

Sistema de ejercicios para una práctica de laboratorio. Tema: Momento de inercia



**Maikel Fernández Dieguez, Luis Rodríguez Landrove,
Isabel Marcheco Puig, Nayma Jiménez Sánchez,
Liane Pallerols Sánchez, Miriam Hechavarría Rodríguez**
*Departamento de Física aplicada, Universidad de Oriente, Sede Julio A. Mella,
Avenida de las Américas .S/N, C.P. 16,200, Santiago de Cuba, Cuba.*

E-mail: maikelfdy@fim.uo.edu.cu

(Recibido el 12 de Julio de 2014, aceptado el 4 de Enero de 2015)

Resumen

Uno de los temas de mayor complejidad para el colectivo de estudiantes es la rotación del sólido rígido. Nos proponemos revertir este hecho a través del laboratorio con una práctica sencilla como es, la determinación del momento de inercia en una plataforma que rota alrededor de un eje vertical. Los pasos son los siguientes: La elaboración de un problema cuya solución reflejen todos los conocimientos previos indispensables para la realización de la práctica. Resumir algunas respuestas erróneas de los estudiantes y proponer como abordarlas. Determinar las relaciones cinemáticas para una rotación con aceleración angular constante, el momento de inercia para un disco, un anillo y la definición del momento de inercia de un sistema de partículas, empleando el teorema de los ejes paralelos.

Palabras clave: Problema de la práctica, Cinemática de la rotación, Momento de inercia, Teorema de los ejes paralelos.

Abstract

One of the most complex issues for the group of students is the rotation of rigid bodies. We propose to reverse this fact through the laboratory as a simple practice, determining the moment of inertia on a platform that rotates about a vertical axis. The steps are the development of a problem whose solution reflect all previous knowledge necessary to carry out the practice. Summarize some wrong answers as students and propose addressing them. Kinematic relationships to determine a rotation with constant angular acceleration, the moment of inertia for a disk, a ring and defining the moment of inertia of a system of particles, using the parallel axis theorem.

Keywords: Practice problem, Kinematics of rotation, moment of inertia, parallel axis theorem.

PACS: 01.40.Fk, 01.40.gb,

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas más complejos para el colectivo de estudiantes es el de la rotación del sólido rígido, a pesar de las múltiples aplicaciones de este tema en la ciencia y en la vida cotidiana. Por ejemplo desde la relación que existe entre las velocidades angulares ω y el número de dientes N en la catalina y en los piñones de las bicicletas $N_1 \omega_1 = N_2 \omega_2$ (rodadura sin deslizamiento) [1].

Relación que nos permite cambiar las velocidades angulares para ganar fuerza o para aumentar la velocidad lineal de la bicicleta, principio este que es semejante para todos los engranes. Otros ejemplos son los polipastos o el hecho de que las manillas de las puertas de nuestros hogares se encuentran en el lado más alejado del eje de rotación [2]. Si el profesor comienza, termina o en algún momento de la clase incluye las aplicaciones, puede cautivar el interés del estudiantado. Pero es un hecho, que sutilmente olvidamos

en clases o no explotamos lo suficiente. Pero en las secciones de laboratorio podemos revertir estas limitaciones.

Cuando hablamos de rodadura pura, el estudiante creé, que es un modelo abstracto y muy alejado de la realidad. Pero en la mayoría de las aplicaciones es una necesidad. Por esto es la existencia de los dientes en los engranes, aun en las poleas, su forma acanalada, es con el objetivo de que se deslice lo menos posible. Los grabados de los neumáticos en los autos, muy visibles en los, todo terreno.

También es necesario definir las nuevas magnitudes físicas, cinemáticas y dinámicas, para la rotación. Utilizando las definiciones para ángulos en radianes ($s=r\theta$) definimos ángulo de giro, velocidad angular y aceleración angular. Se obtienen las relaciones de ángulo de giro en función del tiempo bajo el supuesto de α =constante, se aborda el concepto de momento de inercia y se obtiene para un disco, un anillo y luego expresamos su dependencia con respecto al radio de rotación.

