

Propuestas para incrementar el interés en el tema de elasticidad en los primeros semestres de la carrera de física



José Antonio Peralta, Porfirio Reyes López y Alfredo Godínez Muñoz
Departamento de Física, Escuela Superior de Física y Matemáticas Instituto Politécnico Nacional, Ed. 9, U.P. Adolfo López Mateos, C.P. 07738, México D.F.

E-mail: peralta@esfm.ipn.mx

(Recibido el 14 de Septiembre de 2010; aceptado el 10 de Enero de 2011)

Resumen

En general, en el tema de elasticidad de la materia de Física II de los primeros semestres de la licenciatura en física, se analizan solo las deformaciones producidas en los cuerpos elásticos bajo la acción de diferentes tipos de esfuerzos. Proponemos que se agreguen los análisis de la distribución de esfuerzos, la acumulación de energía elástica, la redistribución de masa para modificar la distribución de esfuerzos y la medida de constantes elásticas a partir de las oscilaciones que experimenta un cuerpo cuando se le deforma y luego se le deja oscilar o vibrar libremente. Todos estos temas dan lugar a que se relacionen los diferentes temas del curso con situaciones que aparecen a menudo en la vida cotidiana, lo cual incrementa el interés de los alumnos por la materia.

Palabras clave: Elasticidad, esfuerzo, energía elástica.

Abstract

In general on the issue of elasticity Physics II matter of the first semester of the degree in physics, we analyze only the deformations in the elastic bodies under the action of different kinds of efforts. We propose adding the analysis of stress distribution, the accumulation of elastic energy, the redistribution of mass to change the stress distribution and elastic constants, from the fluctuations experienced by a body when it is deformed and then is allowed to oscillate or vibrate freely. All these issues give rise to relate the different course topics that are often situations in everyday life, which increases students' interest in the subject.

Keywords: Elasticity, stress, elastic energy.

PACS: 01.40.Fk, 46.25.Ce, 47.70.Lk

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Normalmente en el tema de elasticidad correspondiente al curso de Física II que se imparte en la ESFM del IPN, el énfasis de los libros de texto se deposita sobre las deformaciones producidas en un cuerpo elástico por la acción de fuerzas externas [1, 2, 3, 4, 5, 6]; pero si se mantiene la atención de los alumnos centrada en las deformaciones, los problemas de tarea o los vistos en clase caen en el riesgo de que debido a su poco interés se conviertan en no más que ejercicios matemáticos ya que en general, pese a que las fuerzas sean muy grandes, con excepción de los casos de torsión y de flexión, las deformaciones resultan ser muy pequeñas. Así, para una barra de cobre de una longitud de 1.0m y con una sección transversal circular de 2cm^2 , si se le aplica en sus extremos una fuerza de 5000N, el peso equivalente a 500Kg, la deformación longitudinal es de apenas 0.25mm. Si consideramos ahora un caso de compresión hidrostática los resultados son más drásticos ya que para un cubo de aluminio de 1m de lado sometido a una presión de 10^7 Pa,

equivalente a una presión provocada por unas 1000 toneladas por metro cuadrado, su cambio relativo de volumen es de 0.143×10^{-3} , ¡mucho menos de una milésima parte de su volumen original! Otra cosa puede suceder, como trataremos de mostrar a continuación, si ampliamos nuestro campo de atención a la acumulación de energía asociada a las deformaciones elásticas, a la distribución de los esfuerzos, a la forma de mejorar la resistencia de una estructura mediante redistribuciones de masa, y a la medida de constantes elásticas mediante experimentos de oscilación.

II. ENERGÍA ELÁSTICA

A. Energía elástica de una barra comprimida

De acuerdo a la ley de Hooke la fuerza aplicada sobre una barra guarda la siguiente relación con su deformación

$$F = \left(\frac{AY}{l} \right) \Delta l, \tag{1}$$

donde F es la fuerza aplicada a los largo de su eje mayor, A su sección transversal, Y el módulo de Young, l su longitud y Δl su deformación. Esta relación es matemáticamente isomorfa al caso de la deformación para un resorte, $F = Kx$, por tanto el trabajo aplicado para producir una determinada deformación será

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{AY}{l} \right) \Delta l.^2 \tag{2}$$

Si consideramos una deformación de 1.0mm en una barra de acero de 30cm de longitud y con una sección transversal de 1cm² el trabajo resultante será de 33.33J, y si se colocara en el extremo de esta barra comprimida una esfera de 10gr y luego se le soltara subiría a una altura de ¡339.7m! Es decir, a pesar de que la deformación es pequeña en comparación a la longitud inicial de la barra su acumulación de energía es enorme.

