

Fuerzas de ligadura y conservación de la energía mecánica. Caso Fuerza Normal



S. Díaz-Solórzano y L. González-Díaz

*Centro de Investigación de Matemática y Física. Dpto. Matemáticas y Física.
Instituto Pedagógico de Caracas, UPEL, Av. Páez, Caracas 1021, Venezuela.*

E-mail: srafael@ipc.upel.edu.ve; lagdelul@gmail.com

(Recibido el 22 de Noviembre de 2010; aceptado el 7 de Marzo de 2011)

Resumen

La fuerza normal es una fuerza de ligadura que surge del contacto entre un objeto y una superficie. Es poco lo que se discute respecto de si ésta es conservativa o no. En este trabajo se muestran las condiciones bajo las cuales la fuerza normal es conservativa, lo cual ocurre cuando la superficie en cuestión no evoluciona en el tiempo, caracterizándose a dicha fuerza mediante una energía potencial. Adicionalmente, se propone una función de energía pseudo-potencial para el caso en que la fuerza normal no es conservativa con la finalidad de derivarla a partir de la energía pseudo-potencial. Partiendo de consideraciones energéticas se obtiene la ecuación de movimiento para una partícula sometida a una fuerza normal.

Palabras claves: Fuerza normal, Energía mecánica y trabajo, Energía pseudo-potencial.

Abstract

The normal force is one constrain force that arises from the contact between a body and a surface. The origin of the normal force conservative is little discussed. This paper show the conditions under which the normal force is conservative. Which occurs when the surfaces in question does not change over time. Additionally, we propose a pseudo-potential function energy when the normal force is not conservative. From energy considerations, we obtain the equation of motion for a particle under a normal force.

Keywords: Normal force, Mechanical energy and work, Pseudo-potential energy.

PACS: 01.55-b, 45.20.D-, 45.20dg, 45.20dh

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

La mayoría de los textos de Física General y Mecánica [1, 2] usan el teorema de conservación de la energía mecánica como una estrategia para la resolución de problemas escolares, aludiendo a que tal conservación se debe a la ausencia de fuerzas no conservativas en el sistema, circunscribiéndose al ejemplo típico de la fuerza de roce. Esta particularidad no surge únicamente cuando estamos en presencia de fuerzas de roce; existen situaciones físicas simples, en ausencia de roce, en que la fuerza normal no es conservativa y por tanto la energía mecánica del sistema no se conserva. En los textos antes mencionados, tales situaciones no son discutidas y éstas permiten a los docentes mostrar fuerzas, distinta de la fuerza de roce, que disipan energía al sistema. Por otro lado, le permite visualizar al estudiante que la energía mecánica de un sistema puede no conservarse aun cuando la fuerza de roce no este presente. En tal sentido, mostraremos dos situaciones donde la fuerza normal no es conservativa; además desarrollaremos la base teórica que permite identificar el carácter conservativo o no de la fuerza normal.

La fuerza normal es un tipo especial de fuerza de ligadura, la cual restringe el movimiento de un cuerpo u objeto a ciertos lugares del espacio [2, p. 446], en dicho caso se dice que el movimiento está sujeto a restricciones, ligaduras o vínculos. Estas restricciones hacen que el cuerpo o los cuerpos que conforman al sistema no tengan libertad de moverse en todo el espacio; de hecho, no todas las coordenadas empleadas para describir el movimiento son independientes. Así, la ecuación de una superficie o línea en la cual se mueve un cuerpo recibe el nombre de ligadura del sistema o vínculo del sistema. Estas ligaduras son consideradas como restricciones holónomas que pueden depender explícitamente del tiempo. La interacción de un cuerpo con la superficie o línea que lo sostiene es mediada por la fuerza normal, ésta es esencialmente de contacto y puede ser caracterizada macroscópicamente a través del vínculo o ligadura [3, 4], lo cual permite establecer el carácter conservativo o no de la fuerza normal.