II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Trabajamos en la elaboración de un problema teórico sencillo, que reflejara los objetivos de la práctica no ligándolo, ni extrayéndolo de la instalación. Problema que resulte familiar a los estudiantes y que puedan asociarlo a su vida cotidiana, que de manera inductiva pueda ser vinculado con los objetivos que se persiguen [3].

II.A Problema Inicial y su discusión

Si observamos una patinadora sobre hielo cuando realiza un movimiento de rotación sobre su eje podemos apreciar claramente que cuando recoge sus brazos, aumenta su velocidad angular y al extenderlos disminuye. ¿Qué causas provocan este fenómeno, pues la masa de la patinadora no cambia porque ella extienda o recoja sus brazos? Su compañero de baile tomándola por la cintura, la ayuda a aumentar su velocidad angular con una aceleración angular aproximadamente constante. Describa todas las magnitudes y leyes físicas que intervienen en estos hechos por separado, y el grado de dependencia de cada una de estas magnitudes con relación a las otras. ¿Qué forma tendrá la ecuación del ángulo de giro con respecto al tiempo según las suposiciones del problema? [4]

Posibles respuestas de los estudiantes de difícil corrección, ante la pregunta:

¿Qué causas provocan este fenómeno, pues la masa de la patinadora no cambia porque ella extienda o recoja sus brazos?

El estudiante tiende a responder con expresiones matemáticas, significando esto que tiene muy poco dominio de los conceptos y definiciones.

Una de la respuestas más frecuentes es $\omega r = v$; como el radio r y la ω son inversamente proporcionales, a mayor r ; menor ω y viceversa.

Utilizando la definición del sólido rígido, donde todos los puntos que componen el sistema tienen la misma ω sin importar el radio, hemos encontrado la manera más sencilla de tratar esta respuesta dentro de nuestro colectivo.

Cuestionar al estudiante sobre la resultante de los torques externos en este primer momento ¿cuáles son? y si $\sum \tau_{ext} = 0$, ¿se conservará el momento angular?, $L = \text{Const.}$ lo que tiene que estar variando es el momento de inercia I . ¿El torque de la fuerza de gravedad será siempre cero? Otro error común de la mayoría de los estudiantes que siempre lo consideran cero, y que con un pequeño ejemplo como el siguiente puede ser muy bien explicado por el profesor.

Podemos tomar un cuerpo haciéndolo rotar con respecto a un eje que no coincida con su centro de masa, ver Figura 1.

Concluyendo que será cero solo cuando el eje pasa por el centro de masa, pues la fuerza de gravedad siempre actúa sobre el centro de masa. Se puede aprovechar este hecho para ejemplificar los casos donde el ángulo entre la fuerza y el radio son 0° o 180° , que no producen rotación sino deslizamiento en la dirección de la fuerza como muestra la Figura 2.

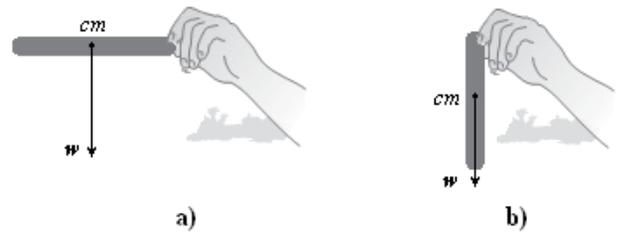


FIGURA 1. Cuerpo que rota alrededor de un eje fijo, que pasa por los dedos, saliendo perpendicularmente de la página.

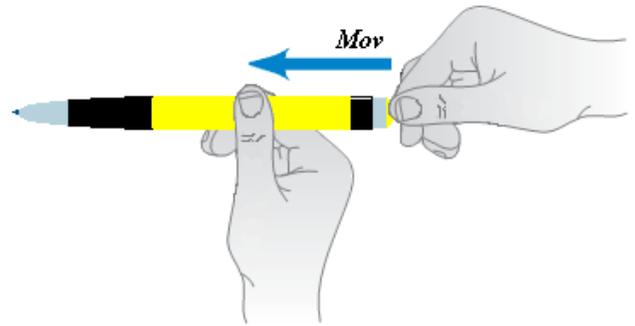


FIGURA 2. Se empuja un lapicero, donde la dirección de la fuerza y el radio de rotación, el cual se toma desde los dedos de la mano que sostiene el lapicero hasta la otra que empuja por la parte posterior forman ángulos de 0° o 180° provocando un deslizamiento y no una rotación.

