O ensino das distribuições Gaussiana e q-Gaussiana em cursos de graduação: Um exemplo baseado nos espectros binários de emissão de raios-X

Melina Silva de Lima[1], **Marcelo Espinheira Cravo de Carvalho**[1], **Marcelo Albano Moret**[1, 2]
[1]*Centro Universitário SENAI/CIMATEC, Salvador (BA), Brasil*
[2]*Departamento de Física, Universidade do Estado da Bahia, Salvador (BA), Brasil.*

E-mail: melinasl_mel@hotmail.com

(Recibido el 2 de enero de 2019, aceptado el 28 de febrero de 2019)

Resumo

A Termoestatística proposta por Constantino Tsallis vem mostrando que alguns modelos, antes descritos estatisticamente por distribuições gaussianas, podem ser melhor descritos por distribuições q-gaussianas. O Ensino de Estatística atrelado a conceitos de Astrofísica relacionados a estrelas binárias com emissão de raios-X, foi realizado com alunos de graduação em Engenharia, gerando estudos de iniciação científica com posterior divulgação e apresentação de trabalhos pelos alunos em eventos de Ciência e Tecnologia, em especial na Semana de Ciência e Tecnologia. Incorporado ao ensino de funções estatísticas relacionadas a variáveis contínuas, a distribuição q-gaussiana foi utilizada por dois motivos: o primeiro diz respeito a situações em que os dados seriam melhor descritos por uma distribuição q-gaussiana; em segundo, novos elementos podem servir de estímulo a estudantes no início de um curso de graduação, onde exemplos práticos do "fazer-científico", geram incompletudes conceituais que devidamente conduzidas, podem aguçar o aspecto investigativo nos alunos. Este trabalho apresenta um breve e elementar, mas não por isso menos consistente, apanhado de conceitos tratados em Estatística Básica (necessária para laboratório de Física 1) e pretende ser um elemento de fomento, a professores que queiram tratar de conceitos que não estejam nos planos de aula, mas que mantenham relação com estes; primeiro pela sua importância histórica, mas também para que o conteúdo da disciplina seja cumprido a contento.

Palavras-chave: Estatística, q-gaussiana, estrelas binárias que emitem raios-X.

Abstract

The Thermostatic proposed by Tsallis has shown that some models previously described statistically, by qaussian distributions, can be better described by q-gaussian. The teaching of Statistics linked to Astrophysics concepts related to binary stars with X-ray emission, was performed with students of Engineering, generating studies of Scientific Initiation with subsequent dissemination and presentation of papers by students in Science and Technology events. Incorporated in the instruction of statistical functions related to continuous variables, the q-gaussian distribution was used for two reasons: the first relates to situations in which the data would be better described by a q-gaussian distribution; secondly, new elements can serve as a stimulus for students at the beginning of an undergraduate course, where practical examples of "scientific-doing", generate conceptual incompleteness that, when properly conducted, can sharpen the investigative aspect in students. This paper reports a brief and elementary collection of concepts treated in Basic Statistics (required for Physics 1 laboratory) and aims to be an element of encouragement for teachers who want to deal with concepts that are not in the lesson plans, but that maintains a connection with them; due to its historical importance, and for the content of the discipline to be fulfilled.

Keywords: Statistic, q-gaussian, binary stars that emit X-rays.

PACS: 95.80.+p, 05.10.-a, 01.40.-d, 97.80.-d **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUÇÃO

Carl Friedrich Gauss iniciou os estudos primários aos sete anos, tendo seu potencial notado imediatamente pelos seus professores. Já na Academia, Gauss descobriu independentemente, o teorema binomial, o teorema do número primo, além de trabalhar nas incompletudes da Lei de Bode, entre outros feitos. Em 1795, ele iniciou seus estudos na Universidade de Gottingen, tendo Farkas Bolyai como um de seus melhores amigos, e com quem manteria correspondência por muitos anos. Entre 1820 e 1830, teve 70 trabalhos publicados. Em 1822, foi o ganhador do prêmio da Universidade de Copenhagen com *Theoria Attractionis*, um artigo sobre a teoria das combinações (1823), com seu suplemento (1828), que foi dedicado à Estatística

Matemática, em particular ao método dos mínimos quadrados [8].