En mucho de los problemas presentados en los textos básicos de Física [1, 2] se observa que la fuerza normal no transfiere energía mecánica a los cuerpos sobre los cuales actúa. En tales problemas, las superficies de contacto son estáticas, el trabajo debido a la fuerza normal es siempre

nulo, lo cual lleva a establecer que esta fuerza es conservativa. No obstante, los textos antes mencionados no consideran la energía potencial asociada a dicha fuerza cuando escriben la energía mecánica de un sistema. Por otra parte, Keports [5] considera situaciones donde las superficies de contacto no son estacionarias y el trabajo realizado por la fuerza normal no se anula, a partir de lo cual se establece que la fuerza normal no es conservativa. Aunque el referido autor establece el carácter no conservativo de la fuerza normal a través del trabajo realizado por dicha fuerza, no deja claro la conexión entre el origen no conservativo de la fuerza normal y el movimiento de las superficies que contiene a los cuerpos, dando la impresión de que la fuerza normal siempre es no conservativa. Dado que la fuerza normal es un tipo particular de fuerza de ligadura, algunos autores [3, 6, 7] consideran su aspecto dinámico en el marco de la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana de la Mecánica para intentar aclarar el carácter conservativo o no de la fuerza normal. Sin embargo, José y Saletan [4] muestran, en el marco de la mecánica Newtoniana, que una partícula sujeta a una fuerza de ligadura, como la normal, tiene una energía mecánica que no se conserva cuando la superficie o línea que contiene a la partícula se encuentra en movimiento; es decir, el vínculo holónomo es dependiente del tiempo. Para ello, presenta el balance energético entre fuerzas provenientes de un potencial y la potencia disipada o suministrada por la fuerza de ligadura, sin considerar que la fuerza normal puede tener asociada una función potencial. En virtud de esto, mostraremos que la función potencial asociada a la fuerza normal es proporcional al vínculo holónomo que describe la superficie o línea que contiene a la partícula u objeto, y a partir de tal construcción se expondrán condiciones bajo las cuales la fuerza normal no es conservativa.

Es bien conocido que existen fuerzas que provienen de funciones potenciales. Cuando estas funciones son dependientes únicamente de las coordenadas o posición se tiene que las fuerzas derivables de estas funciones potenciales son conservativas; tales funciones reciben el nombre de *energías potenciales* [8]. En cambio, cuando dichas funciones potenciales dependen explícitamente de la posición o de las coordenadas y adicionalmente del tiempo se tiene que las fuerzas derivables de estas funciones potenciales son no conservativas [4]; en este caso a tales funciones las denominaremos *energías pseudo-potenciales*, para enfatizar el hecho de que la fuerza asociada a dicha función potencial no conserva la energía mecánica, aun cuando proviene del gradiente de una función potencial. Para el logro del objetivo propuesto en este trabajo, mostraremos que la función pseudo-potencial asociada a la fuerza normal es proporcional al vínculo, siendo ésta no conservativa cuando el vínculo depende explícitamente del tiempo, lo cual ocurre en una situación en que la superficie adquiere movimiento. La caracterización de la fuerza normal vía su función potencial tiene la ventaja de que la interacción entre los cuerpos y las superficies que los soportan puede ser considerada de manera simple en la energía mecánica del cuerpo que se estudia. Particularmente, analizaremos dos casos: Uno en el cual una

partícula está sujeta a una fuerza de ligadura constante en presencia de un campo gravitacional constante. Y otro en la que se consideran dos vínculos, uno dependiente del tiempo y otro no. En este último caso, la fuerza normal exhibe una descomposición en dos fuerzas ortogonales entre sí, una de ellas es conservativa mientras que la otra no lo es.

Este artículo se encuentra organizado de la siguiente manera: En la Sec. II, se presenta la energía pseudo-potencial asociada a la fuerza normal, mostrando a su vez que la preservación del vínculo holónomo pone de manifiesto la relación entre la naturaleza geométrica de la superficie y el carácter no conservativo de la fuerza normal. En la Sec. III, se estudia la dinámica de una partícula sujeta a un campo gravitacional constante que está en contacto con una superficie en movimiento. El estudio de la dinámica se hace a partir de consideraciones energéticas, incorporando la función potencial asociada a la fuerza normal. Adicionalmente, se muestran dos situaciones físicas, en ausencia de roce, en que la energía mecánica no se conserva.