Si su compañero le aplica un torque constante entonces rotará con una aceleración angular constante. De la cinemática de la rotación es conocida la ecuación, para aceleraciones angulares constantes:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2. \quad (1)$$

Donde θ_0 es el ángulo inicial, ω_0 velocidad angular inicial, α aceleración angular y t es el tiempo.

II.B Creación del modelo físico

Antes de pasar al desarrollo de la práctica, recomendamos recordar el problema pero auxiliándose de la instalación, con el fin de inducir al estudiante a que aplique los conceptos estudiados, marco que ha de aprovechar el profesor para la creación del modelo físico.

Por ejemplo en la primera medición, la cual se hace con la ayuda del profesor, puede enrollarse en falso la cuerda en la polea, para que sea un movimiento de rotación con deslizamiento. Así el estudiante entenderá la necesidad de que la cuerda quede bien tensada (ajustada), preguntándole por ejemplo ¿éste será un movimiento de rotación con aceleración angular constante? sino ¿bajo qué condiciones puede ser considerado como tal? ¿Cuál es el eje de rotación, que direcciones tienen la aceleración angular y el torque externo resultante? [3]

La inercia rotacional es una medida de la oposición que ofrece un cuerpo al cambio de su estado de movimiento rotacional, la cantidad física que la caracteriza se le denomina Momento de Inercia I de un cuerpo, y este depende de la distribución de su masa con respecto a su eje de rotación, según la expresión:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = \sum_i m_i r_i^2. \quad (2)$$

Donde las m_i son los elementos de masa que componen el sistema y las r_i son las distancias de estos elementos al eje de rotación.

Teóricamente la inercia rotacional I_d de un disco con respecto a un eje que pasa perpendicular a su centro de masa es:

$$I = \frac{1}{2} MR^2. \quad (3)$$

Donde M es la masa del disco y R el radio del disco. De igual manera para un anillo se determina el momento de inercia con respecto a un eje que pasa perpendicular por su centro de gravedad:

$$I = \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2). \quad (4)$$

Donde M es la masa del anillo, R_1 y R_2 son los radios interior y exterior respectivamente del anillo. También podemos recordar el teorema de los ejes paralelos o fórmula de Steiner el cual permite, conociendo el momento de inercia I_{cm} de un cuerpo con respecto a un eje que pasa por su centro de masa, el momento de inercia con relación a otro eje, paralelo al primero, se puede hallar mediante la siguiente expresión:

$$I = I_{cm} + Md^2. \quad (5)$$

Donde I_{cm} es el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa, d la distancia entre los ejes y M la masa del cuerpo. El teorema de los ejes paralelos tiene un corolario importante, puesto que el término Md^2 es siempre positivo, el I_{cm} es siempre la inercia más pequeña de cualquier grupo de ejes paralelos (puede no ser la inercia de rotación de más pequeña magnitud del objeto, un eje que apunte en una dirección diferente puede dar un valor más pequeño) [2].

Este teorema nos permite establecer una analogía entre la definición de momento de inercia (Ecuación 1) para un conjunto de masas puntuales y un conjunto de cuerpos de momentos de inercia conocidos que rotan con sus ejes paralelos y a cierta distancia r_i del centro de rotación justificando una dependencia parabólica entre el momento de inercia y el radio o distancia al eje de rotación.

Cuando hablamos de torque es mejor comenzar a partir de la definición general con la ecuación:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (6)$$

El torque depende de la fuerza aplicada F y la distancia desde el eje de rotación al punto donde se aplica la fuerza r . El valor de es el producto de $\tau = rF \sin \theta$ donde, θ es el ángulo entre la dirección del radio vector r y la dirección del vector fuerza F , aplicada. El torque es máximo cuando el vector r y el vector F son perpendiculares entre sí y cero cuando son paralelos o antiparalelos.