Os conteúdos relacionados ao método dos mínimos quadrados, bem como algumas curvas atreladas a variáveis contínuas, tais como a Gaussiana, são contemplados em boa parte dos cursos de Estatística, nos diversos cursos de graduação; bem como na teoria de erros utilizada nas disciplinas de Física Básica.

O estudo associado à análise de séries temporais de emissão de raios-X em XRBS **(**X-ray binaries systems) foi o elemento de estímulo para a aprendizagem dos alunos de engenharia, e pode ser aplicado para as séries inciais do curso de Física**.** Para tanto, os alunos compararam a Gassiana e a q-Gaussiana, com os conjuntos de pontos dados, e verificaram que, entre as duas, a segunda se ajusta melhor a tais emissões.

Para que a atividade pudesse ser realizada, antes foram apresentados aos estudantes os conceitos de variáveis (discreta e contínua), funções de probabilidade, distribuições de probabilidade, método dos mínimos quadrados, depois do estudo de elementos da Estatística Descritiva, tais como o conceito de varáveis, medidas de posição e de dispersão, entre outros.

A distribuição Gaussiana, cujo nome é dado em homenagem a Gauss, é também conhecida como curva normal, e tem inúmeras aplicações em diversas áreas da ciência. Ela foi estudada pela primeira vez no século XVll, a partir da observação de que padrões e erros de medida seguiam uma distribuição simétrica, em forma de sino; sendo esta curva definida a partir de dois parâmetros: a média e o desvio padrão, dos valores retirados da amostra [2].

Embora, a curva normal traga excelentes resultados quando se utilizam variáveis contínuas em diversas situações cotidianas, ela não abrange todas as possibilidades de aplicação e investigação, que cobre tudo o escopo de estudo de fenômenos estudados na Física e em muitas outras áreas, onde a mesma tenha aplicação.

Assim, é natural que novos elementos sejam trazidos, como forma de traduzir melhor situações em que, esta não seja a melhor descrição dos componentes do problema.

Quando se deseja investigar alguma situação nova na física, surgem com ela conceitos que são usados em diversos contextos distintos daquele no qual ela foi, à princípio, originada. Por exemplo, com o advento da mecânica quântica, ideias relacionadas ao Princípio da incerteza foram largamente disseminadas nas mais diversas áreas do conhecimento. Nos idos de 1980, uma nova forma entrópica, a entropia de Tsallis (S_q) (1988), foi proposta. A equação (1) mostra a notação utilizada, para a entropia de Tsallis:

$$S_q = k\frac{1-\sum_{i=1}^{W}\left(p_i\right)^q}{q-1}, \left(q \in \Re\right), \qquad (1)$$

que generaliza a entropia de *Boltzmann* e *Gibbs. Q*uando, no índice entrópico, temos $q \to 1$, então:

$$S_1 = -k\sum_{i=1}^{W} p_i \ln\left(p_i\right). \qquad (2)$$

Sendo S_1 a entropia de Boltzmann-Gibbs, para um conjunto de estados discretos de W [11] e p_i a função densidade de probabilidade

A entropia de Tsallis é não aditiva, isto é, a aditividade referente à mecânica clássica, não se verifica. Assim:

$$S_q\left(A+B\right) = S_q\left(A\right) + S_q\left(B\right) + \left(1-q\right)S_q\left(A\right).S_q\left(B\right). \quad (3)$$

A peculiaridade de S_q reduz-se ao caso clássico no limite $q \to 1$. A Equação 3 possibilita a interpretação do índice entrópico (*q*), como um elemento indicativo da não aditividade de S_q.

Com o aparecimento de uma termoestatística, que generaliza a de Boltzmann e Gibbs, surgem diversas áreas em que a mesma passa a ter grande representatividade. Uma destas áreas é a astrofísica.

Observações fotométricas e espectroscópicas revelaram propriedades estelares que antes eram desconhecidas. Entre elas está o fato de que, mais de 50% das estrelas são sistemas múltiplos, incluindo os sistemas binários [4].