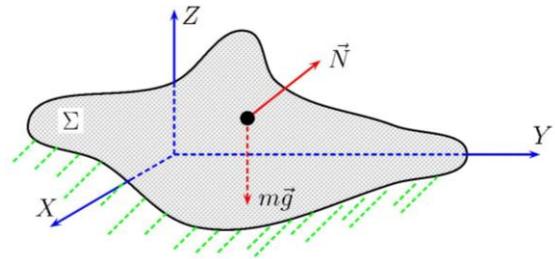


FIGURA 1. Una partícula sobre una superficie que se encuentra en movimiento y en presencia de un campo gravitacional constante. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la partícula.

II. FUNCIÓN POTENCIAL ASOCIADA A LA FUERZA NORMAL

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en presencia de un campo gravitacional constante \vec{g} sobre una superficie Σ en movimiento, tal como se muestra en la Fig. 1. La superficie Σ es considerada una ligadura holónoma dependiente del tiempo (vínculo rehonómico) de la forma $\phi(\vec{r}, t)$. Esta función se anula sobre la trayectoria donde ocurre la dinámica; es decir,

$$\phi(\vec{r}, t)|_{\Sigma} = 0, \text{ o brevemente, } \phi(\vec{r}, t) \approx 0. \quad (1)$$

El símbolo de igualdad débil (\approx) es empleado para indicar que la función ha sido evaluada sobre la superficie Σ , donde se encuentra contenida la trayectoria seguida por la partícula vista por un observador no inercial ubicado en Σ . El gradiente de este vínculo ($\vec{\nabla}\phi(\vec{r}, t)$) es un vector no nulo y perpendicular a la superficie [9] en cada instante de tiempo. Así, la fuerza que ejerce la superficie Σ al cuerpo es

proporcional a este gradiente [3, 4, 7], lo cual permite escribir la fuerza normal en la forma:

$$\vec{N}(\vec{r}, t) \approx \lambda(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t) \quad (2)$$

donde $\lambda(\vec{r}, t)$ es el parámetro de proporcionalidad que recibe el nombre de *multiplicador de Lagrange*, el cual es usado para ajustar el sentido y la intensidad de la interacción, tales que sean compatible con las ecuaciones de movimiento. La fuerza normal \vec{N} puede ser escrita como el gradiente de la función escalar $\lambda(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t)$ sobre la superficie Σ , donde ocurre la dinámica. En efecto,

$$\vec{\nabla}[\lambda(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t)] = \phi(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \lambda(\vec{r}, t) + \lambda(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \phi(\vec{r}, t). \quad (3)$$

Al evaluar la expresión anterior en Σ y considerar la expresión (2), se obtiene

$$\vec{N}(\vec{r}, t) \approx -\vec{\nabla}[-\lambda(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t)]. \quad (4)$$

Observándose que la fuerza normal se obtiene a partir del gradiente de una función escalar que depende explícitamente del tiempo.

$$U_{\vec{N}}(\vec{r}, t) \equiv -\lambda(\vec{r}, t)\phi(\vec{r}, t). \quad (5)$$

Así, la función recibe el nombre de *energía pseudo-potencial* asociada a la fuerza normal. Es bien conocido que una fuerza que derive de una función potencial con dependencia explícita en el tiempo no conserva la energía mecánica de la partícula sobre la cual actúa dicha fuerza [4, 10], ya que la potencia puede escribirse como la derivada parcial de la función potencial respecto al tiempo.

$$\frac{\partial U_{\vec{N}}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} \phi - \lambda \frac{\partial \phi}{\partial t} \approx -\lambda(\vec{r}, t) \frac{\partial \phi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (6)$$

En tal sentido, la cantidad representa la tasa con que la energía mecánica es transferida como consecuencia de la interacción entre una partícula con una superficie en movimiento. De manera que la fuerza normal es conservativa si la función de vínculo no depende explícitamente del tiempo; esta consecuencia es independiente del hecho de que el multiplicador dependa explícitamente del tiempo [11]. El hecho de que (6) sea interpretada como la potencia asociada a la fuerza normal, se desprende de la preservación del vínculo en el tiempo, es decir $\dot{\phi}(\vec{r}, t) \approx 0$. Al calcular la derivada temporal de la energía potencial (5) asociada a la fuerza normal resulta que

$$-\dot{\lambda}\phi - \lambda\dot{\phi} = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} U_{\vec{N}} + \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}. \quad (7)$$