De manera general presentamos la ecuación para la dinámica de la rotación:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I \vec{\alpha}. \quad (7)$$

Agregando que la dirección de los torques externos coincide en dirección y sentido con la aceleración angular.

III. DISEÑO EXPERIMENTAL

En la Figura 2 se muestra una foto del dispositivo utilizado.

El sistema que utilizamos, es uno que rota alrededor de un eje vertical el que es muy utilizado [5], es de los mejores equipamientos para la determinación del Momento de Inercia en prácticas de laboratorios de la física general [6]. En el mismo una cruceta formada por cuatro brazos (1) está ubicada sobre una polea cónica múltiple (2) de varios radios.

Todo el conjunto tiene un mismo eje común vertical que descansa sobre un rodamiento lubricado, por lo cual gira alrededor del eje de rotación con muy poca fricción.



FIGURA 2. Vista de la instalación, los componentes de la instalación marcados con números se describen en este apartado.

Alrededor de una de las poleas se enrolla, un extremo de un hilo fino, casi inextensible y de masa despreciable (3) el que se hace pasar por otra polea cuyo momento de inercia no tendremos en cuenta (4) y en el otro extremo se cuelga un porta pesas (5) donde se coloca una masa la que mantendremos constante a lo largo de todas las mediciones. El sistema posee dos sensores eléctricos (6) situados a 180° grados entre sí. En la parte inferior, de dos de los brazos están ubicadas unas varillas metálicas delgadas (7) que al

interrumpir los sensores activan el conteo del tiempo hasta la siguiente interrupción.

Todo el sistema descansa en una base circular sólida (8) que posee tres tornillos de nivelación (9) para buscar su posición horizontal. El conjunto se completa con un contador digital de milisegundos computarizado (10) que se conecta a los sensores. Este equipo mide los intervalos de tiempo con una precisión de una décima de milisegundo (0.1 ms), entre un número programable de interrupciones del haz que también las cuenta (en nuestro caso de uno en uno), los almacena y además realiza cálculos con los mismos. En este caso calcula las aceleraciones angulares del sistema, en el intervalo que el mismo realiza media revolución. Mostramos además, el disco (11), el anillo (12) y los cilindros que pueden variar su posición al eje de rotación (13).

El problema inicial sugiere nuestra instalación como método experimental para determinar el momento de inercia. En la Figura 3 presentamos un esquema del sistema. Aquí m es la masa del conjunto formado por el gancho y la pesa que se cuelga, d la distancia de los cilindros al eje de rotación la cual puede ser variada, r es el radio de la polea alrededor de la cual enrollamos el hilo, T la tensión del hilo, Fg la fuerza de gravedad e I es el momento de inercia del sistema rotacional (todo el conjunto) alrededor del eje y .

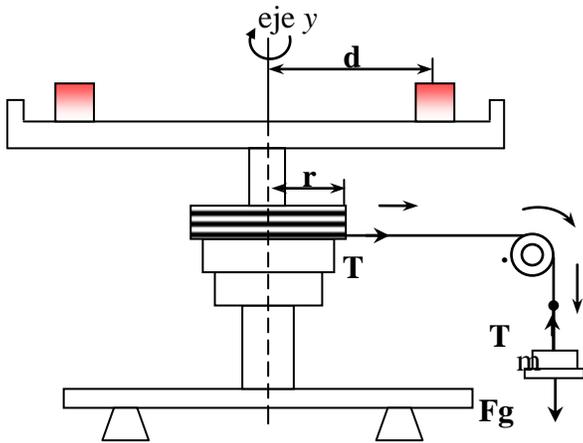


FIGURA 3. Gráfico auxiliar de la instalación. Todas las deducciones teóricas se realizan teniendo en cuenta este gráfico.

Para obtener el momento de inercia podemos usar las ecuaciones de la dinámica de la rotación (Ecuación 7) escogiendo la dirección de la rotación como lo propone la Figura 3. Teniendo en cuenta cuales son las fuerzas que realizan torque, que son la tensión de la cuerda y la de rozamiento del sistema rotacional en sí mismo.

