla 1. Sacar el vaso de precipitados del fuego, tirar el agua y recordar NO apagar ni modificar el fuego.

TABLA 1

t (min)											
T (°C)											

Confeccionar un gráfico de temperatura en función del tiempo para los 100g de agua.



• **Segunda parte:**

Colocar 200g de agua de la canilla en otro vaso de precipitados. Seguir los mismos pasos que en la primera parte, sólo que tomando la temperatura en intervalos de dos minutos.

TABLA 2

t (min)											
T (°C)											

Representar en el mismo gráfico anterior, de temperatura en función del tiempo, los valores correspondientes a la tabla 2. Sacar el vaso de precipitados del fuego, tirar el agua y recordar NO apagar ni modificar el fuego.

• **Tercera parte:**

En otro vaso de precipitados coloquen 100g de leche o de una solución de azúcar en agua, (para prepararla coloquen aproximadamente volúmenes iguales de agua y azúcar). Repetir el procedimiento anterior.

TABLA 3

t (min)											
T (°C)											

En el mismo gráfico anterior, representar los valores de la tabla 3, con un nuevo color. Sacar el vaso de precipitados del fuego, tirar el agua azucarada o leche y ahora sí apagar el mechero.

CONCLUSIONES

- 1.- Comparar los gráficos obtenidos con los de tu predicción.
- 2.- ¿Qué conclusión se puede extraer de comparar las gráficas correspondientes a la primera y segunda parte?
- 3.- ¿Qué se puede decir al comparar las gráficas correspondientes de la primera parte y la tercera parte?, ¿hay diferencias?
- 4.- ¿Qué se puede decir de los calores específicos del agua y de la solución de azúcar o leche? ¿Podrías estimar el valor del calor específico de la solución a partir de los datos que se tiene?
- 5.- ¿Es posible estimar la energía que absorben las sustancias tomando como datos sólo las medidas obtenidas? Si no es así ¿qué se debería saber? ¿Hay alguna manera de saber cuánta energía es transferida por minuto? ¿Qué otros efectos deberían tenerse en cuenta?
- 6.- Al tomar como sistema solamente la sustancia ¿Cómo plantearías la ecuación de conservación de la energía?, ¿te parece adecuada para ésta experiencia?, si no es así ¿cómo la escribirías ahora?, (piensa la situación en la cual se está lejos del punto de ebullición y durante la ebullición).

Acondicionamiento térmico de aire usando energía geotérmica-ondas de calor



Leila Iannelli, Salvador Gil

Universidad Nacional de San Martín, Campus Miguelete, 79) Av. 25 de Mayo y (34) Francia, San Martín (1650), Buenos Aires, Argentina.

E-mail: sgil@unsam.edu.ar

(Recibido el 29 de Diciembre de 2011; aceptado el 8 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio teórico-experimental de la propagación de ondas térmicas en el suelo. Se discute la potencialidad de usar tubos enterrados como alternativa de acondicionamiento térmico de ambientes. En particular se realiza un estudio de las propiedades térmicas del suelo en la Provincia de Buenos Aires, Argentina, con el objeto de evaluar la posibilidad de aprovechar la energía geotérmica del suelo, a poca profundidad, como sistema de acondicionamiento térmico de ambientes. El presente experimento permite determinar la difusividad y la conductividad térmica del suelo, es de bajo costo y fácil de realizar. Esta actividad puede ser útil para conectar aspectos de la física básica con la solución de un problema tecnológico de mucha implicancia ambiental, política y económica.

Palabras clave: Ecuación de Fourier-Biot del calor, experimentos de bajo costo, propiedades térmicas, sistema de acondicionamiento de ambientes, intercambiadores tierra-aire, ahorro energético y reducción de emisiones de gases de invernadero.

Abstract

In this paper we carry out a theoretical and experimental study of thermal wave propagation in soil. We discuss the potential use of buried pipes as an alternative thermal conditioning of environments. In particular, we study the thermal properties of soil in the province of Buenos Aires, Argentina, in order to evaluate the possibility of using geothermal energy from the ground, at shallow depth, as thermal air conditioning system. The present experiment allows us to determine the diffusivity and thermal conductivity of the soil. It is low cost and easy to perform. This activity can be of use to connect aspects of basic physics with the solution of a technological problem of great environmental, political and economic implication.

Keywords: Fourier-Biot equation, heat waves, low-cost experiments, thermal properties, air conditioning system, ground-air heat exchangers, saving energy and reducing greenhouse gas emissions.

PACS: 88.10.Cn, 88.05.Ec, 07.05.Bx, 44.10.+i, 72.15.Eb, 91.35.Dc, 01.50.My, 01.90.+g

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Un objetivo deseable de los cursos de física para las carreras de ingeniería es, que además de introducir los fundamentos de la disciplina y lograr cierta capacidad operativa en el uso de las leyes fundamentales, ilustre cómo esta disciplina puede utilizarse para solucionar algunos problemas prácticos. Estas aplicaciones resultan más atractivas y motivadoras si ellas contribuyen a resolver problemas de alto impacto social.

Uno de los grandes desafíos del siglo XXI es satisfacer las crecientes demandas de energía del mundo, incluir a vastos sectores sociales de bajos recursos en el uso de la energía y al mismo tiempo disminuir las emisiones de gases de efecto de invernadero (GEI) [1, 2]. Hay evidencias cada vez más claras de que el calentamiento global que está experimentando la Tierra tiene causas antropogénicas. Por lo tanto, es necesario que disminuyamos nuestras emisiones

de GEI y hagamos un uso más racional y eficiente de la energía [1, 2].

En Argentina, el consumo de energía en edificios (viviendas, instalaciones comerciales y públicas) es de aproximadamente 30% del total. De este consumo alrededor del 50% se usa en viviendas para acondicionamiento de aire, calefacción y refrigeración. Por lo tanto, al menos el 15% del consumo energético total del país, se emplea en acondicionamiento térmico. En los EE.UU. el consumo de energía en edificios es de alrededor del 40%. Se estima que la proporción de energía usada en acondicionamiento térmico de interiores es superior al 20% de toda la energía usada en ese país. Desde luego dependiendo del tipo de clima, del tamaño, características de la construcción y prestaciones de los edificios, la fracción de energía que se usa en acondicionamiento térmico del aire interior varía de lugar a lugar, pero en general es una fracción muy significativa [2]. Dada la magnitud de estos consumos es preciso explorar todas las

alternativas para hacer un uso más racional y eficiente de los recursos energéticos disponibles y disminuir nuestras emisiones de GEI. Creemos que acercar a los estudiantes de ciencia y tecnología a esta problemática es enriquecedor, estimulante y al mismo tiempo ilustrativo de cómo la ciencia puede hacer aportes esenciales para contribuir a resolver esta encrucijada social, política y económica, asociada con el uso de los recursos energéticos, que nos incumbe a todos.

La Tierra se comporta como un gran colector y acumulador de energía. El suelo posee muchas propiedades térmicas interesantes debido a su alta capacidad calorífica y gran aislamiento térmico. Con una densidad media de $1800\text{--}2500\text{kg/m}^3$, un calor específico de 920J/kg.K y una conductividad térmica media de 0.3W/m.K (comparada con 0.58W/m.K para el agua y 380W/m.K para el cobre); da como resultado que la capacidad térmica volumétrica del suelo es de alrededor de $2\text{MJ/m}^3\text{.K}$ comparada con $4.5\text{MJ/m}^3\text{.K}$ para el agua. Por lo tanto, es posible considerar al suelo como un gran acumulador de calor. Por otra parte, su baja conductividad térmica hace que la penetración del calor en el suelo sea muy lenta, al igual que su enfriamiento.

Todo esto conduce a que las variaciones diurnas de la temperatura no penetren más allá de 0.5m , y las variaciones estacionales no superen una profundidad de 2 a 4m . Más allá de estas profundidades, la temperatura de la Tierra se mantiene constante en el tiempo. El valor de esta temperatura es generalmente igual al valor medio de la temperatura anual de la superficie. En el caso de la zona central de Argentina, esta temperatura es del orden de 17.5°C . Lo interesante es que esta temperatura es muy próxima a la temperatura de confort a lo largo de todo el año. A profundidades mayores, entre una decena de metros y unos pocos kilómetros, hay un gradiente térmico de unos 20 a 30K/km [3]. De modo que si se pudiese hacer circular el aire a través de tubos enterrados, antes de llegar al interior de los edificios y viviendas, la tierra podría utilizarse como sistema de acondicionamiento térmico natural del aire con el consecuente ahorro de energía y disminución de emisiones de GEI [4, 5, 6, 7].

El potencial térmico de la tierra puede ser explotado convenientemente utilizando dispositivos arquitectónicos y estructurales adecuados. Algunos esquemas se ilustran en la Fig. 1.

Estas propiedades térmicas del suelo no son nuevas, ellas se han venido usando por siglos en las bodegas de almacenamiento de alimentos y en viviendas subterráneas en muchos lugares de la costa mediterránea y en el norte de África [4]. De hecho nuestros antepasados pudieron sobrevivir varios periodos de glaciaciones de la Tierra, utilizando las cavernas como refugios térmicos adecuados. Por otro lado, los sistemas de túneles de aire en la tierra fueron y son utilizados por muchas culturas. Además, son conocidas las virtudes de las viviendas construidas en cuevas en el sur de España y Grecia, muy elogiadas por su "frescura" y "calidez". Muchas de estas viviendas se han transformado en Boutique Hotel de esas regiones del mundo [8].

Uso de energía geotérmica para acondicionamiento térmico de ambientes

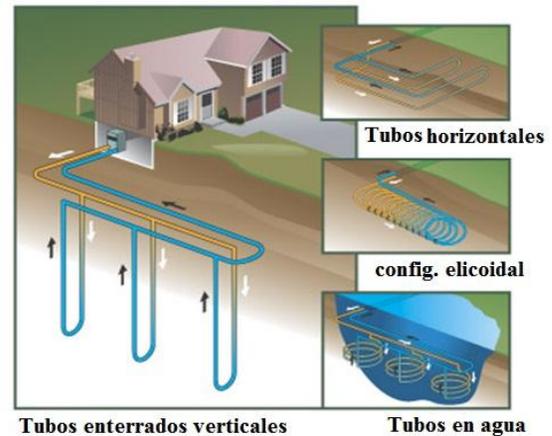


FIGURA 1. Diferentes esquemas que pueden utilizarse para el acondicionamiento térmico de viviendas utilizando la energía geotérmica [4, 5, 6, 7].

El acoplamiento térmico del suelo con el interior de las viviendas o edificios puede lograrse por distintos medios, tanto directos como indirectos, ver Fig. 1. Un modo directo de acoplamiento consiste en hacer circular el aire directamente por los tubos enterrados antes de entrar a la vivienda. Un acoplamiento indirecto se puede lograr haciendo circular agua por los tubos enterrados y utilizar un intercambiador de calor, opcionalmente asociado con una bomba de calor, para el acondicionamiento de aire interno [5, 6].

El régimen de temperaturas a profundidades de unos pocos metros es muy estable, con sólo una pequeña variación estacional, y sin fluctuación diurna. Esto se debe al hecho de que las ondas térmicas se amortiguan tanto más rápidamente cuanto mayor es su frecuencia. El objetivo del presente trabajo es explorar las características básicas de las ondas térmicas, diarias y anuales, en la Tierra.

Como discutiremos más adelante, las fluctuaciones térmicas diurnas (ciclo de un día) disminuyen en menos de 0.5m .

Por su parte, las ondas anuales (ciclo de un año) se atenúan más profundamente, 2 a 4m . La gran masa y capacidad térmica del suelo posibilita utilizarlo como sumidero y fuente de energía, tanto para refrigeración como para calefacción.

En las Sec. II se presenta una síntesis de modelo teórico para describir las ondas térmicas en el suelo, en la Sec. III se discute el arreglo experimental propuesto y en la Sec. IV se discuten los resultados obtenidos.

II. MODELO TEÓRICO

El calor se transfiere básicamente por tres procesos distintos: Conducción, convección y radiación. En el caso del suelo, a poca profundidad el principal mecanismo de transferencia de calor es la conducción. Para ser más

específicos, consideramos un modelo unidimensional de conducción de calor, consistente en una barra, rodeada de un material aislante, de modo que el mecanismo principal de propagación de calor por la misma sea la conducción. Tomamos el eje x coincidente con el eje de la barra. Este modelo también podría aplicarse a un volumen semi-infinito, expuesto a una fuente de calor extensa, de modo que la única dimensión relevante del problema es definida por el eje x , perpendicular a la cara expuesta a la fuente térmica. La física de este problema viene descrita por la ecuación general de difusión del calor o ecuación de Fourier Biot [9, 10, 11]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (1)$$

donde $T(x, t)$ es temperatura del elemento infinitesimal, en un dado instante t , ver Fig. 2 y k es la *difusividad* del material, que depende de la conductividad térmica K , densidad ρ , y calor específico c . De modo que $k = K / c \cdot \rho$. El término dT/dx es el gradiente térmico.

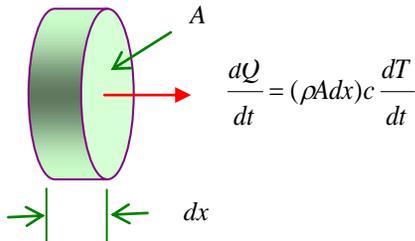


FIGURA 2. Transmisión de calor unidimensional a través de un elemento infinitesimal de materia de espesor dx , densidad ρ y calor específico c . dQ/dt es el calor que fluye del elemento infinitesimal por unidad de tiempo.

Ondas térmicas unidimensionales

Consideremos el caso de una barra de longitud L , con su extremo izquierdo en contacto con una fuente térmica que tiene una temperatura que varía como:

$$T_a(t) = T_a^0 \cos(\omega_0 t + \phi_0) + T_{b0}, \quad (2)$$

donde T_a^0 es la amplitud de la oscilación térmica alrededor del valor medio T_{b0} , $\omega_0 = 2\pi/p_0$ es la frecuencia angular, p_0 su período y ϕ_0 la fase inicial de la oscilación. Este modelo también se puede utilizar para describir un sistema semi-infinito unidimensional, por ejemplo la Tierra, donde la fuente de calor es la superficie, que es calentada por el Sol. En este caso el eje x es vertical y penetra en la Tierra.

Consideremos en primer término el caso estacionario, de una fuente térmica de temperatura constante, T_{b0} , y con el otro extremo ($x=L$), a una temperatura fija igual a T_{00} . En

Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica estado estacionario, es de esperar que la temperatura de la barra venga descrita por una función $T_b(x)$ dada por:

$$T_b(x) = T_{b0} - \frac{(T_{b0} - T_{00})}{L} x = T_{b0} - m \cdot x, \quad (3)$$

donde T_{b0} es la temperatura del extremo izquierdo, contiguo a la fuente térmica, que supondremos coincide con la temperatura ambiente en el caso de la Tierra. En este análisis despreciamos las pérdidas de calor por otros mecanismos, como ser convección o radiación, pues suponemos que la aislación térmica de la barra minimiza las pérdidas por otros mecanismos de transmisión del calor. En el caso de la Tierra, esta simplificación está bien justificada, ya que el Sol, que actúa como la fuente de calor, calienta por igual toda la superficie y el calor se propaga en la dirección vertical, de idéntica forma para todos los elementos de suelo que sean adyacentes.

Volviendo al caso en que la temperatura del extremo izquierdo esté sometida a una temperatura oscilante, o que la superficie del suelo esté sometida a variaciones de irradiación por parte del Sol, la ecuación de difusión del calor viene dada por la Ec. (1). Definimos la temperatura normalizada $\theta(x, t) = T(x, t) - T_b(x)$, donde $T_b(x)$, viene dada por la Ec. (3), siendo $T_b(x)$ la temperatura promedio temporal de la barra en la posición x . La ecuación que debe satisfacer $\theta(x, t)$ es:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (4)$$

ya que $\partial^2 T_b / \partial x^2 = 0$. La Ec. (4) es una ecuación diferencial lineal que puede resolverse por separación de variables [12]. Su solución para condiciones de borde periódicas, puede escribirse como [11, 12]:

$$\theta(x, t) = A_0 \exp(-x / \mu_0) \cos(\omega_0 t \pm x / \mu_0 + \phi_0). \quad (5)$$

Esta expresión representa una onda térmica atenuada que se propaga con velocidad v_0 hacia la derecha (-) o hacia la izquierda (+), dependiendo del signo del argumento de la función coseno. Aquí μ_0 representa la distancia característica de penetración de la onda. Reemplazando (5) en (4) obtenemos:

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{2k}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{p_0 \cdot k}{\pi}} = \frac{\lambda}{2\pi}, \quad (6)$$

y

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\mu_0}, \quad (7)$$

donde

$$\lambda = \sqrt{4\pi \cdot kp_0} = 2\pi\varepsilon_0 = \text{longitud de onda}. \quad (8)$$

La velocidad de propagación de la onda es:

$$v_0 = \sqrt{4\pi \cdot k / p_0} = \sqrt{2k\omega_0} = \frac{\lambda}{p_0}, \quad (9)$$

De este modo, la expresión (5) también puede escribirse como:

$$\theta(x, t) = A(x) \cos(x / \mu_0 \pm \omega_0 t + \phi_0), \quad (10)$$

con

$$A(x) = A_0 \exp(-x / \mu_0). \quad (11)$$

La Ec. (10) describe una onda viajera, con amplitud decreciente. Las constantes A_0 y ϕ_0 dependen de las condiciones de borde del problema. $A(x)$ es la amplitud de la onda a la distancia x . El parámetro $\mu_0 = \lambda / 2\pi$ tiene las unidades de longitud y es indicativo de la longitud característica a la que penetra la onda térmica. Para $x=0$:

$$\theta(x=0, t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0). \quad (12)$$

Es decir, en el punto $x = 0$ tenemos que la temperatura oscila periódicamente con frecuencia $\omega_0 = 2\pi/p_0$.

Según la Ec. (10), una onda térmica penetra con amplitud apreciable, distancias del orden de μ_0 o sea de unas pocas longitudes de onda. La amplitud se atenúa a $1/e^2 \approx 0.135$ (13.5%) de su valor inicial para una distancia $x = 2 \cdot \mu_0 = 0.32 \lambda$.

Según las Ecs. (6) y (9), a medida que el período p_0 de la onda es mayor, mayor será la penetración de la onda térmica y menor su velocidad de propagación. Asimismo, la onda térmica penetra tanto más y viaja más rápido cuanto mayor sea la difusividad del material (k). Este resultado explica por qué las variaciones diarias de temperatura sólo penetran en el suelo a unos 50cm (con $k_{tierra} \approx 3.8 \text{m}^2/\text{s}$ y $p_0 = 24\text{h}$ resulta $\mu_0 \approx 10\text{cm}$), en cambio las variaciones anuales ($p_0 = 365$ días) penetran en la Tierra hasta unos 4 o 5m ($\mu_0 \approx 2\text{m}$ y $\lambda \approx 8\text{m}$) [13, 14], las temperaturas asociadas a la última era glacial ($p_0 \approx 10000$ años) estarían entre unos 200 a 300m de profundidad. De este modo, en las profundidades de la Tierra, quedan registradas las temperaturas del pasado [11, 13].

III. EXPERIMENTO

Para este experimento se utilizó una sonda de plástico de 35cm de longitud. Se realizaron cuatro perforaciones equiespaciadas a lo largo del eje x , eje vertical, en las cuales se introdujeron los sensores térmicos (termistores NTC). Un sensor de temperatura se colocó a 4cm sobre la superficie del suelo para que registre la temperatura ambiente.

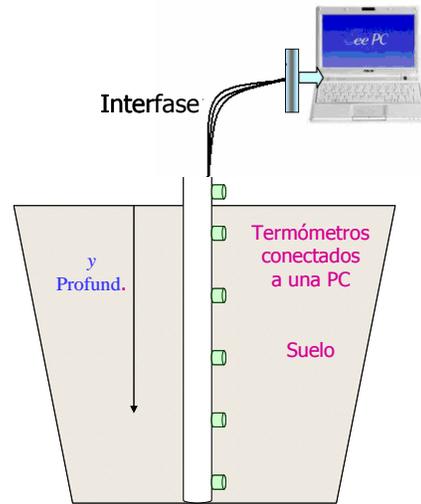


FIGURA 3. Arreglo experimental para medir las ondas térmicas del suelo a diversas profundidades.

Finalmente se introdujo la sonda en el suelo, a la intemperie y a su alrededor se le colocó arena. Las temperaturas se monitorearon usando un sistema de adquisición de datos conectado a una computadora personal (PC). Se estudió la propagación de las ondas a lo largo de varias semanas. Sin embargo con datos tomados a lo largo de 3 o 4 días, ya se puede ver las características básicas de este proceso. En la Fig. 3 se muestra un diagrama esquemático del arreglo experimental.

IV. RESULTADOS

La tasa de medición utilizada para registrar las temperaturas fue 60s. La Fig. 4 ilustra los resultados de $\theta(x, t) = T(x, t) - T_b(x)$.

Se observa que el calor se propaga en forma de ondas, con amplitudes decrecientes. El termómetro que se encuentra más cerca de la superficie de la tierra (curva azul) tiene mayor amplitud que aquellos que están más alejados.

El cálculo de la constante de difusividad se realizó mediante dos métodos diferentes [11], midiendo la atenuación de la amplitud térmica en función de la profundidad y midiendo la velocidad de propagación de la onda térmica. En la Fig. 5 se muestran los resultados obtenidos analizando la variación de la amplitud de la onda como función de la profundidad. En esta figura se representó el logaritmo de la amplitud máxima de cada termómetro como función de su posición (profundidad). Como se ve, la dependencia de $\ln(A(x))$ como función de la profundidad (x) es aproximadamente lineal, en concordancia con la predicción del modelo, Ec. (11). La pendiente de la recta que mejor se ajusta a los datos experimentales, es la inversa de la distancia de penetración de la onda, μ_0 , a partir de la cual se pudo obtener la constante de difusividad térmica mediante la Ec. (6), donde p_0 es igual a 24hrs.

Otro método para determinar k consiste en medir la velocidad de propagación de la onda térmica. Para ello se determina el tiempo, t , en el que la onda térmica pasa por un máximo (o mínimo) para cada termómetro. Se graficó la posición x de cada termómetro en función del tiempo, t , que demoró la onda en llegar a cada uno. La Fig. 6, muestra los resultados obtenidos.

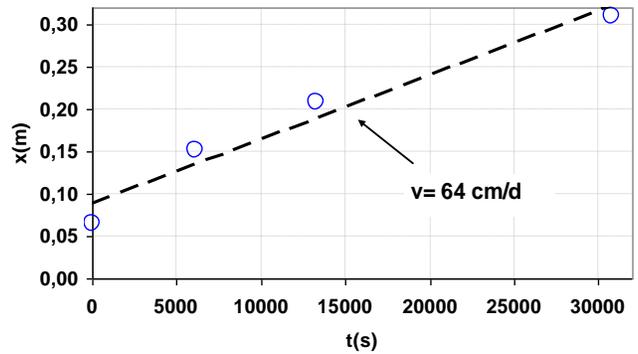


FIGURA 6. Gráfico del perfil de profundidad en función del tiempo que tardó en producirse la máxima temperatura en cada uno los termómetros. La línea indica la tendencia lineal que describen los puntos.

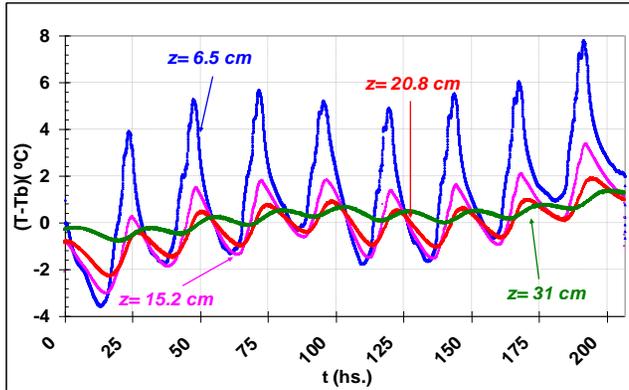


FIGURA 4. Variación de la temperatura en distintas posiciones (profundidades) de la sonda como función del tiempo. Los valores máximos y mínimos para los distintos termómetros, se alcanzan en distintos tiempos.

En la Fig. 6 la pendiente de la línea recta es la velocidad de propagación de la onda en el suelo, v_0 , a partir de cuyo valor se pudo obtener el de la constante de difusividad, Ec. (9).

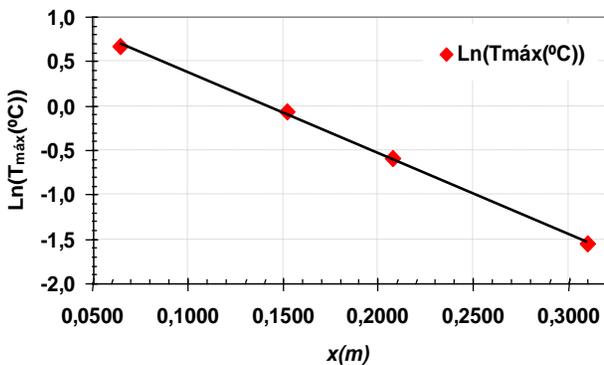


FIGURA 5. Logaritmo de la amplitud térmica máxima en función de la posición, x , desde la superficie de la tierra hasta cada uno de los termómetros.

Los valores obtenidos de la constante de difusividad térmica, determinados por ambos métodos, se muestran en la Tabla I, con sus respectivos errores. También en esta tabla se encuentra el valor tabulado de los coeficientes de difusividad térmica para la arcilla y para la arena.

TABLA I. Tabla comparativa entre los valores de los coeficientes de difusividad térmica tabulados para la arena y para la arcilla y los hallados experimentalmente por los dos métodos propuestos.

Coefficiente de difusividad térmica	k experimental ($m^2/s \times 10^{-6}$)	k tabulado (arcilla) ($m^2/s \times 10^{-6}$)	k tabulado (arena) ($m^2/s \times 10^{-6}$)
Método 1 (μ_0)	0.443±0.002	0.26-0.4	0.296-0.521
Método 2 (v_0)	0.4±0.1	0.26-0.4	0.296-0.521
Mejor valor de k	0.443±0.002	0.26-0.4	0.296-0.521

La Fig 7, muestra las temperaturas promedio en función de los meses desde el año 1944 al 2010. En este gráfico se pueden observar tres curvas: La de color rojo representa las temperaturas medias; la de color naranja representa las temperaturas máximas y la de color verde representa las temperaturas mínimas. Por último, la línea recta de 17.7°C de color violeta, que representa la temperatura promedio anual de Buenos Aires.

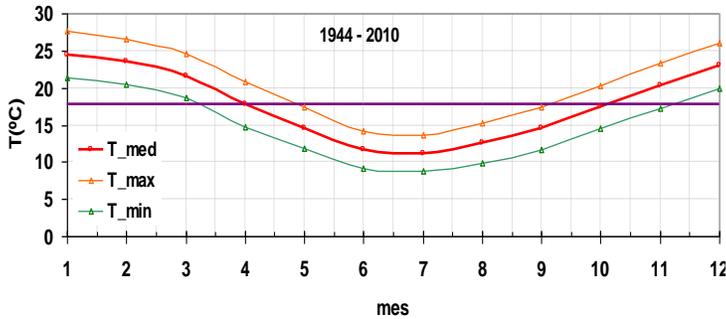


FIGURA 7. Gráfico de las temperaturas (mínima, media y máxima) en función de los meses del año, desde 1944 al 2010. La curva roja representa la temperatura media mensual. Las otras curvas son la variación de la temperatura máxima y mínima media mensual. La línea horizontal representa la temperatura media anual.

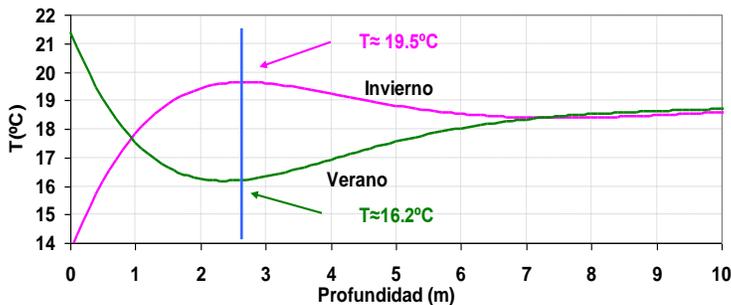


FIGURA 8. Variación de la temperatura del suelo para distintas profundidades, para el invierno (curva rosa) y verano (curva verde).

Tomando como base las temperaturas históricas de Buenos Aires, ajustamos los valores de los parámetros $A_{\theta}(=T_a^0 - T_{bo})$ y ϕ , con $p_0=365$ d, de las Ecs. (2) o (12), de modo de reproducir las temperaturas medias mensuales de la Fig. 7. El valor de la constante de difusividad térmica, k , es el determinado en este estudio, Tabla I. Usando las Ecs. (10) y (11), obtenemos los perfiles térmicos asociados a un dado momento t , como los ilustrados en la Fig. 8. Esta figura muestra la variación de la temperatura en función de la profundidad, x , para dos meses del año enero (verano) y julio (invierno), de la onda de calor en la Tierra generada por la variación anual de temperatura. En esta figura se puede observar que a una profundidad de aproximadamente 2.5m, en invierno puede haber una temperatura de 19.5°C y en verano una temperatura de 16°C. En otras palabras, a esta profundidad se produce una inversión térmica; está más caliente que el promedio en invierno y viceversa, más frío que el promedio en verano. Por consiguiente, esta es la profundidad óptima donde sería conveniente enterrar los tubos para optimizar el intercambio térmico con los ambientes interiores [5].

V. CONCLUSIONES

Este trabajo ilustra un sistema experimental sencillo y de bajo costo, para estudiar ondas térmicas en la Tierra y determinar la constante de difusividad del suelo. Los resultados de difusividad se comparan bien, con los tabulados para la arcilla y la arena.

Se observa que las ondas de calor se propagan con una velocidad finita a través del suelo. Para las ondas anuales, verano-invierno, su velocidad es tal, que ellas demoran unos 6 meses en recorrer un par de metros. La amplitud de la onda térmica se va atenuando a medida que aumenta la profundidad. A una profundidad del orden de 2m, se produce una inversión de temperatura. En verano, a esta profundidad, encontramos el terreno más frío que su valor medio anual y viceversa, en inviernos esta zona del suelo está más caliente. De modo que esta región de suelo se convierte en un lugar óptimo para colocar un intercambiador térmico con el interior de las viviendas, que podría usarse por sí mismo, o acompañado de una bomba de calor, en un acondicionador de aire muy interesante de explotar.

Este experimento ilustra que es factible el uso de calor geotérmico para el acondicionamiento térmico de ambientes interiores de viviendas y edificios, con un ahorro considerable de energía y disminuyendo las emisiones de gases de efecto de invernadero.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a Federico Ariganello por su participación en las primeras fases de este proyecto. Agradecemos la lectura del manuscrito y las sugerencias realizadas por A. E. Schwint. Asimismo agradecemos la colaboración de Oscar Romanelli y Javier de Fernández Vázquez en la construcción del dispositivo experimental.

REFERENCIAS

- [1] World Meteorological Organization, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), Fourth Assessment Report: Climate Change (2007). http://www.wmo.int/pages/partners/ipcc/index_en.html, consultado el 10 de Diciembre de 2011.
- [2] Mastrandrea, M. D. and Schneider, S. H., *Resource Letter GW-2: Global Warming*, Am. J. Phys.**76**, 608-614 (2008).
- [3] Geothermal gradient, de Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Geothermal_gradient, consultado el 20 de Diciembre de 2011.
- [4] Arquitectura subterránea, de Wikipedia, http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_subterr%C3%A1nea, consultado el 15 de Diciembre de 2011.

- [5] *Ground-coupled heat exchanger*, de Wikipedia, <http://es.wikipedia.org/wiki/Arquitectura_subterr%C3%A1nea>, consultado el 20 de Diciembre de 2011.
- [6] *Earth Cooling Tubes*, <http://www.energysavers.gov/your_home/space_heating_cooling/index.cfm/mytopic=12460>, consultado el 20 de Diciembre de 2011.
- [7] Sharan, G., *Earth Tube Heat Exchangers for Environmental Control of Farm Buildings in Semi-arid Northwest India*, (IIM Ahmedabad, India, 2008).
- [8] *Underground living*, de Wikipedia, <http://en.wikipedia.org/wiki/Underground_living>, consultado el 22 de Diciembre de 2011.

- Acondicionamiento Térmico de Aire Usando Energía Geotérmica*
- [9] Giancoli, D. C., *Física - Principios con Aplicaciones*, (Prentice Hall, México, 1997).
- [10] Cengel, A., *Heat transfer, a practical approach*, (The Mc Graw-Hill Co., N.Y., 2003).
- [11] Iannelli, L. y Gil, S., *Ondas de Calor, Determinación de temperaturas del pasado*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 82-88 (2012).
- [12] Spiegel, M. R., *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists*, (McGraw Hill, N.Y., 1980).
- [13] Pollack, N. y Chapman, D. S., *Underground Records of Changing Climate*, Scientific American **268**, 44-50 (1993).
- [14] Redfield, C., *Terrestrial Heat Flow through Sal-Marsh Peat*, Science **148**, 1291-1292 (1965).

Dificultades en la aplicación del cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas del trabajo efectuado por un gas ideal: Conceptos y teoremas en acción



Manuel Sebastian Alvarez Alvarado

Instituto de Ciencias Físicas, Escuela Superior Politécnica del Litoral, Campus Gustavo Galindo Km.30.5 Vía Perimetral, Apartado 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

E-mail: Manuel.alvarez.alvarado@ieee.org

(Recibido el 11 de Diciembre de 2011; aceptado el 13 de Marzo de 2012)

Resumen

Este trabajo se enfoca en los campos conceptuales de Vergnaud y el objetivo fue determinar los conceptos en acción y teoremas en acción que tienen los estudiantes cuando aplican el cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas del trabajo efectuado por un gas ideal. Para el estudio realizado se contó con la participación de treinta estudiantes registrados en un curso de física básico con cálculo en el tópico de trabajo, calor y temperatura y para esto se tiene como prerequisite el cálculo diferencial y como corequisito el cálculo integral. Se propuso un problema que consistía en calcular el trabajo neto efectuado por un gas ideal, el cual fue resuelto por los estudiantes, esto involucró el uso del cálculo diferencial e integral y de acuerdo a las resoluciones del problema se establecieron los conceptos en acción y teoremas en acción equivocados y estos se presentan principalmente en la obtención de datos en función de los datos dados en el problema y se concentran más en el dominio del cálculo diferencial e integral, así como la aplicación directa de las ecuaciones sin entender el fenómeno físico que este involucra.

Palabras clave: Física, Campos conceptuales de Vergnaud, Trabajo efectuado por un gas ideal.

Abstract

This work focuses on Vergnaud's conceptual fields and the objective was to determine the concepts and theorems in action with students when they apply differential and integral calculus in solving problems of the work done by an ideal gas. For the study is counted with the participation of thirty students enrolled in a basic physics course with calculus on the topic of work, heat and temperature and this has as a prerequisite the differential calculus and integral calculus as a corequisite. A problem that was proposed was to calculate the net work done by an ideal gas, which was decided by the students, this involved the use of differential and integral calculus and in accordance with the resolutions of the problem is set into action the concepts and theorems wrong action and these are mainly presented in the data collection based on the data given in the problem and concentrate more in the domain of differential and integral calculus, as well as the direct application of the equations without understanding the physical phenomenon that involved.

Keywords: Physics, Vergnaud's conceptual fields, work done by an ideal gas.

PACS: 01.40.gb, 01.40.J, 05.70.Ce

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Ante los problemas que se han suscitado en la actualidad, con respecto a la comprensión del concepto de trabajo efectuado por un gas ideal, se presenta este trabajo. El conocimiento de conceptos clave, así como el dominio de las matemáticas y de la física resulta indispensable para el aprendizaje. Los estudiantes de las diferentes carreras de ingeniería, de una universidad ecuatoriana que están registrados en un curso de física básica con cálculo, en la unidad de trabajo efectuado por un gas ideal (dominio de la física), tienen dificultades al momento de resolver problemas que requieren de la aplicación del cálculo

diferencial e integral así como la expresión matemática de una característica física (dominio de las matemáticas).

Se generan varios conceptos en acción y teoremas en acción que resultan no ser correctos y esto afecta de diversas maneras al estudiante pues impide la construcción del conocimiento científico "correcto", y obstaculiza la habilidad de resolución de problemas que acorde a la teoría del aprendizaje de Gagne es la habilidad intelectual de más alto nivel [1].

El profesor debe de tener siempre presente, que los conceptos de acción y teoremas de acción incorrectos afectan en la resolución de problemas y es parte de la tarea del profesor poder determinarlos y deben tener los

esquemas para promover el cambio conceptual así como lo indica Gilar R. en su tesis doctoral titulada *Teoría del aprendizaje* [2].

[“Dentro de la teoría del aprendizaje se tienen varias habilidades intelectuales, pero en particular la solución de problemas es la habilidad intelectual de más alto nivel”].

Siendo así, la resolución de problemas es la parte más difícil de lograr y resulta indispensable usar la teoría de Vergnaud para determinar concepciones alternativas que tienen los estudiantes en este caso para la resolución de problemas para la determinación del trabajo efectuado por un gas ideal, aplicando el cálculo diferencial e integral.

II. TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES DE VERGNAUD

Vergnaud toma como premisa que el conocimiento está organizado en campos conceptuales cuyo dominio, por parte del sujeto, ocurre a lo largo de un extenso período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje. Campo conceptual es, para él, un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición. El dominio de un campo conceptual no ocurre en algunos meses, ni tampoco en algunos años. Al contrario, nuevos problemas y nuevas propiedades deben ser estudiadas a lo largo de varios años si quisiéramos que los alumnos progresivamente los dominen. De nada sirve rodear las dificultades conceptuales; ellas son superadas en la medida en que son detectadas y enfrentadas, pero esto no ocurre de una sola vez [3].

La teoría de los campos conceptuales supone que el amago del desarrollo cognitivo es la conceptualización y es la piedra angular de la cognición. Los conceptos clave de la teoría de los campos conceptuales son, además del propio concepto de campo conceptual, los conceptos de esquema (la gran herencia piagetiana de Vergnaud), situación, invariante operatorio (teorema-en-acción o concepto-en-acción), y su propia concepción de concepto [4].

Resumiendo, la teoría de los campos conceptuales es una teoría cognitiva neo piagetiana que pretende ofrecer un referencial más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente aquellas implicadas en las ciencias y en las técnicas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio. Aunque Vergnaud esté especialmente interesado en los campos conceptuales de las estructuras aditivas y de las estructuras multiplicativas, la teoría de los campos conceptuales no es específica de esos campos, ni de la Matemática. En Física, por ejemplo, hay varios campos conceptuales – como el de la Mecánica, el de la Electricidad y el de la Termología - que no pueden ser enseñados, de inmediato, ni como sistemas de conceptos ni como conceptos aislados. Es necesaria una perspectiva

desarrollista del aprendizaje de esos campos. Esto mismo es válido, según Vergnaud en *Biología: La comprensión de la reproducción en vegetales no tiene mucho que ver con la comprensión de la reproducción en animales o con la comprensión de procesos celulares. La Historia, la Geografía, la Educación Física, por ejemplo, tienen igualmente una serie de campos conceptuales para los cuales los alumnos deben desarrollar esquemas y concepciones específicas. En todos esos casos, el modelo piagetiano de la asimilación/acomodación funciona si no se intenta reducir la adaptación de esquemas y de conceptos a estructuras lógicas* [5].