En la superficie Σ se tiene que $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$ y $\vec{N} = -\vec{\nabla} U_{\vec{N}}$; de esta manera (7) toma la siguiente forma

$$\frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} = \vec{N} \cdot \dot{\vec{x}}, \quad (8)$$

La cual es la potencia asociada a la fuerza normal. La nulidad de la derivada respecto al tiempo de la energía pseudo-potencial muestra que la fuerza normal no es perpendicular a la velocidad. Esta situación pone de manifiesto la relación entre la naturaleza geométrica de la superficie y el carácter no conservativo de la fuerza normal. Generalizando este resultado, podemos afirmar que las fuerzas de ligaduras son no conservativas cuando los vínculos dependen explícitamente del tiempo. Desde el punto de vista físico, cuando la superficie adquiere movimiento existe una transferencia de energía mecánica que se contabiliza mediante el trabajo mecánico debido a la fuerza normal ejercida sobre la partícula, dicho trabajo viene dado por

$$W_{\vec{N}}^{[A, B; C]} = \int_C \vec{N} \cdot d\vec{x} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{N} \cdot \dot{\vec{x}} dt = \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} dt. \quad (9)$$

A partir de las expresiones (6), (8) y (9) se evidencia que la fuerza normal es conservativa cuando la función de vínculo dependa explícitamente de las coordenadas o posición, aun cuando el multiplicador dependa explícitamente del tiempo. En dicho caso la fuerza normal es perpendicular a la trayectoria seguida por la partícula, de manera que la superficie no transfiere energía al cuerpo, por lo que el trabajo realizado por la fuerza normal es nulo. Cualquiera de estas afirmaciones puede emplearse como estipulaciones para el establecimiento del concepto de fuerza normal como fuerza conservativa, ya que las tres afirmaciones resultan equivalentes.

III. DINÁMICA DE UNA PARTÍCULA SUJETA A UNA FUERZA NORMAL DISIPATIVA

Se puede obtener la ecuación de movimiento de un sistema con ligadura holónoma a partir de consideraciones energéticas, en el contexto de la formulación Newtoniana de la mecánica. Para ello se considera, en la energía mecánica del sistema, las energías cinéticas de cada parte móvil que conforma al sistema así como las energías de interacción entre cada cuerpo con su entorno; en particular, una de estas interacciones puede ser debida al contacto con una superficie. Cuando el sistema mecánico está conformado por una partícula en contacto con una superficie y en presencia de un campo gravitacional constante, tal como se ilustra en la Fig. 1, entonces la energía mecánica del sistema es dada por

$$E = K + U_{m\vec{g}} + U_{\vec{N}} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - m\vec{g} \cdot \vec{x} - \lambda\phi, \quad (10)$$

siendo los dos últimos términos de (10) las energías asociadas a las interacciones entre la partícula con el campo gravitacional y la superficie, respectivamente. La inclusión de la energía pseudo-potencial (5) asociada a la fuerza de ligadura \vec{N} en (10) hace que las coordenadas del vector posición \vec{r} y el multiplicador de Lagrange λ sean tratadas como variables independientes [6, 7]. Al derivar con respecto al tiempo la energía mecánica (10) resulta

$$\dot{E} = \dot{\vec{x}} \cdot [m\vec{a} - m\vec{g} - \lambda \vec{\nabla} \phi] + \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} - \phi \dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla} \lambda. \quad (11)$$

Al evaluar dicha expresión en la superficie Σ se obtiene

$$\dot{E} \approx \dot{\vec{x}} \cdot [m\vec{a} - m\vec{g} - \lambda \vec{\nabla} \phi] + \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t}. \quad (12)$$

Considerando que \dot{E} es la potencia disipada por todas las fuerzas no conservativas, que en este caso es la normal, se tiene que el lado izquierdo de la igualdad de (12) puede ser reemplazado por (8), quedando

$$\dot{\vec{x}} \cdot [m\vec{a} - m\vec{g} - \lambda \vec{\nabla} \phi] \approx 0. \quad (13)$$

Eligiendo al multiplicador de Lagrange apropiadamente de forma tal que las componentes de la velocidad sean tratadas como independientes, se tiene que el término dentro del corchete debe anularse para cada componente de la velocidad, resultando así la ecuación de movimiento para el sistema considerado en la Fig. 1.