Sistemas estelares binários são aqueles em que duas estrelas orbitam em torno de um mesmo centro de massa, devido a uma interação gravitacional mútua [6]; e são de grande importância na astronomia e na astrofísica, uma vez que nos permitem deduzir parâmetros estelares importantes, tais como: o raio, temperatura superficial, massa e períodos de rotação. Entre as estrelas binárias encontram-se aquelas com emissão de raios-X.

A primeira detecção de raios-X fora de nosso sistema solar, ocorreu em 1962, e foi feita por contadores *Geiser* que estavam a bordo do foguete *Aerobee* [1]. A fonte de emissão foi denominada *Scorpius* X-1, um sistema binário com emissão de raios-X (XRBS), composto por uma estrela de nêutrons e sua companheira, V818 *Scorpii* [9].

Um XRBS consiste em um objeto compacto (um buraco negro ou uma estrela de nêutrons) e de uma estrela menos massiva, denominada de secundária [9]. As XRBS, assim como os sistemas astrofísicos mais relevantes do Universo (tais como as estrelas, galáxias, aglomerados de galáxias, entre outros), fazem parte do grupo de objetos astronômicos cujas forças gravitacionais de longo alcance, formam estruturas únicas no Universo, denominadas sistemas auto-gravitantes (SGS) [5].

Nestas estruturas as propriedades da termoestatística convencional de *Boltzman* (1844-1906) e *Gibbs* (1839-1903), válida para sistemas extensivos, não são adequadas e esbarram em problemas diversos, como por exemplo, o fato destas estruturas não serem isotérmicas, exibindo estados de equilíbrio incompletos, caracterizados por propriedades de escala [5]. Assim, o Formalismo Termoestatístico de Tsallis (GTS) [10] tem sido sugerido e utilizado com melhores resultados.

A GTS cobre esta classe de sistemas, uma vez que postula uma entropia não-aditiva S_q [5], tal qual mostrada na Equação (1) [10].

Outras propriedades relacionadas a esta termoestatística se refletem nas suas interações de longo alcance [5].

Com os espectros estelares é possível identificar algumas grandezas das estrelas, como a massa, a distância, em relação ao observatório e os elementos que as constituem [4]. Tais espectros são capturados por satélites especializados, os quais produzem conjuntos de dados referentes a cada estrela.

A análise estatística permite identificar a função que melhor representa o comportamento dos dados coletados.

Uma função que pode representar os dados coletados pelo satélite é a distribuição Gaussiana, ou curva normalizada, que permitiu estimar a probabilidade de ocorrer um determinado evento no intervalo de tempo considerado.

O objetivo da pesquisa foi apresentar a distribuição q-Gaussiana para alunos de graduação, como passível de melhor representar resultados onde se verifique ou haja a hipótese de não aditividade. Para isto, trouxemos o exemplo de aplicação, discussão e estudo da distribuição q-Gaussiana na análise de estrelas binárias com emissão de raios-X, realizada com alunos do núcleo básico de Engenharia. Como avaliação, os alunos apresentaram seus resultados na semana de ciência e tecnologia em 2015, cujo tema foi:A Luz.

Não há qualquer pretensão em examinar as características da particular fonte de emissão, que poderia estar levando a desvios em relação ao comportamento Gaussiano, uma vez que esta pesquisa traz elementos de uma prática didática, e não tem como foco os elementos norteadores da mecânica estatística, no viés astrofísico. Este tema particular faz parte do escopo de pesquisas específicas dos autores deste artigo, e não dos alunos que participaram desta pesquisa.

A discussão teórica, bem como a aplicação, pode servir de fomento a professores de estatística, física ou matemática, que queiram utilizar problemas reais em sala de aula. Além disso, os docentes podem trabalhar conteúdos relativos à astronomia e astrofísica, em problemas postos em outra disciplina. Esperamos incentivar os que queiram dar início a atividades de fomento à investigação científica, nos cursos de graduação.