Cada estudiante ante una misma situación tiene un funcionamiento cognitivo diferente y por lo tanto se pueden presentar dos escenarios. El primer escenario es que el estudiante ante una determinada situación tenga un amplio repertorio de esquemas que le permita resolver adecuadamente el problema propuesto. El segundo escenario es que el estudiante ante una determinada situación no tenga un amplio repertorio de esquemas que no le permita resolver el problema propuesto adecuadamente.

Se puede concluir que la teoría de Vergnaud permite conocer los conceptos y teoremas en acción al momento que un estudiante realiza un problema.

II. MÉTODO

A. Sujetos

Participaron en este estudio treinta estudiantes registrados en un curso de física básica con cálculo, en el tópico de trabajo, calor y temperatura, y que siguen las carreras de ingeniería. Los estudiantes fueron veintidós hombres y ocho mujeres cuyas edades estaban comprendidas entre los 18 y 19 años.

B. Tareas y materiales

La tarea instruccional seleccionada para este estudio fue la unidad de Trabajo realizado por un gas ideal. Este contenido fue previamente enseñado a los estudiantes y el tiempo dedicado a la instrucción fue de dos horas. Los prerrequisitos para este curso son las asignaturas de cálculo diferencial e integral. Se elaboró una prueba y el tiempo dedicado para el desarrollo de la misma fue de 60 minutos para todos los estudiantes.

C. Procedimiento

Los estudiantes participantes de este estudio realizaron una prueba escrita que constaba por un problema que consistía en la determinación del trabajo efectuado por un gas ideal el cual era sometido a un ciclo constituido por dos procesos isotérmicos y dos procesos isobáricos. Se les solicitó a los estudiantes que resolvieran el problema y que utilizaran las herramientas matemáticas y conceptos físicos que conocen. La prueba fue revisada para determinar conceptos en acción

y teoremas en acción inadecuados una vez realizado esto, en adición se entrevistó a ciertos estudiantes que rindieron la prueba para que expliquen con mayor detalle el porqué de los conceptos en acción y teoremas en acción que utilizaron.

La resolución del problema propuesto se muestra en el Anexo 1.

III. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis del proceso de resolución de problemas reveló las siguientes situaciones que se detallan a continuación con respecto a los conceptos de acción:

A. Interpretación del gráfico

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, tres estudiantes no tenían ninguna idea sobre la representación gráfica dada en el problema, pues no intentaron resolver el problema. El resto de los estudiantes comprendían los procesos que conformaban el ciclo dado, e intentaron resolver el problema.

Teoremas en acción: Interpretar el gráfico y reconocer los parámetros físicos que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema [6].

Para este caso se presentó un gráfico presión versus volumen donde se mostraba un ciclo al cual era sometido un gas ideal. Los ciclos que se pueden dar en un problema relacionado con trabajo, calor y temperatura van a depender de los procesos implícitos en el ciclo, esto facilitará aplicar criterios como la ley de los gases ideales y características de los diferentes procesos.

Si el estudiante no interpreta el gráfico dado, él no podrá resolver el problema.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indico lo siguiente: “.....no entendía el gráfico y por eso no hice nada, ya que no sabía como atacar el problema”.

B. La ley ideal de los gases: ecuación de estado

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, veintisiete expresaron de manera correcta la ecuación de estado, sin embargo veinte de ellos no lograron deducir la ecuación que relaciona a la presión (P), al volumen (V), y a la temperatura (T) como una constante.

Teoremas en acción: Identificar que la ley ideal de los gases se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación de estado, pero conocer esto no basta para la resolución del problema, pues lo mas complicado es poder deducir la ecuación $\frac{PV}{T} = constante$ [7].

La ecuación de estado describe normalmente la relación entre la presión (P), el volumen (V), la temperatura (T), la

constante de los gases ideales (R) y la cantidad (en moles) de un gas ideal (n): $PV = nRT$. Despejando se obtiene $\frac{PV}{T} = nR$. De esta manera como n y R son constantes entonces $\frac{PV}{T} = constante$, es decir se puede usar esta ecuación para relacionar con diferentes puntos dentro del ciclo al cual es sometido el gas ideal. Los estudiantes al final de este análisis debieron haber llegado a lo siguiente: $\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D}$.

Los estudiantes tienen dificultades para realizar un análisis matemático como el descrito anteriormente.

Adicionalmente muchos de los estudiantes no podían encontrar el valor de las temperaturas en función de los datos dados, ya que no realizaban el despeje adecuado $PV = nRT \rightarrow T = \frac{PV}{nR}$

Los estudiantes deben localizar, definir y expresar correctamente relaciones acorde a los datos dados y las ecuaciones conocidas en este caso se refiere a la ecuación de estado.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....fue fácil escribir las ecuaciones pero no podía dejar una variable en función de otra.....”.

C. Características de los procesos: isotérmico e isobárico

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, cinco de ellos desconocían que era un proceso isotérmico e isobárico y otros seis estudiantes si reconocían los procesos sin embargo no podían expresar matemáticamente sus características. El resto de los estudiantes no tenían problema relacionado con las características de los procesos.

Teoremas en acción: Distinguir y reconocer las características de los procesos y poder expresarlos matemáticamente resulta una gran ventaja para la resolución del problema, pues con esto se podrá obtener datos desconocidos que son necesarios para llegar a la solución.

La característica principal de un proceso isotérmico es que la temperatura permanece constante y aplicando esto en la ecuación que relaciona a la presión (P), al volumen (V), y a la temperatura (T) como una constante, es posible obtener relaciones como $P_A V_A = P_B V_B$ o $P_C V_C = P_D V_D$ que son puntos donde experimentan procesos isotérmicos y así obtener algún dato requerido.

Para el caso en el que se tenía un proceso isobárico la principal característica es que la presión permanece constante de esta manera es posible obtener valores de presión en cada punto acorde al gráfico dado.

Los estudiantes deben aprender a diferenciar los procesos y reconocer sus principales características para poder expresarlas matemáticamente.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....aunque

conocía las características de los procesos no me acordaba cual era de cual y no pude expresarlas en forma matemática”.

D. Diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, diecinueve de ellos expresaron el trabajo efectuado por un gas ideal como la integral de la presión por un diferencial de volumen lo cual es correcto, sin embargo de esos diecinueve solo quince estudiantes resaltaron la principal característica de un proceso isobárico y lograron deducir que la presión como es constante puede salir de la integral.

Teoremas en acción: En un proceso isobárico la presión permanece constante de esta manera al expresar la ecuación de trabajo la presión puede salir de la integral. Emplear el concepto requerido da resultados positivos.

Se define el trabajo efectuado por un gas ideal $W = \int_0^f P dV$ pero lo más relevante de esto, es reconocer que para el caso en que se tenga un proceso isobárico la presión permanece constante siendo así $W = P \int_0^f dV = P(V_f - V_0)$. Este teorema en acción es una consecuencia de los anteriores.

Hay que resaltar que el conocimiento de la ecuación del trabajo efectuado por un gas ideal no garantiza una resolución correcta pues emplear el concepto físico requerido permite un desarrollo adecuado para resolver el problema.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....no sé porque no saqué fuera de la integral la presión.... No era tan difícil calcular el trabajo para el proceso isobárico”.

E. Diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen

De los treinta estudiantes que rindieron la prueba, veinticinco de ellos al analizar el gráfico donde se tenían procesos isotérmicos, no expresaron la presión en función del volumen para poder determinar el trabajo efectuado por un gas ideal.

Teoremas en acción: En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral [8]. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.

Dos estudiantes intentaron resolver la integral, sin relacionar la presión y el volumen (consideraron como si fuera un proceso isobárico cuando en realidad era un proceso isotérmico) y escribieron: $W = \int_0^f P dV = P \int_0^f dV = P(V_f - V_0)$ Este teorema en acción es una consecuencia de los anteriores.

Considerar que un proceso isotérmico se caracteriza por mantener su temperatura constante y que la presión varía en

función del volumen, aplicando la ecuación de estado se obtiene la expresión $PV = nRT \rightarrow P = \frac{nRT}{V}$, reemplazando en la ecuación del trabajo efectuado por un gas ideal: $W = \int_0^f P dV = \int_0^f \frac{nRT}{V} dV = nRT[\ln(V_f) - \ln(V_0)]$.

Los estudiantes no logran relacionar matemáticamente los parámetros físicos unos con otros y al final llegan a pensar que un parámetro físico no tiene nada que ver con otro lo cual con lleva a concepciones alternas que son equivocadas.

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “.....cuando determine el trabajo en el caso del proceso isobárico fue fácil pero no me di cuenta que para el proceso isotérmico no cumplía las mismas condiciones y no resolví bien”.

F. Tabular los datos

Ningún estudiante tabuló los datos del problema y los datos obtenidos.

Teoremas en acción: Tabular datos permite una organización adecuada para poder realizar una estrategia y así obtener una resolución adecuada [9].

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes indicó lo siguiente: “.....tabular datos no lo vi necesario pues me toma tiempo y no me garantizaba éxito en la resolución del problema”.

Pero después de mostrarle la solución expresó: “Si hubiera tabulado los datos quizás no hubiera cometido los errores que cometí”.

G. Límites de integración

Solo tres estudiantes llegaron a este punto clave para la resolución del problema.

El estudiante uno tomó los límites para calcular el trabajo entre el tramo AB considerando $V_{inicial} = V_1$ & $V_{final} = V_3$ y no pudo encontrar una expresión en función de los datos dados, pues V_3 no es dato del problema, y esta misma dificultad tuvo para determinar el trabajo entre los tramos BC & CD.

El estudiante dos para calcular el trabajo entre el tramo DA eligió como límite de integración $V_{inicial} = V_D$ & $V_{final} = V_A$ y esto es un teorema en acción erróneo porque acorde al gráfico dado en el tramo DA el punto inicial es el punto D y en el punto final es el punto A.

Teoremas en acción: Los límites de integración comprenden todo el sistema del ciclo dado para la obtención trabajo neto efectuado por un gas ideal. Definir correctamente los límites hará que el valor encontrado sea correcto o erróneo [10].

En la entrevista posterior a la resolución del problema, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: “..... estaba cerca de terminar el problema pero no me percate que si cogía los límites al revés iba obtener resultados muy diferentes..... quizás el factor tiempo me jugó una mala pasada”.

H. Solución

La gran mayoría de los estudiantes comenzaron escribiendo la ecuación de estado de los gases ideales y junto a ella escribieron la ecuación para el cálculo del trabajo efectuado por un gas ideal, sin embargo no sabían que más hacer.

Solo hubo un estudiante de los treinta fue capaz de resolver el problema y se le hizo una entrevista y expresó: "... conozco bastante sobre cálculo integral y diferencial después de todo soy ayudante de esas materias comprender el fenómeno físico fue difícil pero la explicación brindada antes de realizar la prueba me ayudó bastante y pude resolver el problema con estrategias que fui desarrollando para llegar a la solución.... No sabía nada de conceptos y teoremas en acción pero desde mi punto de vista resulta de gran ayuda".

Esto demuestra que tener presentes los conceptos y teoremas en acción da excelentes resultados y permite al estudiante una comprensión conceptual adecuada.

Los conceptos en acción que necesitan atención y por ende sus teoremas en acción relacionados son: Interpretación del gráfico, la ley ideal de los gases: ecuación de estado, características de los procesos: isotérmico e isobárico, diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante, diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen, tabular datos, límites de integración. En el Anexo 2 en la Tabla III se presentan los conceptos en acción y teoremas en acción incorrectos.

VII. CONCLUSIÓN

De todo lo expuesto anteriormente, el principal problema de los estudiantes es que no tienen presentes conceptos y teoremas en acción al momento de resolver un problema. Los estudiantes tienen problemas en el ámbito de interpretación de gráficos de presión vs volumen, acorde a los resultados este error no ocurre en un gran rango, pero cuando se trata de identificar, diferenciar características y expresarlas matemáticamente aplican conceptos y teoremas en acción equivocados y esto ocurre una gran cantidad de estudiantes. De acuerdo a lo observado se puede inferir que los estudiantes no conocen cómo aplicar los conocimientos de cálculo diferencial e integral en el contexto de la resolución de problemas de física. Esto se debe a que los esquemas de resolución de problemas del cálculo diferencial e integral no se transfieren adecuadamente a la resolución de problemas de física con este componente [11]. Además, carecen de esquemas que les permitan aplicar el conocimiento estratégico a la resolución del problema.

Los estudiantes por un lado no han logrado comprender las definiciones, principios, reglas y teoremas de las matemáticas y por otro lado no han logrado comprender los conceptos, leyes y principios de la física. Ellos simplemente aplican el conocimiento procedimental que involucra la

memorización de los pasos para determinar la solución del problema.

Los estudiantes se centran bastante en el tema del cálculo diferencial e integral y solo desean poder aplicarlo, pero no se dan cuenta que lo más importante no es aplicarlo correctamente, sino más bien es poder entender el fenómeno físico que éste conlleva cuando se resuelven problemas de física, ellos deben aprender a cruzar esa barrera que llevan, ese pensamiento equivocado, uno de los estudiantes expresó lo siguiente: "...no es difícil aprenderse una ecuación y poder aplicar el cálculo integral, lo más difícil es aprender a usarla y saber qué significa...por ejemplo si sé que la integral representa el área bajo la curva, y se tiene un gráfico presión vs volumen, entonces el trabajo que se presenta como la integral de la presión por un diferencial de volumen viene representado como el área, así el problema se reduce un simple cálculo de áreas".

Este estudio permitió analizar las percepciones alternativas que tienen los estudiantes cuando resuelven un problema de relacionado con el trabajo neto efectuado por un gas ideal, y al mismo tiempo permitió realizar una investigación donde los maestros deben hacer más refuerzo al momento de resolver y explicar un problema de este tipo.

El siguiente paso es diseñar un material educativo computarizado en donde se implemente los resultados de esta investigación y aplicando el diseño basado en investigación se mejore el material educativo computarizado y el aprendizaje del proceso de resolución de problemas de trabajo neto efectuado por un gas ideal con cálculo diferencial e integral.

REFERENCIAS

- [1] Gagne, R., *The Conditions of Learning and Theory of Instruction*, 4 Sub edition (Wadsworth Pub Co, New York, 1985).
- [2] Gilar, R. C., *Teoría del aprendizaje*, Tesis Doctoral Universidad de Alicante (2003).
- [3] Llancaqueo, A., Caballero, M. C. & Moreira, M. A., *El aprendizaje del concepto de campo en Física: Una investigación exploratoria a la luz de la teoría de Vergnaud*, Revista Brasileira de Ensino de Física **25**, 399-417 (2003).
- [4] Vergnaud, G., *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems*. En T, Carpenter, J. Moser, & T. Romberg (Eds.) *Addition and subtraction. A cognitive perspective*, (Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 1982), pp. 39-59.
- [5] Vergnaud, G. (1990). *La teoría de los campos conceptuales*. Recherches en Didactique des Mathématiques **10**, n° 2, 3, 133-170 (1990).
- [6] Greca, I., Moreira, M. A. & Otero, R., *El uso de imágenes en textos de física para la enseñanza secundaria y universitaria*, *Investigações em Ensino de Ciências* **7**, 127-154 (2002).

Manuel Sebastian Alvarez Alvarado

[7] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. and Freedman, R., *Física universitaria*, 11a Ed. (Pearson Education, California, 2006).

[8] Arslan, S., *Traditional instruction of differential equations and conceptual learning*, Teaching Mathematics and its Applications **29**, 94-107 (2010).

[9] Andrés, M. M. & Pesa, A. M., *Conceptos en acción y teoremas en acción en un trabajo de laboratorio de física*, (2003). Descargado Diciembre, 8 (2011) <http://www.fae.ufmg.br/abrapec/revistas/V4N1/v4n1a5.pdf>

[10] Herrera, F. J., *Dificultades de la aplicación de cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas de campo eléctrico*, Descargado Diciembre, 1 (2011), <http://www.sidweb.espol.edu.ec/private/mycourses/website/?websiteId=5873>.

[11] Moreira, M. A., *A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e pesquisas nesta área*, Investigações em Ensino de Ciências **7**, 7-29 (2002).

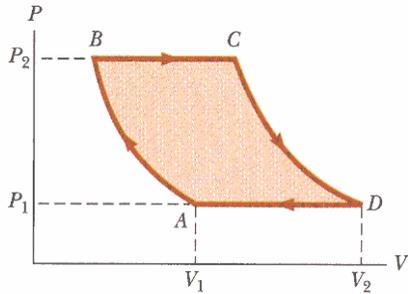
ANEXO 1

Problema propuesto con su respectiva solución

Un gas ideal se somete a un proceso termodinámico que consta de dos etapas isobáricas y de dos isotérmicas, como se muestra en la figura siguiente:

Demuestre que el trabajo neto hecho durante las cuatro etapas es:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1) \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right).$$



GRÁFICA 1. Ciclo al cual es sometido un gas ideal.

Solución:

Un gas ideal se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación:

$$PV = nRT. \quad (1)$$

Donde:

P : es la presión a la que es sometida el gas cuya unidad según el S.I. es Atmósfera [atm].

V : es el volumen del gas cuya unidad según el S.I. es el Litro [L].

n : es el número de moles que posee el gas cuya unidad según el S.I. es mol [mol].

R : es la llamada constante de los gases ideales, cuyo valor es 0.082 (atm.L.)/(K*mol).

T : es la temperatura a la que se encuentra el gas cuya unidad según el S.I. es Kelvin [K].

Acorde a esta ecuación se requiere conocer los datos de temperatura, volumen y presión en cada punto del gráfico sin embargo solo se conoce ciertos datos:

TABLA I. Datos conocidos.

	A	B	C	D
Presión (P)	$P_A=P_1$	$P_B=P_2$	$P_C=P_2$	$P_D=P_1$
Volumen (V)	$V_A=V_1$	$V_B=?$	$V_C=?$	$V_D=V_2$
Temperatura (T)	$T_A=?$	$T_B=?$	$T_C=?$	$T_D=?$

En adición se conoce que el ciclo al es sometido este gas ideal se conforma por dos procesos isotérmicos y dos isobáricos de esta manera se procederá a analizar los puntos en base a las características de los procesos y así obtener los datos que faltan en la tabla superior.

De la Ec. (1) se obtiene:

$$\frac{PV}{T} = nR. \quad (2)$$

Como n y R son constantes entonces la Ec. (2) es constante, es decir se puede usar esta ecuación para relacionar con diferentes puntos dentro de un ciclo.

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B} = \frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D}. \quad (3)$$

El tramo AB se caracteriza por ser un proceso isotérmico y la característica de este proceso es que la presión y el volumen varían, sin embargo la temperatura permanece constante ($T_A=T_B=T_1$) y se procede aplicar la relación descrita en la Ec. (3) para obtener el volumen en el punto B .

$$\frac{P_A V_A}{T_A} = \frac{P_B V_B}{T_B},$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_B}{T_1},$$

$$V_B = \frac{P_1 V_1}{P_2}. \quad (4)$$

El tramo CD se caracteriza por ser un proceso isotérmico y la característica de este proceso es que la presión y el volumen varían, sin embargo la temperatura permanece constante ($T_C=T_D=T_2$) y se procede aplicar la relación descrita en la Ec. (3) para obtener el volumen en el punto C .

$$\frac{P_C V_C}{T_C} = \frac{P_D V_D}{T_D},$$

$$\frac{P_2 V_C}{T_2} = \frac{P_1 V_2}{T_2},$$

$$V_C = \frac{P_1 V_2}{P_2}. \quad (5)$$

Se procede aplicar la Ec. (1) en el punto A para determinar la temperatura.

$$P_A V_A = nRT_A$$

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR}.$$

Como ya se mencionó, el tramo AB es un proceso isotérmico donde la principal característica es que la temperatura permanece constante entonces:

$$T_A = T_B = T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR}. \quad (6)$$

Se procede aplicar la Ec. (1) en el punto D para determinar la temperatura.

$$P_D V_D = nRT_D,$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR}.$$

Como ya se menciona el tramo CD es un proceso isotérmico donde la principal característica es que la temperatura permanece constante entonces:

$$T_C = T_D = T_2 = \frac{P_1 V_2}{nR}. \quad (7)$$

Ahora se procede a llenar la Tabla I con los datos obtenidos.

TABLA II. Datos obtenidos.

	A	B	C	D
Presión (P)	$P_A=P_1$	$P_B=P_2$	$P_C=P_2$	$P_D=P_1$
Volumen (V)	$V_A=V_1$	$V_B = \frac{P_1 V_1}{P_2}$	$V_C = \frac{P_1 V_2}{P_2}$	$V_D=V_2$
Temperatura (T)	$T_A = \frac{P_1 V_1}{nR}$	$T_B = \frac{P_1 V_1}{nR}$	$T_C = \frac{P_1 V_2}{nR}$	$T_D = \frac{P_1 V_2}{nR}$

Se conoce que el trabajo efectuado por un gas es:

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f P dV. \quad (8)$$

La Ec. (8) indica que el trabajo efectuado gráficamente representa el área bajo la curva desde un punto a otro.

Análisis donde se tiene procesos isobáricos

La característica principal de este proceso es que la presión permanece constante siendo así:

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f P dV = P \int_o^f dV. \quad (9)$$

Análisis donde se tiene procesos isotérmicos

La característica principal este proceso es que la temperatura permanece constante y presión varía en función del volumen y es necesario encontrar una ecuación que relacione la presión con el volumen así pues de la Ec. (1) se obtiene:

$$P = \frac{nRT}{V}. \quad (10)$$

Se reemplaza la Ec. (10) en la Ec. (8).

$$W_{o \rightarrow f} = \int_o^f \frac{nRT}{V} dV. \quad (11)$$

Análisis en el tramo AB : Proceso isotérmico

Utilizando la Ec. (11):

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \frac{nRT_1}{V} dV = nRT_1 [\ln(V_B) - \ln(V_A)],$$

$$W_{A \rightarrow B} = nRT_1 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right). \quad (12)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (12):

$$W_{A \rightarrow B} = nR \left(\frac{P_1 V_1}{nR} \right) \ln \left(\frac{\frac{P_1 V_1}{P_2}}{V_1} \right).$$

Simplificando:

$$W_{A \rightarrow B} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right). \quad (13)$$

Análisis en el tramo BC : Proceso isobárico

Utilizando la Ec. (9):

$$W_{B \rightarrow C} = P \int_B^C dV,$$

$$W_{B \rightarrow C} = P(V_C - V_B). \quad (14)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (14):

$$W_{B \rightarrow C} = P_2 \left(\frac{P_1}{P_2} V_2 - \frac{P_1}{P_2} V_1 \right).$$

Simplificando y factorizando:

$$W_{B \rightarrow C} = P_1 (V_2 - V_1). \quad (15)$$

Análisis en el tramo CD : Proceso isotérmico

Utilizando la Ec. (11):

$$W_{C \rightarrow D} = \int_C^D \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 [\ln(V_D) - \ln(V_C)],$$

$$W_{C \rightarrow D} = nRT_2 \ln \left(\frac{V_D}{V_C} \right). \quad (16)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (16):

$$W_{C \rightarrow D} = nR \left(\frac{P_1 V_2}{nR} \right) \ln \left(\frac{V_2}{\frac{P_1 V_2}{P_2}} \right).$$

Simplificando:

$$W_{C \rightarrow D} = P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right). \quad (17)$$

Análisis en el tramo DA: Proceso isobárico

Utilizando la Ec. (9):

$$W_{D \rightarrow A} = P \int_D^A dV,$$

$$W_{D \rightarrow A} = P(V_A - V_D). \quad (18)$$

Reemplazando los valores de la Tabla II en la Ec. (18):

$$W_{D \rightarrow A} = P_1(V_1 - V_2). \quad (19)$$

Cálculo del trabajo neto efectuado por un gas ideal

El trabajo neto se define como la suma de los trabajos efectuados en cada tramo:

$$W_{neto} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow C} + W_{C \rightarrow D} + W_{D \rightarrow A},$$

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) + P_1(V_2 - V_1) + P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + P_1(V_1 - V_2).$$

Aplicando propiedad de los logaritmos:

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln(P_1) - P_1 V_1 \ln(P_2) + P_1 V_2 - P_1 V_1 + P_1 V_2 \ln(P_2) - P_1 V_2 \ln(P_1) + P_1 V_1 - P_1 V_2,$$

$$W_{neto} = P_1 V_1 \ln(P_1) - P_1 V_1 \ln(P_2) + P_1 V_2 \ln(P_2) - P_1 V_2 \ln(P_1).$$

Aplicando propiedad de los logaritmos y ordenando:

$$W_{neto} = -P_1 V_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) + P_1 V_2 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

Factorizando y reordenando:

$$W_{neto} = P_1(V_2 - V_1) \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right). \quad (20)$$

De esta manera se obtiene el trabajo neto efectuado por un gas ideal que es sometido al ciclo mostrado en la gráfica 1.

ANEXO 2

Lista de teoremas y conceptos en acción que deberían haber sido aplicados correctamente por los estudiantes al momento de resolver el problema adjunto, al Anexo 1.

TABLA III. Resultados obtenidos.

Conceptos en acción equivocados	Teoremas en acción equivocados
1. Interpretación del gráfico	Interpretar el gráfico y reconocer los parámetros físicos que se involucran, permite establecer un esquema eficaz para establecer una estrategia y así poder iniciar la resolución del problema.
2. La ley ideal de los gases: ecuación de estado	Identificar que la ley ideal de los gases se refiere a una situación idealizada, principalmente para que se cumpla la ecuación de estado, pero conocer esto no basta para la resolución del problema, pues lo más complicado es poder deducir la ecuación $\frac{PV}{T} = constante$
3. Características de los procesos: isotérmico e isobárico	En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.
4. Diferencial de volumen para el proceso isobárico: presión constante	En un proceso isobárico la presión permanece constante de esta manera al expresar la ecuación de trabajo la presión puede salir de la integral. Emplear el concepto requerido da resultados positivos.
5. Diferencial de volumen para el proceso isotérmico: presión en función del volumen	En un proceso isotérmico la temperatura permanece constante y la presión varía en función del volumen de esta manera al expresar la ecuación de trabajo, la presión no puede salir de la integral. Expresar en bases a conceptos físicos es clave en este punto.
6. Tabular los datos	Esto permite una organización adecuada para poder realizar una estrategia y así obtener una resolución adecuada.
7. Límites de integración	Los límites de integración comprenden todo el sistema del ciclo dado para la obtención trabajo neto efectuado por un gas ideal. Definir correctamente los límites hará que el valor encontrado sea correcto o erróneo.

Introducción al formalismo gauge con ligaduras en los casos clásico y cuántico



Rafael Andrés Alemañ Berenguer^{1,2}

¹Instituto Universitario de Física Aplicada a la Ciencia y a la Tecnología. Universidad de Alicante (España).

²Agrupación Astronómica de Alicante (División de Cosmofísica), c/ Arzobispo Loaces, 12 - 4ªA, esc. dcha. Alicante – 03003 (España).

E-mail: agrupacion.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 12 Enero de 2012; aceptado el 17 de Marzo de 2012)

Resumen

Las ecuaciones dinámicas obtenidas variacionalmente de un principio de acción estacionaria, junto con la imposición de ciertas ligaduras a las simetrías gauge asociadas, han demostrado ser uno de los métodos más poderosos en el tratamiento analítico de extensas áreas de la Física tanto clásica como cuántica. En este artículo se traza las líneas fundamentales de su desarrollo conceptual, así como algunos de los problemas que todavía sufre este procedimiento en el ámbito cuántico (consecuencias empíricas de las supersimetrías) y en el clásico (una pertinente interpretación gauge de la variable tiempo).

Palabras clave: Formalismo gauge con ligaduras, mecánica clásica hamiltoniana, teoría cuántica no relativista.

Abstract

The dynamic equations variationally derived from a principle of stationary action, together with the imposition of certain constraints to the associated gauge symmetries have proven to be one of the most powerful methods in the analytic treatment of extensive areas of Physics, both quantum and classical. This paper traces the main lines of its conceptual development as well as some of the problems that this procedure still suffers in the quantum (empirical implications of supersymmetry) and classical domains (a proper gauge interpretation of the time variable).

Keywords: Gauge formalism with constrictions, Hamiltonian classic mechanics, non-relativistic quantum theory.

PACS: 02.30.Xx, 03.65.Db, 04.20.Fy, 45.20.Jj.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La teoría conocida como cálculo de variaciones –hoy día parte de la teoría de funcionales– fue fundada por el suizo Leonard Euler (1707-1783) y el italo-francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Estos matemáticos descubrieron que una función f proporciona un valor extremo a un funcional F siempre y cuando satisfaga un cierto conjunto de ecuaciones diferenciales (ecuaciones de Euler-Lagrange).

La importancia de este resultado sobrepasaba el mero ámbito de la matemática pura, pues pronto se comprobó que muchas de las ecuaciones diferenciales de la mecánica y de la física en general son precisamente del tipo Euler-Lagrange. Como consecuencia de ello, tales ecuaciones físicas podían tomarse como condiciones de Euler-Lagrange para ciertos funcionales convenientemente elegidos.

De esta forma multitud de leyes físicas se reformularon sustituyéndolas por enunciados en los que se exigía un valor extremo, normalmente un mínimo, a determinadas cantidades. Así, en lugar de afirmar que un sistema físico

obedecía una ley dada por una cierta ecuación diferencial de las variables del sistema, se comenzaba construyendo un funcional con dichas variables. A continuación se requería que este funcional alcanzase un valor mínimo, por ejemplo, y se deducía por ello –mediante el cálculo variacional– que las ecuaciones así obtenidas coincidían con las del planteamiento tradicional.

La ventaja de esta formulación de las situaciones físicas es que multitud de leyes naturales, sin aparente relación entre sí, son susceptibles de expresarse por medio de un principio variacional. Y con ello, además de una viva impresión unificadora, ganamos la posibilidad de simplificar buen número de problemas utilizando las herramientas de la teoría de funcionales para resolverlos. El funcional escogido, por supuesto, es distinto según el caso físico considerado, aunque en todos ellos se cumple que sus unidades han de ser iguales al producto de la energía por el tiempo, llamado también acción.

Tanta es la trascendencia de este procedimiento que en el siguiente apartado se esbozarán los inicios conceptuales de la mecánica analítica de la mano de los fundadores de sus dos principales desarrollos, la mecánica lagrangiana y la

hamiltoniana. Los apartados tercero y cuarto se dedicarán a exponer la importancia de las relaciones que ligan las variables canónicas entre sí, relaciones más conocidas como ligaduras del sistema. El quinto y sexto epígrafes entran de lleno en la decisiva importancia de las transformaciones gauge como ingrediente esencial en nuestras descripciones matemáticas de la naturaleza, que junto con las ligaduras permiten formular ecuaciones dinámicas ampliadas.

La extensión de la mecánica analítica con simetrías gauge mediante la inserción de variables anticonmutativas, como se ve en el séptimo apartado, permite incorporar en este tratamiento los sistemas fermiónicos, caracterizados por su espín semientero y la falta de conmutatividad en algunas de sus propiedades. La conexión entre los valores enteros y semienteros del espín sugiere la posible ampliación de las simetrías gauge hasta un nuevo género de transformaciones denominadas “supersimetrías”, lo que será examinado en el epígrafe octavo. Los problemas que genera la interpretación del carácter dinámico de la variable tiempo a través del formalismo gauge se abordarán en el octavo apartado, y las conclusiones, en el décimo, cerrarán este trabajo.

II. DE LAGRANGE A HAMILTON

Los primeros pasos de la mecánica analítica se deben a la obra de Lagrange contenida en su monumental tratado *Mecánica Analítica*, publicado por primera vez en 1788. En él se afirmaba que los sistemas físicos evolucionan con el tiempo de modo tal que la magnitud de su acción – representada por una función denominada lagrangiana, cuya integral es el funcional deseado– sea mínima [1, 2].

El británico William Rowan Hamilton (1805-1865) aquilató el principio de mínima acción introducido por Lagrange al advertir que en bastantes casos la realidad física no involucraba un mínimo de la acción en absoluto. Amplió las ideas de Lagrange y desembocó en el principio de acción estacionaria que, como se ha señalado antes, exige un valor estacionario para la acción, o dicho de otro modo, que la variación de primer orden de la integral de la acción sea nula.

Hamilton desarrolló incluso un nuevo juego de ecuaciones, equivalentes a las de Lagrange si bien matemáticamente más sencillas, en las que insertando un funcional de las variables del sistema –el hamiltoniano– se llegaba a las mismas conclusiones que con el método lagrangiano [3]. Las variables escogidas en las ecuaciones de Hamilton no son las coordenadas de posición, q , y sus derivadas temporales, dq/dt , sino las coordenadas q y los impulsos deducidos de ellas p_q (pues en mecánica el impulso de una partícula consiste simplemente en el producto de su masa por su velocidad).

Es obvio que en un sentido estricto las q y las p_q no son variables independientes, pero la esencia del procedimiento hamiltoniano estriba en operar como si lo fueran. Así obtenemos doble número de ecuaciones que con Lagrange,

a cambio de que todas ellas contengan solo derivadas de primer orden, menos complicadas de resolver.

En ambos planteamientos es necesario representar la evolución del sistema estudiado mediante el auxilio de un espacio abstracto de muchas dimensiones: $3n$ dimensiones en el espacio de configuraciones de Lagrange, y $6n$ en el espacio fásico de Hamilton (además del tiempo) para n partículas.

A menudo se presenta la función hamiltoniana como si no fuese más que otro apelativo para la energía total de un sistema, asegurando sin matizaciones que $H = T + U$, lo cual es estrictamente falso. El hamiltoniano coincidirá con la energía total únicamente cuando las ecuaciones que definan las coordenadas generalizadas no dependan del tiempo y los potenciales no dependan de las velocidades generalizadas. Cuestión aparte es la conservación de su valor, pues H será constante siempre que no dependa explícitamente del tiempo (se le llama entonces “integral primera de Jacobi”, coincida o no con la energía). Así, en ocasiones podríamos toparnos con una H que se conservase no siendo la energía total, o que no se conservase siéndolo [4].

En la dinámica lagrangiana se define igualmente una “función energía” $h(q, \dot{q}, t)$ del todo análoga al hamiltoniano y, pese a su nombre, sometida a las mismas restricciones que aquél en cuanto a su identificación con la energía. La distinción se mantiene para subrayar que h depende de las coordenadas generalizadas, de sus derivadas temporales y, en su caso, del tiempo.

Aplicando el hamiltoniano H , que en su modalidad más simple es función de coordenadas q e impulsos p , a un sistema con k grados de libertad, se desemboca en un conjunto de $2k$ ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, en lugar de las k ecuaciones lagrangianas de segundo orden usuales. Las ecuaciones hamiltonianas asumen una forma particularmente simple en el caso de un sistema conservativo, de modo que,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad - \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (1)$$

No es de extrañar, pues, que una vez descubierta la forma de la función hamiltoniana adecuada en un caso particular, interese preservar dicha forma frente a cambios de variables en el espacio fásico. De ello se encargan las transformaciones “canónicas”, es decir, aquellas transformaciones de variables en el espacio de las fases que conservan la forma hamiltoniana de las ecuaciones del movimiento.

A este respecto, son dos las maneras de contemplar el modo en que actúa una transformación canónica. El punto de vista *pasivo* se adopta cuando consideramos que lo que ocurre no es sino el paso de un cierto espacio fásico F (Fig. 1) en el que el punto figurativo del sistema estudiado posee unas coordenadas (q, p) , a otro espacio F' donde el punto figurativo permanece inamovible pero en el cual sus coordenadas (q', p') ya son otras. Frente a esta perspectiva, la opción contraria consiste en juzgar que no es el espacio

físico el que cambia; más bien se diría que es el punto figurativo el que desplaza modificando sus coordenadas durante su movimiento en el seno de un espacio inalterado. Ese es el punto de vista *activo* acerca de las transformaciones canónicas.

La importancia operativa de las transformaciones canónicas en la dinámica analítica, se ve incrementada al investigar qué otras expresiones algebraicas conservan su forma bajo aquéllas. Dos de las más importantes son los *corchetes de Lagrange* y los *corchetes de Poisson*. En el primer caso, y suponiendo que las variables dinámicas q y p son funciones de ciertos parámetros u y v , los corchetes de Lagrange vendrían dados por:

$$\{u, v\} = \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial q}{\partial v}. \quad (2)$$

Por el contrario, el corchete de Poisson de dos funciones A y B respecto de las variables q y p es

$$[A, B] = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}. \quad (3)$$

La relación entre ambos corchetes consiste en que si tenemos r_i variables canónicas independientes se cumple que $\{r_i, r_n\}[r_j, r_n] = \delta_{ij}$.

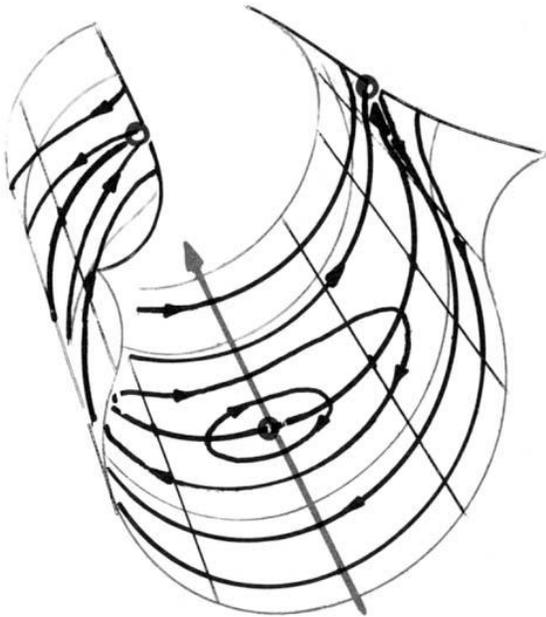


FIGURA 1. Representación figurativa de la trayectoria de un sistema dinámico en un espacio físico.

La relevancia de semejantes expresiones reside en el hecho de que las ecuaciones de Hamilton pueden escribirse mediante corchetes de Poisson de las variables canónicas y

del hamiltoniano [5]. Además, todas las funciones no explícitamente dependientes del tiempo, cuyo corchete de Poisson con H es por ello nulo, son constantes del movimiento; y a la inversa, si la función es constante del movimiento, su corchete de Poisson con H es nulo, $[f, H] = 0$. Sustituyendo las funciones clásicas A y B por operadores cuánticos, se tiene la transición formal a los conmutadores cuánticos

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (4)$$

indispensables en los teoremas de incompatibilidad de Heisenberg.

Si en un sistema hamiltoniano con k grados de libertad logramos k ecuaciones del movimiento independientes, una para cada grado de libertad, el movimiento de él resultante es *integrable*, o *completamente separable*. Las constantes α_i que permiten realizar tal operación matemática de separación son llamadas *integrales aislantes*, o *invariantes globales* del movimiento [6].

Resulta muy desafortunado constatar que no existe una regla general para determinar la integrabilidad de un sistema con k grados de libertad, habiéndose de recurrir con frecuencia a métodos de perturbaciones. Estas técnicas consisten en hallar una solución analítica mediante aproximaciones sucesivas en aquellos sistemas que no admiten una solución cerrada, pero que a la vez difieren muy poco de otros para los que ello sí es posible.

El estado del sistema cuya solución deseamos obtener se considera producto de una pequeña perturbación existente sobre otro cuyo comportamiento nos es conocido. La magnitud de esta perturbación se suele introducir a través de un pequeño parámetro ϵ , respecto del cual la solución del problema perturbado se construye como serie de potencias. Cuando la aplicabilidad de los métodos perturbativos decae, las complicaciones se acrecientan extraordinariamente y las posibilidades de solución se alejan en igual medida.