A continuación examinaremos dos problemas escolares que usualmente son tratados en cursos de Física General y Mecánica: El primer problema presenta un vínculo holónomo que depende explícitamente del tiempo (restricción rehonómica) y el segundo presenta dos vínculos holónomos, uno que no depende explícitamente del tiempo (restricción escleronóma) y el otro si. Estos problemas describen situaciones donde la fuerza de roce no está presente y la energía mecánica de la partícula en estudio no se conserva, debido a que la fuerza normal disipa energía.

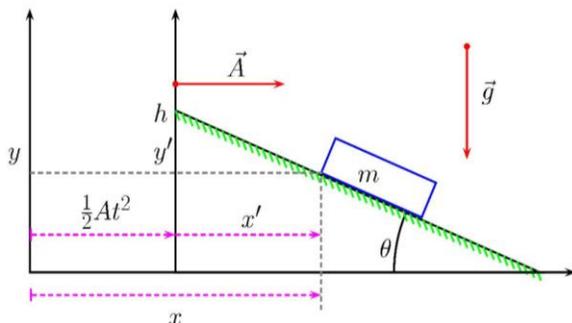


FIGURA 2. Bloque descendiendo por un plano inclinado que se mueve a la derecha con aceleración constante, en presencia de un campo gravitacional constante.

Ejemplo 1: Problema escolar con un vínculo rehonómico.

Un bloque de masa m desciende por un plano inclinado, de ángulo θ y altura h , debido a la presencia del campo gravitacional constante \vec{g} , la superficie del plano inclinado adquiere una aceleración constante \vec{A} , la cual es horizontal y dirigida a la derecha, tal como se muestra en la Fig. 2. Entre la superficie y el bloque no hay roce. La función de vínculo $\phi(\vec{r}, t)$ que describe a la superficie del plano inclinado viene dada por la ecuación de la recta, la cual se encuentra en movimiento acelerado a la derecha. En coordenadas cartesianas, la ecuación de la recta toma la siguiente forma,

$$\begin{aligned} y' &= -x' \tan \theta + h, \\ y &= -(x - \frac{A}{2} t^2) \tan \theta + h, \\ \therefore \phi(x, y, t) &= x \tan \theta + y - \frac{A \tan \theta}{2} t^2 - h \approx 0. \end{aligned} \quad (14)$$

La energía mecánica (10) para el bloque en coordenadas cartesianas, respecto al marco de referencia fijo, viene dada por

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m V_x^2 + \frac{1}{2} m V_y^2 + mgy \\ &\quad - \lambda (x \tan \theta + y - \frac{A \tan \theta}{2} t^2 - h). \end{aligned} \quad (15)$$

Derivando respecto al tiempo y usando (14), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{E} &\approx [m a_x - \lambda \tan \theta] V_x + [m a_y + mg - \lambda] V_y \\ &\quad + \lambda A \tan \theta t. \end{aligned} \quad (16)$$

En este caso la única fuerza conservativa es la debida al campo gravitacional, por lo que esta fuerza no disipa energía mecánica. En cambio, la fuerza normal no es conservativa debido a que tiene asociada una energía pseudo-potencial, de manera que disipa energía al bloque a una rata dada por

$$\dot{E} \approx \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} = \lambda A \tan \theta t - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \phi \approx \lambda A \tan \theta t. \quad (17)$$

Igualando (16) con (17) se llega a la expresión,

$$[m a_x - \lambda \tan \theta] V_x + [m a_y + mg - \lambda] V_y \approx 0. \quad (18)$$