Resumidamente, o trabalho dos alunos visou a realização de uma análise estatística comparativa da distribuição de probabilidade, para emissão de Raios-X de sistemas binários, utilizando as distribuições Gaussiana e q-Gaussiana. De posse da análise dos dados, juntamente com os coeficientes das curvas e seus erros associados, obtidos em um software estatístico, foi possível concluir sobre a modelagem que melhor se adapta à curva de distribuição de probabilidade de emissão de Raios-X nas XRBS analisadas.

A q-Gaussiana, não sendo uma distribuição estudada comumente na graduação, por ser relativamente recente no escopo da Física Estatística, pode ser incluída quando se quer tratar de objetos de estudo em que, a Gaussiana não seja a curva mais representativa para análise da distribuição dos dados. Isto requer a pesquisa, tanto de professores quanto dos alunos envolvidos em projetos similares a este, que trazem elementos novos a serem estudados. Isto inclui questionamentos até mesmo epistemológicos, postos pelos alunos.

A discussão e o desenvolvimento das discussões devem ocorrer em um ambiente colaborativo, mas que permita ao aluno desenvolver senso crítico, ao tempo em que promove a pesquisa.

II. A DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Uma variável aleatória gaussiana real (RV) é definida como uma função densidade de probabilidade (PDF), representada pela Equação (4).[1]

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} e^{\left[-\frac{\left(x-\overline{X}^2\right)}{2\sigma_X^2}\right]}. \quad (4)$$

Onde $\overline{X}$ e σ_x^2 são, respectivamente, a média estatística e a variância de X.

A CFD, $P_X(x)$, e CF, $\Psi_X(\omega)$, são dadas por:

$$P_X(x) = 1 - Q\left(\frac{\overline{X}}{\sigma_X}\right). \quad (5)$$

Sendo:

$$Q(x) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{\left(-\frac{1}{2}y^2 dy\right)}. \quad (6)$$

a integral de probabilidade gaussiana, que está relacionada com a função de erro complementar, e

$$\Psi_X(\omega) = E\left\{e^{j\omega X}\right\} = e^{\left(j\omega\overline{X} - \frac{\omega^2\sigma_X^2}{2}\right)}. \quad (7)$$

Com $j = \sqrt{-1}$.

[1]Do inglês *probability density function* (PDF), *cumulative distribution function* (CDF), and *characteristic function* (CF), Gaussian random variable (RV).

III. A DISTRIBUIÇÃO q-GAUSSIANA

A q-gaussiana é inerente à gama de fenômenos que a termoestatística tsalliana abarca. Tsallis afirma que, não existe procedimento lógico-dedutivo que generalize qualquer que seja a área da física, mas, completa ele, são utilizadas metáforas com este intuito [10].

Por este viés ele apresenta uma possível metáfora, para generalizar a entropia de BG, como está descrito a seguir:

A Equação (8) pode ser considerada a mais simples equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \left(y\left(0\right) = 1\right). \tag{8}$$

Cuja solução é:

$$\mathrm{y} = 1\,. \tag{9}$$

Sua curva simétrica em relação à primeira bissetriz é:

$$x = 1. \tag{10}$$

Uma segunda EDO que pode ser considerada é:

$$\frac{dy}{dx} = 1 \qquad \left(y\left(0\right) = 1\right). \tag{11}$$

Sendo sua solução:

$$\mathrm{y} = 1 + \mathrm{x}\,. \tag{12}$$

Cuja função inversa é:

$$\mathrm{y} = \mathrm{x}\text{-}1\,. \tag{13}$$

Podemos, em seguida, considerar o seguinte:

$$\frac{dy}{dx} = y, \qquad \left(y\left(0\right) = 1\right). \tag{14}$$

Cuja solução é:

$$\mathrm{y} = \mathrm{e}^{\mathrm{x}}. \tag{15}$$

Tendo como função inversa:

$$\mathrm{y} = \ln\left(\mathrm{x}\right). \tag{16}$$

que satisfaz, obviamente:

$$\ln\left(x_A x_B\right) = \ln\left(x_A\right) + \ln\left(x_B\right). \tag{17}$$