III. LIGADURAS PRIMARIAS

Las variables canónicas (q, p) determinan el estado del sistema físico por ellas descrito, pero no sucede lo mismo a la inversa debido a nuestra libertad para elegir diversos juegos de coordenadas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento cuando se introducen en las ecuaciones de Hamilton. Esta posibilidad de escoger distintas variables canónicas físicamente equivalentes, recibe el nombre de “libertad gauge”.

Así pues, a causa de las transformaciones de gauge, el valor de las variables (q, p) en un instante t especificado, no determina unívocamente el valor de tales variables en un instante posterior. El procedimiento analítico que conduce a las ecuaciones del movimiento —en el caso clásico y también en el método de “suma sobre historias” de Feynman— parte de un principio lagrangiano de acción estacionaria.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (5)$$

Por motivos tanto teóricos como prácticos, resultaría deseable que las ecuaciones de Lagrange fuesen de tipo newtoniano, es decir, que la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición generalizada, \ddot{q} , pudiese despejarse en función de \dot{q} y de q . Para ello habría de cumplirse la condición por la cual la matriz

$$M_{nm} \equiv \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_m} \right), \quad (6)$$

debe ser invertible, esto es, su determinante no debe anularse.

Precisamente el caso más interesante para sistemas dinámicos formalizados mediante el método gauge es aquél en el que el determinante de M_{nm} sí se anula. Es entonces cuando se dice que tenemos un lagrangiano degenerado, razón por la cual no podemos despejar \dot{q} en función de q y p al pasar al formalismo hamiltoniano. Se llega así –sin apelar a las ecuaciones del movimiento– al concepto de *ligaduras primarias* [7], a partir de la definición de momento generalizado como variable conjugada de la coordenada de posición generalizada:

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (7)$$

Las ligaduras primarias, por tanto, son relaciones independientes entre sí establecidas entre las variables generalizadas q y p , $\phi_m(q, p) = 0$. A continuación definimos el hamiltoniano canónico

$$H \equiv q_n p_n - L \equiv h(q, \dot{q}), \quad (8)$$

tal que las variaciones dH deben preservar las condiciones de ligadura, $\phi_m(q, p) = 0$. Precisamente el hamiltoniano canónico H sólo esta unívocamente determinado sobre la subvariedad definida por la condición $\phi_m(q, p) = 0$, ya que fuera de ella H puede extenderse de infinitas maneras distintas.

La teoría debe ser invariante bajo transformaciones de la forma $H \rightarrow H + c_m(q, p)\phi_m(q, p)$, donde las c_m son funciones arbitrarias pero regulares de q y de p .

IV. LIGADURAS SECUNDARIAS

Para facilitar los cálculos en las situaciones con interés físico, introduciremos multiplicadores de Lagrange, $u_m(t)$, asociados a las ligaduras $\phi_m(q, p) = 0$. Y al recurrir al principio de acción estacionaria, las cantidades $u_m(t)$ se varían independientemente de q y p , de modo que se tiene:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_n \dot{q}_n - H - u_m \phi_m) dt = 0. \quad (9)$$

Por este procedimiento llegamos a las ecuaciones del movimiento para una variable dinámica cualquiera, f , que serán:

$$\left. \begin{aligned} \dot{f} &= \{f, H\} + u_m \{f, \phi_m\} \\ \phi_m &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (10)$$

En consecuencia los multiplicadores u_m han de ser compatibles con la condición de que la derivada temporal de las ligaduras primarias se anule, $d\phi_m/dt = 0$. Esto nos enfrenta a tres posibilidades:

- 1) $d\phi_m/dt = 0$ es una identidad, que es el caso trivial y nada de relevancia física aporta al problema de determinar las ecuaciones del movimiento más generales para una variable dinámica cualquiera.
- 2) $d\phi_m/dt = 0$ conduce a nuevas restricciones sobre las u_m ; o bien,
- 3) $d\phi_m/dt = 0$ establece más ligaduras entre las q_n y p_n .

Esas nuevas ligaduras introducidas en la opción (3) se denominan *ligaduras secundarias* [8], si bien la distinción entre ambos tipos de ligaduras resulta irrelevante en la forma final de la teoría.

Por otra parte, la evolución temporal de las ligaduras primarias, $d\phi_m/dt = 0$, puede escribirse:

$$\{ \phi_j, H \}_{\phi=0} + u_m \{ \phi_j, \phi_m \} = 0. \quad (11)$$

Esta igualdad es en sí misma una ecuación diferencial inhomogénea en los coeficientes u_m , que actúan –según se indicó ya– como multiplicadores de Lagrange [9, 10]. La solución general de esta ecuación viene dada por la expresión:

$$u_m = U_m(p, q) + v_a(t) V_{am}(q, p), \quad (12)$$

donde $U_m(p, q)$ es cualquier solución particular de la Ec. (11), los coeficientes $v_a(t)$ representan funciones totalmente arbitrarias del tiempo, y $V_{am}(q, p)$ es la base del espacio lineal de soluciones asociado al sistema homogéneo $u_m \{ \phi_j, \phi_m \}_{\phi=0} = 0$.

Ahora podemos llamar “hamiltoniano total” al funcional:

$$H_T = H' + v_a \phi_a = H + U_m \phi_m + V_{am} \phi_m v_a. \quad (13)$$

Y tras introducir H_T en las ecuaciones hamiltonianas obtenemos la ecuación del movimiento de una variable dinámica arbitraria en la forma compacta

$$\dot{f} = [f, H_T]_{\phi=0}. \quad (14)$$

V. GENERADORES DE GAUGE

Debido a la presencia de las funciones arbitrarias $v_a(t)$, aunque una colección de variables canónicas p y q definan unívocamente el estado del sistema en un instante dado, se

tiene que a un mismo estado físico puede corresponder más de un conjunto de variables (q, p) que conducen a predecir los mismos resultados empíricos para cualquier magnitud físicamente medible. Esa es la ambigüedad creada por la libre elección del gauge de nuestras variables dinámicas [11].

Tomemos entonces los parámetros $\varepsilon_a(t)$ definidos como $\varepsilon_a(t) \equiv \delta \mathcal{F} \cdot v_a(t)$. A partir de ellos podemos obtener transformaciones gauge para nuestras variables canónicas, cuyos generadores son las ligaduras ϕ_a :

$$\left. \begin{aligned} \delta q_n &= \varepsilon_a(t) [q_n, \phi_a] \\ \delta p_n &= \varepsilon_a(t) [p_n, \phi_a] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

A continuación diremos que una igualdad es “débil” (representada con el símbolo \approx) cuando se satisface sobre la subvariedad $\phi = 0$. Por ejemplo, $\phi_j(p, q) \approx 0$ indica que ϕ_j es numéricamente igual a cero, aunque su corchete de Poisson no tiene que anularse necesariamente también.

Ciñéndonos ahora al caso de las variables dinámicas, se considerará que una función f de tales variables es “de primera clase” si su corchete de Poisson con ϕ_j se anula débilmente, $[f, \phi_j] \approx 0$. Las funciones que no pertenezcan a la primera clase se denominarán “de segunda clase” [12].

Como se ha mencionado previamente, un sistema físico no altera sus propiedades objetivas si alguna de sus funciones dinámicas f cambia bajo una transformación gauge, $\delta f = \varepsilon_a [f, \phi_a]$. Cabe preguntarse, pues, si esas son todas las transformaciones gauge posibles que no modifican en realidad el estado del sistema. Y la respuesta es negativa, ya que podría existir una ligadura primaria de segunda clase cuyo corchete de Poisson con H_T fuese a su vez una función de primera clase en el sentido antes especificado.

En consecuencia, se admite como postulado que todas las ligaduras de primera clase generan transformaciones gauge [13]. La justificación –no demostración– de este postulado se apoya en los siguientes argumentos:

- 1) La distinción entre ligaduras primarias y secundarias depende del lagrangiano. Por el contrario, la distinción entre ligaduras de primera y de segunda clase, se basa en el corchete de Poisson del hamiltoniano.
- 2) Las transformaciones generadas por una ligadura conserva todas las ligaduras de primera y de segunda clase. Consecuentemente, transforman estados permitidos por las ecuaciones del movimiento del sistema en otros estados también permitidos por dichas ecuaciones.
- 3) El corchete de Poisson de dos ligaduras de primera clase es otra ligadura de primera clase. Además, el corchete de dos generadores gauge es también un generador gauge.
- 4) Si todas las ligaduras de primera clase son generadores gauge y las variables canónicas son conmutativas, ocurre que un sistema con un número par de coordenadas canónicas independientes admite un espacio de fases

reducido en el que cada par de variables corresponde a un grado de libertad físico.

- 5) Si ϕ_a y $[\phi_a, H]$ son generadores gauge, suponemos implícitamente que el tiempo t es un observable físico. Sin embargo, en los sistemas covariantes generales las ligaduras de primera clase asociadas a invariancias de reparametrización del tiempo *no son generadores gauge* (generadores de transformaciones que no cambian el estado físico) *sino generadores de la evolución dinámica del sistema*.

Representando las ligaduras primarias como γ_a y las secundarias como χ_a , se define el hamiltoniano ampliado H_E a través de la igualdad

$$H_E = H' + v_a \gamma_a. \quad (16)$$

Para las variables dinámicas que sean invariantes de gauge (es decir, variables cuyo corchete de Poisson sea débilmente igual a cero), los hamiltonianos H' , H_T y H_E proporcionan las mismas ecuaciones de evolución.

Un modo alternativo de definir las ligaduras de segunda clase consiste en identificarlas como aquellas para las cuales ninguna combinación lineal suya constituye de por sí una ligadura de primera clase [14]. Así, las ligaduras χ_α son de hecho de segunda clase si la matriz $C_{\alpha\beta} \equiv [\chi_\alpha, \chi_\beta]$ resulta invertible. Las ligaduras χ_α son siempre de número par excepto en el caso de los sistemas fermiónicos, pues el determinante de una matriz antisimétrica impar es cero.

Podemos reescribir la participación de las ligaduras de segunda clase en las ecuaciones de evolución de cualquier par de funciones F y G mediante los corchetes de Dirac de dos variables dinámicas:

$$[F, G]^* = [F, \chi_\alpha] C^{\alpha\beta} [G, \chi_\beta], \quad (17)$$

donde las matrices $C^{\alpha\beta}$ cumplen la condición $C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\beta$.

Por medio de estos corchetes, también es posible escribir las ecuaciones de evolución ampliadas como $[F, H_E]^*$, y las transformaciones gauge adoptan ahora la forma $\delta F \approx \varepsilon_a [F, \gamma_a]$.

VI. CONDICIONES GAUGE

La presencia de ligaduras de primera clase implica que el mismo estado físico es susceptible de describirse con las variables (q, p) y con $(q + \delta q, p + \delta p)$, teniendo en cuenta que $\delta q = \varepsilon_a [q, \gamma_a]$ y $\delta p = \varepsilon_a [p, \gamma_a]$, con participación de las ligaduras primarias, γ_a .

Evitamos esta ambigüedad imponiendo restricciones externas para no contar varias veces el mismo estado físico como si fuesen distintos estados del sistema. Tales restricciones son las que denominamos “condiciones gauge”. A cada sistema físico, salvo transformaciones gauge, corresponde un único conjunto de variables canónicas compatibles con las ligaduras [15]. Para que así ocurra han de satisfacerse dos requisitos:

- Accesibilidad: Debe existir una transformación gauge que permita al paso desde las variables (q, p) a las variables (q', p') , las cuales obedecen las condiciones gauge prescritas y corresponden al mismo sistema físico.
- Unicidad: Las condiciones gauge $C_b(q, p) \approx 0$, con $b = 1, 2, 3, \dots, B$, han de fijar el gauge de modo único.

Después de fijar el gauge, todas las ligaduras pasan a ser de segunda clase, y utilizando los corchetes de Dirac podemos desembocar en una teoría sin ligaduras efectivas. Es decir, en esta nueva formulación de la teoría todas las ligaduras se reducen a igualdades que expresan algunas variables canónicas en función de las restantes.

La invariancia gauge propicia que en la formulación de la teoría cuántica por medio de integrales funcionales el papel clave corresponda a la “historia” del sistema, esto es, su trayectoria en el espacio de fases. Cada historia específica en función de t todos los argumentos de la acción $(q(t), p(t))$ junto con los multiplicadores de Lagrange. Con ello todas las historias entran en pie de igualdad en la integral funcional, hasta el punto de extender la noción de historias equivalentes bajo transformaciones gauge a cualquier historia posible, sin limitarse a las que hacen estacionaria la acción (y por eso mismo son soluciones de las ecuaciones del movimiento).

Dada la posibilidad de transformaciones gauge, resulta de suma importancia la discriminación entre los grados de libertad correspondientes a la posibilidad de realizar distintas elecciones equivalentes del gauge, y aquellos otros que verdaderamente poseen significado físico.

Con ese propósito se emplea una relación que establece la igualdad entre el número de grados de libertad físicos y la mitad del número de variables canónicas independientes [16], $N_f = \frac{1}{2}N_{ci}$. A su vez, este número de variables canónicas independientes resulta ser igual al número total de variables canónicas menos el número de ligaduras de segunda clase menos el doble del número de ligaduras de primera clase, $N_{ci} = N_c - N_\chi - 2N_\gamma$.

En presencia de variables canónicas anticonmutativas, el número de ligaduras de segunda clase no es necesariamente par. Si se da el caso de que dicho número es impar, la dimensión del espacio de fases físico también es impar y no lleva asociado un espacio reducido de configuración.

Veamos lo que sucede en el caso bien conocido del campo electromagnético [17]. Para esta clase de campos la acción tetradimensional viene dada por

$$S = \int \{(-1/4\mu_0)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\nu A_\nu\} d^4V. \quad (23)$$

donde $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, con A_μ el tetravector potencial electromagnético, d^4V es el elemento de volumen tetradimensional, y J^ν el tetravector de flujo de corriente.

Las variables canónicas son aquí $q_n(t) \equiv A_\mu(x, t)$, con x representando las coordenadas puramente espaciales, y $p_n(t) \equiv p^\mu(x, t) = \partial L / \partial (dA_\mu/dt)$. Por consiguiente, tendremos $L \equiv \int (-1/4)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} d^3x$, y $dA_\mu/dt = \partial_0 A_\mu$.

Con la ligadura $p^0 = 0$ y la condición gauge $A_0 = 0$, la primera componente del tetravector potencial electromagnético pasa a convertirse en un multiplicador de Lagrange, deja de ser una variable dinámica y se rompe la simetría entre A_0 y las componentes espaciales A_i .

VII. VARIABLES ANTICOMUTATIVAS EN EL CASO FERMIÓNICO

Viene siendo habitual que una de las vías más utilizadas para alcanzar una descripción pseudo-clásica de los sistemas con espín semientero, sea la cuantización canónica de sistemas con espín entero [18]. Y tal procedimiento suele consistir en la sustitución de los corchetes de Dirac por conmutadores cuánticos acompañados del factor multiplicativo $(i\hbar)^{-1}$.

Esto es consistente con la necesidad de imponer reglas de anticonmutación en el caso fermiónico, de modo que el corchete de Dirac se reemplace por un anticonmutador. En términos físicos, esto se debe a que no hay un límite clásico para los fermiones, en tanto sí lo hay para el comportamiento bosónico. No obstante, para estudiar simplícidamente los sistemas fermiónicos recurrimos a los números- c anticonmutativos [19]. Gracias a estas cantidades resulta posible distinguir entre el límite clásico para los operadores bosónicos descritos mediante números- c conmutativos q_i (variables con paridad par), y el límite clásico de los operadores fermiónicos descritos por números- c anticonmutativos θ_α (variables con paridad impar).

Retornemos a las ecuaciones del movimiento obtenidas mediante el requisito de acción estacionaria, donde ahora incluimos las variables anticonmutativas, tomando el lagrangiano par con el fin de conservar la paridad (par o impar) de las variables:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \theta, \dot{\theta}) dt. \quad (18)$$

Los momentos conjugados serán $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ y $\pi_\alpha = \partial L / \partial \dot{\theta}_\alpha$. Las ecuaciones de Hamilton se deducen imponiendo la condición:

$$S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}_i p_i + \dot{\theta}_\alpha \pi_\alpha - H_E) dt = 0. \quad (19)$$

Este procedimiento reviste gran importancia, pues en teoría de campos las ecuaciones del movimiento de primer orden en la variable t suelen estar asociadas a un espín semientero. A su vez, las variables impares admiten una representación matricial en términos de las matrices de Pauli, σ_α , de la forma:

$$\theta_\alpha = i(\hbar/2)^{1/2} \sigma_\alpha. \quad (20)$$

En consecuencia, el lagrangiano de una partícula libre de masa m con espín será:

$$L = \frac{1}{2}(i\dot{\theta}_\alpha\theta_\alpha + m\dot{q}_i\dot{q}_i), \quad (21)$$

donde la parte de espín no contribuye al hamiltoniano.

$$H = \frac{1}{2}(m\dot{q}_i\dot{q}_i). \quad (22)$$

VIII. SIMETRÍA Y SUPERSIMETRÍA

Ateniéndonos al método de las integrales funcionales, hemos de garantizar que una transformación gauge no cambia la historia física del sistema, para lo cual la acción debe ser invariante. Esta invariancia de la acción puede satisfacerse de dos maneras [20]:

- Se cumple $p_n(\partial\gamma_i/\partial p_n) - \gamma_i = 0$ aunque $\varepsilon_a(t_1) \neq 0 \neq \varepsilon_a(t_2)$
- Se tiene $p_n(\partial\gamma_i/\partial p_n) - \gamma_i \neq 0$ y se cumple $\varepsilon_a(t_1) \neq 0 \neq \varepsilon_a(t_2)$

El caso (a) conduce a la clase de las llamadas “simetrías internas”, ejemplos de las cuales se dan en los campos de Yang-Mills, mientras la opción (b) lleva a las “simetrías no internas”, más apropiadas para describir interacciones como la gravedad.

Sin embargo, deben hacerse mencionarse una serie de puntualizaciones que cobran gran importancia cuando se avanza hacia la cuantización de una teoría sometida a simetrías gauge de algún tipo, especialmente si adoptamos el planteamiento de “suma sobre historias” de Feynman. En primer lugar, con una simetría interna sólo cabe hablar de equivalencia de historias de un sistema, no de sus estados concretos. Únicamente cuando la simetría es interna se puede establecer una equivalencia entre distintos estados individuales de un sistema considerándolos pertenecientes a una misma situación física [21]. Además de ello, también ha de tenerse en cuenta que sólo con respecto a simetrías internas de primera clase es posible decir que las ligaduras de primera clase generan transformaciones que no cambian el estado físico del sistema [22].

Una ampliación del concepto de simetría conduce a la noción de “supersimetría”, cuyo interés principal reside en la posibilidad de asociar bosones y fermiones (o dicho con mayor precisión, partículas de espín J con partículas de espín $J \pm 1/2$) reuniéndolos en un único marco formal que ponga de manifiesta las relaciones entre ambas clases de partículas [23].

Consideremos como ejemplo el caso de un doblete formado por un escalar y un espinor, Φ y Ψ , que represente un par fermión-bosón. En concreto, si tomamos un bosón escalar B y un fermión F con espín $1/2$, buscaremos una transformación $1 - i\chi K$ (con χ un número real infinitesimal) que conserve la lagrangiana libre total, $L = L_B + L_F$, con $L_B = (\partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi)$ y $L_F = \Psi^\dagger\sigma_\mu i\partial_\mu\Psi$. Naturalmente, sólo estamos interesados en aquellos términos que vinculan los bosones con los fermiones, $\delta\Phi = -i\chi K\Psi$ y $\delta\Psi = -i\chi K\Phi$.

Dado que $\delta\Phi$ debe ser un espinor y $\delta\Psi$ un escalar, la magnitud K debe ser ella misma también de naturaleza espinorial. Introduzcamos, por tanto, un espinor infinitesimal ξ y escribamos $\delta\Psi = \xi\Phi$, o alternativamente,

$\delta\Phi = \xi^T C\Psi$. Para satisfacer los requisitos de la supersimetría, este espinor debe cumplir una serie de condiciones:

- Como los bosones tienen espín entero y los fermiones semientero, el espín de ξ deber ser semientero. La elección más simple es un valor $1/2$, lo que nos deja con un espinor de cuatro componentes.
- Las propiedades estadísticas correctas (los campos bosónicos conmutan y los fermiónicos anticonmutan) las magnitudes ξ y $\bar{\xi} = \xi^\dagger\gamma^4$, han de conmutar con los bosones y anticonmutar con los fermiones. Es decir, se garantiza el cumplimiento de $\{\xi^a, \xi^b\} = \{\xi^a, \bar{\xi}^a\} = 0$, donde las letras latinas simbolizan índices espinoriales, y se sigue la notación habitual $\{A, B\} = AB + BA$.
- También debe cumplirse que $\xi = \xi^c$, teniendo en cuenta que $\xi^c = C\bar{\xi}^T$. La matriz de conjugación de carga satisface $C^T = -C$ y $C^{-1}\gamma^\mu C = -(\gamma^\mu)^T$. En todos los casos el superíndice T expresa “transposición”.

No obstante, una simple mirada a los términos cinéticos revela que el bosón posee dos derivadas, mientras el fermión se las arregla con una sola. De ello se colige que la dimensión del campo bosónico será igual a la del campo fermiónico multiplicada por una longitud elevada a $1/2$. En consecuencia, χ ha de tener las dimensiones de una longitud, elevada a $1/2$ en el caso de $\delta\Phi$, pero elevada a $-1/2$ en la expresión de $\delta\Psi$. Una elección tal no acaba de funcionar bien, lo que nos obliga a insertar una derivada en la expresión de $\delta\Psi$, cosa que a su vez nos acarrea la necesidad de un nuevo 4-vector con el que podamos construir una cantidad escalar [24, 25].

Ya que podemos incluir en la densidad lagrangiana tantas derivadas totales como deseemos sin cambiar su contenido físico, resulta posible integrar por partes las variaciones correspondientes al bosón δL_B y al fermión δL_F . De ahí se obtiene que $\delta L_F = -\delta L_B$. Con ello encontramos una transformación que mezcla las partes fermiónica y bosónica de la lagrangiana sin alterar el término cinético total, es decir, dejando invariante la lagrangiana libre [26].

Restringiéndonos a las partículas sin masa, un hallazgo como este implica el establecimiento de una nueva simetría, la supersimetría (abreviadamente, *SUSY*). Gracias al teorema de Noether, sabemos que por cada nueva simetría ha de haber también una corriente conservada $J^\mu_\alpha = (\gamma^\nu\gamma^\mu\psi)_\alpha\partial_\nu\Phi^*$, donde α es un índice espinorial de valores 1 o 2.

Así pues tendremos,

$$\partial_\mu J^\mu_\alpha = \gamma^\nu[\gamma^\mu\partial_\mu\psi]_\alpha\partial_\nu\Phi^* + [\gamma^\nu\gamma^\mu\psi]_\alpha\partial_\mu\partial_\nu\Phi^*, \quad (24)$$

expresión fácilmente analizable. El término del primer paréntesis se anula a causa de la ecuación de Dirac; el segundo término entre corchetes contiene tan solo factores en los que $\mu = \nu$, pues de otro modo los factores $\mu\nu$ se cancelarían con los $\nu\mu$ debido a la relación $[\gamma^\nu, \gamma^\mu]_+ = 2g^{\mu\nu}$. Así el segundo término de la suma es proporcional a $\partial^\mu\partial_\mu\Phi^*$, que se anula a resultas de la ecuación de Klein-Gordon [27].

Consideremos acto seguido, el efecto de dos transformaciones supersimétricas consecutivas, con un parámetro anticonmutativo ε , que relacionen un campo escalar φ y un espinor de Majorana, ψ . Inicialmente tendríamos $\delta\varphi = i\bar{\varepsilon}\psi$ y $\delta\psi = \gamma^\mu\partial_\mu\varphi\varepsilon$. Apliquemos ahora dos transformaciones, de parámetros ε_1 y ε_2 , sobre el campo bosónico, de manera que $\delta_k\varphi = i\bar{\varepsilon}_k\psi$. Así,

$$\delta_1(\delta_2\varphi) = i\bar{\varepsilon}_1\gamma^\mu\varepsilon_2\partial_\mu\varphi, \quad (25)$$

y el conmutador de ambas transformaciones sería:

$$[\delta_1, \delta_2]\varphi = -2i\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1\partial_\mu\varphi. \quad (26)$$

Es decir, tras dos transformaciones supersimétricas consecutivas, obtenemos el mismo campo φ , desplazado en el espacio-tiempo una cantidad constante $d^\mu = (2\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1)$. Por ello se dice que existe un vínculo entre la supersimetría el movimiento en el espacio-tiempo [28, 29]. Si las transformaciones supersimétricas son locales, $\varepsilon = \varepsilon(x)$, entonces las traslaciones también depende del lugar en el cual se den, $d^\mu = d^\mu(x)$.

Cuando el álgebra supersimétrica se expresa a partir de los generadores de supercarga, Q , la densidad de energía del vacío siempre es positiva o cero [30]. Y sólo se anula si el vacío es un autoestado de Q con autovalor igual a cero, $Q|0\rangle = Q^\dagger|0\rangle = 0$. Entonces –y sólo entonces– cuando SUSY es una simetría exacta sin ruptura, todos los diagramas de Feynman que contribuyen a la energía del vacío se cancelan entre sí [31].

Ello implica también que en toda teoría supersimétrica cualquier estado de energía no nula tiene un compañero cuyo momento angular difiere del suyo en $\pm 1/2$, y sobre el cual rige una estadística opuesta (Fig. 2). Pero eso no es todo: como el conmutador de dos transformaciones supersimétricas involucra el tetravector impulso-energía relativista, el grupo de Poincaré debe ser ampliado hasta incluir la supersimetría misma [32].

La transformación infinitesimal de un campo bosónico puede reescribirse ahora como $\delta\varphi = (\bar{\varepsilon}^a Q_a)\varphi$, donde Q_a es un espinor de Majorana. Tras una serie de manipulaciones convenientes se llega a obtener:

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = -2i(\gamma^\mu)_{ab}\partial_\mu = -2(\gamma^\mu P_\mu)_{ab}, \quad (27)$$

en el que P_μ es el generador de las traslaciones. Así se dice libremente que los generadores supersimétricos Q actúan como las raíces cuadradas de las traslaciones. Las variedades que contienen unas coordenadas conmutativas y otras conmutativas, permitiendo así transformaciones supersimétricas, se denominan “superespacios”, y “supercampos” los campos en ellas definidos [33].

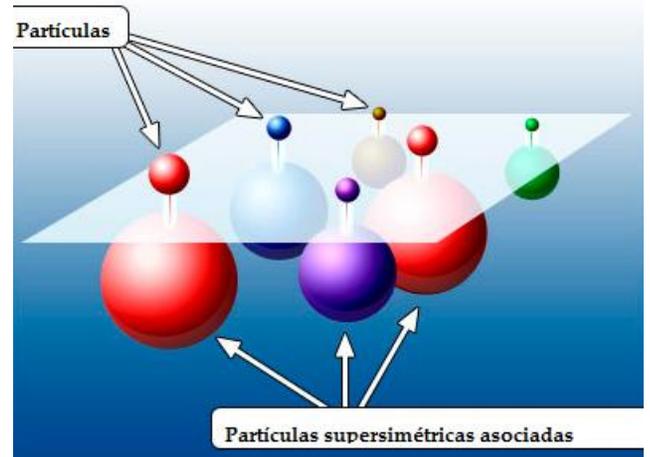


FIGURA 2. La supersimetría asocia nuevas partículas a las ya usuales.

En definitiva, la importancia de la supersimetría no estriba sólo en la relación que estipula entre fermiones y bosones, sino especialmente en la posible vinculación que sugiere entre propiedades de invariancia espacio-temporal (“simetrías externas”) y propiedades de invariancia gauge (“simetrías internas”). Se admite generalmente que si la gravedad ha de unificarse en algún momento con las tres fuerzas restantes, será mediante una simetría ampliada que contenga la invariancia por difeomorfismos y la invariancia gauge.

Con respecto a ello, los físicos norteamericanos Sidney Richard Coleman y Jeffrey Mandula demostraron un teorema según el cual cualquier grupo que contuviese ambos tipos de simetría (difeomorfismos y gauge) se escindiría en dos subgrupos, cada uno portando una sola de esas simetrías [34]. La formulación original de teorema de Coleman-Mandula hablaba de que las teorías aceptables de partículas elementales no poseerían simetrías algebraicas capaces de relacionar partículas con espín diferente (entero o semientero).

En síntesis, los grupos de simetría comúnmente utilizados no servían para unificar fermiones y bosones. El obstáculo aparentemente insalvable erigido por el teorema de Coleman-Mandula, fue franqueado gracias a la invención de las supersimetrías, cuyo nacimiento como generalización de los grupos algebraicos clásicos la ponía a salvo del fatídico teorema.

IX. SISTEMAS COVARIANTES GENERALES

Las teorías físicas que gozan de covariancia general –por ejemplo, la gravitación de Einstein (Relatividad General)– son invariantes bajo reparametrizaciones temporales. Esto significa que las ecuaciones de evolución de un sistema covariante general conservan su forma y características al efectuar la sustitución $t \rightarrow f(t)$, reemplazando la variable t por una función cualquiera suficientemente continua del tiempo.

Esto significa en la práctica que el tiempo t no es un observable en pie de igualdad con el resto de magnitudes que reciben ese mismo nombre al realizar la transición desde las teorías clásicas a sus versiones cuánticas. Este parece ser un problema inherente al intento de insertar la noción de covariancia general en el marco del formalismo gauge, un formalismo que tan buenos servicios ha rendido en la elaboración de las teorías cuánticas de campos.

No obstante, en los sistemas covariantes generales las ligaduras de primera clase asociadas a reparametrizaciones del tiempo, no deberían generar transformaciones gauge sino la propia evolución dinámica del sistema.

Ocurre aquí que el hamiltoniano ampliado H_E coincide con el hamiltoniano total H_T , y ambos pueden expresarse como el producto de una ligadura \mathcal{H} por $u(\tau)$, una función arbitraria de τ , a su vez un parámetro también arbitrario que describe la evolución dinámica del sistema. De hecho, toda la física de los sistemas covariantes generales parece contenerse en la ligadura \mathcal{H} , que es el generador de la evolución dinámica (Fig. 3).

El hecho de que los sistemas covariantes generales no se comporten como el formalismo canónico esperaría de ellos, crea el denominado “problema del tiempo” [35]. Este escollo se nos presenta con independencia de las dificultades de cuantizar la gravitación einsteiniana. Para situarlo en su contexto, recordaremos los fundamentos del método empleado.

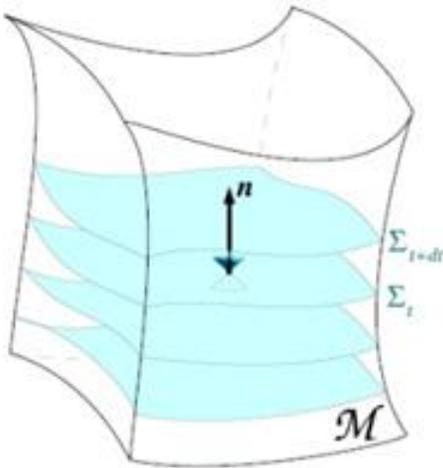


FIGURA 3. Foliación del espacio-tiempo \mathcal{M} mediante una familia de hipersuperficies $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Tomemos una teoría cuyas ecuaciones dinámicas puedan deducirse de un principio variacional $\delta \int L dt = 0$, con $L(q, \dot{q})$ y $\dot{q} \equiv dq/dt$. Las q denotan las variables de posición generalizadas y \dot{q} sus velocidades generalizadas. Las familiares ecuaciones de Euler-Lagrange de este modo deducibles, pueden escribirse también en términos de la matriz hessiana

$$H_{mn} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^n}, \quad (28)$$

cuyo posible carácter singular implica, en su caso, que no podamos despejar \ddot{q}^m en función de las posiciones y las velocidades. En tales circunstancias, los momentos canónicos proporcionados por las transformaciones de Legendre ($p_n \equiv \partial L / \partial \dot{q}^n$) no son todos independientes, pues han de satisfacer la ya discutidas ligaduras, $\phi_m(p, q) = 0$, provenientes de la propia definición de los momentos.

Dirac, quien inició el desarrollo de este formalismo [36], propuso que las transformaciones gauge se identificaran con las transformaciones generadas por las ligaduras de primera clase, mientras que los observables se identificarían con las funciones de las variables del espacio de fases (p, q) que conmutasen con estas ligaduras de primera clase [18].

Pasemos ahora el caso que nos ocupa, esto es, la Relatividad General entendida como una teoría gauge. Si decidimos deducir las ecuaciones gravitatorias de Einstein a partir de un principio variacional, la acción admitirá el grupo de los difeomorfismos como simetría variacional. Y al aplicar las transformaciones de Legendre para obtener la versión hamiltoniana de la teoría, llegamos a una formulación con ligaduras como las discutidas previamente. Por tanto, podemos definir una magnitud físicamente objetiva en Relatividad General como toda cantidad dinámica que sea invariante gauge en el sentido de Dirac (es decir, su corchete de Poisson con las ligaduras de primera clase, se anule).

Ahora bien, en Relatividad General el álgebra de Lie de las ligaduras no posee la propiedad de clausura, por lo cual no es un álgebra de Lie genuina. Y dado que la clausura es una propiedad distintiva de las teorías de Yang-Mills, se sigue de ello que la gravitación einsteiniana no pertenece a la familia de las teorías de Yang-Mills [37].

Pero la sorpresa más impactante llega a continuación, como señaló Peter Bergmann al estudiar la dinámica espacio-temporal de las ligaduras hamiltonianas en el marco de la Relatividad General [38]. Existen dos tipos de ligaduras en el formalismo hamiltoniano de la gravedad relativista: las ligaduras difeomórficas (o del momento canónico) y las ligaduras hamiltonianas. Las primeras –como su nombre indica– generan los difeomorfismos en la 3-superficie de datos iniciales, mientras las segundas gobiernan la transición desde cada una de estas 3-superficies a la siguiente. Si se prefiere decir de otro modo, las ligaduras hamiltonianas generan el movimiento y las ligaduras difeomórficas relacionan las descripciones equivalentes de la misma situación física.

Ya que ahora el movimiento viene dado por la ligadura hamiltoniana y –según Dirac– las ligaduras se identifican con transformaciones gauge, el movimiento mismo es meramente una pura transformación gauge [39]. En consecuencia, todas las magnitudes invariantes gauge de la teoría –las únicas a las que antes atribuíamos auténtico significado físico– son constantes del movimiento: ninguna

propiedad física relevante debería cambiar con el tiempo en absoluto. Y como la Relatividad General se ocupa de la única fuerza completamente universal, la gravedad, sus conclusiones deberían aplicarse al universo entero.

Así pues, nada habría de experimentar jamás cambio alguno en todo el cosmos. Este es el problema del tiempo, o “del formalismo congelado”, típico de la Relatividad General sin cuantización [40]. Obviamente, los intentos de cuantizar la teoría gravitatoria de Einstein no sólo no han solucionado esta paradoja, sino que se han visto enormemente obstaculizados por ella.

Es muy posible que tropecemos aquí con un impedimento esencial, relacionado con el hecho de que los formalismos lagrangiano y hamiltoniano nacieron en un ámbito en el cual la variable tiempo permanecía netamente separada del resto de variables (las coordenadas generalizadas y sus momentos conjugados). Esa es una de las razones por las que el tratamiento canónico de la Relatividad General se suele denominar $(3 + 1)$, en contraste con la versión covariante 4-dimensional más de acuerdo con el espíritu de la propia teoría. En el planteamiento $(3 + 1)$ las variables básicas son las 3-geometrías definidas sobre hipersuperficies espaciales para un valor concreto del tiempo coordinado. Estas variables satisfacen las ligaduras, de modo que el hamiltoniano mismo se anula idénticamente.

La arbitrariedad en la elección del gauge, aflora como un reflejo de la invariancia por difeomorfismos en la formulación covariante 4-dimensional de la teoría cuando ésta se traduce en su versión $(3 + 1)$. Así, la evolución temporal de estas 3-geometrías se expresa como una transformación gauge, que por ser gauge no comporta cambio alguno en los grados de libertad físicos de la teoría. La conclusión es la misma: todos los estados físicos resultan equivalentes e independientes de la variable tiempo. El universo entero existe en un eterno presente, sin evolución temporal, ni cambio, ni dinámica. No cabe duda que esta dificultad –aún sin resolver a plena satisfacción de todos los expertos –a se ha demostrado una de las más formidables barreras en la búsqueda de una formulación cuántica de la gravedad, y por ende también ha estorbado la consecución de una teoría unificada de las fuerzas fundamentales.

X. CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se han expuesto las líneas generales del desarrollo del formalismo gauge con ligaduras para la mecánica analítica en sus aplicaciones a los casos clásico y cuántico. Se ha constatado la continuidad existente entre las primeras formulaciones variacionales de la mecánica clásica y sus posteriores derivaciones hacia las diversas ramas de la física cuántica.

El hecho de que la mayoría de los sistemas físicos de interés –clásicos o cuánticos– obedeciesen un principio de acción estacionaria, estableció un puente metodológico en el modo de abordar las teorías cuánticas como versiones formalmente cuantizadas de sus contrapartidas clásicas. Por

añadida, las simetrías gauge permitieron conectar la existencia de las interacciones fundamentales presentes en la naturaleza con un requisito de invariancia formal impuesto sobre el lagrangiano de ciertos sistemas físicos. Los campos de fuerzas aparecían así como el precio a pagar por el universo debido a su deseo de respetar las simetrías gauge.

Como consecuencia de ello, este el método entraña una concepción muy concreta sobre la naturaleza del universo. Las propiedades estructurales más profundas del mundo físico no pueden depender del punto de vista del observador, o si se quiere, de la herramienta matemática empleada para representarlas. Esto no sólo implica la inexistencia de posiciones o direcciones privilegiadas en el espacio-tiempo; también nos impone una suerte de irrelevancia final del marco matemático utilizado.

Tomando el caso de los vectores de estado de la física cuántica, sabemos que pueden definirse como un conjunto de funciones de las magnitudes del sistema, $\psi = \{\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \dots\}$, que residen en un espacio de Hilbert. Las funciones $\psi_1(q), \psi_2(q), \psi_3(q), \dots$, se interpretan entonces como las proyecciones del vector ψ sobre un cierto sistema de ejes en su espacio de Hilbert. Resulta muy razonable suponer que el significado físico de la teoría que se sirva de los vectores ψ no debe depender de la elección del sistema de ejes coordinados en ese espacio abstracto. O dicho a la inversa: nuestras teorías físicas deben construirse de tal modo que su contenido sea independiente del marco matemático en el cual lo expresemos. A esta condición la denominamos “simetría gauge” o “invariancia gauge”.

No obstante, las transformaciones gauge se ven sometidas a ciertas restricciones dependientes de las características físicas del sistema físico estudiado. Tales restricciones, o ligaduras, juegan un papel crucial en la forma que finalmente adoptarán las ecuaciones dinámicas obtenidas variacionalmente.

Enriqueciendo el lagrangiano con cierto tipo de variables anticonmutativas se abre la posibilidad de incluir en esta descripción analítica una descripción pseudo-clásica de los sistemas con espín semi-entero. Y ampliando aún más las simetrías gauge admitidas, desembocamos en el terreno de las supersimetrías, que tratan de vincular las partículas de espín entero (bosones) con aquellas de espín semientero (fermiones). Esta nueva simetría carece de parangón en la naturaleza y hasta el momento no se ha visto empíricamente respaldada con el descubrimiento de las nuevas partículas que pronostica.