Para una barra empotrada como la de la Fig. 1 a la cual se le aplica en su extremo libre una fuerza F , el desplazamiento de este extremo [2] está dado por la relación

$$F = \left(\frac{3YI}{L^3} \right) z, \tag{3}$$

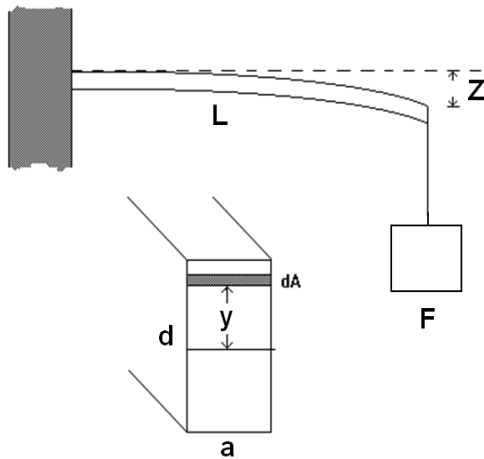


FIGURA 1. Viga voladiza y su sección transversal.

en donde Y es su módulo de Young, I es el momento de inercia de su sección transversal, L su longitud y Z el desplazamiento del extremo libre.

El llamado “momento de inercia” de la sección transversal I está dado por la integral

$$I = \int_{S_t} y^2 dA, \tag{4}$$

esto es, de acuerdo a los valores de la sección transversal indicados en la Fig. 1.

$$I = 2 \int_0^{\frac{d}{2}} y^2 ady = \frac{1}{12} ad.^3 \tag{5}$$

Nuevamente el isomorfismo de la Ec. (3) con la deformación de un resorte nos permite concluir que el trabajo necesario para realiza esta flexión es

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{3YI}{L^3} \right) z.^2. \tag{6}$$

Si la barra es de acero, con una longitud de 0.5m, una sección transversal cuadrada de lado 2cm y para una flexión de 10cm, el trabajo realizado será de 624J. Si se le añade una barra simétrica como la de la Fig. 2 ¡lo que se forma es un arco!, así es que la energía elástica de este sistema se doblará, y al añadirle una cuerda y una flecha de masa 100gr la velocidad con que la flecha saldrá disparada será de 111.7m/s, con un alcance vertical de 636m.

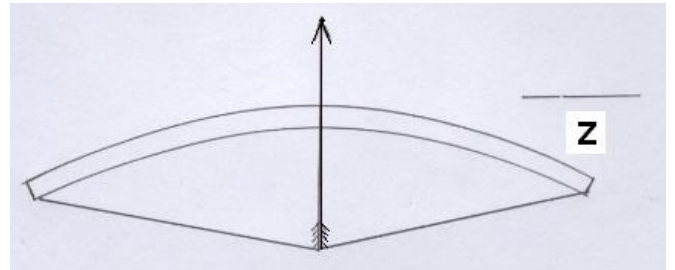


FIGURA 2. El arco está conformado por dos barras que se flexionan.

Es fácil comprender que la máxima energía que se le puede dar a un arco está limitada por la fuerza de un ser humano, y que se si se quiere aumentar su energía habrá que pensar en otras formas de transferencia y otras escalas. Es así como nacieron las catapultas.

Otra conclusión interesante es que al parecer hace más de 8000 años a.C., en el Paleolítico, la energía elástica bajo la forma de arcos fue la primera forma de acumulación de energía que inventó el hombre, ya para la caza, ya para la guerra, y que basta una ojeada a la historia de las guerras para darnos cuenta de que esta capacidad bajo la forma de arcos, ballestas o catapultas ha jugado un papel determinante en la historia de la civilización, tan importante como en su momento fue la pólvora, y lo es en la actualidad la energía atómica.

Y también con respecto a la acumulación de energía asociada a las deformaciones elásticas se podría señalar para el caso de las compresiones hidrostáticas, que generan deformaciones volumétricas, que todos los cuerpos sujetos a grandes compresiones implican en su deformación grandes acumulaciones de energía potencial, hecho que ocurre con

todos los seres, sustancias y objetos que están, por ejemplo, a grandes profundidades marinas o a grandes profundidades en el interior de la Tierra tales como los yacimientos de petróleo.