Si ponemos pesas a la cuerda entonces el torque resultante será la tensión T del hilo y la de rozamiento L . Teniendo en cuenta la dirección de movimiento sugerida tenemos:

$$T \cdot r - L = I\alpha_1. \quad (8)$$

Aplicando la Segunda Ley de Newton a la masa que pende, teniendo en cuenta la relación que existe entre la aceleración angular y lineal $a_1=r\alpha_1$ y multiplicando toda la ecuación por r tenemos:

$$mrg - T \cdot r = mr^2\alpha_1. \quad (9)$$

El torque de la fuerza de rozamiento lo supondremos constante y lo podemos determinar si tenemos en cuenta una rotación sin la tensión de la cuerda (cuando se desenrolla totalmente el hilo). Para este sistema, cuando no está actuando la tensión del hilo, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$-L = I\alpha_2. \quad (10)$$

Donde I es el momento de inercia del sistema rotacional y α_2 la aceleración angular después de desenrollarse totalmente el hilo. Sumando las ecuaciones (7), (8) y (9); despejando a I entonces obtenemos:

$$I = \frac{mrg}{\alpha_1 + \alpha_2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} mr^2. \quad (11)$$

Que es la ecuación de trabajo para el cálculo de los momentos de inercia de todo el sistema rotacional.

Para calcular el momento de inercia I_i de cualquier cuerpo que montemos en el sistema se procederá de la siguiente manera: se determina el momento de inercia del sistema solo I_0 y luego con el cuerpo encima I_C (conjunto); por diferencia se obtiene [7]:

$$I_i = I_C - I_0. \quad (12)$$

Para determinar las aceleraciones angulares α_1 y α_2 el contador digital de milisegundos computarizado registra los intervalos de tiempo en que el sistema rota según se desee (para nosotros cada π radianes) que es la distancia angular. Como todos los desplazamientos angulares serán múltiplos enteros K de π ($\theta = K\pi$). Las velocidades angulares medias cada dos interrupciones consecutivas serán múltiplos de 2π y obteniendo las aceleraciones angulares medias (la cual reporta el equipo) serán:

$$\alpha = \frac{2\pi((K-1)t_1 - Kt_2)}{t_1t_2(t_2 - t_1)}. \quad (13)$$

Aquí K es el número de conteo por giros cada π radianes que reporta el computador electrónico. En nuestro caso son consecutivos. Esta ecuación la tiene programada el contador digital. Los valores de aceleración angular corresponden al sistema cuando está acelerado α_1 y cuando está desacelerado α_2 valores que sustituimos en la ecuación (11) para hallar el momento de inercia [8].

IV. ANÁLISIS DE RESULTADOS

IV.A Estudio cinemático de la rotación

Tomando los tiempos y ángulos de giro bajo el supuesto de mantener la $\alpha=Const.$ el ángulo se tomó en radianes, multiplicando el número de conteos por $\pi=3.1415\dots$ y el tiempo en segundos. Se analizaron tres casos, en todos, el ángulo inicial fue cero, pero no lo son sus respectivas velocidades angulares. El primero se hizo a partir de casi 180° antes (ω_{180°), el segundo de 90° (ω_{90°) y el tercero lo más cercano a cero posible (ω_{0°), el cual no se logra anular por las dimensiones del sensor. También se tomaron los valores de aceleración angular, (cinco, para reportar el valor promedio), para luego obtener la aceleración angular a partir del gráfico de θ vs t y compararlo con la aceleración angular promedio. Los datos son mostrados en la Tabla I, y procesados en el MS Excel.

TABLA I. Ángulo cada 180° y tiempo en segundos.