Puesto que la supersimetría es una transformación espacio-temporal independiente de las simetrías internas $SU(N)$ y $U(N)$, sólo puede relacionar bosones y fermiones que se hallen en la misma representación del grupo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Por desgracia, sucede que dentro del modelo Standard bosones y fermiones no comparten una misma representación. Por tanto, si la supersimetría vincula bosones con fermiones, no serán los bosones y los fermiones que de hecho conocemos. Ese es el motivo de que se postulen partículas aún sin detectar como compañeras supersimétricas de la materia ordinaria.

Sin embargo, el problema más grave al que se enfrenta todo el programa de investigación basado en la supersimetría, es la falta de un camino sencillo y directo para romper la simetría de su estado de vacío, de modo que las partículas supercompañeras de la materia ordinaria posean masas tan grandes que justifiquen la actual ausencia de pruebas sobre su existencia. La estructura interna de las teorías supersimétricas es tal que no pueden romper dinámicamente por sí mismas la simetría de sus estado fundamental.

Y si decidimos emplear un mecanismo de Higgs equiparable al de la teoría electrodébil, nos veremos abocados a postular todo un nuevo conjunto de campos y partículas además de aquellos cuyas propiedades tratamos de explicar. Puesto que no contamos con un mecanismo único para la ruptura de simetría, las ampliaciones supersimétricas del modelo Standard deben incluir un término añadido originados por todas las maneras posible en las que puede romperse la simetría. Así, junto con los 18 parámetros experimentales –no determinados teóricamente– del modelo Standard, acabamos teniendo 105 parámetros indeterminados más, también sin ajustar.

En el entorno clásico, otro de los escollos que debe enfrentar el formalismo gauge surge de la consideración del tiempo físico como una variable dinámica, planteamiento típico de la Relatividad general de Einstein. Al hacerlo así, las características del propio método gauge conducen a la sorprendente conclusión de que la evolución temporal de un sistema dinámico es en sí misma una ligadura gauge que, por tanto, conecta estados físicamente indistinguibles. Tan violenta contradicción con los hechos sigue alzándose, sin duda, como uno de los principales obstáculos en la búsqueda de un marco unificado para las interacciones fundamentales de la naturaleza por medio del método gauge.

REFERENCIAS

[1] Fraser, C., *Lagrange early contributions to the principles and methods of mechanics*, Arch. Hist. Exact. Sci. **28**, 197-211 (1983).
 [2] Fraser, C., *Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations*, Arch. Hist. Exact. Sci. **32**, 151–186 (1985).
 [3] Lanczos, C., *The Variational Principles of Mechanics*, (Dover, New York, 1986).
 [4] Frank, P., *Das Kausalgesetz und seine Grenzen*, (Springer, Wien, 1932).
 [5] Goldstein, H., *Mecánica clásica*, (Reverté, Barcelona, 1990).
 [6] Feynman, R., *The Feynman lectures on physics*, (Addison-Wesley, Massachusetts, 1963).
 [7] Yourgrau, W. and Mandelstam, S., *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory*, (Dover, New York, 1979).
 [8] Bryant, R. L., *Introduction to Lie groups and symplectic geometry en Lectures on Lie groups and symplectic geometry*, (Reg. Geom. Inst., Park City, Utah, 1991).

[9] Moore, T. A., "Least-Action Principle" en *Macmillan Encycl. of Phys.*, Simon & Schuster Macmillan **2**, 840–842 (1996).
 [10] Viterbo, C., *Introduction à la topologie symplectique*, Gazette des Mathématiciens **54**, 81–92 (1992).
 [11] Rubakov, V., *Classical Theory of Gauge Fields*, (Princeton Univ. Press, New Jersey, 1999).
 [12] Benettin, G., Henrard, J. and Kuksin, S., *Hamiltonian Dynamics. Theory and Applications*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2005).
 [13] Deriglazov, A., *Classical Mechanics. Hamiltonian and Lagrangian Formalism*, (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2010).
 [14] Gignoux, C. and Silvestre-Brac, B., *Solved Problems in Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, (Springer, New York, 2009).
 [15] Greiner, W., *Classical Mechanics*, (Springer-Verlag, New York, 2003).
 [16] Calkin, M. G., *Lagrangian and Hamiltonian Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 1998).
 [17] Galtsov, D. V., Grats, Iu. V. and Zhukovski, V. Ch., *Campos clásicos. Enfoque moderno*, (Ed. URSS, Moscú, 2005).
 [18] Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of gauge systems*, (Princeton University Press, Princeton, 1992).
 [19] Darrigol, O., *From c-Numbers to q-Numbers*, (University of California Press, Berkeley, 1992).
 [20] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G. and Georgi, H., *Electroweak symmetry breaking from dimensional deconstruction*, Phys. Lett. B. **513**, 232–240 (2001).
 [21] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Wacker, J. G., *Phenomenology of electroweak symmetry breaking from theory space*, JHEP **0208**, 020-042 (2002).
 [22] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Katz, E., Nelson, A. E. and Wacker, J. G., *The Minimal moose for a little Higgs*, JHEP **0208**, 021-036 (2002).
 [23] Arkani-Hamed, N., Cohen, A. G., Gregoire, T., Katz, E. and Nelson, A. E., *The Littlest Higgs*, JHEP **0207**, 034-049 (2002).
 [24] Bars, I., *Two time physics with gravitational and gauge field backgrounds*, Phys. Rev. D **62**, 085015 (2000).
 [25] Bars, I., *Survey of two-time physics*, Class. Quant. Grav. **18**, 3113-3135 (2001).
 [26] Chamseddine, A. H., Arnowitt, R. and Nath, P., *Locally Supersymmetric Grand Unification*, Phys. Rev. Lett. **49**, 970–983 (1982).
 [27] Dimopoulos, S. and Georgi, H., *Softly Broken Supersymmetry and SU(5)*, Nucl. Phys. **B193**, 150–164 (1981).
 [28] Dimopoulos, S., Raby, S. and Wilczek, F., *Supersymmetry and the Scale of Unification*, Phys. Rev. **D24**, 1681–1683 (1981).
 [29] Haag, R., Lopuszanski, J. T., Sohnius, M., *All Possible Generators Of Supersymmetries Of The S Matrix*, Nucl. Phys. **B 88**, 257–266 (1975).
 [30] Nahm, W., *Supersymmetries and their representations*, Nucl. Phys. **B135**, 149–154 (1978).

- [31] Sakharov, A., *Vacuum Quantum Fluctuations in Curved Space and the Theory of Gravitation*, Sov. Phys. Doklady **12**, 1040-1041 (1968).
- [32] Shifman, M. (ed.), *The many Faces of the Superworld. Yuri Golfand Memorial Volume*, (World Scientific, Singapore, 2000).
- [33] Howe, P., *Supergravity in superspace*, Nuclear Physics B - CERN **33**, 47-59 (1982).
- [34] Coleman, S. and Mandula, J., *All Possible Symmetries of the S Matrix*, Phys. Rev. **159**, 1251-1256 (1967).
- [35] Isham, C. J., "Canonical quantum gravity and the problem of time" en *Integrable Systems, Quantum Groups, and Quantum Field Theories*, (Kluwer Academic Publishers, London, 1993), pp. 157-288.
- [36] Kuchař, K., "Time and interpretations in quantum gravity" en *Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics: University of Winnipeg, 16-18 May, 1991*, G. Kunstatter, D.E. Vincent, J. G. Williams, eds. (World Scientific, Singapore, 1992).
- [37] Torre, C. G., *Gravitational observables and local symmetries*, Phys. Rev. **D48**, 2373-2376 (1993).
- [38] Bergmann, P. G., *Observables in General Relativity*, Reviews of Modern Physics **33**, 510-514 (1961).
- [39] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, (John Wiley & Sons Inc., New York, 1971).
- [40] Weinstein, S., "Time, gauge, and the superposition principle in quantum gravity", en *Proceedings of the Eighth Marcel Grossman Meeting*, T. Piran, ed. (World Scientific, Singapore, 1999).



Dinámica clásica y cuántica de una partícula cargada en un campo magnetostático uniforme

Tonatiuh Miramontes Pérez, Victor David Granados García

Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional "Adolfo López Mateos", Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, Edificio 9, C.P. 07738, México D. F.

E-mail: tonatiuhmiramontes@gmail.com

(Recibido el 19 de Enero de 2012; aceptado el 23 de Marzo de 2012)

Resumen

En este artículo se ejemplifica el uso de los paréntesis de Poisson y los conmutadores cuánticos para resolver las ecuaciones de movimiento de Hamilton y Heissenberg respectivamente en el caso de una partícula cargada inmersa en un campo magnético constante y uniforme, con el fin de establecer las analogías entre la dinámica clásica y la dinámica cuántica. Así mismo se da una interpretación a la denominada longitud magnética del sistema en términos de operadores relacionados con las trayectorias clásicas del sistema.

Palabras clave: Dinámica clásica, paréntesis de Poisson, dinámica cuántica, conmutadores cuánticos, niveles de Landau, longitud magnética.

Abstract

In this paper we present an example of use of Poisson brackets and quantum commutators to solve the Hamilton and Heissenberg equations of motion respectively in the case of a particle immerse on a uniform and constant magnetic field in order to establish analogies between classical and quantum dynamics. We also give an interpretation of the so called magnetic length of the system in terms of operators related to the classical system trajectories.

Keywords: Classical dynamics, Poisson brackets, quantum dynamics, quantum commutators, Landau levels, magnetic length.

PACS: 45.20.Jj, 03.65.-w, 03.65.Ca, 03.65.Db, 03.65.Fd, 71.70.Di

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

P. Lagrange, J. D'Alembert y W. Hamilton ayudaron a demostrar que era posible hallar una formulación compatible con la mecánica Newtoniana partiendo de principios variacionales, los cuales no sólo permitieron tratar sistemas que bajo la óptica Newtoniana parecen más complicados o confusos, sino que dotaron de un formalismo matemático más profundo a la física culminando en la formulación Hamiltoniana, donde emerge una estructura algebraica que sugiere una forma de plantear problemas que resulta tan fundamental que sirvió de base para formular la moderna mecánica Cuántica.

Dentro de esta formulación, los paréntesis de Poisson permiten resolver las ecuaciones de movimiento del sistema conociendo los paréntesis de Poisson de las variables dinámicas con la función de Hamilton, de igual forma que en el caso cuántico es posible resolver las ecuaciones de movimiento de Heissenber a partir de los conmutadores cuánticos de los operadores con el Hamiltoniano.

A continuación, además de analizar la naturaleza dinámica del sistema tanto clásica como cuánticamente, resolvemos de manera completamente análoga el problema

de una partícula cargada inmersa en un campo magnetostático por medio de paréntesis de Poisson para el caso clásico y conmutadores cuánticos para el caso cuántico, de forma que se establezcan las analogías y correspondencias entre los resultados que se obtienen en cada caso.

Primeramente, presentamos de forma breve los desarrollos que nos permiten resolver las ecuaciones de movimiento mediante las estructuras antes mencionadas.

II. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO CLÁSICAS MEDIANTE EL USO DE LOS PARÉNTESIS DE POISSON

El paréntesis de Poisson (Ver [1], Ecs. 9-67) de cualquier función con la función de Hamilton resulta de gran utilidad pues es posible probar que

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (1)$$

y a partir de esto, escribir las ecuaciones de Hamilton en términos de los paréntesis de Poisson como:

$$\dot{q}_i = [q_i, H], \quad (2)$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H]. \quad (3)$$

Por tanto, si una cantidad es una constante de movimiento y su expresión no incluye de manera explícita al tiempo, su paréntesis de Poisson con el Hamiltoniano se anula.

Si u es una función analítica, una variación infinitesimal δu correspondiente a un intervalo δt puede expresarse como

$$\delta u = dt[u, H], \quad (4)$$

de donde es claro que la función de Hamilton es la responsable de la evolución del sistema en el tiempo. Así mismo, el desarrollo en serie de Taylor para $u(t)$ alrededor de $t=0$ puede escribirse como en [1], Ecs. 9-117:

$$u(t) = u|_0 + [u, H]_0 t + \frac{t^2}{2!} [[u, H], H]_0 + \dots \quad (5)$$

Si introducimos un operador $\hat{G} \equiv [G]$, tal que

$$\hat{G}u \equiv [u, G], \quad (6)$$

la expresión (5) puede expresarse como:

$$u(t) = e^{i\hat{G}t} u. \quad (7)$$

III. RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO DE HEISENBERG MEDIANTE EL USO DE LOS CONMUTADORES DE OPERADORES CUÁNTICOS

Según [2], si la función de onda Ψ provee toda la información del sistema para todo tiempo futuro, es necesario que exista una relación lineal entre la función de onda Ψ y su derivada respecto al tiempo, que expresamos mediante el operador \hat{H} como

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (8)$$

Definimos la derivada de un operador partiendo de la definición clásica, es decir, en términos de valores esperados de los observables como sigue:

$$\langle \dot{A} \rangle = \frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t}. \quad (9)$$

A continuación empleamos la expresión (8) para desarrollar la Ec. (9) como:

$$\langle \dot{A} \rangle = (\Psi, \hat{A}\Psi) = \left(\Psi, \left\{ \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}] \right\} \Psi \right). \quad (10)$$

Como la derivada de un observable lógicamente debe ser un observable, el operador entre llaves puede funcionar para todo fin práctico como el operador \hat{A} , es decir,

$$\hat{A} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]. \quad (11)$$

De acuerdo con [3], a esta regla se le denomina teorema de Ehrenfest. Por tanto, un operador que no depende explícitamente del tiempo y además conmuta con el Hamiltoniano es una constante del movimiento y corresponde a una cantidad conservativa, dado que su valor esperado permanece constante con el tiempo. Ésta situación marca una clara analogía entre los paréntesis de Poisson con la función de Hamilton y el conmutador cuántico con el operador Hamiltoniano \hat{H} , pues básicamente las Ecs. (11) y (1) son idénticas.

Luego, la versión de la Ec. (5) para operadores es:

$$\hat{A}(t) = A|_{t=0} + \frac{it}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]_{t=0} + \left(\frac{it}{\hbar} \right)^2 \frac{[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{A}]]_0}{2!} + \dots \quad (12)$$

Introduciendo la notación $\hat{G}\hat{A} \equiv [\hat{H}, \hat{A}]$ podemos expresar la Ec. (12) de una forma análoga a la Ec. (7):

$$\hat{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{it}{\hbar} \right)^n \frac{(\hat{G}^n \hat{A})_{t=0}}{n!} = e^{i\frac{t}{\hbar} \hat{G}} \hat{A}|_{t=0}. \quad (13)$$

En términos de elementos de matriz, el cálculo de las derivadas de estas últimas resulta más simple pues si denotamos al elemento de la m -ésima fila y n -ésima columna de la matriz de \hat{A} por

$$A_{mn} = (\Psi_m, \hat{A}\Psi_n) = e^{i\frac{E_m - E_n t}{\hbar}} (\psi_m, \hat{A}\psi_n), \quad (14)$$

podemos calcular la derivada de los elementos de matriz respecto al tiempo, considerando que $(\psi_m, \hat{A}\psi_n)$ es una constante, para obtener

$$\dot{A}_{mn} = i \frac{E_m - E_n}{\hbar} A_{mn}. \quad (15)$$

IV. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNETOSTÁTICO UNIFORME: TRATAMIENTO CLÁSICO

Se trata el caso donde el campo magnético \vec{B} es constante. Podemos asumir que en todo punto, este campo viene dado

por $\vec{B} = B\hat{k}$ donde \hat{k} es el vector unitario en la dirección de z . La primera tarea es elegir un potencial \vec{A} que genere el campo \vec{B} . Como \vec{B} es constante, podemos seleccionar

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{B} = \frac{B}{2}(y\hat{i} - x\hat{j}), \quad (16)$$

de manera que el Hamiltoniano queda

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{qB}{2c} \{y\hat{i} - x\hat{j}\} \right)^2 \\ &= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} y^2 \\ &\quad + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{qB}{2mc} (xp_y - yp_x). \end{aligned} \quad (17)$$

Podemos identificar los primeros dos términos con el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional en x , los siguientes dos términos con el Hamiltoniano de un oscilador armónico unidimensional en y , con los mismos parámetros que el primero, y el quinto término con el Hamiltoniano de una partícula libre en z , y finalmente el último término corresponde a un múltiplo de la componente z del momento angular L_z , es decir, podemos escribir el Hamiltoniano que nos atañe como

$$H = H_{arm.x} + H_{arm.y} + H_{lib.z} + \frac{qB}{2mc} L_z. \quad (18)$$

Como los paréntesis de Poisson cumplen con la linealidad, la aplicación de \hat{H} (clásico) a la variable z se puede realizar por separado, considerando los paréntesis de Poisson fundamentales y los de las componentes de L :

$$\hat{H}z = 0 + 0 + \frac{p_z}{m} + 0. \quad (19)$$

Es decir, en la dirección z la partícula se mueve libremente, como era de esperarse, y aplicando la Ec. (1) obtenemos:

$$z(t) = z_0 + \frac{p_{z0}}{m} t. \quad (20)$$

Gracias a que escribimos el Hamiltoniano en términos de L_z , podemos aplicar el operador \hat{H} sobre x de forma inmediata:

$$\begin{aligned} \hat{H}x &= \frac{1}{2m} [x, p_x^2] + \frac{q^2 B^2}{8m^2 c^2} [x, x^2] + 0 + 0 + \frac{qB}{2mc} [x, L_z] \\ &= \frac{p_x}{2m} - \frac{qB}{2mc} y \end{aligned} \quad (21)$$

La ulterior aplicación de \hat{H} arroja:

$$\hat{H}^2 x = -\frac{qB}{mc} \left(\frac{qB}{2mc} x + \frac{p_y}{m} \right). \quad (22)$$

$$\hat{H}^3 x = -\frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} \left(\frac{p_x}{m} - \frac{qB}{2mc} y \right) = -\frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} \hat{H}x. \quad (23)$$

$$\hat{H}^4 x = -\frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} \hat{H}^2 x. \quad (24)$$

$$\hat{H}^5 x = -\frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} \hat{H}^3 x = \frac{q^4 B^4}{m^4 c^4} \hat{H}x. \quad (25)$$

Las Ecs. (21)-(25) permiten proponer las siguientes relaciones que pueden probarse por inducción:

$$\hat{H}^{2n} x = -\frac{m^2 c^2}{q^2 B^2} (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n} \hat{H}^2 x; \quad (26)$$

$$\hat{H}^{2n+1} x = \frac{mc}{qB} (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n+1} \hat{H}x, \quad (27)$$

salvo el término correspondiente a $n=0$ para el caso par, por lo que tenemos que sustraerlo y reemplazarlo por el término correspondiente. Considerando esto, la serie para $x(t)$ queda

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{x_0}{2} - \frac{mc}{qB} \frac{p_{y0}}{m} + \frac{mc}{qB} (\hat{H}x|_0) \sum_n \left\{ (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} \\ &\quad - \frac{m^2 c^2}{q^2 B^2} (\hat{H}^2 x|_0) \sum_n \left\{ (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right\}, \end{aligned} \quad (28)$$

donde podemos sustituir el desarrollo en serie del seno y coseno para expresar el resultado finalmente como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} + \left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2} \right) \sin\left(\frac{qB}{mc} t \right) \\ &\quad + \left(\frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} \right) \cos\left(\frac{qB}{mc} t \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Al seguir el mismo procedimiento para la componente y , obtenemos

$$\hat{H}y = \frac{p_y}{m} + \frac{qB}{2mc} x; \quad (30)$$

$$\hat{H}^2 y = \frac{qB}{mc} \left(\frac{p_x}{m} - \frac{qB}{2mc} y \right); \quad (31)$$

$$\hat{H}^{2n} y = -\left(\frac{mc}{qB} \right)^2 (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n} \hat{H}^2 y; \quad (32)$$

$$\hat{H}^{2n+1} y = \frac{mc}{qB} (-1)^n \left(\frac{qB}{mc} \right)^{2n+1} \hat{H} y, \quad (33)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} + \left(\frac{cp_{y0}}{qB} + \frac{x_0}{2} \right) \sin\left(\frac{qB}{mc}t\right) + \left(\frac{y_0}{2} - \frac{cp_{x0}}{qB} \right) \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right). \quad (34)$$

Si derivamos $x(t)$ e $y(t)$ respecto al tiempo, obtenemos:

$$v_x(t) = \frac{qB}{mc} \left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2} \right) \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) - \frac{qB}{mc} \left(\frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} \right) \sin\left(\frac{qB}{mc}t\right), \quad (35)$$

$$\Rightarrow v_{x0} \equiv v_x(0) = \frac{p_{x0}}{m} - \frac{qB}{2mc} y_0; \quad (36)$$

$$v_y(t) = \frac{qB}{mc} \left(\frac{cp_{y0}}{qB} + \frac{x_0}{2} \right) \cos\left(\frac{qB}{mc}t\right) + \frac{qB}{mc} \left(\frac{cp_{x0}}{qB} - \frac{y_0}{2} \right) \sin\left(\frac{qB}{mc}t\right), \quad (37)$$

$$\Rightarrow v_{y0} \equiv v_y(0) = \frac{p_{y0}}{m} + \frac{qB}{2mc} x_0. \quad (38)$$

Notemos que la coordenada canónica $p_{x,y}$ no coincide con la cantidad $mv_{x,y}$, es decir, el momento mecánico difiere del momento canónico.

Existen cantidades comunes que podríamos reescribir como sigue:

$$\omega \equiv \frac{qB}{mc}; \quad (39)$$

$$x_c \equiv \frac{x_0}{2} - \frac{cp_{y0}}{qB} = x_0 - \frac{mc}{qB} v_{y0}; \quad (40)$$

$$y_c \equiv \frac{y_0}{2} + \frac{cp_{x0}}{qB} = y_0 + \frac{mc}{qB} v_{x0}. \quad (41)$$

En términos de estas cantidades y aplicando la identidad para el seno y coseno de una suma de ángulos, podemos expresar las Ecs. (29, 34, 35) y (37) como

$$x(t) = x_c + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t + \alpha). \quad (42)$$

$$y(t) = y_c - \frac{v_0}{\omega} \cos(\omega t + \alpha). \quad (43)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (44)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (45)$$

$$\text{con } \alpha \equiv \arctan \frac{v_{y0}}{v_{x0}}.$$

Si definimos $R \equiv \frac{v_0}{\omega}$, podemos identificar la solución como una trayectoria circular de radio R alrededor de un centro (x_c, y_c) con una frecuencia angular ω . Notemos además que si derivamos respecto al tiempo a v_x y v_y , obtenemos

$$a_x(t) = -\omega v_0 \sin(\omega t + \alpha). \quad (46)$$

$$a_y(t) = \omega v_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad (47)$$

Es decir, se cumplen las relaciones

$$\dot{x} = -\omega v_y. \quad (48)$$

$$y = \omega v_x. \quad (49)$$

$$\dot{x} = -\omega^2 (x - x_c). \quad (50)$$

$$y = -\omega^2 (y - y_c). \quad (51)$$

Al sustituir estos resultados en la definición de L , para la componente z obtenemos

$$\omega L_z = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{m\omega^2 r_c^2}{2}. \quad (52)$$

Es decir, el momento angular es una constante, y sólo depende de los valores iniciales de energía cinética y de la posición de la partícula.

Nuestro problema en realidad es tridimensional, por lo que con este conjunto de resultados sabemos que la curva generada por la trayectoria de la partícula es una helicoidal alrededor del eje z .

En éste problema se ha mostrado la utilidad de los paréntesis de Poisson para resolver problemas, aunque puede parecer un procedimiento un poco forzado y muy sofisticado para abordar problemas que podrían solucionarse de una forma más breve utilizando las ecuaciones de Newton o las de Hamilton. El objetivo en este caso es mostrar una semejanza operacional entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica a través de la definición de productos que originan estructuras algebraicas comunes y que pueden ser utilizadas para resolver en sentido estrictamente ideal cualquier problema de la mecánica.

IV. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNETOSTÁTICO UNIFORME: TRATAMIENTO CUÁNTICO.

Emplearemos el mismo campo vectorial que empleamos en el caso clásico, de manera que la expresión para el operador Hamiltoniano es explícitamente

$$H = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - \frac{qB}{2c} \{y\hat{i} - x\hat{j}\} \right)^2 = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} x^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} y^2 + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} + \frac{qB}{2mc} (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x). \quad (53)$$

Es decir, hemos obtenido, de manera idéntica al caso clásico, un operador Hamiltoniano que puede considerarse como la suma de los Hamiltonianos de dos osciladores armónicos acoplados por medio de un término de momento angular.

Sabemos que la solución en la dirección del campo (paralelo a z) es independiente de la solución transversal, por lo que podemos escribir

$$\psi(x, y, z) = \phi(x, y)\nu(z), \quad (54)$$

de manera que definiendo

$$\hat{H}_t \equiv \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{q^2 B^2}{8mc^2} (x^2 + y^2) + \frac{qB}{2mc} (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x), \quad (55)$$

podemos escribir la ecuación de eigenvalores como

$$\hat{H}_t \phi + \hat{H}_{lib.z} \nu = E \phi \nu, \quad (56)$$

de donde a su vez podemos separar la variable z si se cumplen las ecuaciones

$$\hat{H}_t \phi = E_t \phi \quad (57)$$

y

$$\hat{H}_{lib.z} \nu = E_z \nu \quad (58)$$

tales que $E = E_t + E_z$.

Construiremos un par de operadores denominados de escalera o de creación y destrucción. Para empezar, basándonos en el resultado clásico, definiremos $\omega \equiv \frac{qB}{mc}$, y a continuación simplificaremos la notación del operador Hamiltoniano definiendo el operador de momento mecánico como

$$\hat{\pi} \equiv \hat{p} - \frac{q}{c} \vec{A}. \quad (59)$$

Explícitamente, las componentes de este operador son:

$$\hat{\pi}_x = \hat{p}_x - \frac{m\omega}{2} y, \quad (60)$$

$$\hat{\pi}_y = \hat{p}_y + \frac{m\omega}{2} x, \quad (61)$$

$$\hat{\pi}_z = \hat{p}_z. \quad (62)$$

Luego, podemos escribir el operador \hat{H}_t como:

$$\hat{H}_t = \frac{1}{2m} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2). \quad (63)$$

Sea

$$\hat{b} \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y). \quad (64)$$

El operador adjunto de \hat{b} entonces es:

$$\hat{b}^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y). \quad (65)$$

Ahora, expresamos $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_y$ en términos de \hat{b} y \hat{b}^+ :

$$\hat{\pi}_x = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{b} + \hat{b}^+), \quad (66)$$

$$\hat{\pi}_y = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\hat{b} - \hat{b}^+). \quad (67)$$

Sustituyendo en (63) se obtiene

$$\hat{H}_t = \frac{\hbar\omega}{2} (\hat{b}\hat{b}^+ + \hat{b}^+\hat{b}). \quad (68)$$

Con fin de simplificar aún más esta expresión, calculamos el conmutador de estos operadores:

$$[\hat{b}, \hat{b}^+] = \frac{i}{m\hbar\omega} [\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \hat{1}. \quad (69)$$

Por lo tanto, $\hat{b}\hat{b}^+ = \hat{1} + \hat{b}^+\hat{b}$ y sustituyendo en (68):

$$\hat{H}_t = \hbar\omega \left(\hat{b}^+\hat{b} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \right). \quad (70)$$

Donde $\hat{N} \equiv \hat{b}^+\hat{b}$, y como su expresión es más sencilla, tomaremos como base las funciones propias de éste operador pues resulta que éstas también son funciones propias del Hamiltoniano. Ahora, si φ_n es una función

propia de \hat{N} tal que $\hat{N}\phi_n \equiv \lambda_n \phi_n$, entonces \hat{b}^+ también será una función propia de \hat{N} :

$$\hat{N}(\hat{b}^+ \phi_n) = (\lambda_n + 1)(\hat{b}^+ \phi_n). \quad (71)$$

Y lo mismo ocurre con el operador \hat{b} :

$$\hat{N}(\hat{b} \phi_n) = (\lambda_n - 1)(\hat{b} \phi_n). \quad (72)$$

No es difícil calcular la norma de este eigenvector:

$$\|\hat{b} \phi_n\| = (\hat{b} \phi_n, \hat{b} \phi_n) = (\phi_n, \hat{b}^+ \hat{b} \phi_n) = \lambda_n. \quad (73)$$

La norma de todo vector propio de \hat{N} es una cantidad positiva, resultado que implica que $\lambda_n \geq 0$, por tanto existe un estado base con la condición $\hat{b} \phi_0 = 0$, lo cual nos permite establecer que de hecho $\lambda_n = n$ y escribiendo explícitamente $\hat{b} \phi_0 = 0$, podemos resolver la ecuación diferencial para el estado base y normalizarla, para luego hallar los estados excitados correctamente normalizados. Luego, se pueden probar las siguientes relaciones para \hat{b} y \hat{b}^+ :

$$\hat{b}^+ \phi_n = \sqrt{n+1} \phi_{n+1}, \quad (74)$$

$$\hat{b} \phi_n = \sqrt{n} \phi_{n-1}, \quad (75)$$

En esta base, el espectro de energía de acuerdo a la Ec. (70) es

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (76)$$

Podemos calcular \hat{x} e \hat{y} mediante la expresión (60), es decir,

$$\hat{x} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{x}] = \frac{1}{m} \hat{p}_x - \frac{\omega}{2} y = \frac{\hat{\pi}_x}{m}. \quad (77)$$

$$\hat{y} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{y}] = \frac{1}{m} \hat{p}_y + \frac{\omega}{2} x = \frac{\hat{\pi}_y}{m}. \quad (78)$$

Luego, las ecuaciones de movimiento se pueden obtener calculando $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_y$ de la misma forma, y aprovechamos el cálculo previo de $[\hat{b}, \hat{b}^+]$ (Ec. 69) para conocer $[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y]$:

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = -im\omega\hbar, \quad (79)$$

muy útil pues el operador Hamiltoniano se encuentra expresado en términos de $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_y$. El resultado es

$$\hat{\pi}_x = -\omega\hat{\pi}_y, \quad (80)$$

$$\hat{\pi}_y = \omega\hat{\pi}_x, \quad (81)$$

Luego, combinando estos resultados, se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\hat{\dot{x}} = -\omega\hat{y}, \quad (82)$$

$$\hat{\dot{y}} = \omega\hat{x}. \quad (83)$$

Como se esperaba, las ecuaciones de movimiento de Heissenber son idénticas a las ecuaciones de movimiento clásicas (48) y (49).

Ahora calculamos los elementos de matriz del Hamiltoniano:

$$H_{mn} = (\phi_m, \hat{H} \phi_n) = (\phi_m, \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \phi_n) = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}) \delta_{mn}. \quad (84)$$

Es decir, únicamente los elementos de la diagonal son distintos de cero, ya que escogimos una base de vectores propios de la energía. La matriz de manera explícita tiene la forma

$$[H] = \frac{\hbar\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Gracias al método de operadores escalera que empleamos en este caso, resulta inmediato recuperar la forma matricial de los operadores de momento mecánico $\hat{\pi}$, empleando las Ecs. (66), (67), (74) y (75):

$$\begin{aligned} \pi_{x, kn} &= (\phi_k, \hat{\pi}_x \phi_n) = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ (\phi_k, \hat{b} \phi_n) + (\phi_k, \hat{b}^+ \phi_n) \} \\ &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ \sqrt{n} \delta_{k, n-1} + \sqrt{n+1} \delta_{k, n+1} \}; \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \pi_{y, kn} &= (\phi_k, \hat{\pi}_y \phi_n) = i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ (\phi_k, \hat{b} \phi_n) - (\phi_k, \hat{b}^+ \phi_n) \} \\ &= i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ \sqrt{n} \delta_{k, n-1} - \sqrt{n+1} \delta_{k, n+1} \}, \end{aligned} \quad (87)$$

donde se pone de manifiesto que únicamente son distintos de cero los elementos inmediatamente debajo de la diagonal e inmediatamente por encima de la diagonal, de manera que la forma explícita de las matrices es

$$[\pi_x] = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}; \quad (88)$$

$$[\pi_y] = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (89)$$

Ahora, aplicando la Ec. (15), tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{x, kn} &= i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \{E_k - E_n\} \{ \sqrt{n}\delta_{k, n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{k, n+1} \} \\ &= i\omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ -\sqrt{n}\delta_{k, n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{k, n+1} \}; \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{y, kn} &= -\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \{E_k - E_n\} \{ \sqrt{n}\delta_{k, n-1} - \sqrt{n+1}\delta_{k, n+1} \} \\ &= \omega\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \{ \sqrt{n}\delta_{k, n-1} + \sqrt{n+1}\delta_{k, n+1} \}. \end{aligned} \quad (91)$$

donde hemos obtenido las relaciones (80) y (81) por medio de un método enteramente algebraico.

En este caso no resulta trivial el cálculo de los elementos de matriz x_{kn} o y_{kn} , pues no tenemos expresiones "simples" para \hat{x} o \hat{y} en términos de \hat{b} y \hat{b}^+ . Si en cambio definimos, basándonos en el resultado clásico, los operadores:

$$\hat{x}_c \equiv \hat{x} - \frac{\pi_y}{m\omega}. \quad (92)$$

$$\hat{y}_c \equiv \hat{y} + \frac{\pi_x}{m\omega}. \quad (93)$$

podemos expresar el operador Hamiltoniano como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) = \frac{m\omega^2}{2} ([x - \hat{x}_c]^2 + [y - \hat{y}_c]^2). \quad (94)$$

Si definimos el operador

$$\hat{R}^2 = [x - \hat{x}_c]^2 + [y - \hat{y}_c]^2. \quad (95)$$

que en el límite clásico se corresponde con el cuadrado del radio de la trayectoria circular que describe la partícula, tenemos por un lado que, al ser una cantidad proporcional

al operador Hamiltoniano, es un observable físico; sin embargo, no podemos identificarlo exactamente con una trayectoria circular perfectamente definida pues para ello \hat{x}_c y \hat{y}_c tendrían que estar determinados de manera exacta simultáneamente, y como \hat{x}_c y \hat{y}_c no conmutan, al determinarse uno automáticamente el otro no conmuta con el Hamiltoniano, por lo que no pueden determinarse de forma exacta usando la misma base. Podemos calcular su conmutador

$$[\hat{x}_c, \hat{y}_c] = \left[x - \frac{\hat{\pi}_y}{m\omega}, y + \frac{\hat{\pi}_x}{m\omega} \right] = i \frac{\hbar}{m\omega}, \quad (96)$$

de forma que

$$\Delta x_c \Delta y_c \geq \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar c}{2qB}. \quad (97)$$

Por lo tanto, la cantidad denominada longitud magnética, $\lambda \equiv \sqrt{\frac{\hbar c}{qB}}$, puede interpretarse como una medida de la incertidumbre mínima con que podemos determinar simultáneamente \hat{x}_c y \hat{y}_c .

Aunque no podemos hablar de trayectorias perfectamente definidas de acuerdo a la mecánica clásica en la mecánica cuántica, el sistema en general obedece las ecuaciones de movimiento clásicas, sólo que no podemos asegurar que el sistema sigue una trayectoria en específico, sino que tenemos un espectro de trayectorias, y sólo podemos hablar de la probabilidad de que la partícula tome determinada trayectoria.

En paralelismo con el tratamiento clásico, calcularemos la forma explícita de los operadores de posición en función del tiempo, por el método de serie de conmutadores:

$$\hat{G}^1(\hat{x}) = [\hat{H}, x] = -i\hbar\hat{x} = -i\hbar \frac{\hat{\pi}_x}{m}, \quad (98)$$

$$\hat{G}^2(\hat{x}) = -i \frac{\hbar}{m} [\hat{H}, \hat{\pi}_x] = \frac{\hbar^2 \omega}{m} \hat{\pi}_y, \quad (99)$$

$$\hat{G}^3(\hat{x}) = \frac{\hbar^2 \omega}{m} [\hat{H}, \hat{\pi}_y] = -i \frac{\hbar^3 \omega^2}{m} \hat{\pi}_x = \hbar^2 \omega^2 \hat{G}^1(\hat{x}), \quad (100)$$

$$\hat{G}^4(\hat{x}) = \hbar^2 \omega^2 \hat{G}^2(\hat{x}), \quad (101)$$

$$\hat{G}^5(\hat{x}) = \hbar^4 \omega^4 \hat{G}^1(\hat{x}), \quad (102)$$

$$\hat{G}^6(\hat{x}) = \hbar^4 \omega^4 \hat{G}^2(\hat{x}), \quad (103)$$

$$\Rightarrow \hat{G}^{2n}(\hat{x}) = (\hbar\omega)^{2(n-1)} \hat{G}^2(\hat{x}) = \frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega} \hat{\pi}_y, \quad (104)$$

$$\hat{G}^{2n+1}(\hat{x}) = (\hbar\omega)^{2n} \hat{G}(\hat{x}) = -i \frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega} \hat{\pi}_x, \quad (105)$$

salvo el término correspondiente a $n=0$ para el caso par.

Considerando esto, al sustituir en (13) obtenemos la serie para $\hat{x}(t)$,

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) = \hat{x}|_0 - \frac{\hat{\pi}_y|_0}{m\omega} + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n} \frac{\left(\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega} \hat{\pi}_y\right)_0}{(2n)!} \\ + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n+1} \frac{\left(-i \frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega} \hat{\pi}_x\right)_0}{(2n+1)!}, \end{aligned} \quad (106)$$

e identificando el desarrollo en serie del seno y coseno así como los operadores \hat{x}_c y \hat{y}_c :

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_c|_0 + \frac{1}{m\omega} [\hat{\pi}_y|_0 \cos(\omega t) + \hat{\pi}_x|_0 \sin(\omega t)]. \quad (107)$$

que no es más que la versión mecano-cuántica de la Ec. (29).

Al seguir el mismo procedimiento para la componente y , obtenemos

$$\hat{G}(\hat{y}) = [\hat{H}, \hat{y}] = -i\hbar \frac{\hat{\pi}_y}{m}, \quad (108)$$

$$\hat{G}^2(\hat{x}) = -i \frac{\hbar}{m} [\hat{H}, \hat{\pi}_y] = -\frac{\hbar^2\omega}{m} \hat{\pi}_x, \quad (109)$$

$$\hat{G}^3(\hat{x}) = -\frac{\hbar^2\omega}{m} [\hat{H}, \hat{\pi}_x] = -i \frac{\hbar^3\omega^2}{m} \hat{\pi}_y = \hbar^2\omega^2 \hat{G}(\hat{y}), \quad (110)$$

$$\Rightarrow \hat{G}^{2n}(\hat{y}) = (\hbar\omega)^{2(n-1)} \hat{G}^2(\hat{y}) = -\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega} \hat{\pi}_x, \quad (111)$$

$$\hat{G}^{2n+1}(\hat{y}) = (\hbar\omega)^{2n} \hat{G}(\hat{y}) = -i \frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega} \hat{\pi}_y, \quad (112)$$

nuevamente, con excepción del término correspondiente a $n=0$ para el caso par;

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) = \hat{y}|_0 + \frac{\hat{\pi}_x|_0}{m\omega} + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n} \frac{\left(-\frac{(\hbar\omega)^{2n}}{m\omega} \hat{\pi}_x\right)_0}{(2n)!} \\ + \sum_n \left(\frac{it}{\hbar}\right)^{2n+1} \frac{\left(-i \frac{(\hbar\omega)^{2n+1}}{m\omega} \hat{\pi}_y\right)_0}{(2n+1)!}, \end{aligned} \quad (113)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_c|_0 - \frac{1}{m\omega} [\hat{\pi}_x|_0 \cos(\omega t) + \hat{\pi}_y|_0 \sin(\omega t)]. \quad (114)$$

que no es más que la versión mecano-cuántica de la Ec. (34).