III. LA DISTRIBUCIÓN DE ESFUERZOS Y REDISTRIBUCIÓN DE MASA

A. Viga voladiza

Otro tema que puede resultar muy interesante a los alumnos es el de la manera como se distribuyen los esfuerzos, cómo esa distribución define los puntos más frágiles de una estructura dada, y señala la forma como se pueden eliminar las zonas frágiles mediante una redistribución adecuada de la masa. Analicemos el caso de una viga voladiza.

Si se flexiona una viga tal como el caso de la Fig. 1, la flexión a lo largo de ésta se podrá caracterizar mediante el inverso del radio de curvatura que será diferente para cada punto; así, en los puntos en los cuales el radio R sea pequeño, la curvatura será grande, y eso será un índice de que ahí se aplica un gran esfuerzo. Desde el punto de vista de la curvatura la flexión de una viga voladiza como la de la Fig. 1 está matemáticamente definida como

$$F(L-x) = YI \frac{1}{R}, \quad (7)$$

al sustituir el valor de I dado por la expresión 5 y despejar la curvatura obtendremos que

$$\frac{1}{R} = \frac{12F(L-X)}{Yad^3}, \quad (8)$$

ésta ecuación nos indica claramente que el esfuerzo, es decir, donde la viga se curva más, es mayor en el extremo fijo para $X=0$, y que en caso de que la fuerza F se fuese incrementando la viga se fracturaría en este punto, cosa que por lo demás mucha gente sabe por propia experiencia.

Si se quisiera que para una carga dada y conservando la misma longitud el esfuerzo se distribuyese igualmente a lo largo de la viga, sin que hubiese puntos frágiles, eso equivaldría a que la curvatura $1/R$ fuese constante

$$C = \frac{12F(L-X)}{Yad^3}, \quad (9)$$

lo cual nos daría un perfil de la viga definido por la ecuación 10 e ilustrado en la Fig. 3

$$d = \left[\frac{12F}{cAY} \right]^{\frac{1}{3}} (L-X)^{\frac{1}{3}}. \quad (10)$$

Un hecho interesante es como los colmillos de muchos depredadores tienen un perfil semejante al que se obtiene para el caso de la viga voladiza remodelada, tal como se

muestra en la Fig. 4, y esto parece natural ya que la función de estos colmillos es sujetar a la presa que en su afán de escapar ejerce fuerzas perpendiculares a la dirección en que los colmillos son más largos, tal como ocurre con una viga voladiza. De hecho la ley de Wolff [7] indica que la forma general de los huesos es tal que tiende a redistribuir de manera homogénea los esfuerzos a los que habitualmente están sujetos, orientando sus trabéculas y acumulando masa en los puntos en los cuales los esfuerzos son mayores evitando así la existencia de zonas frágiles.

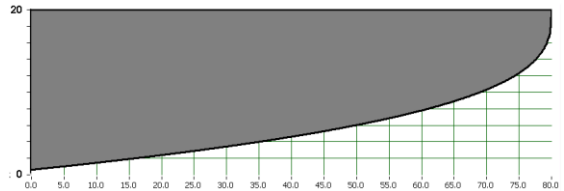


FIGURA 3. Perfil de una viga voladiza con redistribución de esfuerzos.

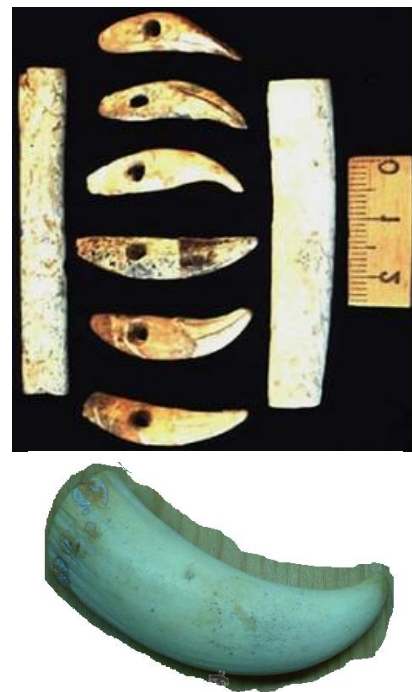


FIGURA 4. Perfil de colmillos para diferentes tipos de animales.