É possível unificar as três equações diferenciais que foram consideradas até agora (isto é, (8), (11) e (14)) [11]. Sim, de fato. Fora da linearidade. Basta considerar

$$\frac{dy}{dx} = a + by \qquad \left(y\left(0\right) = 1\right), \tag{18}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^q \qquad \left(y\left(0\right) = 1; q \in \Re\right). \tag{19}$$

Cuja solução é:

$$y = \left[1 + \left(1 - q\right)x\right]^{\frac{1}{1-q}} \equiv e_q^x, \qquad \left(e_1^x = e^x\right). \tag{20}$$

Com inversa:

$$y = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \equiv \ln_q x\,, \qquad \left(x > 0; \ln_1 x = \ln x\right). \tag{21}$$

E que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\ln_q\left(x_A x_B\right) = \ln_q x_A + \ln_q x_B + \left(1 - q\right)\left(\ln_q x_A\right)\left(\ln_q x_B\right). \tag{22}$$

Com valores do índice entrópico, *q*, que permitem análises mais específicas nas diversas vertentes de aplicação.

O Gráfico 1 mostra alguns intervalos típicos de *q*, podendo cada um ser aplicado a distintos modelos.

Aos estudantes foram apresentados alguns conceitos físicos, em que se apliquem valores distintos do índice entrópico, apenas como introdução teórica da atividade aplicada.

Estes alunos já tinham noção de equações diferenciais ordinárias (EDO), uma vez que na Instituição a disciplina de Cálculo tem 90 horas, e contempla limites, derivadas, integrais e introdução à EDO.

Esta disciplina é estudada no 1º semestre, enquanto que a disciplina em que a atividade foi aplicada, é vista no 2º semestre.

IV. METODOLOGIA

Os dados de emissão de raios-x utilizados nesta pesquisa, foram obtidos no site: http://xte.mit.edu/ASM_lc.html, coletados pelo satélite Rossi X-ray (RXTE-ASM). Os dados foram disponibilizados aos grupos durante o primeiro semestre letivo, e os resultados foram apresentados no segundo semestre.

Os alunos foram agrupados em cinco grupos. Ao todo, participaram 34 alunos.

O trabalho contemplou o estudo de funções densidade de probabilidade para variáveis contínuas, após o estudo de elementos básicos: da Estatística Descritiva, da Teoria das

Probabilidades, Correlações, Método dos Mínimos Quadrados e, em paralelo, o estudo de conceitos relativos em Física I, lecionados pelo professor da disciplina.

Duas palestras foram ministradas por pesquisadores da área de Astronomia e Física Estatística, além do conteúdo das aulas.

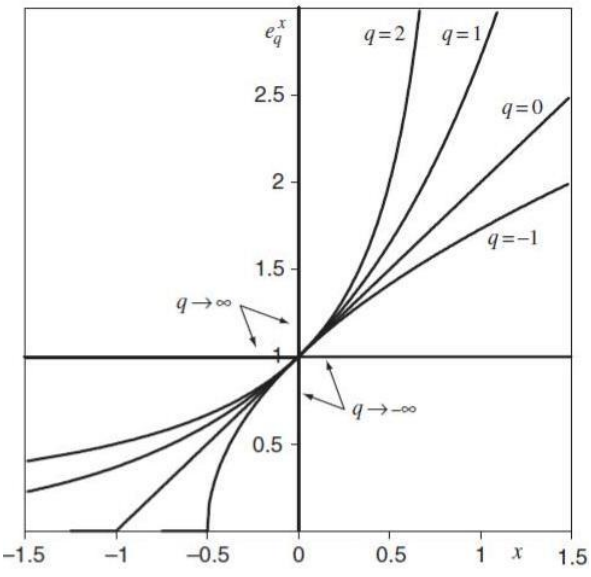

FIGURA 1. A função q-exponencial e_q^x para valores típicos de q. Para q > 1, ela está definida no intervalo aberto $(-\infty, (q-1)^{-1})$; ela diverge se $x \to (q-1)^{-1} - 0$. Para q < 1, ela está definida ∀x, e não definida para todos $x < -(1-q)^{-1}$. No limite $x \to 0$, it is $e_q^x \sim 1 + x(\forall q)$ [9].