Al calcular el valor esperado de las Ecs. (107) y (114) respecto a un estado Φ , se obtiene

$$\langle \hat{x} \rangle_\Phi(t) = \langle x_c \rangle_{\Phi(0)} + \frac{\langle v_y \rangle_{\Phi(0)}}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\langle v_x \rangle_{\Phi(0)}}{\omega} \sin(\omega t). \quad (115)$$

$$\langle \hat{y} \rangle_\Phi(t) = \langle y_c \rangle_{\Phi(0)} - \frac{\langle v_x \rangle_{\Phi(0)}}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\langle v_y \rangle_{\Phi(0)}}{\omega} \sin(\omega t). \quad (116)$$

Es decir, independientemente de cuál sea el valor de $\langle x_c \rangle_{\Phi(0)}$, $\langle y_c \rangle_{\Phi(0)}$, $\langle v_x \rangle_{\Phi(0)}$, $\langle v_y \rangle_{\Phi(0)}$, o la incertidumbre con la que fueron medidos (valores todos dependientes de la función Φ_0), a partir de ese momento, los valores esperados de x e y seguirán las ecuaciones del movimiento clásicas.

V. CONCLUSIONES

El conjunto de estos resultados constituye un análisis bastante completo de la dinámica de una partícula cargada en un campo magnetostático uniforme, y no sólo se han recuperado las ecuaciones de movimiento clásicas, en su interpretación rigurosa al expresar los observables como valores promedio, sino que se ha comprobado que en términos de operadores y sus matrices, se cumplen las mismas ecuaciones de movimiento clásicas, entendidas como las relaciones entre entidades correspondientes. Queda establecido que el principio de incertidumbre no afecta la forma en que se comporta el sistema, pues sólo pone de manifiesto que la naturaleza del mismo no es la de una partícula a la cual se pueda asociar con arbitraria precisión una ubicación y velocidad en un momento dado, sino que es en esencia un sistema ondulatorio cuya interpretación física no puede considerarse absolutamente comprendida. Así mismo, se estableció que cuando las dimensiones (por ejemplo, el radio clásico) del sistema son del orden de la longitud magnética, es necesario emplear la mecánica cuántica y los resultados aquí expresados, pues la incertidumbre en la posición y velocidad de la partícula ya no son despreciables en lo absoluto.

V. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con apoyo de COFAA-IPN, EDD-IPN y de los proyectos SIP-IPN claves 20100127 y 20120720.

REFERENCIAS

- [1] Godstein, H., *Classical Mechanics*, 2nd Ed. (Addison-Wesley, Reading, 1980).
- [2] Landau, L., Lifshitz, E., *Curso Abreviado de Física Teórica*, (Editorial MIR, Moscú, 1974).
- [3] Merzbacher, E., *Quantum Mechanics*, 3rd Ed. (John Wiley & Sons, Inc., New York, 1998).

Un análisis profundo del fenómeno dualidad onda partícula para la comprensión del mundo cuántico



Aarón Segura, Viviana Nieto y Esteban Segura

*Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional,
Calle 72, No. 11-86, Bogotá, Colombia.*

E-mail: segurac7@gmail.com

(Recibido el 13 de Enero de 2012; aceptado el 21 de Marzo de 2012)

Resumen

Se presenta nuestra contribución por hacer de la dualidad onda-Partícula un fenómeno intuitivo a través de un análisis histórico que muestra los sucesos más relevantes de éste fenómeno. Se describe un conjunto de ejemplos que constituyen aportes didácticos para la divulgación y comprensión del fenómeno en un curso introductorio de mecánica cuántica. Este conjunto se estructura de tal forma que la idea se va desarrollando progresivamente desde nociones elementales de la física clásica hasta el formalismo matemático que presenta la teoría cuántica. Se muestran relaciones y diferencias entre el uso de este concepto desde los puntos de vista clásico y cuántico.

Palabras clave: Indicios de la identidad de la luz, dualidad onda partícula, experimento de la doble rendija, naturaleza dual de los objetos mayores.

Abstract

We present our contribution to the wave-particle duality intuitive phenomenon through a historical analysis that shows the most important events of this phenomenon. It describes a set of training examples that are contributions to the dissemination and understanding of an introductory course in quantum mechanics. This set is structured so that the idea is being developed progressively from basic notions of classical physics to the mathematical formalism of quantum theory presented. Relations and differences are shown between the use of this concept from the views of classical and quantum.

Keywords: Indications of the identity of the light, wave particle duality, double-slit experiment, dual nature of bigger objects.

PACS: 03.65.Ta, 01.40.gb, 01.50.Pa, 78.40.Ri

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El hombre está para conocer y como conocer es una actividad de hacer inteligible los fenómenos [1], se hace necesario aprender una de las ciencias fundamentales relacionada con la comprensión e interpretación de los fenómenos naturales que ocurren en nuestro universo: La física. Para tal comprensión, el hombre parte de observaciones experimentales y mediciones cuantitativas empleando el lenguaje matemático como herramienta útil entre el experimento y la teoría [2]. Cuando hacemos referencia a la comprensión e interpretación de los fenómenos físicos, debemos tener en cuenta que para conocer, el hombre debe generar condiciones que agilicen el desarrollo de competencias [3, 4], por lo cual se evidencia la actividad de organizar los hechos y los acontecimientos simplificando las teorías, de tal forma que en sólo unos cuantos conceptos, ecuaciones y leyes fundamentales logra alterar y ampliar nuestra visión del mundo [2, 5].

El entendimiento del mundo sensible, palpable, directo a los sentidos del ser humano, se ha mostrado en la historia de las ciencias cómo las teorías clásicas, las cuales dan cuenta del movimiento de los cuerpos [2, 5]. Por lo cual para desarrollar cualquier fenómeno que describa una interpretación correcta del mundo es adecuado utilizar la mecánica clásica, cuyas ideas fundamentales y las leyes que rigen su aplicación constituyen un esquema tan sencillo y elegante, que parece imposible modificarlo sin destruir todas sus atractivas características [2, 6]. Sin embargo, la belleza de esta teoría se desvanece cuando nos introducimos en un campo más amplio, el campo de la mecánica cuántica [5]. Es cuando el hombre se ve obligado a construir herramientas que le permitan conocer las relaciones o vínculos que se establecen con la naturaleza microscópica [2, 4, 6], dando a conocer así la construcción de un nuevo modelo teórico para la descripción de los fenómenos de escala atómica que en ciertos aspectos es más elegante, satisfactorio y profundo que el modelo clásico [2, 7]. Sin embargo, este conjunto de leyes se presenta al estudiante que inicia su estudio de la naturaleza desde la

teoría cuántica como una teoría anti-intuitiva [8, 9], cuyos principios resultan de difícil comprensión. Una de las razones por las que sucede esto es porque en mecánica cuántica se tiene un grado de abstracción tal que se pierden las imágenes directas que permiten familiarizarse con los fenómenos [2, 5, 10].

Desde el punto de vista de la teoría cognitiva, en particular de la teoría constructivista de Bruner, las imágenes son un tipo de representaciones que posibilitan el desarrollo de los procesos cognitivos mediante etapas generales que se desarrollan en sistemas complementarios para asimilar la información y representarla [3]. Es decir, la primera etapa surge y se desarrolla como consecuencia del contacto del alumno con los objetos y con los problemas de acción que el medio le da (modo inactivo), luego surgen las imágenes mentales que representen objetos (modo icónico). Posteriormente, esas imágenes se convierten en un tipo de representaciones que contienen aspectos perceptibles de los objetos (modo simbólico). En esta etapa la mente construye símbolos y los utiliza en diferentes procesos cognitivos, como: la percepción, el pensamiento, el lenguaje, etc. [3]. De esta manera el uso de imágenes constituye un recurso cognitivo para el pensamiento del ser humano y su ausencia dificulta la apropiación de una idea y por lo tanto su comprensión [3, 4, 11].

Uno de los cambios fundamentales y más drásticos para el pensamiento contenido en la teoría cuántica se encuentra presente en el llamado fenómeno dualidad onda-partícula [9, 12, 13].

Se le llama dualidad onda-partícula a aquella ideología flexible, capaz de justificar una variedad de razonamientos sobre ondas y corpúsculos, que revelan de manera satisfactoria la fusión entre entidades corpusculares y ondulatorias [14, 15].

Diversas investigaciones sobre el fenómeno dualidad onda-partícula se presentan en la literatura con énfasis distintos, evidenciándose malos entendidos de este fenómeno [9, 16].

Einstein, en 1905 hace notar que la dualidad onda-partícula es aquella fusión donde la luz puede poseer propiedades corpusculares y propiedades ondulatorias [5, 9]. Es decir, la dualidad onda-partícula es una teoría unificada de los fenómenos luminosos, donde se tiene conciencia de que determinados fenómenos se explican mejor desde el punto de vista ondulatorio, mientras otros se explican mejor desde el punto de vista corpuscular [9, 18].

Por su parte, Kozhevnikov propone una nueva interpretación de esta teoría. En su interpretación, la dualidad onda-partícula es un concepto vago, capaz de ser entendido en forma diferente en contextos diferentes [9]. Feynman resalta que “*El comportamiento atómico es tan diferente de nuestra experiencia ordinaria, que debemos llegar a conocerlo en una forma un tanto abstracta o imaginativa y sin relacionarlo con nuestra experiencia directa*” [5].

En otros estudios se ha determinado el rango de validez del fenómeno dualidad onda-partícula en la teoría cuántica. Nairz, O. Amdt, M, & Zeilinger. Analizan este fenómeno realizando experimentos con grandes moléculas de C_{60} . Uno

de los experimentos más importantes fue realizado por Estermann y Otto Stern en 1930, donde se evidencia la dualidad onda-partícula a través de los fenómenos de interferencia y difracción de las partículas de h_2 en una superficie de cristal Lif [17].

Por su parte, Alastair muestra que es posible una interpretación probabilística del fenómeno dualidad onda-partícula desde varios experimentos mentales que confirman su existencia [19].

En este artículo presentamos nuestra contribución por hacer de la dualidad onda-partícula un fenómeno intuitivo. Se describe un conjunto de ejemplos que constituyen aportes didácticos para la divulgación y comprensión del fenómeno en un curso introductorio de mecánica cuántica. También se muestra cómo los puntos de vista clásico y cuántico del fenómeno dualidad onda-partícula permiten evidenciar un proceso de conocimiento de la naturaleza, generando un cambio radical en nuestras concepciones de observar el mundo.

El artículo está organizado de la siguiente manera: En la sección II se realiza un análisis histórico del fenómeno dualidad onda-partícula desde la primera evidencia registrada en el siglo XVII por Newton hasta la interpretación que presenta Louis de Broglie, llegando a conocer este fenómeno a través de la fenomenología expuesta. En la sección III se ilustra el fenómeno dualidad onda-partícula en mecánica cuántica donde se enfatizan los cambios que sufre éste concepto en este nuevo marco teórico. En la sección IV se describe la naturaleza dual de los objetos mayores y finalmente en la sección V presentamos nuestras conclusiones.

II. ANÁLISIS DEL FENÓMENO DUALIDAD ONDA-PARTÍCULA

A. Indicios de la identidad de la luz

A finales del siglo XVII, Newton usó una teoría corpuscular en la cual afirmaba que la luz estaba compuesta por partículas capaces de rebotar en un espejo, logrando así explicar la propagación rectilínea de la luz, las leyes de la reflexión y refracción [14].

Huygens, contemporáneo de Newton, fue de los primeros en proponer una teoría ondulatoria de la luz. Su interés consistía en demostrar que la luz se difracta al pasar a través de aberturas o alrededor de obstáculos comportándose como una onda [6, 14].

Huygens consideraba que la luz debía viajar más rápido en un medio menos denso como el aire, mientras Newton pensaba que el fenómeno era inverso, la luz debía viajar más rápido en un medio más denso como el agua o el vidrio. No obstante en aquella época aún no se podía medir la velocidad de la luz de manera eficaz, por lo cual se asumía que la luz viajaba únicamente en línea recta sin presentar el fenómeno de difracción. Además, debido a la gran reputación y autoridad de Newton (*President of the Royal Society*), la teoría corpuscular de la luz fue aceptada

por más de un siglo, lo que inclinó la balanza hacia el lado corpuscular de la luz durante esa época.

B. Experimento de la doble rendija

Un siglo después, el físico inglés Thomas Young probó gracias al experimento de la doble rendija que la luz poseía ciertas propiedades que sólo eran posibles asociar con una onda [20]. Young colocó una pequeña fuente luminosa que proyectaba su luz a través de una delgada ranura de una anchura de 0.2mm. Al pasar el haz de luz por ésta ranura y al proyectarlo en una pantalla aparecía una franja central como se observa en la Fig. 1.

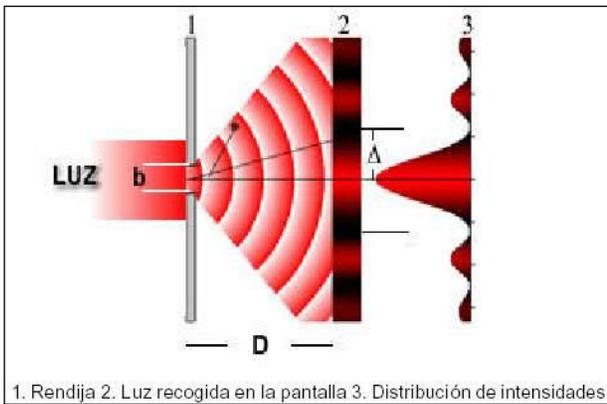


FIGURA 1. Se muestra el experimento de la doble rendija realizado por Young. En 1 se observa la rendija, b ilustra el orificio de 0.2mm por donde pasa el haz de luz. En 2 aparece la pantalla donde incide el haz de luz, D es la distancia de separación entre la rendija y la pantalla. Finalmente, en 3 se evidencia las distribuciones de intensidades que produce el haz de luz al pasar por solo una rendija.

Posteriormente al proyectar el haz de luz a través de dos ranuras y al tapan una de las dos ranuras con un dedo, Young obtuvo evidentemente el mismo resultado al hacer pasar el haz de luz únicamente por una ranura (la franja central). Al destapar la segunda ranura y hacer incidir el haz, en lugar de haber dos franjas de luz, como debería ocurrir si la luz fuera partículas que viajaban en línea recta, había una serie de franjas brillantes y oscuras de diferentes intensidades (Fig. 2). Es decir, había puntos en los que la cresta se había sumado a otra cresta y otros en que la cresta se había anulado con un valle produciendo el esperado fenómeno de interferencia [20, 21].

Ante esto, Young concluyó que éste patrón de interferencias solo se explicaba por el supuesto de que la luz que pasa por las ranuras tenía características ondulatorias [20].

Nótese que mientras Huygens lograba dar explicación al fenómeno de difracción de la luz, Young daba parte al fenómeno de interferencia, explicaciones basadas en hipótesis totalmente ondulatorias [14, 21].

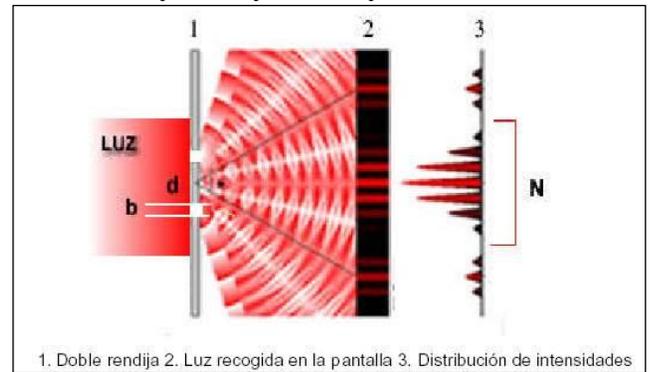


FIGURA 2. Se muestra el experimento de la doble rendija realizado por Young. En 1 se ilustran los orificios de 0.2mm por donde pasa el haz de luz, d es la distancia que hay entre los orificios. En 2 se observa el patrón de interferencias producido en la pantalla. Finalmente, en 3 se evidencia las distribuciones de intensidades que produce el haz de luz al pasar por ambas rendijas.

C. Confirmación Experimental de Fresnel y Maxwell

A principios del siglo XIX, gracias a los experimentos del físico francés Augustin Fresnel (1788-1827) sobre interferencia y difracción, se logró sentar la teoría ondulatoria sobre bases matemáticas, demostrando que la propagación en línea recta de la luz es consecuencia de la muy corta longitud de onda de la luz visible [14]. Fresnel empeñado en la formulación ondulatoria de la luz, procuró bajo este marco teórico dar explicación a la difracción prosiguiendo con la hipótesis de que la luz poseía características similares a las ondas sonoras, y utilizando el principio de Huygens y el fenómeno de interferencia de Young, logró explicar no sólo la propagación rectilínea de la luz, sino las desviaciones de dicho comportamiento, llegando a calcular así la difracción causada por pequeñas rendijas que se proyectan en una pantalla [14, 21].

A finales del mismo siglo, en el mismo sentido experimental y basado en el carácter ondulatorio de la luz. Maxwell recopila los estudios realizados anteriormente y brinda una explicación del fenómeno ondulatorio de la luz como onda electromagnética, sentando las bases matemáticas que parecieron implantar definitivamente la teoría ondulatoria de la luz [6, 14]. Sin embargo, esta teoría presentaba serios problemas al no poder explicar otras propiedades de la interacción de la luz con la materia como los fenómenos asociados a la radiación calorífica, el efecto fotoeléctrico y los fenómenos de absorción y emisión de radiación térmica por un medio (un cuerpo negro). Mayor problema que debe afrontar la teoría ondulatoria de la luz propuesta por Maxwell ya que nuevamente se genera un conflicto entre ondas y partículas [6, 20].

Nótese que en el contexto de la física clásica, el modelo corpuscular y el modelo ondulatorio de la luz son totalmente incompatibles [6]. Por lo cual debía aparecer en la física un nuevo marco, en el cual ambos comportamientos de la luz que parecían contradictorios, se pudieran unificar en un modelo coherente [9, 18].

D. Ondas de Materia de De Broglie

Un avance fundamental que permitió esta integración e impulsó el desarrollo de la física cuántica, fue una hipótesis planteada por el físico francés Louis De Broglie en su tesis doctoral de 1924. Su trabajo comprobaba las propiedades ondulatorias de los electrones, basándose en la extraña naturaleza dual de la luz evidenciada en los experimentos de la radiación del cuerpo negro y el efecto fotoeléctrico.

Este desconcertante aspecto dual de la luz estrechamente vinculado con la existencia misma de los cuantos le sugirió la pregunta, *¿Puede la materia poseer propiedades tanto ondulatorias como corpusculares?* [15, 17]. Dicho cuestionamiento estaba basado en la explicación del efecto fotoeléctrico que poco antes había dado Einstein sugiriendo la naturaleza cuántica de la luz.

Para Einstein, la energía transportada por las ondas luminosas estaba cuantizada [9, 17]. Es decir, distribuida en pequeños paquetes de energía o cuantos de luz que más tarde serían denominados fotones, cuya energía dependía de la frecuencia de la luz a través de la relación:

$$\epsilon = h\nu. \quad (1)$$

Donde ν es la frecuencia de la onda luminosa y h la constante de Planck. A partir de esta relación Einstein proponía que en determinados procesos las ondas electromagnéticas que forman la luz se comportan como corpúsculos [9].

De Broglie se preguntó *¿Podría ser de manera inversa?* [15, 17]. Es decir, que una partícula material (un corpúsculo) pudiese mostrar el mismo comportamiento de una onda. Y en dicha hipótesis propuso la existencia de ondas de materia, atribuyéndole a toda partícula con impulso una onda asociada, cuya longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (2)$$

h = Constante de Planck

p = Cantidad de movimiento de la partícula de materia

Nótese que en la fórmula se aprecia que a medida que la masa del cuerpo o su velocidad aumentan, disminuye considerablemente la longitud de onda.

Mediante esta relación De Broglie afirmaba que toda la materia presenta características tanto ondulatorias como corpusculares comportándose de uno u otro modo dependiendo del experimento específico [6, 9].

Un poco más adelante se generalizó la hipótesis de De Broglie para considerar que toda entidad física (las partículas y también los fotones) tiene una naturaleza dual, de tal forma que su comportamiento global presenta dos aspectos complementarios: ondulatorio y corpuscular, donde predomina uno de estos aspectos dependiendo del experimento realizado [9, 17, 18]. Así, el hecho de que un electrón, por ejemplo, tenga masa y cantidad de movimiento (propiedades corpusculares), pero también una longitud de onda (propiedad ondulatoria), supone que en

una colisión con otro electrón, predomine el comportamiento corpuscular de ambos. Pero también ocurre que un haz de electrones se difracta cuando pasa por una pequeña rendija, incluso aunque se lancen de uno en uno [5, 17]. De manera que el resultado observado en la pantalla no es fruto de un proceso estadístico producido por la incidencia de un número elevado de electrones, sino que realmente cada electrón interfiere consigo mismo [18].

Finalmente, la ecuación propuesta por De Broglie se puede aplicar a toda la materia. Es decir, los cuerpos macroscópicos también tendrían asociada una onda, pero, dado que su masa es muy grande, la longitud de onda resulta tan pequeña que en ellos se hace imposible apreciar sus características ondulatorias [6, 15].

III. EL FENÓMENO DUALIDAD ONDA PARTICULA EN MECANICA CUANTICA

Hemos ilustrado los puntos claves que la historia ha mostrado desde el origen de la dualidad onda-partícula y este esfuerzo nos ha llevado a proponer cuatro nociones que fundamentan este fenómeno: fusión, unificación, compatibilidad y percepción como un todo. Luego, como la mecánica cuántica exige una nueva organización conceptual para la descripción de los fenómenos atómicos y se afirma que la dualidad onda partícula es el corazón de esta nueva organización conceptual. Queremos saber *¿Cómo se ilustra el fenómeno dualidad onda-partícula desde la mecánica cuántica?*

Desde la mecánica cuántica, la dualidad onda-partícula se ilustra como aquella teoría unificada de los fenómenos luminosos (fusión), donde se tiene conciencia de que determinados fenómenos se explican mejor desde el punto de vista ondulatorio mientras otros se explican mejor desde el punto de vista corpuscular [16, 20].

Para Kozhevnikov, la dualidad onda-partícula es más que la aserción de que los fenómenos de radiación revelan diferentes propiedades que son similares a las de los modelos clásicos de las ondas y las partículas. Es decir, la dualidad onda-partícula muestra como dos tipos separados de objetos dan cuenta de fenómenos duales [9].

Expresar la dualidad onda-partícula de manera formal o matemática, es hacer un tratamiento simétrico de ambos conceptos como lo hizo Heisenberg en sus lecturas de Chicago (1930); *“Hay dos modelos de los fenómenos cuánticos y ambos conducen a resultados equivalentes. Se puede empezar ya sea del concepto clásico de partícula, o del concepto clásico de onda y arribar esencialmente a la misma teoría cuántica cuantizando la una o la otra. Ya que la existencia de un evento clásico tras la existencia de un evento cuántico, brinda evidencia de la existencia de un mundo que se comporta dualmente, bajo las leyes de la probabilidad y que es compatible con la formalización estructurada [22]”*.

Luego, podemos afirmar que la dualidad onda-partícula en mecánica cuántica significa más que tomar como fundamental sólo un tipo de objeto, el corpúsculo o la onda, y decir, que éste acepta otro tipo de conducta a causa de

leyes adicionales o accidentales. Significa entonces escoger una especie de entidad como el objeto fundamental de una teoría, donde ambas características de partícula y onda tienen derechos iguales, estableciendo aquel puente natural que comunica el mundo cuántico con el mundo clásico en una única dirección [18].

Hoy día este mismo fenómeno dual se aplica a los fotones, entidades de masa nula que forman la luz. Un fotón tiene un comportamiento corpuscular, por ejemplo, cuando colisiona con otro fotón o, como ocurre en el efecto fotoeléctrico, con partículas (electrones, protones, etc.), pero un haz luminoso (un haz de fotones) manifiesta un comportamiento ondulatorio (onda electromagnética) cuando se difracta, se polariza o produce interferencias luminosas [9, 18].

IV. NATURALEZA DUAL DE LOS OBJETOS MAYORES

A principios del siglo XX varios descubrimientos importantes para la mecánica cuántica surgieron al realizar experimentos utilizando neutrones, protones, átomos y moléculas de carbono $60(C_{60})$. Uno de los experimentos más importante fue realizado por Estermann y Otto Stern en 1930, donde se evidencia la dualidad onda-partícula a través de los fenómenos de interferencia y difracción de las partículas de H_2 en una superficie de cristal LiF . Del mismo modo el interferómetro de Ramsey Borde mostró estos mismos fenómenos al obtener I_2 de luz en 1944. Actualmente el interferómetro de Mach Zehnder es utilizado para demostrar el Na_2 y el interferómetro de Talbot Lau es aplicado a experimentos con Li_2 [17].

En 1985 se informó de la difracción del “fullereno” y “Buckminster fullereno” que presentan estabilidad y abundancia cuando precisamente 60 átomos de carbono se disponen en forma de una molécula natural (C_{60}). Fue descubierto por Kroto y otros investigadores de la universidad de Viena donde cabe resaltar que este es el mayor objeto sobre el que se han observado propiedades ondulatorias mecanocuánticas de manera directa. Su interpretación generó gran controversia ya que se asumieron los argumentos de la dualidad onda corpúsculo y la validez de la ecuación de De Broglie en su formulación [17].

V. CONCLUSIONES

Se ha ilustrado por medio de la historia y la fenomenología la dualidad onda-partícula. A partir de esta conceptualización se ha logrado abstraer cuatro nociones cruciales para el entendimiento de la mecánica cuántica: fusión, unificación, compatibilidad y percepción como un todo.

Estas nociones estructuran el fenómeno dualidad onda-partícula, pues permiten abordar problemas tales como la medición, la superposición, la probabilidad, entre otros, haciendo más entendible el mundo de la mecánica cuántica.

AGRADECIMIENTOS

Especial agradecimiento a la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad Pedagógica Nacional por el apoyo constante al proyecto “Análisis histórico-crítico de identificación de características incomprensibles en el fenómeno de la dualidad onda-partícula que afectan el desarrollo de aprendizaje en los estudiantes de básica y superior”.

REFERENCIAS

- [1] Bachelard, G., *Epistemología*, (Editorial Anagrama, Barcelona, 1973).
- [2] Dirac, P., *The Principles of Quantum Mechanics*, 4a. Ed. (Clarendon Press, Oxford, 1958).
- [3] Bruner, J., *Investigaciones sobre el desarrollo cognitivo*, (Pablo del Río, Madrid España, 1980).
- [4] Redish, E., *Implications of cognitive studies for teaching physics*, Am. J. Phys. **62**, 796-803(1994).
- [5] Feynman, R., *El carácter de la ley física*, (Tusquets editors, Barcelona, 2000).
- [6] Feynman, R., *Física*, Vol. 3 (Pearson Education, México, 1963).
- [7] Lynn, H. and Caponigro, M., *Quantum Formalism: Brief Epistemological Considerations*, e-print [quant-ph/0610228].
- [8] Laloë, F., *Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems*, Am. J. Phys. **69**, 656-666 (2001).
- [9] Kozhevnikov, A., *La fórmula de fluctuación de Einstein y la Dualidad Partícula-Onda*, Rev. El tambor de Feynman **3**, 19-41(2001).
- [10] Rosenfeld, L., *The Wave-Particle Dilemma*, In: The Physical Conception of Nature vol. 3, 251-253 (1973).
- [11] Greca, I. & Moreira, M., *Un Estudio piloto sobre representaciones Mentales, imágenes, proporciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético en alumnos de física general, estudiantes de postgrado y físicos profesionales*, Rev. Enseñanza de las ciencias **16**, 289-303(1998).
- [12] Bao, L. and Redish, E., *Understanding probabilistic interpretations of physical systems: A prerequisite to learning quantum physics*, Am. J. Phys. **70**, 210-217 (2002).
- [13] Everett, H., *“Relative State” Formulation of Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. **29**, 454-462 (1957).
- [14] Tipler, P., *Physics for scientist and engineers*, 4a. Ed. (Reverté, Barcelona, 1999).
- [15] Zeilinger, A., Ekert, A., Bouwmeester, D., *The Physics of Quantum Information*, 1a. Ed. (Springer, Germany, 2001).
- [16] Singh, C., *When physical intuition fails*, Am. J. Phys. **70**, 1103-1109 (2002).
- [17] Nairz, O., Amdt, M. & Zeilinger, A., *Quantum interference experiments with large molecules*, Am. J. Phys. **71**, 319-325 (2003).

Aarón Segura, Viviana Nieto y Esteban Segura

[18] Matteucci, G. & Beeii, C., *An experiment wave particle duality including a Planck constant measurement*, Am. J. Phys. **66**, 1055-1059 (1988).

[19] Alastair, I. M. R., *Física cuántica: ¿Ilusión o Realidad?*, (Alianza Editorial, Madrid, 1989).

[20] Klein, M., *Einstein and the wave-particle duality*, The natural philosopher **3**, 182-202 (1963).

[21] Hendry, J., *The Development of Attitudes to the Wave-Particle Duality of Light and Quantum Theory*, Annals of Science **37**, 59-79 (1980).

[22] Heisenberg, W., *The Physical Principles of the Quantum Theory*, (Univ. of Chicago Press, Chicago, 1930).



Aprendizaje activo de la física en alumnos de nivel secundario: Pre test de laboratorio sobre transformación de energía eléctrica en térmica

Dima, Gilda; Girelli, Marina; Reynoso Savio, María Fernanda

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de La Pampa,
Av. Uruguay No. 151, Santa Rosa, La Pampa, Argentina.*

E-mail: dimascari@cpenet.com.ar

(Recibido el 6 de Diciembre de 2011; aceptado el 13 de Febrero de 2012)

Resumen

Dado que la actividad experimental juega un papel importante en las clases de Física, el docente debe recurrir a estrategias que permitan al estudiante la construcción efectiva de su propio conocimiento. Aunque ella tiene el potencial para contribuir en gran medida al aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal, muchas investigaciones coinciden en que esto no se da. Por ello, es necesario revisarlas efectuando cambios adecuados para salvar este inconveniente. En el marco de un trabajo de investigación se propone la aplicación de una estrategia en las clases de laboratorio con alumnos de nivel secundario enmarcada en el Aprendizaje Activo y constructivista, donde los estudiantes realizan una tarea previa al práctico, que involucra aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales. La metodología utilizada es la de comparación de grupos, uno control (GC) y otro experimental (GE). El GC desarrollará las actividades de manera tradicional, y el GE utilizará la estrategia constructivista. Para la recolección de datos uno de los instrumentos a utilizar son los pre tests, los que permiten reflotar las ideas previas de sus estudiantes. Presentamos aquí un modelo de pre test, referido a la experiencia de laboratorio: Transformación de energía eléctrica en térmica.

Palabras clave: Problemas Ricos en Contexto; Estrategia Didáctica, Ideas Previas, Trabajo de laboratorio.

Abstract

As experimental activity takes care an important place in Physics classes, the teacher must use strategies which allow students to build up their own knowledge. In spite of it has the potential to contribute greatly to conceptual, procedural and attitudinal aspects, lot of investigations agree that it does not occur. So, it is necessary to review them doing adequate changes in order to solve this inconvenient. In the frame of an investigation work it is proposed the application of a strategy in Physics lab works with secondary students framed in constructive and active learning, where they do a previous task, which includes conceptual, procedural and attitudinal aspects. The methodology used is the comparison of groups, one the control group (CG) and the other the experimental one (EG). The CG will develop the activities in a traditional way and the EG will use the conductivity strategy. Pre tests, which will be used as one of the instruments for dates collecting, allow students prior ideas arise. Here we present a model of a pre test referred to the lab experience: The transformation of electric energy in thermic one.

Keywords: Context Rich Problems; Didactic Strategy, Prior Ideas; Physics Lab work.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.gb, 01.40.ek

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En el campo de la Didáctica de las Ciencias y de la Física en particular las tendencias actuales de investigación señalan que es necesario adoptar nuevos modelos en los que los roles del profesor y del alumno cambien así como el curriculum y la tarea en clase [1, 2]. Ello implica describir los procesos, resultados, interacciones y demás elementos del aula, para que el propio docente pueda modificar su práctica.

Existen hipótesis que remarcan que una de las dificultades en el aprendizaje de la Física consiste en la incompreensión acerca del conocimiento científico, dado que

el saber de esta disciplina presenta características distintas respecto de aquel saber que los estudiantes construyen en su interacción con los hechos de la vida cotidiana.

Dado que la Física es una Ciencia experimental, la actividad de laboratorio debería jugar un papel fundamental en su aprendizaje. Por ello una de las herramientas a las que el docente de Física debería recurrir para ayudarse en esta tarea es la elaboración de estrategias para el trabajo de laboratorio que permitan al estudiante la construcción efectiva de su propio conocimiento y su acercamiento a los avances científicos modernos y a sus aplicaciones. Sería óptimo así, que los estudiantes produzcan un cambio profundo en su interpretación de estos hechos [3].

Dima, Gilda;Girelli, Marina; Reynoso Savio, María Fernanda

Los satisfactorios resultados alcanzados a partir de una estrategia constructivista en experiencias de laboratorio, basada en la Resolución de Problemas Ricos en Contexto (PRC), tendiente a favorecer cambio conceptual en estudiantes de Física Básica Universitaria y fueron evidenciados en una Tesis de Maestría en Enseñanza de la Física [4]. En ella se concluyó que la utilización de metodologías de enseñanza de la Física que fomentan el Aprendizaje Activo permite obtener niveles de logro ampliamente superiores a los alcanzados en las clases tradicionales.

Por todo lo expuesto y como continuación del trabajo de Tesis mencionado más arriba, se propuso un Proyecto de Investigación¹ tendiente a aplicar dicha estrategia en el nivel secundario.

Presentamos aquí un modelo de pretest, el cual constituye una parte de los instrumentos a utilizar para la toma de datos.

II. MARCO TEÓRICO

Son numerosos los trabajos de investigación que mencionan la importancia de las experiencias de laboratorio en la enseñanza de la Física [5, 6, 7]. Sin embargo, la realidad es que esta etapa experimental en general se ve como una pérdida de tiempo, en la cual se presentan situaciones ideales en las que los estudiantes “verifican” los conceptos estudiados en clase.

En la enseñanza tradicional, el docente es el emisor de los contenidos conceptuales mientras que los estudiantes tienen un rol netamente acrítico y pasivo [8]. Esto conduce a resultados de aprendizaje por demás bajos [9].

La Teoría Constructivista y en particular el modelo de aprendizaje significativo de Ausubel destaca el aprendizaje significativo estableciendo las diferencias entre aprendizaje significativo y aprendizaje memorístico [10]. Esta teoría posiciona al estudiante como parte activa e interesada en el proceso de aprendizaje [11] y establece que sus ideas previas juegan un papel primordial para la construcción de los nuevos significados; su idea del mundo va acercándose cada vez más a la aceptada científicamente [12, 13, 14, 15, 16].

De forma diversa el docente puede reflotar las ideas previas de sus estudiantes (cuestionarios, pre test, discusión grupal, situaciones problemáticas, etc). Las estrategias que favorecen un aprendizaje activo deben poder integrar aspectos conceptuales, actitudinales y procedimentales con el fin de poder hallar la relación, la transformación y la aplicación de los conocimientos nuevos. Todo esto se ve favorecido con el trabajo cooperativo en el grupo de alumnos [17, 18, 19, 20].

Las estrategias de enseñanza basadas en el Aprendizaje Activo ponen el énfasis en el rol activo de quien aprende con el fin de que sea el alumno el responsable de la construcción de su propio conocimiento [21, 22].

Todo lo mencionado en los párrafos anteriores puede llegar a alcanzarse cuando el trabajo experimental es desarrollado sobre la base de una metodología que disminuya la carga conceptual de manera de favorecer la autonomía de los estudiantes y de orientarlos hacia la relación existente entre teoría y práctica [23, 24].

III. METODOLOGÍA

Se lleva a cabo una investigación por comparación de grupos [25], con el fin de poder determinar si se establecen diferencias, a partir de la tarea experimental, en el aprendizaje conceptual, procedimental y actitudinal entre el grupo experimental (GE) y el grupo control (GC). Las actividades se estructuraron de manera de favorecer el Aprendizaje Activo en el GE, mientras que en el GC se desarrollará una tarea experimental de características tradicionales.

La muestra la componen los alumnos de 2° año del nivel secundario, modalidad Ciencias Naturales del Colegio Provincia de La Pampa, de la ciudad de Santa Rosa, La Pampa, Argentina. Durante el año académico se estudian dos grandes temas calorimetría (durante el primer cuatrimestre) y electrodinámica (en el segundo cuatrimestre del año).

El GE trabajará sobre la base de una guía de laboratorio que incluye un PRC y las siguientes etapas:

✓ **Predicción:** debe realizarse como tarea previa al laboratorio. En ella los alumnos darán, individualmente, respuesta a una serie de preguntas referidas al PRC presentado inicialmente. El propósito de esta tarea es que los alumnos piensen individual y críticamente en la física del problema a partir de los conceptos estudiados en clase. Ya en el aula de laboratorio se generará la discusión grupal para afrontar las inconsistencias que se presentasen, fomentándose el intercambio de ideas al mostrar los alumnos a sus compañeros de grupo cuál ha sido el razonamiento utilizado para responder cada una de las consignas.

✓ **Método:** también a realizar como tarea previa. En ella los alumnos deben pensar el diseño experimental que les permitiría dar una respuesta al problema planteado inicialmente y qué precauciones tener para la toma los datos. Esta etapa también contribuirá a que los estudiantes discutan al inicio del práctico sobre sus mediciones y analicen las posibles fuentes de incerteza.

✓ **Procedimiento Experimental:** en ella se debe acordar el armado del equipo, organización y precauciones para con la tarea experimental.

Los instrumentos para realizar los registros se construirán de acuerdo a la selección de datos que serán objeto de atención. Luego se interpretarán los mismos para identificar pautas que llevarán a la explicación teórica que de cuenta de las mismas.

¹ Las Experiencias de laboratorio en temas de electricidad como estrategia didáctica para favorecer el Aprendizaje Activo de la Física en el nivel Secundario, aprobado por el Consejo Directivo de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, La Pampa, Argentina.

Los pretests, son uno de los instrumentos a través de cuales se podrán indagar los conceptos relevantes que los estudiantes poseen y si existieran, las concepciones previas.

Durante el año 2010 se elaboraron tres pretests, cada uno de ellos correspondiente a cada uno de los tres trabajos de laboratorio que se implementaron en la investigación.

Por razones de espacio, en este trabajo sólo presentaremos el que refiere (ANEXO I) a la última experiencia de laboratorio: *Transformación de energía eléctrica en térmica* en la que se pretende dar un sentido unificado al concepto de energía. A efectos de su validación, este pre test fue aplicado en alumnos de perfil similar al de la muestra que compone esta investigación. Este instrumento se redactó sobre la base de los contenidos conceptuales incluidos en calorimetría vistos previamente por estos alumnos.

IV. CONCLUSIONES

Se cree que con el diseño y la implementación de una estrategia que favorezca el Aprendizaje Activo de la Física en las prácticas de laboratorio de nivel secundario, es posible dar solución a cada uno de los inconvenientes mencionados en este trabajo y contribuir significativamente a mejorar aspectos de la enseñanza secundaria deficientes y altamente cuestionados por la sociedad, como son el aprendizaje memorístico, basado en la utilización de algoritmos y descontextualizado de la realidad cotidiana.

A su vez, para el logro de este propósito es indispensable conocer las ideas previas de los alumnos, para lo cual la implementación de pretests juega un papel preponderante.

En este sentido, es posible que el docente prepare pretests bien planteados y controlados, en cuyo cometido no puede improvisar y debe disponer de tiempo suficiente para dedicarle a esta tarea.