	ω_{180°	ω_{90°	ω_{0°
No	$\theta(rad)$	$t(s)$	$t(s)$
1	3,1416	0,5283	0,6459
2	6,2832	0,9375	1,1015
3	9,4248	1,2875	1,4762
4	12,5664	1,5987	1,8051
5	15,7080	1,8837	2,1016
6	18,8496	2,1476	2,3752
7	21,9911	2,3960	2,6301
8	25,1327	2,6333	2,8709
$\alpha_{Exp} (rad/s^2)$	3,431	3,499	3,494

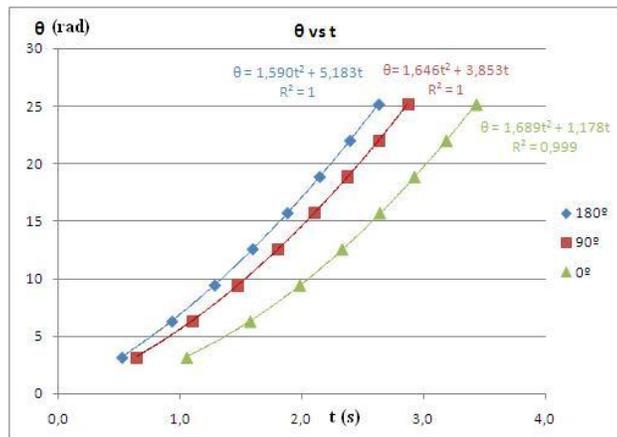


FIGURA 4. Posición angular en función del tiempo. Se muestran las tres curvas, cada color corresponde a la columna de su color en la Tabla I.

A partir del gráfico se determinaron las velocidades iniciales comparándolas entre sí. Y las aceleraciones angulares comparándolas con los promedios de las que reportó la instalación.

TABLA II. Velocidades iniciales y aceleraciones.

	ω_{180°	ω_{90°	ω_{0°
$\omega(rad/s)$	5,183	3,853	1,173
$\alpha_{Grá}(rad/s^2)$	3,180	3,292	3,378
$\alpha_{Exp}(rad/s^2)$	3,308	3,388	3,381
Error %	3,9	2,8	0,1

IV.B Determinación del momento de inercia

Se obtuvieron los valores de aceleraciones angulares α_1 y α_2 para determinar el momento de inercia de un disco y un anillo por el método experimental y compararlos con los modelos teóricos de las ecuaciones (2) y (3), los cuales mostramos en la Tabla III:

TABLA III. Momento de inercia experimental y teórico.

	$I_{exp} \cdot 10^{-3} (Kg.m^2)$	$I_{teó} \cdot 10^{-3} (Kg.m^2)$	Error %
Disco	3,493	3,462	0,88
Anillo	6,467	6,447	0,32

IV.C Determinación del momento de inercia

Se tomaron dos cuerpecitos de masas semejantes, para evitar que el centro de masa no coincida con el eje de rotación, arrojando así mayores errores en los resultados [9]. La masa total de los dos cuerpecitos es de 0,2006 kg los cuales se le fue variando su distancia al eje de rotación d . Graficamos el momento de inercia del conjunto contra d y ajustamos un polinomio de segundo grado, como lo sugiere el teorema de los ejes paralelos. De la ecuación del gráfico se determinó la masa total de los cuerpecitos, y se compararon los resultados como lo muestra la Tabla IV:

TABLA IV. Momento de inercia experimental I contra d .

	I_1	I_2	I_3	I_4
$I_i \cdot 10^{-3} (Kg.m^2)$	2,04	2,39	2,98	3,84
$d_i (m)$	0,025	0,050	0,075	0,100

Presentamos el gráfico en el Excel, Figura 5, de esta dependencia, no linealizándola. El objetivo del mismo, es que el estudiante, pueda comprobar las definiciones que se imparten en clases; como es la dependencia del momento de inercia con su distribución (distancia al eje de rotación d). También calculamos la masa total a partir del gráfico $M_{Grá}$ según el modelo físico (Ecuación 4) y lo comparamos, con el medido directamente o experimental M_{Exp} por medio de la balanza, Tabla V:

TABLA V. Momento de inercia experimental I contra d .