Os estudantes analisaram dados das emissões de Raios-X obtidos de oitenta e sete estrelas binárias. Para a construção das curvas foi utilizado um software de tratamento estatístico. Para a construção da curva Gaussiana utilizou-se a função:

$$y(x) = y_0 + \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right). \quad (23)$$

Sendo:

$$\bar{x} = Média = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad (24)$$

$$\sigma = Desvio\ Padrão = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}. \quad (25)$$

A função para a curva q-Gaussiana, que pode ser visualizada abaixo, foi acrescentada na biblioteca do software antes da realização das análises.

$$y(x) = A\left[1 - k(1-q)(x-x_0)^2\right]^{1/(1-q)} + y_0. \quad (26)$$

Para cada uma das estrelas analisadas foi gerada uma distribuição Gaussiana e uma q-Gaussiana e os dados apresentados na forma gráfica, foram extraídos para análise em uma planilha de dados, onde foram obtidos os valores das médias e dos desvios padrão, dos coeficientes gerados para cada estrela. Para melhor visualização qualitativa do comportamento das curvas, interceptando os valores de emissão de Raios-X, a mesma foi ajustada com dados expressos em forma logarítmica.

Os dados foram apresentados em tabelas e gráficos, com os valores obtidos na análise de cada estrela, juntamente com as médias e desvios padrão, de todos os coeficientes gerados pelo software. Foi verificado que: a curva que obteve melhor ajuste foi a q-Gaussiana, sendo também aquela que evidenciou menor valor numérico de erro na análise quantitativa, e diante da análise qualitativa da curva plotada interceptando os dados.

A avaliação da pesquisa teve caráter qualitativo, a partir da análise do desenvolvimento dos grupos, por meio de: relatórios, do acompanhamento nas discussões, no aproveitamento das aulas e, finalizando com a apresentação dos trabalhos em um evento de ciência e tecnologia, com apresentação de pôsteres.

Os avaliadores do evento em que os resultados foram apresentados, são pesquisadores da área, todos doutores, e todos os grupos tiveram suas comunicações aceitas e aprovadas.

V. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Conforme pode ser visualizado no exemplo representado na Figura 2, entre as distribuições utilizadas, ocorreu um melhor ajuste dos dados pela curva q-Gaussiana, em comparação à Gaussiana, avaliando-se qualitativamente.

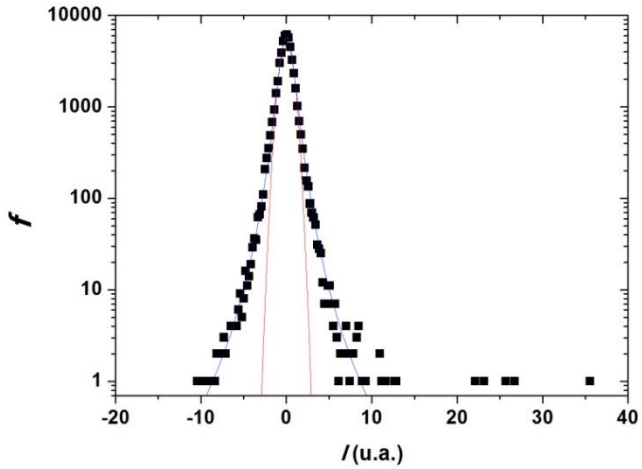

FIGURA 2 – Distribuição de emissão de Raios-X da fonte ss433. A curva em vermelho representa o ajuste de uma Gaussiana aos dados e a curva azul o da q-Gaussiana. **Fonte:** Autores.

Observou-se também, por meio de comparação de tabelas, dos resultados obtidos pelos alunos, que os dados de média e

desvio padrão, dos coeficientes gerados na modelagem da curva q-Gaussiana, apresentaram um menor erro associado aos coeficientes obtidos.

Diante dos resultados encontrados nas análises qualitativas e quantitativas, pôde-se concluir que a curva q-Gaussiana se ajustou melhor aos dados de emissão de Raios-X, em comparação à curva Gaussiana. Apenas, duas das 87 estrelas analisadas, apresentou comportamento divergente, em relação aos achados da análise estatística realizada.