REFERENCIAS

- [1] Gil, P. D., *Diez años de investigación en Didáctica de las Ciencias. Realizaciones y perspectivas*, Enseñanza de las Ciencias **12**, 154-164 (1994).
- [2] Furió, M. C. J., *Tendencias actuales en la formación del Profesorado de Ciencias*, Enseñanza de las Ciencias **12**, 188-199 (1994).
- [3] Pozo, J. I. y Gómez, C. M. A., *Aprender y enseñar ciencia. Del conocimiento cotidiano al conocimiento científico*, (Morata, Madrid, 1998).
- [4] Dima, G., Benegas, J. y Wilgging, P., *Las experiencias de laboratorio como estrategia para favorecer el cambio conceptual en estudiantes de Física Básica Universitaria*, Tesis de Maestría en Enseñanza de la Física, Facultad de Ciencias Físico, Química y Matemáticas, UNSL (2007).
- [5] Salinas, J., *Los prácticos de Física Básica en laboratorios universitarios*, Tesis Doctoral, Revista de Enseñanza de la Física, Volumen Extraordinario (1996).
- [6] Beney, M. y Séré, M. G., *Entre réussir et comprendre ou de l'effet des consignes opératoires sur la compréhension* Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 6, No. 1, March 2012

- des procédures de mesurage en TP de physique de 1r. cycle universitaire*, Didaskalia **19**, 9-37 (2001).
- [7] Petrucci, D., Ure, J. y Salomone, H., *Cómo ven a los trabajos prácticos de laboratorio de física los estudiantes universitarios*, Revista de Enseñanza de la Física **19**, 7-20 (2006).
- [8] Antúnez, G. C., Pérez, S. M. y Petrucci, D., *Lo que dicen los docentes sobre aprendizaje y enseñanza de física en el laboratorio*, Memorias en CD del Noveno Simposio de Investigación en Física (SIEF9), ISBN: 978-987-22880-4-4, Sesión A2, Área Temática 2, p.8. Rosario, Santa Fe (2008).
- [9] Arons, A., *A Guide to Introductory Physics Teaching*, (Wiley, New York, 1990).
- [10] Ausubel, D., Novak, L. y Hanesian, H., *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, (Trillas, México, 1996).
- [11] Hüber, G., *Aprendizaje activo en contextos desarrollados*, (U. Barcelona, España, 2000).
- [12] Sirur, F. J. y Benegas, J., *Retención de los conceptos de circuitos eléctricos a un año de la instrucción: Aprendizaje Activo vs. Enseñanza Tradicional*, Resúmenes en CD, Octavo Simposio de Investigación en Física (SIEF8), Trabajo 22, 188-197, Gualeguaychú, Entre Ríos (2006). ISBN 13978-950.
- [13] de Andrea, G. A. y Gómez, G. A., *La enseñanza de física de 2º de bachillerato mediante el aprendizaje significativo y funcional: algunos fenómenos electrostáticos*, Alambique **47**, Didáctica de las Ciencias Experimentales 102-110 (2006).
- [14] Billal, E. y Erol, M., *Investigating students' conceptions of some electricity concepts*, Latin American Journal of Physics Education **3**, 193-201 (2009).
- [15] Manjarrez, J. A., Alejo, C. A. y Slisko, J., *Ideas previas de estudiantes de bachillerato sobre el movimiento del planeta Tierra y su relación con la visión teleológica*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 225-231 (2011).
- [16] Pathare, S. R. and Pradhan, H. C., *Students' misconceptions about heat transfer mechanisms and elementary kinetic theory*, Publishing Ltd Physics Education **45**, 629-634 (2010).
- [17] Fogliati, P. J. y Catalán, L., *Electromagnetismo básico. Una propuesta para docentes de nivel medio/polimodal*, Memorias en CD del Noveno Simposio de Investigación en Física (SIEF9), ISBN: 978-987-22880-4-4, Sesión M2, Área temática 2, Comunicación mural. p.11. Rosario, Santa Fe (2008).
- [18] Slisko, J., *How can formulation of physics problems and exercises aid students in thinking about their results*, Latin American Journal of Physics Education **2**, 137-142 (2008).
- [19] Zafer, T. y Mustafa, E., *Effects of cooperative learning on instructing magnetism: Analysis of an experimental teaching sequence*, Latin American Journal of Physics Education **2**, 124-136 (2008).
- [20] Keban, F. y Erol, M., *Effects of strategy instruction in cooperative learning groups concerning undergraduate Physics labworks*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 140-146 (2011).

Dima, Gilda;Girelli, Marina; Reynoso Savio, María Fernanda

[21] Benegas, J. y Villegas, M., *La Enseñanza Activa de la Física: La Experiencia de la UNSL*, IX Conferencia Interamericana sobre Educación en la Física, San José de Costa Rica, Costa Rica (2006).

[22] Benegas, J., *Tutoriales para Física Introductoria: Una experiencia exitosa de Aprendizaje Activo de la Física*, Latin American Journal of Physics Education **1**, 32-38 (2007).

[23] Séré, M. G., *La enseñanza en el laboratorio. ¿Qué podemos aprender en términos de conocimiento práctico y*

de actitudes hacia la ciencia?, Enseñanza de las Ciencias **20**, 357-368 (2002).

[24] Benegas, J. y Villegas, M., *Influencia del texto y del contexto en la Resolución de Problemas de Física*, Latin American Journal of Physics Education **5**, 217-224 (2011). ISSN 1870-9095.

[25] Crowl, T., *Fundamentos de la investigación educativa*, Capítulo 12, Traducción de V. González, (McGraw-Hill, M.de Higos, 1996).

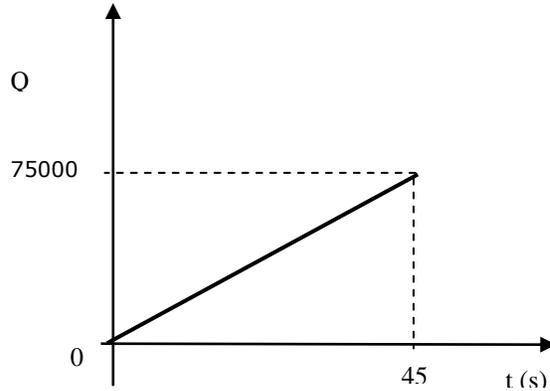
ANEXO Pre test III

**EXPERIENCIA DE LABORATORIO: TRANSFORMACIÓN DE ENERGÍA ELÉCTRICA EN TÉRMICA
FÍSICA II CN - COLEGIO PROVINCIA DE LA PAMPA**

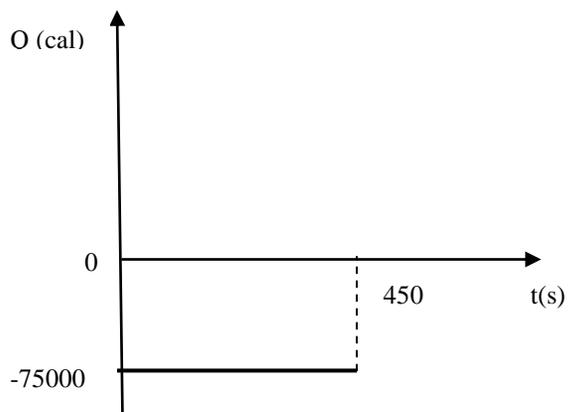
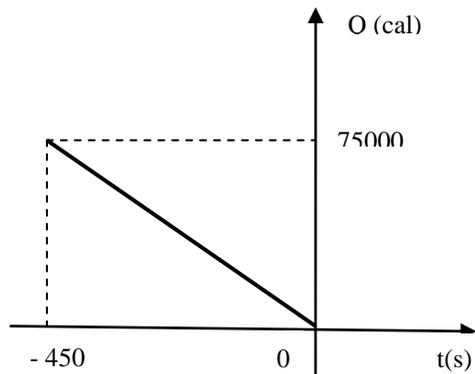
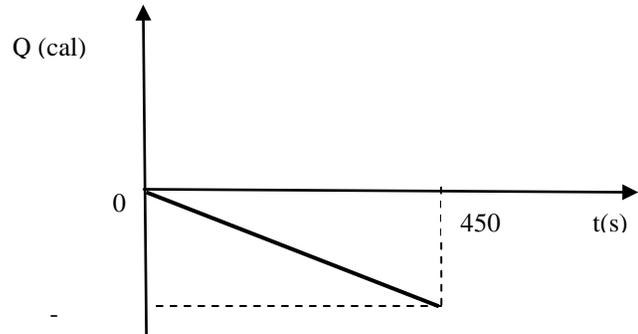
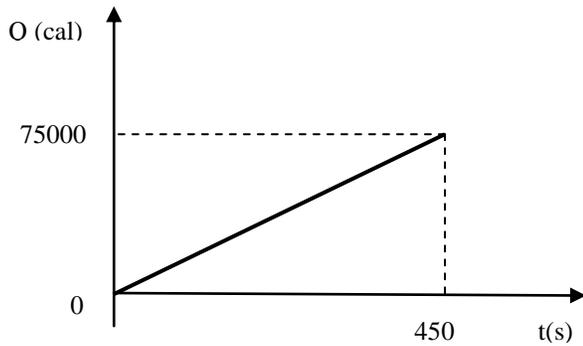
Nombre y Apellido: _____ **Fecha:** _____

En cierta experiencia de laboratorio se pusieron en contacto un calorímetro eléctrico, con cierta masa de agua, inicialmente a temperatura ambiente. Durante el período de tiempo en el cual el calorímetro permaneció conectado la masa de agua intercambió energía térmica con él.

Supongamos que la siguiente gráfica representa la energía térmica que recibe la masa de agua en función del tiempo:



A continuación se presenta un grupo de gráficas que muestran la cantidad energía térmica intercambiada en la resistencia del calorímetro en función del tiempo. Indica cuál se corresponde con la gráfica mostrada más arriba.



FUNDAMENTA TU RESPUESTA

Uso de técnicas digitales para el estudio del movimiento de cuerpos rígidos



Pablo Nuñez, Néstor Olivieri, María Llera y Eduardo E. Rodríguez

Instituto de Industria, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina

E-mail: erodrigu@ungs.edu.ar

(Recibido el 7 de Enero de 2012, aceptado el 10 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo se presentan técnicas digitales de captura de imágenes para analizar dos experimentos con cuerpos rígidos en los que se estudian la condición de rodadura y el efecto del deslizamiento. Las técnicas consisten en el uso combinado de fotografías de larga exposición y análisis de video cuadro por cuadro. En una de las experiencias se evidencia la transición de rodadura a deslizamiento desde un punto de vista geométrico y en la segunda se analiza el efecto del deslizamiento en la energía mecánica.

Palabras clave: fotografía de larga exposición, cuerpo rígido, rodadura.

Abstract

In this paper we present digital imaging techniques to analyze two rigid-body experiments in which the condition of rolling and the effects of sliding are studied. The techniques combine the use of long exposure photographs and frame-by-frame video analysis. In one of the experiences the transition from rolling to sliding is made evident, while the other examines the effect of slipping on the mechanical energy.

Keywords: long exposure photography, rigid body, rolling.

PACS: 45.40.Bb, Yy, 01.50.Pa, 07.68.+m

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

El movimiento de un cuerpo rígido está tratado en la mayoría de los libros de textos de Mecánica de nivel universitario [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]. En particular, recibe especial atención el caso de la dinámica de cuerpos que ruedan sin deslizamiento. En este caso, el análisis se facilita por el agregado a las ecuaciones dinámicas de ecuaciones de vínculo que relacionan las variables cinemáticas del movimiento del centro de masas del cuerpo (desplazamiento, rapidez y aceleración lineales) con las cantidades angulares análogas (desplazamiento, rapidez y aceleración angulares), estas últimas asociadas a la rotación en torno de un eje que pasa por el centro de masas.

En la práctica, un cuerpo rígido que rota y se traslada sobre una superficie puede plantear varios desafíos. Por ejemplo, estudiar el proceso de transición de deslizamiento a la condición de rodadura, o viceversa, y las consecuencias de dicho cambio respecto de la conservación de la energía mecánica. Estos problemas están presentados en los textos ya sea como ejemplo [8] o ejercicio [7], o bien como *puzzle* o problema de desafío [9].

En este trabajo analizamos movimientos de cuerpos que ruedan bajo diferentes condiciones y usamos técnicas de captura de imágenes digitales para tener acceso al registro completo de las características del movimiento.

II. TÉCNICAS DIGITALES

La dificultad inherente al estudio de cualquier movimiento radica en la obtención de datos de la posición en función del tiempo de los cuales deducir la velocidad y la aceleración. En el caso del movimiento de un cuerpo rígido, la dificultad se acentúa si se quiere analizar no sólo el movimiento del centro de masas (CM) sino también del movimiento de las partículas en torno al CM.

Mediante fotografías de larga exposición es posible obtener la trayectoria de algunos puntos de interés del cuerpo señalados convenientemente. Por ejemplo, para un cilindro que rueda apoyado en su generatriz se puede considerar un punto periférico en una de las caras circulares y otro en el centro. Si el cilindro está en rodadura, la trayectoria que describe el punto periférico es una cicloide que será registrada en la fotografía. Cualquier apartamiento de esta curva está asociado a la presencia de deslizamiento. El punto central, en cambio, se mueve linealmente con la velocidad del centro de masas del cuerpo.

A fin de que la trayectoria de los puntos seleccionados sobre el cuerpo aparezca con nitidez y buen contraste, es conveniente que los puntos estén marcados de color blanco, o bien que sean brillantes sobre un fondo negro opaco. Preferentemente, la escena tiene que estar dispuesta en un ambiente poco iluminado. Si fuera necesario aumentar el

contraste, se puede iluminar con una lámpara que emita ultravioleta (“luz negra”) para realzar los colores claros y los fluorescentes.

En simultáneo con una captura de larga exposición, una filmación del movimiento con una cámara digital es una adecuada técnica complementaria. Con cada cuadro del video es simple determinar la posición del objeto relativa a un sistema de referencia. La secuencia “cuadro a cuadro” permite conocer con detalle la evolución temporal del movimiento.

Para la captura de las imágenes, es útil ubicar dentro del cuadro de filmación y de fotografía un elemento de longitud conocida o bien realizar marcas igualmente espaciadas para luego calcular por escala las posiciones de los puntos en las imágenes en unidades de longitud conveniente [10, 11]. En efecto, con programas como Photoedit (®Microsoft) o la herramienta Paint (®Microsoft) se puede determinar las coordenadas en pixeles de los puntos de interés a estudiar. Estas coordenadas, por comparación con las referencias de longitud ubicadas dentro del cuadro, permiten convertir las posiciones en unidades de longitud. En nuestro caso, para hacer la captura de la información de posición (en pixeles) y de tiempo (en segundos) se ha utilizado el programa Data Point [12], que requiere videos en formato AVI. En el caso de ambientes muy oscuros es útil la opción *night-shot*, que algunas filmadoras tienen incorporadas. Esta variante permite filmar en condiciones de baja iluminación con el empleo de sensores con alta sensibilidad en el rango del infrarrojo cercano.

Tanto la cámara fotográfica como la filmadora deben estar ubicadas de modo que la escena donde transcurre el movimiento quede centrada, y a distancias tales que se minimice la paralaje, de manera que un objeto ubicado en el centro de la imagen tenga las mismas dimensiones (en pixeles) que cuando esté ubicado cerca del borde de la imagen. En caso contrario, podría aparecer algún problema de enfoque con consecuentes distorsiones de la imagen.

Por un lado, la imagen de la trayectoria obtenida por la fotografía de larga exposición y, por el otro, los datos de posición y tiempo capturados a partir del video constituyen en conjunto un recurso factible para analizar casos particulares de movimientos como son los casos de deslizamiento o rodadura.

A continuación, se presentan dos experiencias en la que se aplican estas técnicas para estudiar, en la primera de ellas, la transición de deslizamiento a rodadura de un cuerpo simétrico y, en la segunda, la disipación de energía en el instante de deslizamiento. La segunda experiencia está diseñada a partir de un problema propuesto en un texto de mecánica elemental utilizado en cursos universitarios [7] y que tiene variantes como en [8].

III. TRANSICIÓN DE DESLIZAMIENTO A RODADURA

La experiencia consiste en empujar un cuerpo cilíndrico sobre una superficie horizontal suave de modo que deslice

inicialmente para luego estudiar la transición a la rodadura. En el presente caso, el cuerpo es un recipiente de latón de 6,4 cm de radio. De manera conveniente, la cara circular de la lata se cubrió con papel negro y sobre ella se colocaron dos marcas de referencia con dos círculos de papel blanco, una como punto periférico y otra para registrar el movimiento del centro de masas. A simple vista, la elección de los colores en forma inversa puede parecer equivalente pero vuelve ineficaz la técnica fotográfica de larga exposición ya que la luz reflejada por objetos blancos termina saturando gran parte de la imagen. La cámara utilizada es una Canon 350D, puesta en modo manual, lo que permite hacer los ajustes para este tipo de imágenes. Para este caso fueron: ISO 800 (ISO hace referencia a la sensibilidad) y un tiempo de exposición de 2 segundos. No es aconsejable usar tiempos mayores a la duración del fenómeno ya que la captación de luz adicional resta innecesariamente contraste a la imagen.

La fotografía de larga exposición de la figura 1 muestra las trayectorias de un punto periférico y del punto central sobre el eje que pasa por el centro de masa. La trayectoria del punto periférico evidencia un tramo inicial de deslizamiento para luego pasar a la rodadura dada la cicloide asociada que se visualiza en la imagen.

En la figura 2 se muestra una composición de tres fotogramas de la filmación adicional realizada. En el fotograma central se puede observar que la marca de la periferia queda registrada con mayor nitidez cuando está pasando por la posición más baja, lo que se corresponde con el hecho que en caso de rodadura ese punto de contacto tendría velocidad instantánea relativa a la superficie igual a cero.

Una mayor cuantificación se puede hacer recordando que en condición de rodadura el módulo de la velocidad angular ω es igual al cociente entre la velocidad del centro de masa v_{CM} y el radio R del cilindro que rueda:

$$\omega = \frac{v_{CM}}{R} . \quad (1)$$

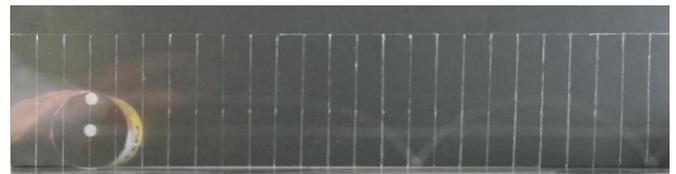


FIGURA 1. Fotografía de larga exposición, que permite tener en un sólo cuadro la trayectoria de los dos puntos resaltados. La lata es empujada rápidamente y desliza hasta que entra en condición de rodadura evidenciada por la trayectoria cicloidal del punto periférico.

Mediante un análisis cuadro a cuadro del video es posible evaluar el cociente v_{CM}/R y determinar el instante en que éste satisface la condición de rodadura, es decir cuando su valor coincide con la velocidad angular ω . En este caso se utilizó una cámara Sony DCR-SR45 para capturar imágenes a una tasa de 30 cuadros por segundo.



FIGURA 2. La imagen es una composición que reúne tres fotogramas obtenidos del video. En el segundo cuadro la nitidez del punto periférico indica que su velocidad es nula, se halla instantáneamente detenido en un cuerpo que rueda y se traslada.

En la figura 3 se muestran la velocidad angular ω del cuerpo y el cociente v_{CM}/R entre la velocidad de su centro de masas y el radio. Se puede observar que, al comienzo, la velocidad angular es casi nula y crece hasta quedar aproximadamente constante. Por su parte, la velocidad de traslación crece repentinamente por la acción de la fuerza ejercida por la mano que empuja para iniciar el movimiento. Luego, como actúa sólo la fuerza de fricción en el deslizamiento, la velocidad disminuye hasta hacerse también aproximadamente constante. Una vez que el cociente v_{CM}/R iguala el valor de la velocidad angular ω , el cuerpo entra en rodadura y se verifica la relación (1).

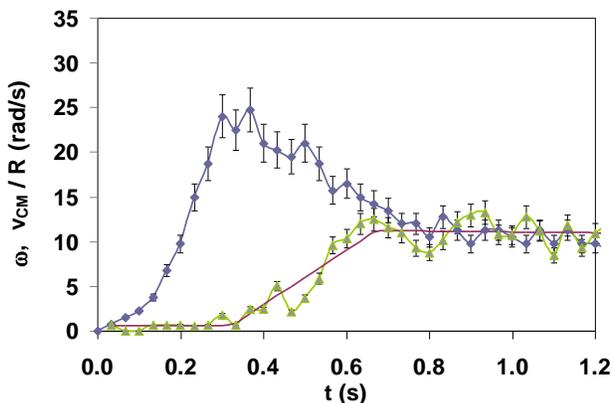


FIGURA 3. Evolución del cociente v_{CM}/R (azul) y de la velocidad angular ω (verde). La convergencia de las curvas verifica la condición de rodadura sin deslizamiento. Las líneas son indicativas de la tendencia de cada variable

IV. DISIPACIÓN DE ENERGÍA POR DESLIZAMIENTO

En esta experiencia consideramos el problema planteado en un texto universitario de Física en el que se estudia un cuerpo que está formado por un cilindro de radio r y masa m

al que se le han adosado dos discos de radio R y masa M en sus extremos.[7] La propuesta del problema es determinar cómo cambian las velocidades del cuerpo al rodar inicialmente cuesta abajo por un plano inclinado, apoyado sobre el cilindro, para luego continuar por el plano horizontal, apoyado sobre los discos (figura 4). El análisis teórico previo, suponiendo conservación de la energía mecánica, determina que al producirse el contacto de los discos con el plano horizontal (cambio de radio r a $R > r$) se produce un incremento de la velocidad del centro de masa y una disminución de la velocidad angular.

Esta hipótesis de conservación de la energía se puede contrastar mediante un experimento que muestra la trayectoria de un punto periférico y del centro de masa recurriendo a la fotografía de larga exposición. Por otro lado, la técnica de video y su análisis cuadro a cuadro permite estimar los valores de la energía mecánica a lo largo de todo el movimiento.

En este caso, se diseñó el dispositivo con un cilindro de madera de 15 cm de largo y un radio de 1,2 cm al que le adosaron dos CD en sus extremos. Se cubrió la cara circular del CD con papel negro opaco y se marcaron un punto en el centro y otro en la periferia con papel blanco. Los puntos están resaltados con tinta fluorescente, tal como se muestra en la imagen (figura 5).

Para realizar la experiencia se inclinó una pista de 120 cm de longitud, con un ángulo de inclinación pequeño de entre 5° y 10° , y de este modo se logró el plano inclinado; la superficie horizontal fue provista por el piso del laboratorio. El cuerpo se soltó desde la parte elevada del plano inclinado de modo que la velocidad inicial fuera cero.

Todo el movimiento de rodadura sobre el plano y a continuación por el piso ocurre en unos pocos segundos. Para obtener mayor nitidez de la trayectoria en la fotografía se usa “luz negra” para iluminar la escena.

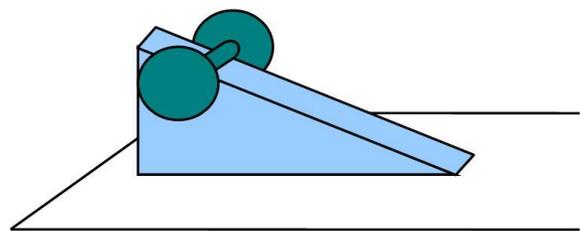


FIGURA 4. Esquema del problema, similar al que se encuentra en la bibliografía, Ref. [7].

En este caso, la iluminación elegida brinda mayor contraste de los puntos de interés y que permite captar movimientos más fugaces. Los otros recaudos técnicos que se mencionan en la primera experiencia son también válidos aquí.

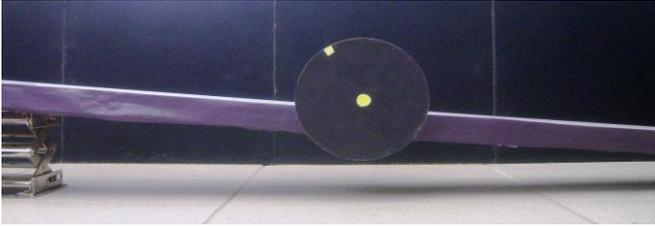


FIGURA 5. La imagen muestra el montaje del dispositivo para la captura de fotografías de larga exposición.

Las fotografías de larga exposición (figuras 6 y 7) muestran la trayectoria realizada por el punto de la periferia y el central en el recorrido. Se observa una cicloide alargada sobre el plano inclinado (circunferencia generatriz de radio r) y, luego de una transición cuando los discos apoyan, una cicloide común en el plano horizontal (circunferencia generatriz de radio R). El intervalo de transición no puede ser modelado con el empalme de esas dos cicloides (ver APÉNDICE), lo que estaría indicando que en un breve intervalo después del choque con el plano horizontal el cuerpo rota y al mismo tiempo desliza. Es útil notar que en ese lapso actúa una fuerza de rozamiento en dirección horizontal y hacia delante que incrementa la velocidad del centro de masas y a la vez produce un torque que disminuye la velocidad angular ω . La figura 8 muestra el estudio del movimiento cuadro a cuadro a partir del video obtenido con una cámara digital HP-M525 que captura 17 cuadros por segundo. El incremento de velocidad del centro de masa resulta inferior al esperado bajo la suposición de que la energía mecánica se conserva. Esto representa una disipación de energía debido a la acción de la fuerza de rozamiento en el intervalo de contacto de los discos con el piso.

La presencia momentánea de dicha fuerza de rozamiento trae aparejada una variación de energía que se puede estimar en base a los datos extraídos del análisis cuadro a cuadro del movimiento. La figura 9 muestra la energía mecánica del cuerpo a lo largo de la trayectoria. Es notable cómo en el instante en que el cuerpo cambia su circunferencia generatriz (que coincide con el cambio de superficie) la energía decae abruptamente al producirse el deslizamiento de los discos en el piso. Ese instante se corresponde también con la transición entre las dos cicloides que describe el punto en la periferia, según queda evidenciado en la fotografía de larga exposición. El choque inelástico del cuerpo cuando abandona el plano inclinado y toma contacto con la superficie horizontal también contribuye a la disipación de la energía mecánica.

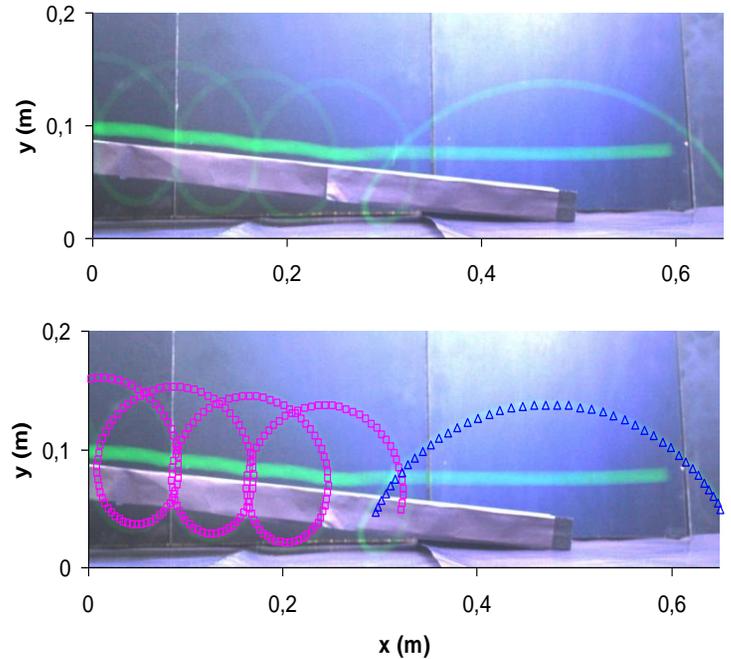


FIGURA 6. Trayectorias del punto de la periferia y del punto central, tal como se observan en las fotografías de larga exposición.

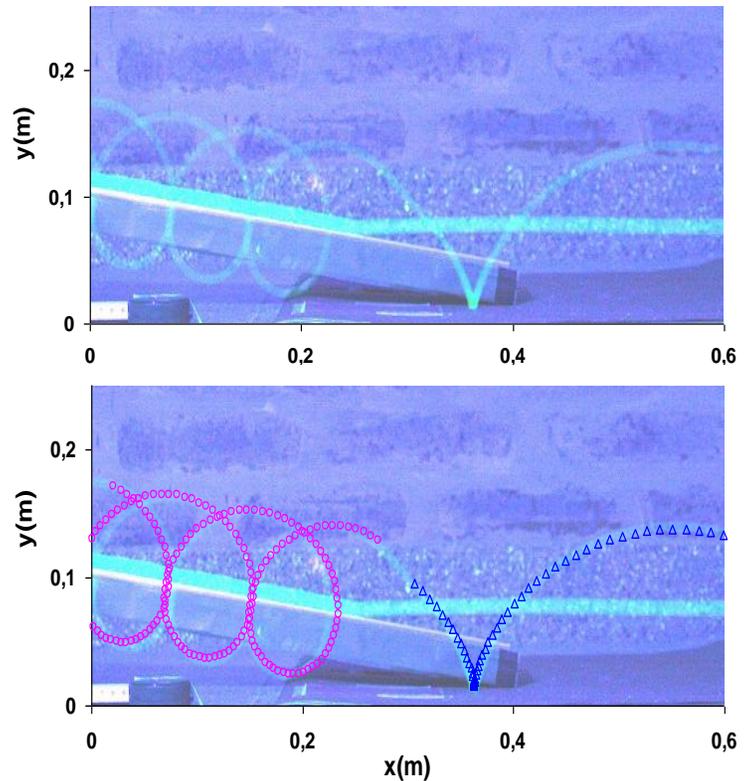


FIGURA 7. Según la posición del punto periférico en el momento de contacto de los discos con el plano horizontal, se generan distintas trayectorias que enlazan a las cicloides.

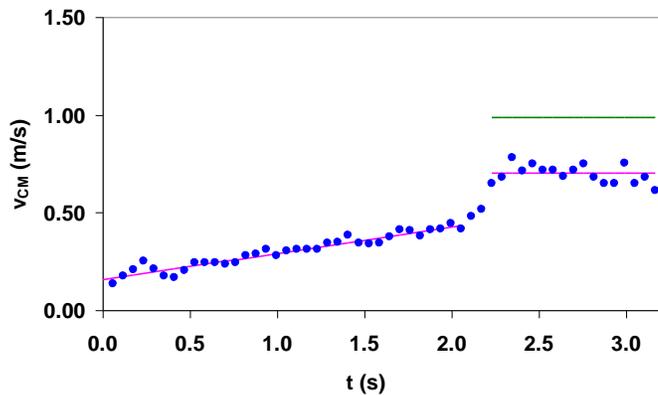


FIGURA 8. Velocidad del centro de masas del cuerpo que rueda. La velocidad creciente corresponde al trayecto sobre el plano inclinado. Se observa el cambio de la velocidad cuando los discos apoyan sobre el plano horizontal. La línea verde indica el valor esperado de la velocidad en el plano horizontal si se conservara la energía mecánica.

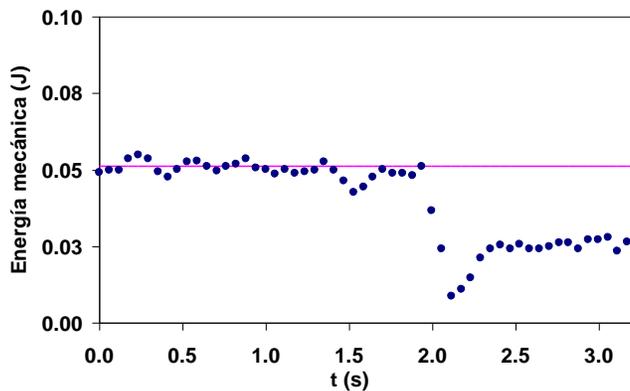


FIGURA 9. Energía mecánica evaluada del cuerpo. Se observa un cambio en la energía en el momento en que los discos tocan el plano horizontal.

CONCLUSIONES

Estas técnicas permiten realizar mediciones de magnitudes que usualmente son difíciles de efectuar por la complejidad de fenómenos tales como las rotaciones, deslizamientos y las trayectorias en general diversas de cuerpos rígidos. Para el estudio de estos fenómenos los dispositivos no son de gran sofisticación, se requieren elementos técnicos que actualmente están muy difundidos como son la cámara de video y la cámara fotográfica digital.

En particular, de la cámara fotográfica digital se aprovecha el modo de larga exposición que resulta adecuado para la captación de trayectorias de puntos de interés en un determinado movimiento. Cada escenario de obtención de imágenes requiere un montaje que debe tener en cuenta cuestiones de iluminación y contraste de colores para su

mejor apreciación, que se van mejorando con el ensayo y error.

Es fundamental lograr imágenes suficientemente claras como para realizar los análisis de las experiencias expuestas. Subordinado a lo anterior queda la posibilidad de aplicar sobre las imágenes capturadas consideraciones estéticas para ilustrar mejor los fenómenos a estudiar.

Por su parte, la cámara de video digital permite reconstruir el movimiento estudiado a partir de posiciones y tiempo que posibilita la observación del video cuadro por cuadro. Además es posible captar, en ciertos cuadros, momentos de interés específicos del movimiento.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con apoyo del proyecto “Experimentos en contexto para la enseñanza y el aprendizaje de la ciencia y la tecnología” del Instituto de Industria de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). Agradecemos a los responsables del Laboratorio de Física del Instituto de Ciencias de la UNGS la sesión de instrumental necesario para los experimentos presentados.

REFERENCIAS

- [1] Gettys, W., et al., *Física para ingeniería y ciencias, Tomo 1* (McGraw-Hill, México, 2005).
- [2] Sears, F., et al., *Física Universitaria, Vol 1.* (Pearson Educación, México, 2004).
- [3] Tipler, P., *Física para la ciencia y la tecnología, Vol. 1* (Reverté, España, 2001).
- [4] Searway, R., *Física, Tomo 1* (Mc Graw-Hill, México, 1999).
- [5] Bedford, A. y Fowler, W., *Dinámica. Mecánica para ingeniería. Tomo 1* (Addison Wesley Iberoamericana, Estados Unidos, 1996).
- [6] Ingard, U. y Kraushaar, W., *Introducción al estudio de la mecánica, materia y ondas* (Reverté, España, 1972), p. 378.
- [7] Resnick, R., Halliday y D. Krane, K., *Física, Vol. 1* (CECSA, México, 1997), p. 297.
- [8] Lea, S. y Burke J., *Física. La naturaleza de las cosas, Vol 1* (International Thomson Editores, México, 1998).
- [9] Hewitt, P., *Rolling spool*, Phys. Teach. **48**, 566 (2010).
- [10] Laws, P. y Pfister, H., *Using Digital Video Analysis in Introductory Mechanics Projects*, Phys. Teach. **36**, 282 (1998).
- [11] Gil, S., Reisin, H. D. y Rodríguez, E. E., *Using a digital camera as a measuring device*, Am. J. Phys. **74**, 768-775 (2006).
- [12] *Data Point*, disponible como shareware en: <http://www.xannah.org/datapoint/>. Consultado en octubre de 2011.
- [13] Swartz, Clifford E., *Used Math* (American Association of Physics Teachers, 1993).

APÉNDICE

TRAZADO DE CICLOIDES

Para trazar las cicloides sobre las fotografías de larga exposición se han considerado las ecuaciones de la cicloide generada por un punto periférico P al rotar el cuerpo sobre los discos de radio R, cuando el cuerpo se desplaza en el plano horizontal; y las ecuaciones de las cicloides generadas por el mismo punto P debidas a la rotación sobre la generatriz del cilindro de radio r e inclinada un ángulo β debido al plano inclinado.

Cuando el cuerpo rueda sin deslizar sobre el plano horizontal, la cicloide que describe un punto de la periferia se puede representar por [13]:

$$\begin{aligned} x &= R(a - \text{sen}\alpha), \\ y &= R(1 - \text{cos}\alpha). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

Aquí, α es el ángulo de rotación del cuerpo. Por su parte, las ecuaciones de la cicloide que genera el mismo punto P al rodar el cuerpo sobre el cilindro de radio r se pueden obtener mediante la suma de vectores **a** y **b** en el sistema (x, y) solidario al plano inclinado, como se observa en la figura 10:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (\text{A2})$$

El vector **a** ubica el centro de la cara circular respecto de O y el vector **b** corresponde a la posición de P visto desde el centro O'.

$$\mathbf{c} = (ra - R\text{sen}\alpha; r - \text{cos}\alpha). \quad (\text{A3})$$

Las coordenadas del vector **c** describen la cicloide generada por el punto P al rotar sobre la generatriz del cilindro de radio r.

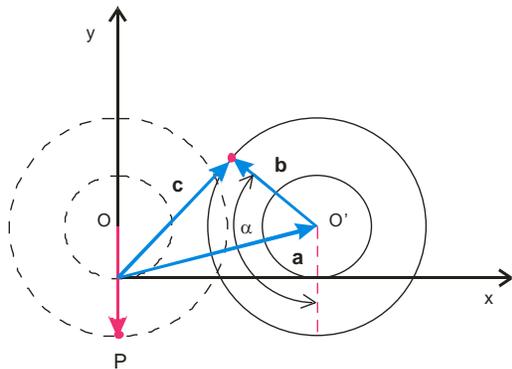


FIGURA 10. El cuerpo rota el ángulo α y se traslada la distancia OO'. Las coordenadas del punto P dadas por el vector **c** describen la ecuación de la cicloide. Este vector se obtiene de la suma de los vectores **a** (centro del cuerpo en el sistema (x, y)) y del vector **b** que corresponde a la posición relativa de P respecto del centro O'.

Finalmente debemos expresar al vector **c** rotado el ángulo β del plano inclinado respecto del sistema (x, y). Para ello se puede considerar la siguiente suma de vectores (ver figura 11):

$$\mathbf{c} = \mathbf{s} + \mathbf{t}, \quad (\text{A4})$$

donde $\mathbf{s} = (y' \text{sen } \beta; y' \text{cos } \beta)$ y $\mathbf{t} = (x' \text{cos } \beta; -x' \text{sen } \beta)$.

Considerando que x' e y' son las ecuaciones de la cicloide según lo expresado en (A3), obtenemos la expresión del vector **c** rotado el ángulo β .

$$\mathbf{c} = (y' \text{sen } \beta + x' \text{cos } \beta, y' \text{cos } \beta - x' \text{sen } \beta). \quad (\text{A5})$$

Es decir que la ecuación de la cicloide generada en el plano inclinado es:

$$\begin{aligned} x &= (r - R \text{cos } \alpha) \text{sen } \beta + (ra - R \text{sen } \alpha) \text{cos } \beta, \\ y &= (r - R \text{cos } \alpha) \text{cos } \beta - (ra - R \text{sen } \alpha) \text{sen } \beta. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

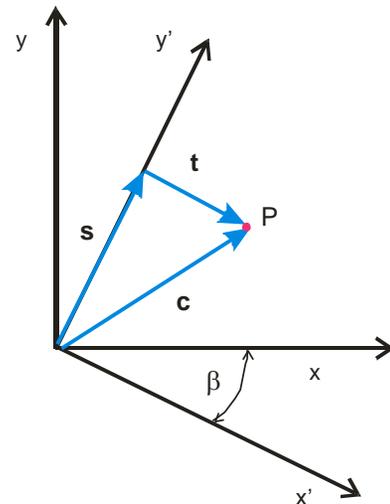


FIGURA 11. El punto P en el sistema (x, y) puede ser ubicado si se considera, por ejemplo, al vector **c** como la suma del vector **s** y del vector **t**.