B. Barras y tubos

Una forma de optimizar el uso del material de que estará hecho el cuerpo elástico es redistribuyendo la masa; así, aún cuando se conserve la masa y la longitud de este cuerpo, un cambio en su sección transversal puede aumentar su resistencia a la deformación, pero también mediante la redistribución de masa una misma resistencia a la deformación se puede lograr con mucho menos masa.

Ilustraremos estas dos situaciones con el ejemplo de barras y tubos sujetos a torsión.

Ventajas de un tubo en comparación a una barra.

De acuerdo a Feynman [2] la torsión de una barra o de un tubo cuando se les aplica una torca se puede expresar mediante las siguientes fórmulas

$$\tau_{barra} = \frac{\pi\mu R^4}{2L} \Phi_1, \tag{11}$$

y

$$\tau_{tubo} = \frac{\pi\mu (R_e^4 - R_i^4)}{2L} \phi_2, \tag{12}$$

en donde τ es la torca aplicada en extremo libre de la barra o el tubo, μ su módulo de rigidez, R el radio de la barra, R_e y R_i el radio exterior y el radio interior del tubo respectivamente, L la longitud y Φ el ángulo de torsión.

Despejando el ángulo de torsión de la fórmula 11

$$\phi_1 = \frac{2L\tau}{\pi\mu R^4}. \tag{13}$$

Si la masa, la longitud, el módulo y la torca aplicada de la barra y del tubo son las mismas comparemos sus respectivos ángulos de torsión.

La masa m está dada por el producto de la densidad y el volumen $m = \rho V$, por tanto, para que m se conserve en ambos casos el volumen debe ser el mismo. El volumen de la barra será simplemente $V = \pi R^2 L$, mientras que el volumen del tubo será el área de la base del tubo, por su longitud L . El volumen del tubo es $V = \pi(R_e^2 - R_i^2)L$, si ambos volúmenes son iguales entonces

$$\pi R^2 = \pi(R_e^2 - R_i^2), \tag{14}$$

despejando el cuadrado del radio interior del tubo

$$R_i^2 = R_e^2 - R^2, \tag{15}$$

sustituyendo el valor del radio interior en la expresión 12

$$\tau_{tubo} = \frac{\pi\mu [R_e^4 - (R_e^2 - R^2)^2]}{2L} \phi_2, \tag{16}$$

como $(R_e^2 - R^2)^2 = R_e^4 - 2R_e^2 R^2 + R^4$, entonces

$$\tau_{tubo} = \pi\mu \frac{R_e^2 R^2 - R^4}{2L} \phi_2, \tag{17}$$

despejando a ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{2L\tau}{\pi\mu (R_e^2 R^2 - R^4)} \tag{18}$$

entonces la relación entre los ángulos de torsión de la barra y el tubo será

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \left[2 \left(\frac{R_e}{R} \right)^2 - 1 \right], \tag{19}$$

éste cociente nos indica que bajo la aplicación de una misma torca el ángulo de torsión de la barra será mucho mayor que el ángulo de torsión del tubo; por ejemplo, si el radio exterior del tubo es 4 veces el radio de la barra, entonces

$$\phi_1 = 31\phi_2, \tag{20}$$

es decir, que *la barra ante la aplicación de la misma torca se torcería 31 veces más que el tubo!*, por tanto, mediante una redistribución de la masa pasando de la forma barra a la forma tubo, hemos logrado una mayor resistencia a la torsión.

Es instructivo también comparar el ahorro de masa en situaciones en que la barra y el tubo se someten a iguales torcas y se generan iguales torsiones. Si en la expresión 12 que relaciona la torca con el ángulo de torsión para un tubo hacemos la sustitución $R_i = R_e - \Delta r$, con Δr el espesor del tubo, si R_e es mucho mayor que Δr , al desarrollar en serie esta expresión y despreciando los términos de menor orden obtenemos que

$$\tau_{tubo} = \frac{2\pi\mu R_e^3 \Delta r}{L} \phi, \tag{21}$$

ahora dividiendo la expresión 11 entre la expresión 21 obtenemos que el cuadrado del radio de la barra es $R_b^2 = \sqrt{4R_e^3 \Delta r}$. Por otra parte los volúmenes de la barra y el tubo son respectivamente $V_b = \pi R_b^2 L$ y $V_t = 2\pi R_e \Delta r L$, y la razón entre ambos volúmenes es, una vez que se ha sustituido en 11 el valor del cuadrado del radio de la barra

$$\frac{V_b}{V_t} = \sqrt{\frac{R}{\Delta r}}, \tag{22}$$

por tanto, bajo la aplicación de una misma torca y provocando una torsión igual, la masa de la barra, que es proporcional al volumen, será mayor que la masa del tubo; por ejemplo, si el radio exterior del tubo es 25 veces mayor que su espesor la masa de la barra será 5 veces mayor que la del tubo, en otras palabras el tubo representa un gran ahorro de masa si se busca la misma resistencia a la torsión.