$M_{Exp} (kg)$	$M_{Grá} (kg)$	Error %
2,006	2,056	2,49

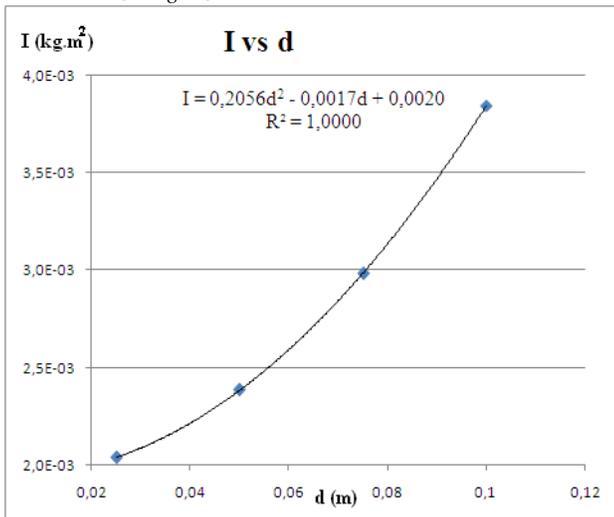


FIGURA 5. Momento de inercia, con respecto a la distancia, al eje de rotación.

Este gráfico nos muestra la dependencia entre el momento de inercia I y la distancia al eje de rotación d . el término que acompaña a la variable cuadrada es la masa de los cilindros según el modelo físico (Ecuación 4). El término que acompaña a la variable lineal según el modelo, no tiene significado físico y el otro es el momento de inercia de todo el sistema con respecto al eje que pasa por el centro de masa.

IV. CONCLUSIONES

Desde el problema inicial del laboratorio, el profesor debe dirigir al estudiante a la creación del modelo físico, incidiendo para que cuando esté tomando las mediciones pueda percatarse de la necesidad de cumplir con las condiciones del modelo. Aunque el método de linealización de gráficos es ampliamente utilizado como método experimental, proponemos trabajar con los modelos que arrojan las definiciones teóricas que se imparten en clases. Esto le permite al estudiante profundizar en estos conceptos y no ver el laboratorio como algo totalmente distinto de lo que se recibe en clases, sino que lo complementa. Que el estudiante aprecie el nexo existente entre teoría y práctica, a través del desa-

rollo del experimento y pueda aplicar lo aprendido en el aula, y a la vez corroborar, con los resultados obtenidos, la veracidad del problema.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer al colectivo del departamento (todos), pues los criterios y consideraciones que estamos presentando, es el resultado de las opiniones de nuestro colectivo.

Toda sugerencia opinión o criterio de una forma u otra se encuentran expuesto aquí.

REFERENCIAS

- [1] Young, H. D., Freedman, R. A. & Flores, V. A. F., *Física Universitaria Sears-Zemansky, Vol. 1.*, 12ª Ed. (Pearson Educación, México, 2009).
- [2] Robert, R., David, H. & Kenneth, S. K., *Física, Vol. 1.*, 4ª Ed. (Compañía Editorial Continental, México, 1999).
- [3] Rodríguez Landrove, L., *Desarrollar el pensamiento lógico dialéctico de los estudiantes de Ingeniería Química a través de los laboratorios de Física I*, En: *Física Aplicada*, (Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, 2001).
- [4] Fernández Dieguez, M. et al., *Diseño de ejecución en los manuales de laboratorio de Física General en la carrera de Ingeniería Mecánica*, II Conferencia Internacional de Ingeniería Mecánica y Energía (2012).
- [5] *Prácticas de Laboratorios de Física*, (2010). Disponible en: <http://www.fisica.ru>.
- [6] Ferreira, A. A. H. & Gessa, A. H., *Evaluación de tres montajes experimentales para la práctica de laboratorio "Momento de inercia de un cuerpo rígido"*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **5**, 183 (2011).
- [7] *Experimental instrument for measuring rotation inertia of the smart rigid body Model GZ-2A* (Beijing, Beijing, 2005).
- [8] *Instructions for computer digital millisecond meter GZ-2A* (Beijing, Beijing, 2005).
- [9] Collazos, M. C. A., *Prototipo para la enseñanza de la dinámica rotacional (momento de inercia y teorema de ejes paralelos)*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 6 (2009).