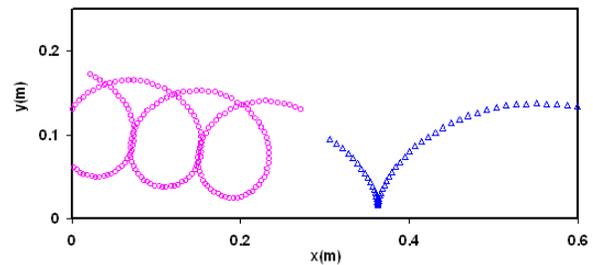


FIGURA 12. Las cicloides generadas según las ecuaciones para el plano inclinado y el plano horizontal a partir de los parámetros r, R y β . El ajuste de estos parámetros permite establecer sobre la fotografía dónde hay rodadura y dónde no.

Pablo Nuñez, Néstor Olivieri, María Llera y Eduardo E. Rodríguez

Las cicloides se pueden generar (figura 12) en una planilla de cálculo en función del ángulo de giro α y de los parámetros r , R y β . Luego, se pueden superponer a las fotografías de larga exposición para ajustarlas convenientemente a los datos experimentales.

Modelo matemático de un motor de corriente continua separadamente excitado: Control de velocidad por corriente de armadura

Manuel Sebastian Alvarez Alvarado

*Instituto de Ciencias Físicas, Escuela Superior Politécnica del Litoral,
Campus Gustavo Km 30.5 Vía Perimetral, Apartado 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.*

E-mail: manuel.alvarez.alvarado@ieee.org

(Recibido el 11 de Diciembre de 2011; aceptado el 10 de Marzo de 2012)

Resumen

En este trabajo se presenta el modelo matemático de un motor de corriente continua. Se ha desarrollado el modelo matemático usando ecuaciones diferenciales y a su vez también se desarrollo el análisis respectivo en términos de las variables físicas que se tiene en el motor, como en la carga mecánica acoplada al mismo. Adicionalmente se ha simulado y se ha obtenido la respuesta de control de la velocidad la cual puede ser en función de la corriente de armadura y para esto se utilizo SIMULINK, una herramienta del programa MATLAB.

Palabras clave: Física, Maquinaria eléctrica, Transformada de Laplace, SIMULINK.

Abstract

This paper presents a mathematical model of a DC motor. We have developed a mathematical model using differential equations and in turn develop the analysis also relevant in terms of physical variables is taken into the motor, such as mechanical load coupled thereto. Additionally we have simulated and obtained the response of speed control which can be a function of the field current and for this we used SIMULINK, a MATLAB tool.

Keywords: Physics, Electrical machinery, Laplace Transform, SIMULINK.

PACS: 02.30.Hq, 02.30.Yy, 07.05.Qq.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Los motores de corriente continua son los más comunes y económicos, y se pueden encontrar en la mayoría de los juguetes a pilas, constituidos, por lo general, por dos imanes permanentes fijados en la carcasa y una serie de bobinados de cobre ubicados en el eje del motor, que habitualmente suelen ser tres y a su vez son ampliamente usados a nivel industrial. Los motores de corriente continua permiten un amplio rango de velocidad y pueden proporcionar un alto par-motor con control más sencillo y económico que cualquier motor de corriente alterna. En la actualidad los métodos de control de velocidad se han ido desarrollando considerablemente y los mas comunes son el control de velocidad por corriente de campo y el control de velocidad por corriente de armadura, que son técnicas de control no lineal.

Para poder analizar estos métodos se requiere del conocimiento físico del sistema, unidades de las constantes que aparecen en el modelo, selección adecuada de las variables de estado y conocimientos de desarrollo de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace y a su vez para poder observar el comportamiento un simulador el cual para objeto de estudio se utiliza

SIMULINK una herramienta del programa MATLAB. La selección de variables no es evidente, sino más bien resulta de la experiencia en el modelado de sistemas eléctricos y mecánicos, y así como de la apropiada selección de constantes físicas como de fricción, inercia y torque eléctrico.

En esta propuesta, se desarrolla el modelo matemático de un método de control de velocidad el cual es: control de velocidad por corriente de armadura. Para esto el motor a utilizar será un motor de excitación separada y se tendrá un análisis físico que explota el conocimiento sobre los parámetros y las unidades físicas del motor de corriente continua, así como cierta experiencia en identificar constantes de tiempo en sistemas eléctricos y mecánicos, y al mismo tiempo se tendrá un análisis matemático, pues se emplea la teoría de control para la selección de las variables de estado. Dentro del trabajo se presenta una simulación y se determina el comportamiento de la velocidad del motor con respecto a la corriente de armadura con condiciones iniciales establecidas.

Finalmente se concluye analizando los resultados obtenidos de la simulación con el modelo matemático determinado.

II. CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

Un motor de corriente continua está formado por un estator o inductor que es la parte fija del motor y un rotor o inducido que es la parte móvil.

El motor a utilizar es un motor de excitación separada, cuya característica principal es la bobina (inductor) que genera el campo magnético no se encuentra dentro del circuito del motor, es decir no existe conexión eléctrica entre el rotor y el estator como se muestra en la siguiente figura:

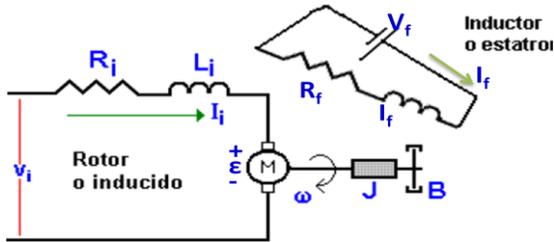


FIGURA 1. Esquema de un motor separadamente excitado.

El modelo ilustrado posee características eléctricas que consta de: V_i la tensión de alimentación del rotor, I_i la corriente que va a circular por el rotor también conocida por corriente de armadura, R_i la resistencia del bobinado del rotor, L_i la inductancia del bobinado del rotor, ε es la fuerza contra-electromotriz del motor, V_f es la tensión de alimentación del estator, I_f la corriente que va a circular por el estator, R_f la resistencia del bobinado del estator, L_f la inductancia del bobinado del estator. [1]

Para que el motor cumpla su función, normalmente se le coloca una carga mecánica en el eje del rotor y de esto dependerán las características mecánicas las cuales son: ω la velocidad angular de giro a la cual trabaja el rotor, J el momento de inercia equivalente del eje rotor con la carga que se desea colocar, B el coeficiente de rozamiento viscoso. [2]

III. DETERMINACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El modelado matemático del motor de corriente continua requiere de dos ecuaciones, una ecuación mecánica y otra ecuación eléctrica. Estas ecuaciones están acopladas y se basan en las Leyes de la dinámica y de Kirchhoff, respectivamente. Por una parte, la ecuación mecánica modela principalmente el movimiento del rotor, y por otra parte la ecuación eléctrica modela lo que ocurre en el circuito eléctrico del inducido. [3]

Al aplicar una tensión V_i al inducido, circula por él una corriente I_i , y debido a esta corriente, por el rotor, se inducirá una fuerza contra electromotriz (ley de Lenz “toda corriente se opone a la causa que la produce”) cuyo valor vendrá determinado por la expresión:

$$\varepsilon = K_b \times \omega(t) . \quad (1)$$

Siendo K_b la constante de fuerza contra-electromotriz [4].

Aplicando la ley de Ohm, la tensión útil será:

$$V_i - \varepsilon = R_i \times I_i(t) + L_i \times \frac{dI_i(t)}{dt} . \quad (2)$$

Remplazando la Ec. (1) en la Ec. (2):

$$V_i - K_b \times \omega(t) = R_i \times I_i(t) + L_i \times \frac{dI_i(t)}{dt} . \quad (3)$$

El rotor realizara su movimiento debido al torque electromagnético τ_e generado por el campo magnético que se produce en el estator y a su vez este dependerá de la corriente que circula en la armadura, de esta manera la ecuación es:

$$\tau_e = K_p \times I_i(t) . \quad (4)$$

Siendo K_p la constante de torque electromagnético.

El motor en su movimiento giratorio arrastra una carga, creándose por lo tanto, un par-motor resultante τ_c , y a su vez se tiene fricción en el sistema que depende de la velocidad a la cual gira el rotor y este causa un torque τ_f que es en sentido opuesto al movimiento, obsérvese esto en la siguiente figura.

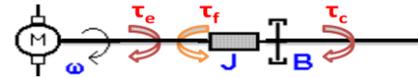


FIGURA 2. Diagramas de torques en el rotor.

Se define a α como la aceleración angular de la carga, de esta manera:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} . \quad (5)$$

La ecuación que describe a τ_c es:

$$\tau_c = J \times \alpha = J \times \frac{d\omega(t)}{dt} . \quad (6)$$

La ecuación que describe a τ_f es:

$$\tau_f = B \times \omega(t) \quad (7)$$

Ahora se procede a realizar una sumatoria de torque y se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum \tau = J \times \alpha, \quad \tau_e - \tau_f = \tau_c . \quad (8)$$

Remplazando las Ecs. (4), (6) y (7) en la Ec. (8):

$$K_p \times I_i(t) - B \times \omega(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad K_p \times I_i(t) = J \times \frac{d\omega(t)}{dt} + B \times \omega(t) . \quad (9)$$

Despejando $I_i(t)$ de la Ec. (9) y luego derivándola con respecto al tiempo da como resultado:

$$I_i(t) = \frac{J \times \frac{d\omega(t)}{dt} + B \times \omega(t)}{K_p}, \quad (10)$$

$$\frac{dI_i(t)}{dt} = \frac{J \times \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + B \times \frac{d\omega(t)}{dt}}{K_p}. \quad (11)$$

Sustituyéndola en la Ec. (10) y (11) en la Ec. (3), quedará una ecuación diferencial de segundo orden (aparece la segunda derivada), no homogénea, lineal y de coeficientes constantes [5], como se muestra a continuación:

$$V_i - K_b \times \omega(t) = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p} + L_i \times \frac{J \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + B \frac{d\omega(t)}{dt}}{K_p}. \quad (12)$$

De esta manera la Ec. (12) describe el modelo matemático para un motor de corriente continua separadamente excitado.

III. SOLUCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El modelo matemático ya fue descrito y para su solución es necesario tener una consideración de mucha importancia, el valor de la constante L_i para motores de corriente continua separadamente excitado, es aproximadamente cero y siendo así la ecuación diferencial se transforma en una ecuación de primer orden, no homogénea, lineal y de coeficientes constantes.

$$V_i - K_b \times \omega(t) = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p}. \quad (13)$$

Para el modelo se tiene como condición inicial que a tiempo igual cero (es decir cuando el motor va arrancar) el valor de la velocidad es cero:

$$t = 0 \rightarrow \omega(0) = 0.$$

Así, ordenando, arreglando la Ec. (13) y aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros de la ecuación, se obtiene:

$$V_i = R_i \times \frac{J \frac{d\omega(t)}{dt} + B \omega(t)}{K_p} + K_b \times \omega(t),$$

$$V_i = \left(\frac{R_i \times J}{K_p} \right) \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \left(\frac{R_i \times B}{K_p} + K_b \right) \times \omega(t),$$

$$\mathcal{L}[V_i] = \mathcal{L} \left[\gamma \times \frac{d\omega(t)}{dt} + \beta \times \omega(t) \right],$$

$$\frac{V_i}{s} = \gamma \times s \times \omega(s) + \beta \times \omega(s),$$

$$\frac{V_i}{s} = \omega(s) \times (\gamma s + \beta)$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{s(\gamma s + \beta)}. \quad (14)$$

Se define a las constantes γ y β como:

$$\gamma = \frac{R_i \times J}{K_p}; \quad \beta = \frac{R_i \times B}{K_p} + K_b.$$

Una vez obtenida la ecuación de la velocidad en función del tiempo se procede a resolver mediante fracciones parciales la Ec. (14).

$$\omega(s) = V_i \times \frac{1}{s(\gamma s + \beta)} = V_i \times \left(\frac{A}{s} + \frac{C}{\gamma s + \beta} \right). \quad (15)$$

Los valores de A y B que satisfacen la ecuación es:

$$A = \frac{1}{\beta}, \quad C = -\frac{\gamma}{\beta}.$$

De esta forma la ecuación queda descrita:

$$\omega(s) = V_i \times \left(\frac{\frac{1}{\beta}}{s} + \frac{-\frac{\gamma}{\beta}}{\gamma s + \beta} \right),$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{s} + V_i \times \frac{-\frac{\gamma}{\beta}}{\gamma s + \beta},$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{s} - V_i \times \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\left(\frac{s + \frac{\beta}{\gamma}}{\gamma} \right) \times \gamma},$$

$$\omega(s) = V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{s} - V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(s + \frac{\beta}{\gamma} \right)}. \quad (16)$$

Desde este punto la solución del modelo matemático ya es evidente, pues se procede aplicar la transformada de Laplace inverso a la Ec. (16).

$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{s} - V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(s + \frac{\beta}{\gamma} \right)} \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[V_i \times \frac{\frac{1}{\beta}}{\left(s + \frac{\beta}{\gamma} \right)} \right],$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\omega(s)] = \frac{V_i}{\beta} \times \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] - \frac{V_i}{\beta} \times \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\left(s + \frac{\beta}{\gamma} \right)} \right],$$

$$\omega(t) = \frac{V_i}{\beta} - \frac{V_i}{\beta} \times e^{-\frac{\beta}{\gamma} t},$$

$$\omega(t) = \frac{V_i}{\beta} \times \left(1 - e^{-\frac{\beta}{\gamma} t} \right). \quad (17)$$

La Ec. (17) describe el comportamiento de la velocidad de rotor en función tiempo, siendo así la solución del modelo

matemático para un motor de corriente continua separadamente excitado.

IV. SIMULACIÓN

A. SIMULINK una herramienta de MATLAB

La simulación es parte fundamental dentro del desarrollo del tema, pues de esta manera se podrá verificar gráficamente el comportamiento de las variables físicas que se desean analizar, que para este caso será la velocidad en función del tiempo. Para la simulación se utilizó SIMULINK, que es un paquete de software para modelar, simular y analizar sistemas dinámicos. Soporta sistemas lineales y no lineales, modelados en tiempo continuo, muestreados o un híbrido de los dos. Los sistemas pueden ser también multifrecuencia, es decir, tienen diferentes partes que se muestrean o actualizan con diferentes velocidades.

Para modelar, SIMULINK proporciona una interfaz de usuario gráfica (GUI) para construir los modelos como diagramas de bloques, utilizando operaciones con el ratón del tipo pulsar y arrastrar. Con esta interfaz, puede dibujar los modelos de la misma forma que lo haría con lápiz y papel (o como lo representan la mayoría de los libros de texto). Esto es un cambio radical respecto a los paquetes de simulación previos que requieren que formule las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones en diferencia en un lenguaje o programa. SIMULINK incluye una amplia biblioteca de bloques de sumideros, fuentes, componentes lineales y no lineales y conectores. Puede también personalizar y crear sus propios bloques. [6]

Los modelos son jerárquicos, es decir, puede construir modelos utilizando una metodología descendente y ascendente. Puede visualizar el sistema en un nivel superior, desde donde mediante un doble clic sobre los

bloques puede ir descendiendo a través de los niveles para ver con más detalle el modelo. Esto le proporciona una comprensión de cómo se organiza un modelo y cómo interactúan sus partes.

Después de definir un modelo, puede simularlo utilizando cualquiera de los métodos de integración que tiene a su disposición o bien desde el menú de SIMULINK o introduciendo órdenes desde la ventana de órdenes de MATLAB. Los menús son apropiados para un trabajo interactivo; mientras que el enfoque de línea de orden es muy útil para ejecutar un lote de simulación (por ejemplo, si está haciendo simulaciones de Monte Carlo o necesita barrer un parámetro a través de un rango de valores). Utilizando bloques Scopes y otros bloques de visualización, puede ver los resultados de la simulación mientras se está ejecutando. Además, puede cambiar los parámetros y ver de forma inmediata lo que sucede en exploraciones del tipo "que sucede si". Los resultados de la simulación se pueden transferir al espacio de trabajo de MATLAB para su posterior post-procesamiento y visualización.[7]

Las herramientas de análisis de modelo que incluyen linealización y determinación de estados estacionarios pueden ser accedidas desde la línea de orden de MATLAB, así como las muchas utilidades que MATLAB y sus toolboxes de aplicación poseen y como MATLAB y SIMULINK están integrados, pueden simular, analizar y revisar sus modelos en uno u otro entorno en cualquier momento. [8]

B. Descripción de los elementos que conforman el modelo para la simulación

En el siguiente gráfico se muestra el modelo realizado en SIMULINK de un motor de corriente continua de excitación separada y se describe cada elemento del sistema.

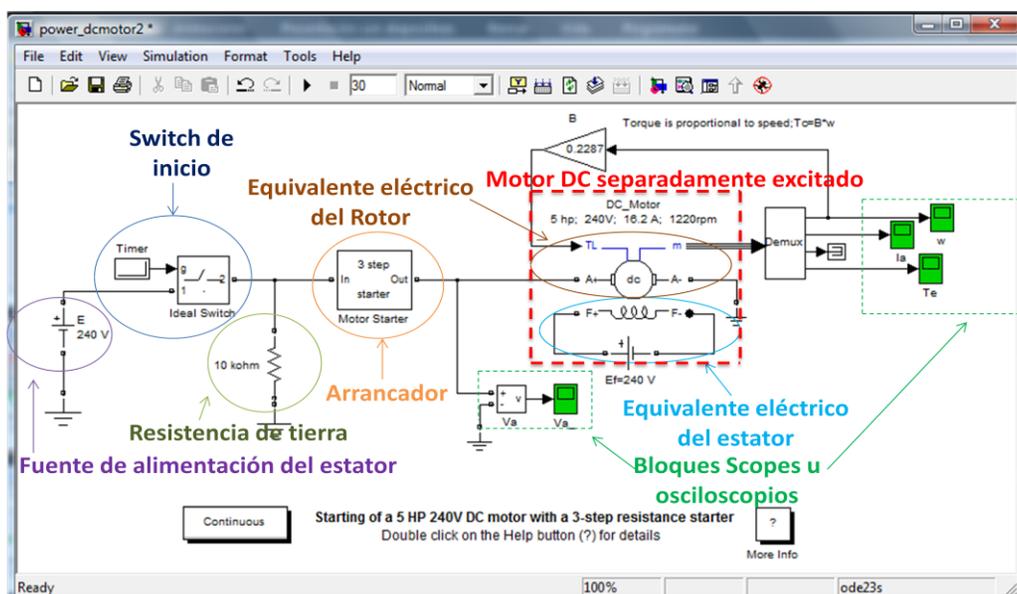


FIGURA 3. Esquema del motor de corriente continua de excitación separada realizado en SIMULINK.

Fuente de alimentación del estator: Representa el voltaje inyectado en el lado del estator.

Switch de inicio: Simula el interruptor de encendido y apagado del motor.

Resistencia de tierra: es la resistencia que actúa como protección para el motor.

Arrancador: Reduce la corriente durante el arranque para protección del motor.

Equivalentente eléctrico del Rotor: Circuito eléctrico que representa la parte móvil del motor.

Equivalentente eléctrico del estator: circuito eléctrico que representa la parte fija del motor.

Motor DC separadamente excitado: Simula el conjunto estator-rotor.

Bloques Scopes: Describe el comportamiento grafico de las variables físicas.

C. Ingreso de datos de las variables físicas de un motor corriente continua específico.

El modelo a simular es un motor de corriente continua de excitación separada y se simulara considerando los siguientes parámetros:

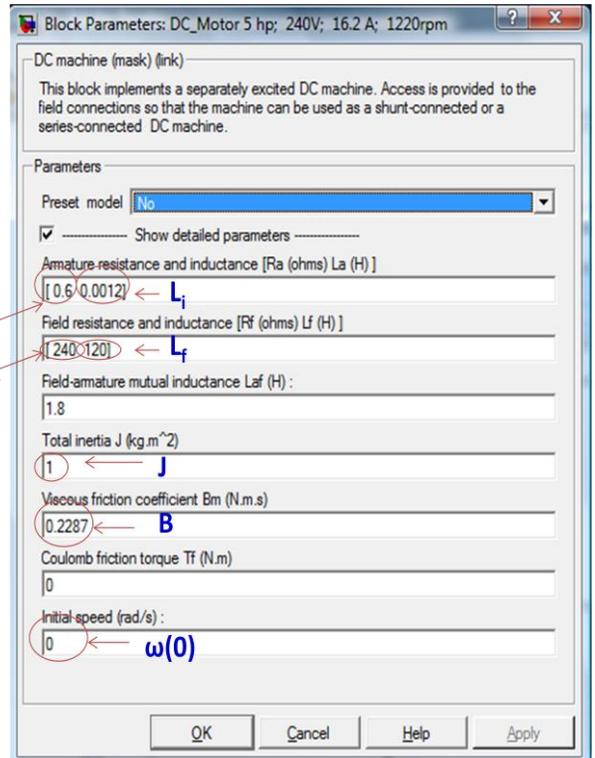


FIGURA 4. Ingreso de datos.

A continuación se procede a fijar el tiempo de simulación y luego se da click en el icono play.

TABLA I. Datos del motor de corriente continua.

Armadura					
$V_i(V)$	$I_i(A)$	$R_i(\Omega)$	$L_i(H)$	$kb(V.s)$	$kp(Nm/A)$
240	16,2	0,6	0,0012	1,8	0,4
Campo					
$R_f(\Omega)$			$L_f(H)$		
240			120		

TABLA II. Datos de la carga.

$J(Kg/m^2)$	$B(N.m.s)$
1	0,2287

El ingreso de datos a la simulación se muestra en la figura siguiente:

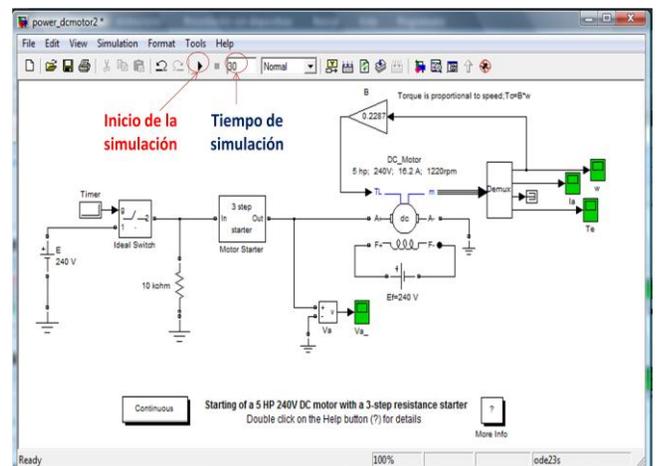


FIGURA 5. Inicio de la simulación.

V. RESULTADOS OBTENIDOS

Una vez realizada la simulación se observa el comportamiento de la velocidad en función del tiempo usando el scope de la velocidad.

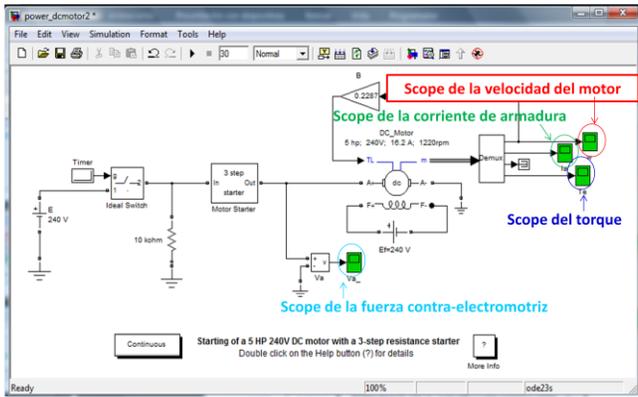


FIGURA 6. Scopes que determinan el comportamiento de variables físicas diferentes.

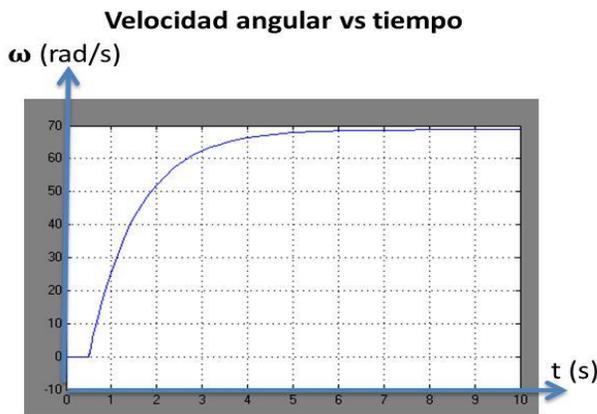


FIGURA 7. Comportamiento de la velocidad en función del tiempo.

Adicionalmente, se puede observar el comportamiento de otras variables físicas, como la corriente de armadura, el torque generado y la fuerza contra-electromotriz.



FIGURA 8. Comportamiento de la corriente de armadura en función del tiempo.

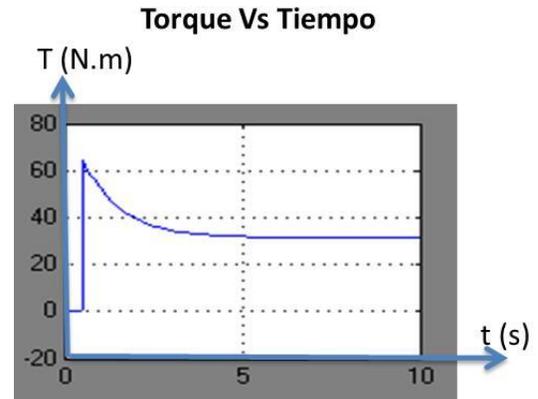


FIGURA 9. Comportamiento del torque generado en función del tiempo.

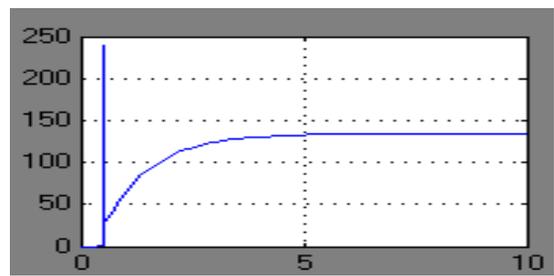


FIGURA 10. Comportamiento de la fuerza contra-electromotriz en función del tiempo.

Dentro de la simulación es posible variar los parámetros de la maquina e inclusive cambiar las condiciones iniciales del modelo y así obtener diferentes gráficas en función del tiempo.

VI. CONCLUSIONES

- 1) El modelo matemático de la velocidad del motor en función del tiempo obtenido teóricamente, es una función del tipo $f(t) = A(1 - e^{-\tau \cdot t})$ y está acorde a la gráfica obtenida en la simulación.
- 2) SIMULINK es una herramienta eficiente y de gran precisión para desarrollar, modelar y simular diferentes modelos matemáticos.
- 3) El análisis de los motores de corriente continua separadamente excitados, mediante el uso de un modelo matemático resulta de suma utilidad para poder anticipar los diferentes comportamientos de la maquina, ahorrando tiempo y evitando eventos indeseados.

REFERENCIAS

- [1] Álvarez, M., *Folleto de problemas de maquinaria eléctrica I*, (ESPOL, Guayaquil, 2008).
- [2] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. and Freedman, R., *Física universitaria*, 11ª Ed. (Pearson Education, California, 2006).
- [3] Fraile, M. J., *Maquinas eléctricas*, 5ta Ed. (Mc Graw Hill, España, 2003).
- [4] Rodríguez, S., Rodríguez, R., González, M., <http://www.izt.uam.mx/contactos/n75ne/motor.pdf>, visitado en Octubre 7 (2011).
- [5] Zill, D., *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, 6ta Ed. (Thomson, Virginia, 1997).
- [6] MathWork Inc., *Manual MATLAB. Version 7.0*, (Editorial Pearson, Estados Unidos, 2004).
- [7] Universidad Nacional de Quilmes, <http://iaci.unq.edu.ar/Materias/Cont.Digital/Apuntes/ApuntePagina/Practica%204.pdf>, visitado en Octubre 7 (2011).
- [8] Acosta, J., <http://www.esi2.us.es/~jaar/Datos/RegAuto/Practica3.pdf>, visitado en Octubre 9 (2011).

Characterisation of Cerium-Doped Lanthanum Bromide scintillation detector



Etim Iniobong Prosper¹, Obu Joseph Abebe², Ushie James Ogri³

^{1,2,3}Department of Physics, University of Calabar. P.M.B. 1115, Calabar,
Cross River State Nigeria.

E-mail: Ini2etim@yahoo.com

(Received 12 December 2011, accepted 6 March 2012)

Abstract

Cerium-doped lanthanum Bromide $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ crystals is one of the new scintillating detectors that has been developed in recent years which has proven to be superior to other scintillating materials in terms of resolution and efficiency. In this study we have carried out the characterisation of a 25mm X 25mm BrillianceTM 380 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector through the laboratory measurement of its energy resolution, intrinsic photo-peak, total intrinsic, total absolute efficiency and timing resolution. In addition, the energy dependence of the resolution has been studied using a variety of gamma ray sources with variable energy in the range (122-1408keV). The study showed that $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector has an excellent energy resolution of 2.6% full-width-at-half maximum (FWHM) at 662keV photons using a Caesium-137 (¹³⁷Cs) source at room temperature as compared to NaI(Tl) detector. Also, it was determined that the detector has a full-energy peak efficiency ranging from 90.1% to 4.3% in the energy range of 122-1408keV and for a source-to-detector distance of 150mm.

Keywords: BrillianceTM 380 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$, energy resolution, FWHM, intrinsic photo-peak, total intrinsic and total absolute efficiency.

Resumen

Los cristales de Bromuro de Cerio-Lantano dopado $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ es uno de los nuevos detectores centellantes que se ha desarrollado en los últimos años que ha demostrado ser superior a otros materiales centellantes en términos de resolución y eficiencia. En este estudio se ha llevado a cabo la caracterización de un 25mm x 25mm BrillianceTM 380 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ a través del detector de medición en el laboratorio de esta resolución de energía, de fotos-pico de actividad intrínseca, total intrínseco, eficiencia total absoluto y resolución de tiempo. Además, la dependencia de energía de la resolución se ha estudiado usando una variedad de fuentes de rayos gamma con energía variable en el rango (122-1408keV). El estudio mostró que el detector $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ tiene una excelente resolución energética del 2.6% total-ancho-de-la mitad máxima (FWHM) en 662keV fotones usando una fuente de Cesio-137 (¹³⁷Cs) a temperatura ambiente en comparación con el detector NaI(Tl). Además, se determinó que el detector tiene una eficiencia de energía pico-completa que van desde 90.1% a 4.3% en el rango de energía de 122-1408keV y una fuente-para-la distancia del detector de 150mm.

Palabras clave: BrillianceTM 380 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$, resolución de energía, FWHM, fotos-pico de actividad intrínseca, intrínseca total y eficiencia absoluta total.

PACS: 29.25.RM, 29.30.KV, 29.30.MC

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCTION

One of the best tools in obtaining experimental information on nuclear structure is the spectroscopy of gamma rays emitted in the de-excitation of a nucleus or in nuclear reactions [6]. The full understanding of these nuclear processes requires observations with instruments having excellent energy resolution together with reasonable efficiency. The use of spectrometers give information both on energy and intensity of the radiation emitted from the source. These spectrometers often referred to as detectors which are categories into gas detectors, scintillation detectors and semi-conductor detectors.

Scintillation crystals have been one of the earliest and popular methods used for the detection of gamma rays [2]. A scintillator is generally a material that emits low-energy (in the visible range) photons when they are struck by high-energy charge particle. Scintillator detectors are divided into organic and inorganic and the types of materials used depend on the application. One of the most commonly used scintillator detector is the inorganic one, where alkali halide salts such as sodium iodide (NaI) and caesium iodide (CsI) are used. An activator in the form of impurity (*e.g.* thallium) is introduced into the inorganic material in order to improve their performance.

The growing interest in scintillator detectors has led to the emergence of the cerium doped halide scintillator,

LaBr₃(Ce). This scintillator has demonstrated a high light output (~63,000 photons/MeV) with a fast decay time of 16 ns [7]. These attractive properties have distinguished it among other scintillators for selected applications in which the demand for energy resolution is a dominant factor over density and attenuation length. In this work, we have carried out a characterisation of the gamma-ray detection properties of LaBr₃(Ce), where the optimum operating voltage of the photomultiplier tube (PMT), shaping time of the amplifier, energy resolution and the detection efficiency of the detector was determined.

II. THEORY OF GAMMA-RAY INTERACTIONS IN SCINTILLATORS

There are three major interaction mechanisms that play vital roles in radiation measurements. These include photoelectric absorption, Compton scattering and pair production [2]. In each of these processes there is a partial or complete transfer of gamma-ray photon energy to the electron, resulting in a sudden change in the history of the gamma-ray photon, *i.e.*, the photon either disappears entirely or is scattered through a significant angle.

A. Photoelectric Absorption

This is a process in which a photon undergoes an interaction with an absorber atom and is completely absorbed, while an energetic photoelectron is concurrently ejected from one of the bound shells of the atom [2]. The interaction invariably occurs with the most tightly bound or K-electron of the atom, and does not occur with free electrons. The energy of the ejected photoelectron, E_e is given by

$$E_e = hv - E_b, \quad (1)$$

where E_b is the binding energy of the photoelectron in its original shell, and hv is the energy of the gamma-ray photon. Photoelectric absorption leads to the creation of an ionized absorber atom as a result of the vacancy left in one of the bound shells. A free electron from the medium is quickly captured to fill the vacancy and there is a rearrangement of electrons from other shells of the atom. This could result in the emission of the characteristic X-ray while in some cases the emission of an Auger electron may occur. Photoelectric process occurs predominantly for gamma rays (or X-rays) of relatively low energy [5].

B. Compton scattering

Compton scattering is an interaction process where the photon transfers a portion of its energy to the electron (assumed to be at rest) leading to the deflection of the photon through an angle θ with respect to its original direction and a recoil of the target electron. The energy change during the process is given by [2]:

$$E_{e^-} = hv - hv' = hv \left(\frac{\left(\frac{hv}{m_0c^2} \right) (1 - \cos\theta)}{1 + \left(\frac{hv}{m_0c^2} \right) (1 - \cos\theta)} \right), \quad (2)$$

where m_0c^2 is the rest mass energy of the electron, E_{e^-} is the recoil energy of the electron, ν and ν' are the frequencies of the incident and deflected photon respectively.

C. Pair Production

Pair production occurs in the intense electric field created by protons in the nuclei of the absorbing material. This process is energetically possible only if the gamma-ray energy exceeds twice the rest mass energy of an electron, and so, the process is only limited to high-energy gamma rays since its probability of interaction increases at high energy. During Pair production the gamma ray photon disappears and an electron-positron pair is produced. The excess energy of the photon above the required threshold appears in the form of kinetic energy shared by the electron-positron pair, *i.e.*

$$E_{e^-} + E_{e^+} = hv - 2m_0c^2. \quad (3)$$

After production, the positron slows down and annihilate in the absorbing medium producing two annihilation photons as secondary products of interaction. It is this annihilation radiation that plays an important part in the response of gamma-ray detectors.

III. THEORY OF ENERGY CHARACTERISATION OF SCINTILLATION DETECTORS

A. Energy Resolution

Energy resolution of a detector is a measure of its ability to resolve small differences in the energy of incident γ -rays. It is defined as [3]:

$$R = \frac{FWHM}{H_o} \times 100\%, \quad (4)$$

where FWHM is the Full width of the full-energy peak at half maximum height expressed as the number of channels, and H_o is the channel number corresponding to the peak centroid.

In scintillation detectors the important factor affecting resolution is the statistical fluctuation in the number of photoelectrons produced in the PMT, *i.e.* the variation in the amplitude of successive events [4]. Another additional factor is the non-uniformity in light output. The amplitude of the output pulse is proportional to the number of photoelectrons created.

$$R = \frac{FWHM}{H_o} = \frac{K\sqrt{E}}{E} = \frac{K}{\sqrt{E}}, \quad (5)$$

B. Detection efficiency

It describes the proportion of radiation events recorded by a detector, and includes both the geometric and radiation interaction effects. The efficiency of a detector is a measure of how many pulses occur for a given number of gamma rays. There are three categories of detection efficiency, namely, absolute total efficiency, intrinsic total efficiency and intrinsic full-energy peak efficiency.

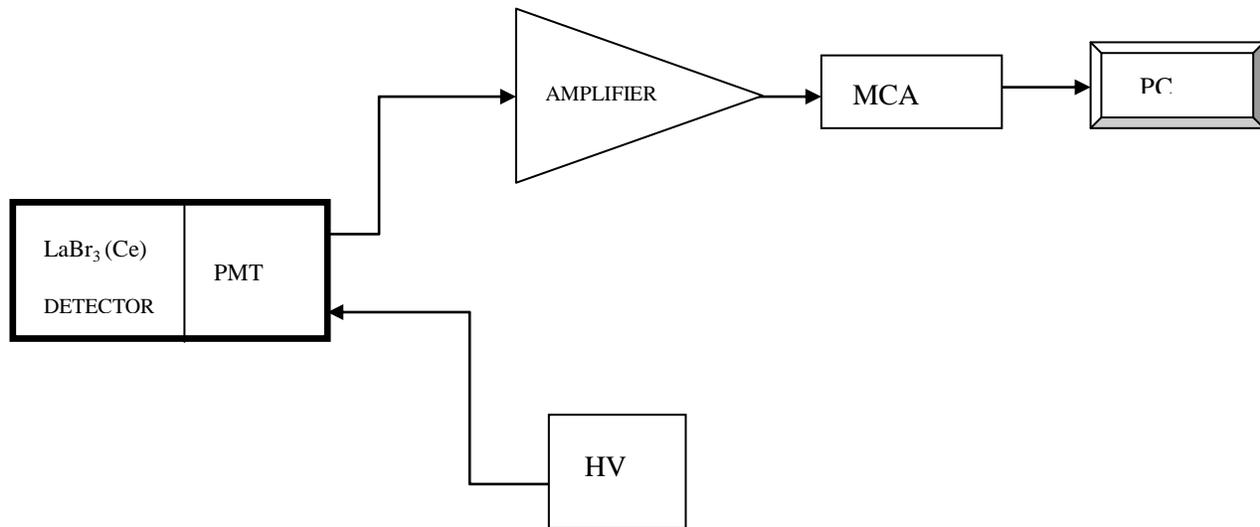


FIGURE 1. Experimental set-up for characterisation LaBr₃(Ce) detector.

V. EXPERIMENTAL PROCEDURE

A. Energy Calibration

Applying an operating voltage of 750V and an optimum shaping time of 1 μ s, the LaBr₃(Ce) detector was calibrated using ¹⁵²Eu, ²²Na, ¹³⁷Cs, and ⁶⁰Co sources by collecting energy spectrum and determining the central channel number of the full energy peak by eye via the peak report on the Multi-Channel Analyzer (MCA). A graph of energy against channel number was plotted in order to observe the linearity of the energy response of the detector.

B. Energy resolution

Energy spectrum was taken from ¹⁵²Eu, ²²Na, ⁶⁰Co and ¹³⁷Cs for 300 seconds and the FWHM in keV for each photo-peak was recorded. The energy resolution was calculated using equation 4.

C. Efficiency measurement

IV. EXPERIMENTAL SET-UP

The characterisation of LaBr₃(Ce) was carried out using a 25mm X 25mm Brilliance™ 380 Crystal (Type: B380) LaBr₃(Ce) detector coupled to a PM:XP2060 B02 PMT. These were connected to a Canberra HV supply and a Canberra amplifier 2022 which was then linked to an Ortec Easy MCA and a Dell PC. The experimental set-up is as depicted in Fig. 1. The amplifier settings were as follow: Fine gain: 0.5x, coarse gain: 30x, input polarity: Positive.