Este resultado nos hace ver porqué muchas estructuras en la naturaleza tales como los tallos de las cañas, los juncos, el bambú, el cañón de las plumas de las aves voladoras, así como partes del esqueleto como el fémur tienen una forma tubular, y es que mediante un gran ahorro de masa estas partes estructurales que deben soportar torsiones pueden tener la misma resistencia a la torsión y a la flexión que las barras sólidas.

IV. LA MEDIDA DE CONSTANTES ELÁSTICAS MEDIANTE OSCILACIONES

Habíamos visto que la relación entre la fuerza F aplicada en el extremo de una viga voladiza y el desplazamiento z de su extremo libre está dada por la relación

$$F = \left[\frac{5YI}{L^3} \right] Z, \quad (23)$$

si la fuerza F la produce el peso de una masa M que sea sensiblemente mayor que la masa de la viga, entonces al sacarla de su posición de equilibrio y luego dejar que se mueva libremente, la masa oscilará con una determinada frecuencia f , y dado el isomorfismo entre la expresión 23 y la expresión para la deformación de un resorte bajo la aplicación de una fuerza $F=Kx$, la frecuencia tendrá la siguiente expresión

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3YI}{ML^3}}, \quad (24)$$

y despejando a Y

$$Y = \frac{4\pi^2 ML^3}{3I} f^2, \quad (25)$$

es decir que mediante experimentos en los cuales se mida la frecuencia de oscilación de una barra o una viga se pueden medir sus constantes elásticas. Esto es importante ya que si por ejemplo la barra es de aluminio, tiene una sección transversal de 2cm^2 y una longitud de 40cm , medir su módulo de Young mediante la forma convencional que consiste en aplicarle una fuerza a lo largo de su eje y luego medir su deformación longitudinal, habría que aplicar fuerzas gigantescas para obtener deformaciones apreciables, mientras que por este método alternativo basta agregar una masa de algunos kilogramos en su extremo libre, sacarla de su posición de equilibrio y dejarla oscilar libremente para poder medir su módulo de Young.

IV. CONCLUSIONES

Con todo lo expuesto anteriormente creemos haber mostrado que el enfoque de la elasticidad para los primeros semestres de la carrera de física se convierte en un tema muy interesante cuando se va más allá del estudio de las puras deformaciones; en efecto, el análisis de la energía asociada a las deformaciones elásticas nos lleva incluso por el camino de la historia de los usos de la energía, el análisis de los esfuerzos y de la redistribución de masa dirige nuestra atención a la lógica que subyace tras ciertas estructuras biológicas, y el de las oscilaciones de los cuerpos nos muestra como es posible medir sus constantes elásticas de maneras alternativas a las convencionales, es decir, esta visión amplia pero rigurosa de los fenómenos asociados a las deformaciones elásticas cambia nuestra visión del mundo, y puede empujar al estudiante a profundizar en los diversos campos de la vida natural o artificial en que la elasticidad está implicada.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la COFAA el apoyo dado para la realización de este trabajo.

REFERENCIAS

- [1] Frank, N. H., *Introducción a Mecánica y Calor*, (Editorial Grijalvo, S.A., México 1957).
- [2] Feynman, R., *Física: Electromagnetismo y materia*, Vol. II, (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1972).
- [3] Tipler, P. A. y Mosca, G., *Física para la Ciencia y la Tecnología*, Vol. 1, (Editorial Reverté, España, 2009).
- [4] Douglas C, Giancoli, *Physics for Scientists and Engineers*, (Prentice Hall, U.S.A., 1989).
- [5] Frederick, J., Keller, W., Gettys, E. and Skove, M. J., *Physics Classical and Modern*, (McGraw-Hill, U.S.A., 1989).
- [6] Sears, F. W., Zemansky, M. W. y Young, H. D., *Física Universitaria*, (Addison-Wesley Iberoamericana S. A., México, 1986).
- [7] Thompson, D. W., *Sobre el Crecimiento y la Forma*, (Ed. H. Blume, España, 1980).