VI. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os resultados de aplicação, em sala de aula, da termoestatística de Tsallis, por meio da comparação entre as distribuições q-Gaussiana e Gaussiana, os alunos desenvolveram o trabalho acompanhados pelos pesquisadores, e apresentaram os seus resultados no evento científico da Semana de Ciência e Tecnologia de 2015, o que os fomentou à iniciação científica e pesquisa.

Com os resultados apresentados neste trabalho, foi possível atestar a q-Gaussiana é a curva que melhor se ajusta aos dados de emissão de Raios-X, de estrelas binárias.

As conclusões obtidas no presente trabalho, não podem ser extrapoladas para a análise de emissões de Raios-X de todas as estrelas binárias, carecendo de mais dados que indiquem esses achados, uma vez que foi realizada por alunos de graduação em estágio inicial da pesquisa científica.

No entanto, o resultado está em consonância com a literatura e pesquisas em desenvolvimento, incluindo as realizadas pelos autores deste trabalho.

Ao todo participaram da atividade trinta e quatro alunos, distribuídos em cinco equipes de trabalho, cada uma com um grupo específico de sistemas astrofísicos binários, comparando os resultados das distribuições, bem como os resultados entre as equipes, no contexto destes sistemas. A aplicação do conteúdo foi problematizada, de modo a trabalhar cerca de 80% do conteúdo da disciplina.

Os resultados obtidos, além de estarem em consonância com o que é apresentado nas pesquisas mais recentes, mostra que a inserção de um tema relativamente novo, que abarca uma parte significativa de conceitos tratados pela Física Estatística, pode ser trabalhado para verificação da aprendizagem e fomento à iniciação científica, de alunos de graduação nas áreas de Física, Matemática, Engenharia, Astronomia e afins.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Centro Universitário SENAI/CIMATEC, que nos permitiu esta investigação, bem como outras que estão sendo consolidadas.

REFERÊNCIAS

[1] Giacconi, R. *et al. Evidence for X-rays from sources outside the solar system*, Physical Review Letters **9**, 439-443 (1962).

[2] Hines, W., Montgomery, D. C., Goldsman, D. M., *Probabilidade e Estatística na Engenharia*, LTC, São Paulo, (2006).

[3] Junior, R. J. C. O., Jesus, J. C. O., Moret, M. A., *Nonextensivity and entropy of astrophysical sources*. Physica A **392**, 6079-6083 (2013). Disponível em: < http://www.sciencedirect.com/science/journal/03784371/392/23?sdc=1>).

[4] Mello, R. D., *Aprendendo física com as estrelas binárias*, Revista Brasileira Ensino de Física **36,** 1-9 (2014). Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172014000300007&script=sci_abstract&tlng=pt>).

[5] Moret, M. *et al*. *X-ray Binary Systems and Nonextensivi Ty, Physica A* **389**, 854-858 (2010). Disponívem em: < http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437109008747 >).

[6] Osorio, Y. F. M., *Determinação do período orbital de sistemas binários eclipsantes*, Dissertação de Mestrado, IF/UFRN, Natal, Brasil (2009).

[7] Pedron, I. T., Mendes, R. S. *Equações não lineares, método WKB generalizado e aplicação às equações de Thomas-Fermi*, Revista Brasileira de Ensino de Física **30**, 1309 (2008). Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172008000100010&script=sci_abstract&tlng=pt>).

[8] Simon, M. K., *Probability distributions involving gaussian random variables: A handbook for engineers and scientists*, (Spring Street, New York, 2006).

[9] Skipper, C,. *Fast spectral variability in the x-ray emission of acreting black holes*, Tese (Doutorado em Astrofísica, University Southampton (2015).

[10] Tsallis, C., *A possible generalization of Boltzmann-Gibbs entropy*, J. Stat. Phys **52**, 479-486 (1988).

[11] Tsallis, C., *Introduction to Nonextensive statistical mechanics: Approaching a complex world*, (Springer, New York, 2009).