The ¹³⁷Cs source was used to collect a spectrum in order to determine the various efficiency. A region of interest was set over the whole spectrum and the total count rate in this region was recorded, with the background count rate taken into consideration. The net count rate was collected for the full energy photo-peak. These procedures were repeated for ⁵⁷Co, ²²Na, ⁶⁰Co and ¹⁵²Eu sources by varying source detector distance. A graph of intrinsic photo-peak efficiency against energy was then plotted.

VI. RESULTS AND DISCUSSION

Figure 2 shows the energy-channel relation for the LaBr₃(Ce) detector. The entire response of the detector covers the energy range of 122KeV-1408KeV and was found to be linear. A linear function of $E = 1.5135C - 32.541$ was obtained from the calibration. Using this relationship channels can be easily converted to energy. As can be seen from the plot, LaBr₃(Ce) detector exhibits an outstanding linear response.

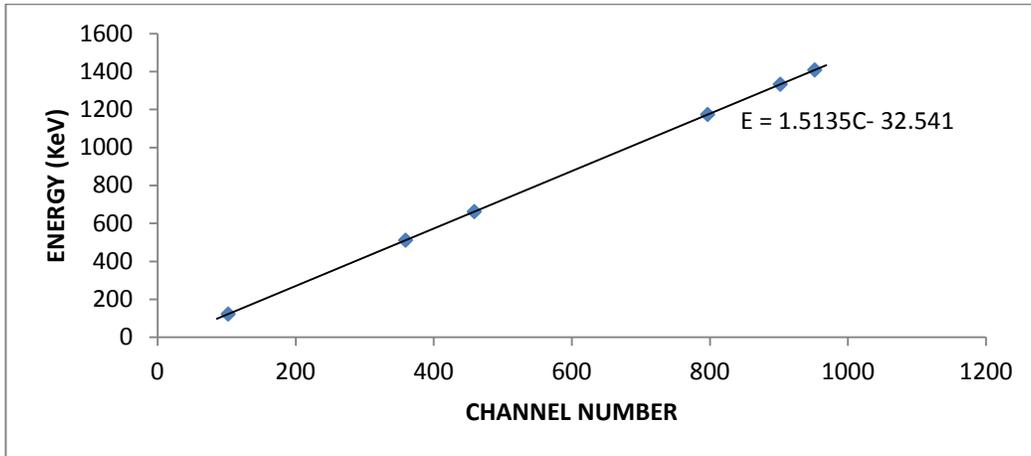


FIGURE 2. Graph of energy against channel number for 25mm X 25mm Brilliance™ LaBr₃(Ce) detector.

The response function of the LaBr₃(Ce) shows that the energy resolution improves with increase in gamma-ray energy. For the LaBr₃(Ce) detector an energy resolution of 2.6% at the 662 keV photo-peak at room temperature was recorded. This is graphically depicted in Fig. 3. This value

of energy resolution approaches the value for the energy resolution of some semiconductor detectors such as CdTe and CdZnTe at room temperature [5], and this has never been achieved with any established inorganic scintillators.

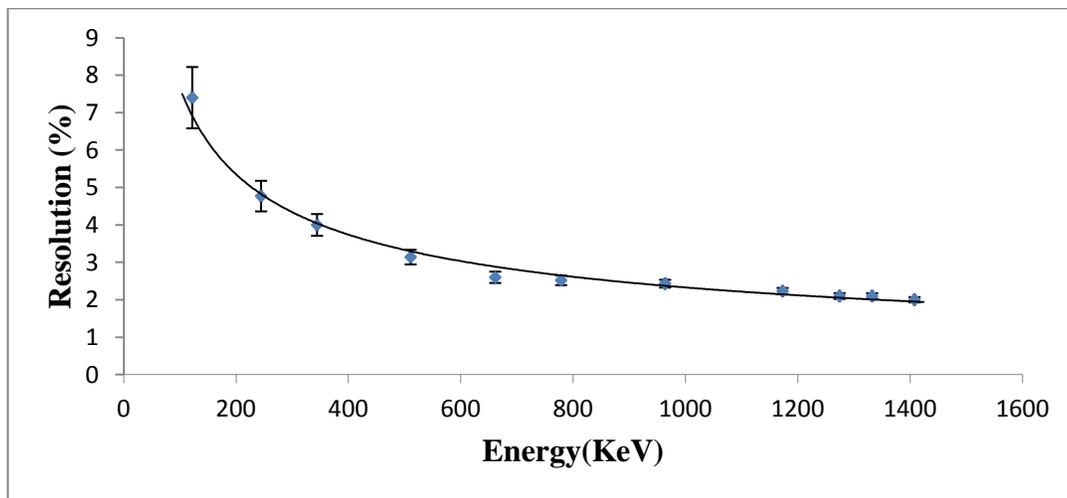


FIGURE 3. Graph of energy resolution versus energy for 122-1408KeV energy window.

The energy resolution of 2.6% at 662keV makes the resolution of this detector two times better than NaI(Tl) ~6% (Knoll, 2000). This detector is expected to distinguish two gamma peaks that lie close to each other. However, the resolution of LaBr₃(Ce) detector is not as good as that of a

semiconductor detector crystal such as Hyper Pure Germanium (HpGe) whose typical value lie in the range < 0.1% [2]. This remarkable energy resolution obtained from the LaBr₃(Ce) detector is due to the high light output and good homogeneity of the crystals.

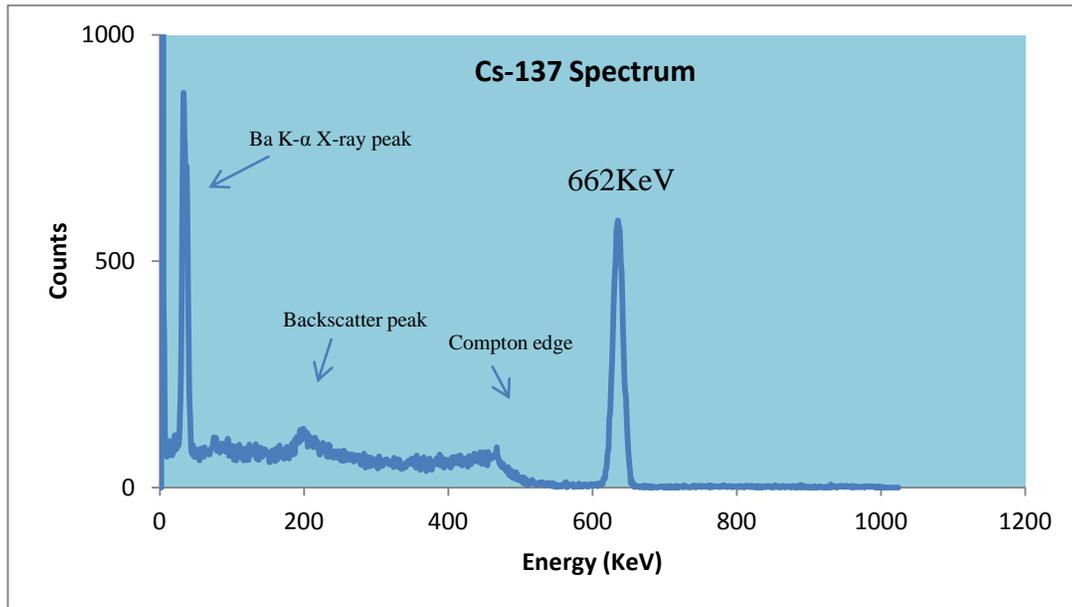


FIGURE 4. ^{137}Cs Spectrum obtained for 300 seconds using $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector.

From Fig. 3, a power law relationship is obtained from where a linear relationship is deduced by considering the

resolution relationship with the reciprocal of energy. This illustrated in Fig. 5.

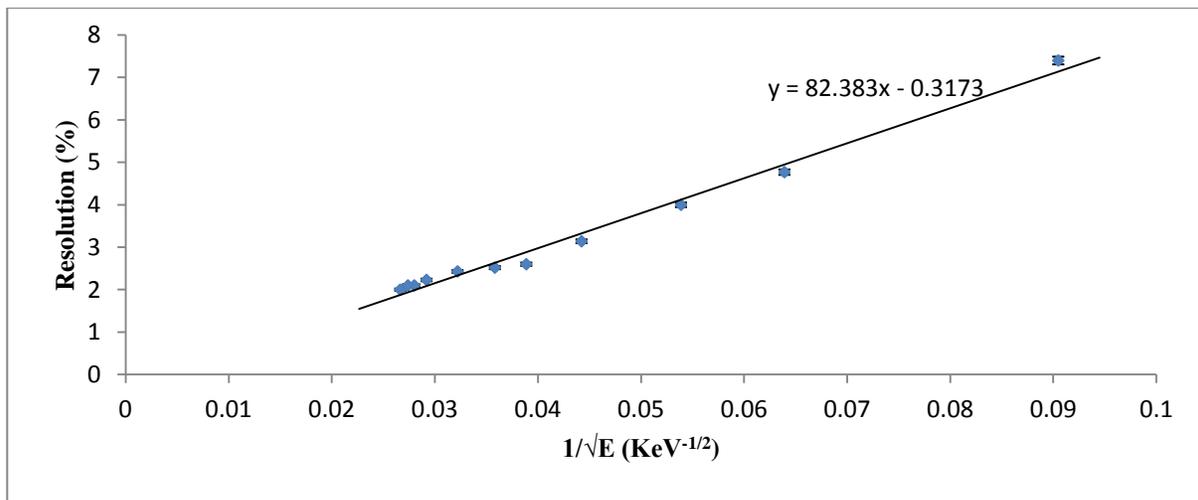


FIGURE 5. Graph showing the linearity of resolution with $1/\sqrt{E}$.

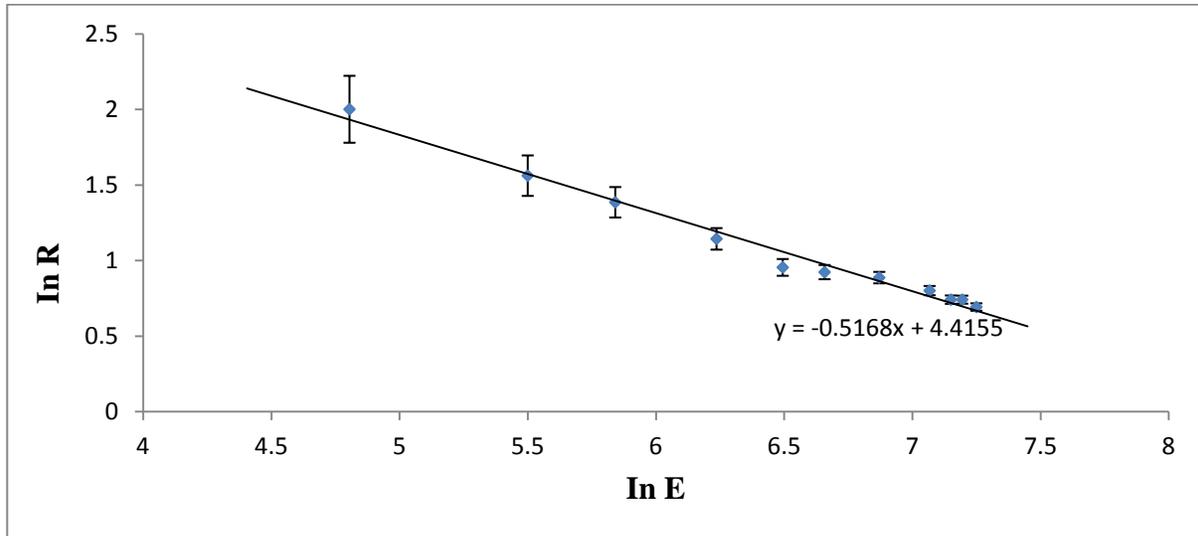


FIGURE 6. Graph of log (resolution) against log (energy).

A plot of log (resolution) against log (energy) as depicted in Fig. 6 yields a theoretical slope of -0.5. Based on the graph, an experimental value of 1.52 ± 0.06 was obtained for the $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector and this is in the limit of the theoretical value.

The variation of the intrinsic photo-peak efficiency with energy from 122-1408 keV at a source-detector distance of 15cm is shown in Fig. 7, and from it, it seen that the detector efficiency decreases as the gamma ray energy increases. This is because at lower energies, photoelectric

absorption is the dominant mode of interaction that contributes to full energy deposition with a large number of pulses [2]. As the photon energy increases other interaction modes such as multi-Compton scattering and pair production sets in and so not all the photon energies contribute to the full- energy peak. As a result, there is a decrease in the detector efficiency. Furthermore, at higher energies the photons spend less time in the vicinity of the detector material so that the probability of interaction is lower.

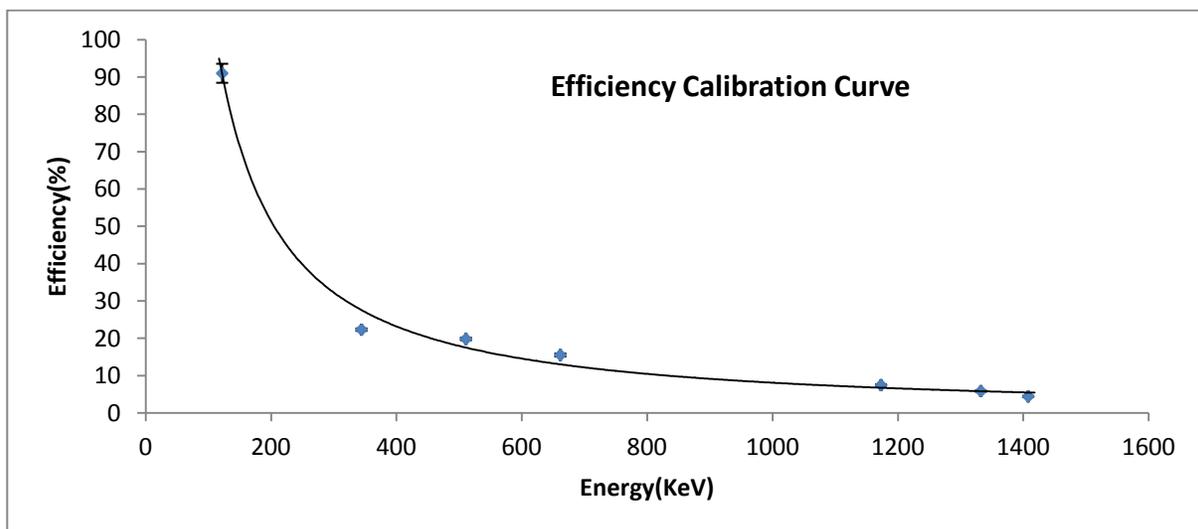


FIGURE 7. Graph of intrinsic photo-peak efficiency against energy.

At 122keV gamma line of ^{57}Co , the $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector shows a 23.1% higher efficiency than $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector and at 1332keV gamma line of ^{60}Co , a 6.14% better efficiency is obtained in $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector compared to $\text{NaI}(\text{Tl})$

detector. However the efficiency of $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector is poorer at higher energies compared to that of BGO detector based on the studies carried out by Evans and Orndoff (Knoll, 2000). This could be due to the thickness of the

Etim Iniobong Prosper, Obu Joseph Abebe, Ushie James Ogri
crystal and the internal gamma line of the $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector.

VII. CONCLUSION

The characterisation of a 25mm X 25mm Brilliance 380 $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector has been carried out and the result compared with other recent measurement reported by other authors for other detectors. Our result reveals that the resolution of $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector is two times better than that of $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector, and that at an energy of 662keV, a resolution of 2.6% FWHM was obtained at room temperature. It was also determined that, the efficiency of the detector in the energy range 122keV-1408keV is also higher than that of $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector. Specifically, at an energy of 122keV, the efficiency is found to be 23.1% better than $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector while at 1332keV a 6.14% better efficiency is obtained compared to $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector. The detector shows good efficiency at the low energy range 122-344keV (91%-22.3%) and this decreases from 662keV (15.5%) due to the photons spending less time in the detector vicinity at higher energies. We conclude that the reason for this outstanding efficiency is the high density of the detector.

Based on the high potentials of the $\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ detector as revealed from this investigation, this detector should not only be considered as the possible replacement for $\text{NaI}(\text{Tl})$ detector but could be outstanding in diversified applications that require fast timing, good energy resolution and

efficiency such as in medical imaging (Positron Emission Tomography and Time of Flight measurement), nuclear research and geological exploration.

REFERENCE

- [1] Rainer N., *Inorganic Scintillators-a never ending story*, Nuclear Physics News **20**, 27 (2010).
- [2] Knoll, G., *Radiation Detection and Measurement*, 3rd Ed. (John Wiley & sons Inc., New edition, 2000).
- [3] Regan, P., *REP 2-Gamma ray Spectroscopy*, (University of Surrey Lab Script, Guildford, UK, 2008).
- [4] Sellin, P., *Spectroscopy Systems*, (Lecture Notes), (University of Surrey, Guildford, 2009).
- [5] Shah, S. K., Glodo, J., Klugerman, K. L., Moses, M., Derenzo, S. and Weber, M., *$\text{LaBr}_3(\text{Ce})$ Scintillators for gamma ray spectroscopy*, (Lawrence Berkeley National Laboratory, USA, 2002).
- [6] Szymanska, K., Achenbach, P. and Agnello, M., *Resolution, Efficiency and stability of HpGe detector operating in a magnetic field at various gamma-ray energies*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research **A592**, 486-492 (2008).
- [7] Van Loef E. V. D., Dorenbos, P. and Kramer, K. W., *Scintillation properties of $\text{LaBr}_3: \text{Ce}$ crystals: fast, efficient and high energy-resolution scintillator*, Nuclear Instruments and Methods in Physics Research **A486**, 254-258 (2002).

APPENDIX
A. Table of Resolution at various Voltages for ^{60}Co and ^{137}Cs source

Voltage (V)	Resolution		
	^{137}Cs -662KeV	^{60}Co -1173KeV	^{60}Co -1332KeV
480	9.09	8.70	5.30
500	6.67	6.30	4.20
520	5.00	4.40	3.60
540	4.200	3.60	3.10
560	3.47	3.40	2.96
580	3.20	2.51	2.45
600	3.10	2.41	2.28
650	2.90	2.01	1.63
700	2.84	1.76	1.49
750	2.55	1.74	1.19
800	1.83	1.14	0.99
850	1.56	1.12	1.15
900	1.41	1.03	1.00

B. Table of Resolution at different Shaping Time

Shaping Time(μs)	FWHM	Channel number, H_o	Resolution $\left(\frac{FWHM}{H_o} \times 100\%\right)$	Error
0.5	23.31905	890.04	2.62	1.618641
1	16.29843	634.18	2.57	1.603122
2	10.85198	388.96	2.79	1.670329
4	6.3874	218	2.93	1.711724
8	5.282172	110.97	4.76	2.181742
12	2.77838	76.12	3.65	1.910497

C. Table Energy Resolution Parameters

Source	$E(\text{KeV})$	$FWHM(\text{KeV})$	$R(\%)$ $\left(\frac{FWHM}{E} \times 100\right)$	$\ln E$	$\ln R$	$1/\sqrt{E}$	Error in R	Error in $\ln R$
^{57}Co	122.1	9.04	7.40	4.8048	2.00148	0.09049	0.81858	0.22140
^{152}Eu	244.7	11.67	4.77	5.5000	1.562346	0.06392	0.40874	0.13387
^{152}Eu	344.3	13.77	4.00	5.8415	1.386294	0.05389	0.29048	0.10067
^{22}Na	511	16.05	3.14	6.2363	1.144223	0.04423	0.19564	0.07129
^{137}Cs	661.6	17.2	2.60	6.4946	0.955511	0.03887	0.15116	0.05555
^{152}Eu	778.9	19.63	2.52	6.6578	0.924259	0.03583	0.12837	0.04708
^{152}Eu	964	23.43	2.43	6.8710	0.887891	0.03220	0.10371	0.03789
^{60}Co	1173.2	26.16	2.23	7.0674	0.802002	0.02919	0.08524	0.03065
^{22}Na	1274.5	26.77	2.10	7.1503	0.741937	0.02801	0.07844	0.02771
^{60}Co	1332.5	27.98	2.10	7.1948	0.741937	0.02739	0.07505	0.02651
^{152}Eu	1408	28.16	2.00	7.2499	0.693147	0.026650	0.07102	0.02461

D. Table of Corrected Source Activity

Sources	Serial No.	Initial Activity, $A_0(\text{KBq})$	Calculated Activity(KBq) $A(t) = A_0 / 2^{t/T_{1/2}}$
^{57}Co	S302.PH	3.499	3.133
^{137}Cs	S172.RP	22.662	22.601
^{60}Co	S317.PH	40.231	39.613
^{22}Na	S311.PH	20.045	19.426
^{152}Eu	S259.PH	152.911	151.977

E. Table of Detector Efficiency Parameters

Source	Energy(KeV)	Count Rate, $C_p(\text{Sec}^{-1})$	Activity, D(Bq)	$I_\gamma(E_\gamma)$	$N_\gamma(D \times I_\gamma)$	N'_γ $(N_\gamma \times \frac{\Omega}{4\pi})$	ϵ_p $(\frac{C_p}{N'_\gamma} \times 100\%)$	Error($\epsilon_p \frac{\Delta C_p}{C_p}$)
⁵⁷ Co	122.1	4.26	3133.30	0.86	2694.64	4.677892	91.066670	2.547382
¹⁵² Eu	344.3	15.91	151977.10	0.27	41033.83	71.23473	22.334610	0.323283
²² Na	511.0	12.42	20045.00	1.80	36081.00	62.63662	19.828660	0.324842
¹³⁷ Cs	661.6	5.18	22601.01	0.85	19210.86	33.35005	15.532210	0.394010
⁶⁰ Co	1173.2	5.14	39612.54	1.00	39612.54	68.76737	7.474475	0.190344
⁶⁰ Co	1332.5	4.03	39612.54	1.00	39612.54	68.76737	5.860338	0.168543
¹⁵² Eu	1408.0	2.41	151977.10	0.21	31915.20	55.40479	4.349805	0.161771

F. Correction in Activity

$$A(t) = \frac{A_o}{2^{t/t_{1/2}}}$$

$$\Omega = \frac{A}{d^2} = \frac{\pi a^2}{d^2}$$

Source – detector distance, $d = 15\text{cm}$

radius of the detector, $a = 1.25\text{cm}$

Where A_o is the original activity and $A(t)$ is the activity at time, t .

$$\text{Solid angle} = \frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1.25^2}{4 \times 15^2} = 1.736 \times 10^{-3}$$

G. Solid angle of the detector

H. Table of Absolute Total and Intrinsic Total Efficiency

Source	Activity, D(KBq)	I(E)	Total Count Rate, $C_t(\text{sec}^{-1})$	N_γ $(D \times I)$	N'_γ $(\frac{\Omega}{4\pi} \times N_\gamma)$	Absolute Total Efficiency, $\epsilon_a(\%)$	Error in ϵ_a	Intrinsic Total Efficiency, $\epsilon_i(\%)$	Error in ϵ_i
²² Na	19.426	2.8	92.50	54392.8	94.4259	0.170059	0.00102	97.96041	0.58805
¹³⁷ Cs	22.601	0.85	20.46	19210.8	33.35004	0.106502	0.00135	61.34926	0.78306
⁶⁰ Co	39.613	2	72.84	79226	137.5363	0.09194	0.00062	52.96055	0.35826
¹⁵² Eu	151.977	1.24	240.82	188451.	327.1518	0.127789	0.00047	73.6111	0.27386

I. Error Propagation

(I) Error in Resolution

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 = \left(\frac{\Delta FWHM}{FWHM}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H_o}{H_o}\right)^2$$

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{FWHM}\right)^2 + \left(\frac{FWHM}{(2.35\sqrt{N})H_o}\right)^2$$

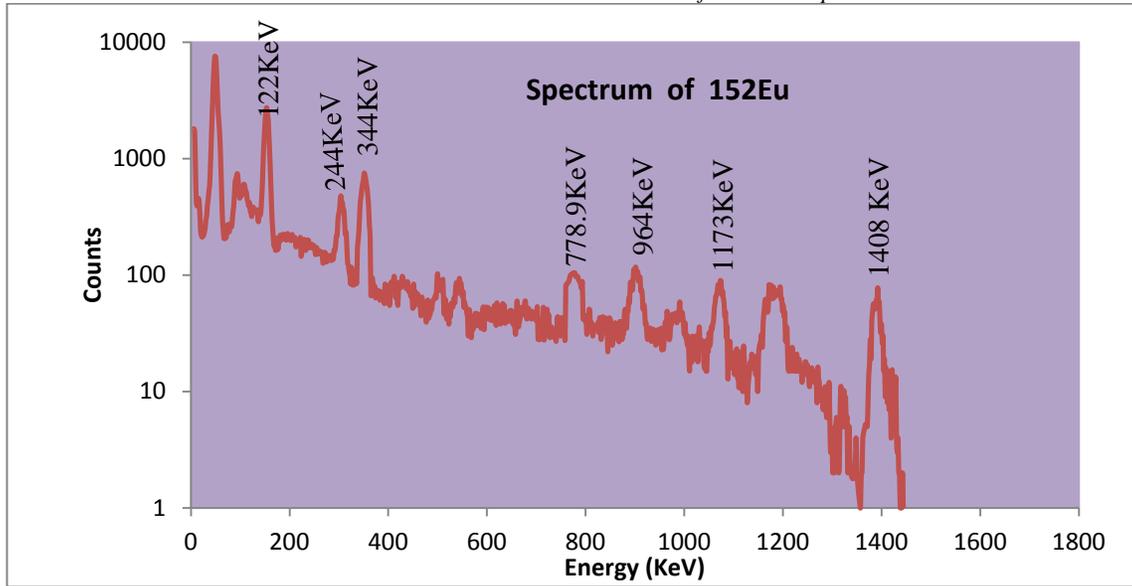
$$\Delta \ln R = \left(\frac{\Delta R}{R}\right) \ln R$$

(II) Error in Efficiency

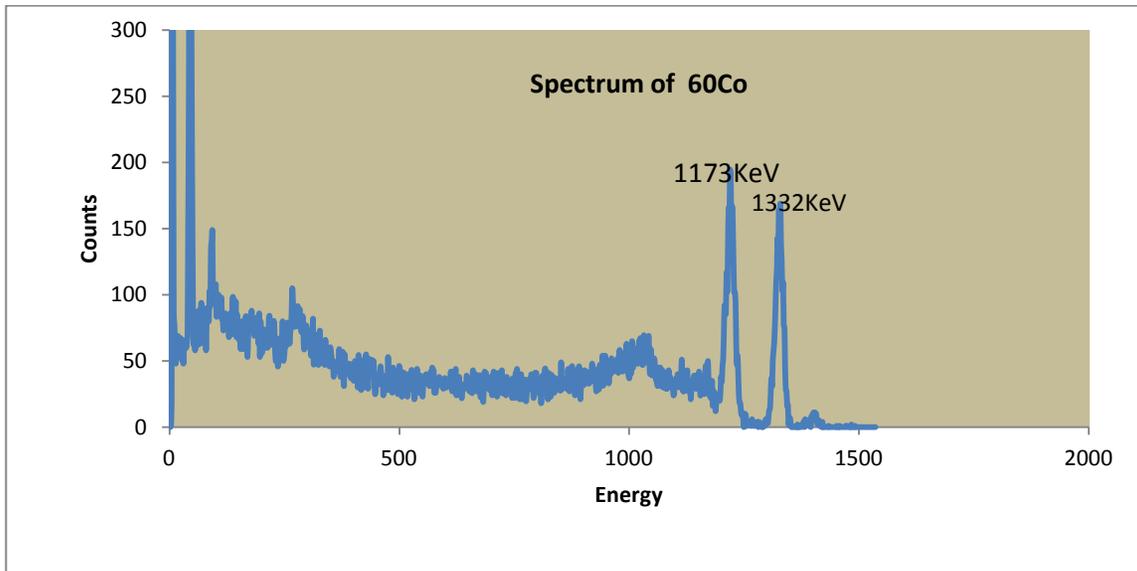
$$\Delta \epsilon = \left(\frac{\Delta C}{C}\right) \epsilon$$

J. Response of Radioactive Sources in LaBr₃(Ce) detector

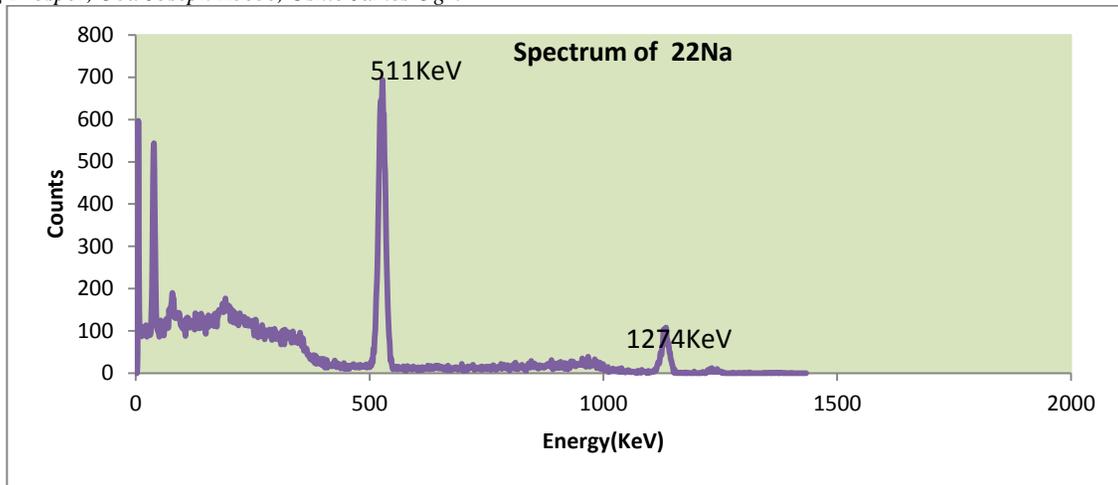
(I) Spectrum of Europium-152 Source



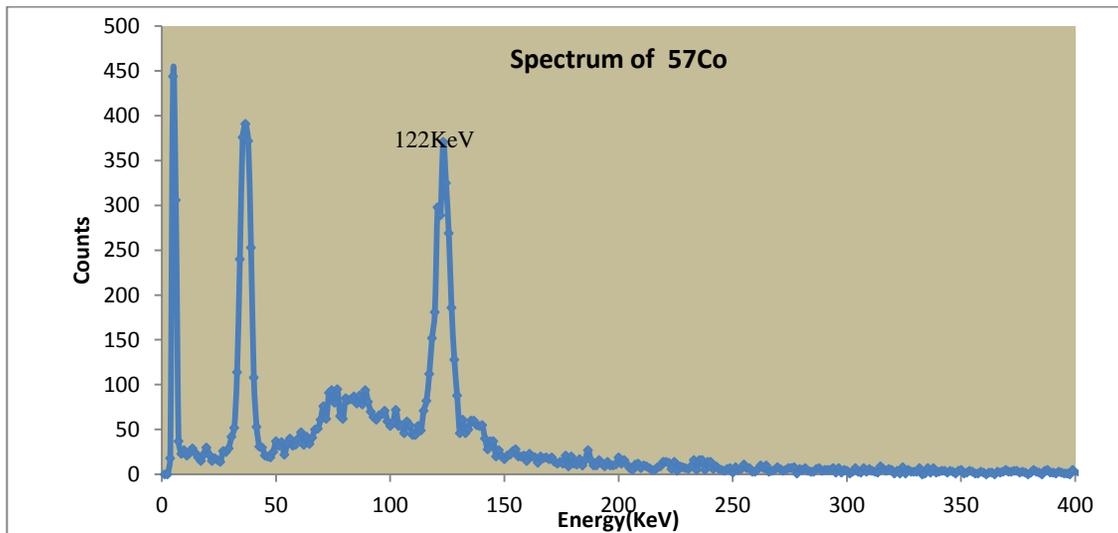
(II) Spectrum of Cobalt-60 Source



(III) Spectrum of Sodium-22 Source



(IV) Spectrum of Cobalt-57



ANNOUNCEMENTS

IX Taller Internacional “ENFIQUI 2012” “La Enseñanza de la Física y la Química”

*II Taller “La Enseñanza de las Ciencias Naturales”
Del 12 al 16 de Junio del 2012, MATANZAS, CUBA*

CONVOCATORIA

La Universidad de Ciencias Pedagógicas “Juan Marinello”, de Matanzas, Cuba, convoca a participar en el IX Taller Internacional “La Enseñanza de la Física y la Química” y el I I Taller “La Enseñanza de las Ciencias Naturales”, del 12 al 16 de junio del 2012.

OBJETIVOS

- Intercambiar información sobre la metodología de la enseñanza las Ciencias Naturales en la escuela primaria, media y superior.
- Divulgar los resultados obtenidos en las investigaciones educativas, por especialistas de las Ciencias Naturales.
- Intercambiar información sobre planes y programas de estudio para la enseñanza de las Ciencias Naturales en la escuela primaria, media y superior.

TEMÁTICAS

- La dirección del proceso docente en la enseñanza de las Ciencias Naturales.
- El contenido del curso de las Ciencias Naturales.
- Problemas pedagógicos y didácticos en la enseñanza de las Ciencias Naturales
- La evaluación del aprendizaje de los estudiantes.
- El trabajo con los alumnos talentosos.
- La motivación en la enseñanza de las Ciencias Naturales
- El desarrollo de la creatividad de los alumnos a través de las clases de Ciencias Naturales
- La formación y superación del profesor de Ciencias Naturales
- El uso de la TIC en la enseñanza de las Ciencias Naturales.
- La interdisciplinariedad de las ciencias naturales con la Matemática y otras disciplinas.

ACTIVIDADES DEL PROGRAMA

Se contempla la exposición de ponencias por los participantes, mesas redondas, talleres, conferencias impartidas por prestigiosos especialistas. Se brindará espacio para organizar la colaboración y presentación de proyectos de intercambio científico y académico entre instituciones. Se ofrecerán cursos en el Evento.

INFORMACIÓN EN CUBA

Coordinador General del Taller: Dr. Manuel G Pino Batista
mpinobatista@yahoo.es

Comité Organizador, enfiqui@gmail.com,
eventosupjm@gmail.com

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 6, No. 1, March 2012

INSCRIPCIÓN

Cuota de inscripción: \$100 pesos convertibles cubanos (CUC) para todos los participantes, incluye admisión a las sesiones del evento, matrícula en cursos, materiales y constancia de participación. Los pagos se harán en efectivo al arribar a la sede del evento.

La solicitud de inscripción debe enviarse antes del 10 de mayo del 2012, indicando: nombre y apellidos, dirección, institución, e. mail y teléfono. Se podrá participar en calidad de ponentes u observadores. Los ponentes acompañarán título del trabajo y un breve resumen de no más de 200 palabras.

La ponencia se publicará en las memorias, si es enviada a la comisión organizadora antes del 10 de mayo del 2012.

SEDE DEL EVENTO

El evento se desarrollará en el Hotel Acuzul, de la Playa de Varadero, una bella instalación hotelera, en la cual se han organizado otros eventos que auspicia la institución. Este hotel se caracteriza por la amabilidad de sus trabajadores y está ubicado a decenas de metros de la playa, reconocida por su arena fina y blanca.

NORMAS PARA LAS PONENCIAS

En la primera hoja aparecerá: Nombre del evento internacional (según aparece recogido en la convocatoria), en mayúsculas sostenidas y negritas, con letra Arial 14. Título de la ponencia, en negritas y subrayado. Nombre y dos apellidos del autor (es). Correo electrónico del autor (es). A continuación, en la propia primera página, aparecerá el texto de la ponencia. En nota al pie de página se especificarán los datos del autor (es). El color de la letra a utilizar en la primera página solo es el negro y no se incluirán figuras o fotos. La ponencia contará con introducción, desarrollo y conclusiones debidamente identificados. Formato: Word, (extensión.doc). Papel A4, letra Arial 12; espaciado 1,5 líneas. Sin encerrar la hoja en ningún tipo de marco. Márgenes: 2,5 cm por cada uno de los bordes. El paginado aparecerá centrado inferior. Extensión: Mínimo: 10 páginas; máximo 15 páginas, incluidos los anexos. Solo se incluirán en el desarrollo del trabajo o los anexos figuras, fotos o gráficos que sean estrictamente imprescindibles. Se escribirá sin sangría y sin espacios entre párrafos. El uso de viñetas se reducirá al mínimo imprescindible (solo el punto). Las notas, citas y referencias se anotarán al pie de página, en letra Arial 10. No debe aparecer una lista bibliográfica al final.

ALOJAMIENTO

Las personas y agencias de viajes interesadas deben contactar con el receptivo oficial del evento que es CUBATUR EVENTOS al email eventos2@cbtevent.cbt.tur.cu

OTRA INFORMACIÓN NECESARIA

El pago de la inscripción al Comité Organizador se hará al arribo a la sede del evento, en efectivo y en pesos convertibles cubanos. Por experiencias anteriores, estamos

obligados a informarles que algunas tarjetas de crédito no funcionan en Cuba. De la misma manera los sistemas de envío de dinero vía Western Union, no se ofrecen en Cuba producto de prohibiciones del Gobierno de los Estados Unidos, por lo cual sugerimos traer en efectivo el dinero que resulte imprescindible para el pago de la cuota de inscripción. Como referente se debe considerar que 1 dólar estadounidense equivale a 0,87 CUC.

+++++

XX TALLER INTERNACIONAL NUEVAS TENDENCIAS EN LA ENSEÑANZA DE LA FÍSICA

Puebla, México 24 al 27 de Mayo de 2012-04-23

www.fcfm.buap.mx/eventos/taller

+++++

WORLD CONFERENCE ON PHYSICS EDUCATION, WCPE 2012

1-6 July 2012, Istanbul, Turkey

The Role of Context, Culture, and Representations in Physics Teaching and Learning

www.wcpe2012.org

We are looking forward to seeing physics educators, teachers, researchers, and policy makers from around the world at this very first World Conference on Physics Education to be held in Istanbul in July 2012. The conference was initiated by **Groupe International de Recherche sur l'Enseignement de la Physique (GIREP)** and the **International Commission on Physics Education (ICPE)** – Commission 14 of the **International Union for Pure and Applied Physics (IUPAP)**. It is being sponsored by **GIREP**, **ICPE** and the **Multimedia in Physics Teaching and Learning (MPTL)** group and endorsed by

American Association of Physics Teachers (AAPT), **Latin American Physics Education Network (LAPEN)** and the **Asian Physics Education Network (AsPEN)**.

The vision for **2012 World Conference on Physics Education** is to follow a global participative process before, during and after the conference. The Conference will be structured to help foster collaborations on physics education research and development which can transcend national boundaries. The goal will be reached through working sessions which will develop actions plans that strengthen the teaching and learning of physics at all levels and in many countries.

The **2012 World Conference on Physics Education** will be a concrete step forward in global cooperation. Envisaged as a series of conferences with a four year periodicity, it would be a working conference with follow-up actions that presumably would carry over to the following conference.

Visa Information

In order to be able to obtain a Turkish visa (if required) you should contact the nearest Consulate of the Republic of Turkey.

The visa procedure depends on the nationality of the applicant.

The procedure for different countries is outlined on the following web site for each country:

<http://www.mfa.gov.tr/visa-information-for-foreigners.en.mfa>

Keynote Speakers

Edward F. (Joe) Redish, *University of Maryland, US*

Jon Ogborn, *University of London, UK*

Robert F. Tinker, *The Concord Consortium, Inc. US*

Bat-Sheva Eylon, *Weizmann Institute of Science, Israel*

Pornrat Wattanakasiwich, *Chiang Mai University, Thailand*

+++++