El multiplicador de Lagrange es escogido de forma tal que las velocidades V_x y V_y sean tratadas como variables independientes; por lo que los coeficientes que multiplican a cada uno de estos términos deben anularse. Es decir, al elegir λ de manera que el primer corchete que aparece en (18) se anule hace que el primer término de dicha expresión desaparezca, quedando el segundo término. Por consiguiente, el segundo corchete de (18) debe anularse

también ya que la componente vertical de la velocidad no es nula. Así, al anular los corchetes de (18) queda:

$$\begin{cases} ma_x - \lambda \tan \theta = 0, \\ ma_y + mg - \lambda = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Las ecuaciones (19) junto a (14) corresponden a las ecuaciones de movimiento del bloque, mostrado en la Fig. 2, descritas en coordenadas cartesianas. Al derivar dos veces el vínculo (14) respecto al tiempo se obtiene una relación entre las componentes horizontal y vertical del vector aceleración, la cual al sustituirse en (19) se obtiene

$$\begin{cases} a_x = (A \sin \theta + g \cos \theta) \sin \theta, \\ a_y = (A \cos \theta - g \sin \theta) \sin \theta, \\ \lambda = m(A \sin \theta + g \cos \theta) \cos \theta. \end{cases} \quad (20)$$

En virtud de las expresiones dadas en (20) se tiene que la norma del vector aceleración y la intensidad de la fuerza normal vienen dadas por:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{A^2 + g^2}, \quad (21a)$$

$$|\vec{N}| = \lambda |\vec{\nabla} \phi| = m(A \sin \theta + g \cos \theta). \quad (21b)$$

De (17) se evidencia que la superficie le transfiere energía al bloque. Y la cantidad de energía transferida por la superficie al bloque, cuando el plano se ha trasladado una distancia d a partir del reposo, se obtiene al sustituir (17) en (9), resultando

$$W_{\vec{N}}^{[0,d;C]} = \int_0^{t_d} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} dt = m(A \sin^2 \theta + \frac{1}{2} g \sin 2\theta) d, \quad (22)$$

donde $d = \frac{1}{2} A t_d^2$.

Obsérvese que (22) se anula cuando la superficie se encuentra en reposo, ya que $\vec{A} = \vec{0}$. Lo cual concuerda con el hecho de que la fuerza normal es conservativa en este caso.

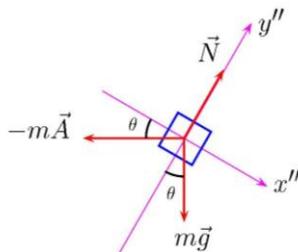


FIGURA 3. Diagrama de fuerza sobre el bloque mostrado en la Fig. 2 desde un marco de referencia ubicado sobre el plano inclinado.

La expresión (21b) puede obtenerse al considerar la componente y'' del diagrama de fuerza mostrado en la Fig. 3. Dicho diagrama es realizado por un observador no inercial ubicado sobre la superficie, por lo que sobre el bloque actúa la fuerza inercial $-m\vec{A}$. La expresión (22) puede ser obtenida al calcular el trabajo realizado por la normal a partir del producto escalar de la fuerza con el desplazamiento del bloque,

$$\begin{aligned} W_{\vec{N}}^{[0,d;C]} &= \vec{N} \cdot \Delta \vec{r} = N \sin \theta \Delta x + N \cos \theta \Delta y, \\ &= N \sin \theta \frac{a_x}{A} + N \cos \theta \frac{a_y}{A}, \\ &= \frac{N}{A} (a_x \sin \theta + a_y \cos \theta) d, \\ &= N \sin \theta d. \end{aligned} \quad (23)$$

Al sustituir (21b) en (23) se llega a (22). La aceleración del bloque medida por el observador no inercial se obtiene al considerar la segunda ley de Newton a lo largo del eje y'' del diagrama de fuerza mostrado en la Fig. 3,

$$a' = g \sin \theta - A \cos \theta. \quad (24)$$

La aceleración del bloque mostrado en la Fig. 2, medida por un observador inercial, viene dada por la siguiente ley de transformación

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{A} = a' \hat{x}'' + A \hat{x}, \\ &= (A \sin \theta + g \cos \theta) \sin \theta \hat{x} \\ &\quad + (A \sin \theta + g \cos \theta) \cos \theta \hat{y}. \end{aligned} \quad (25)$$

La cual coincide con (20).

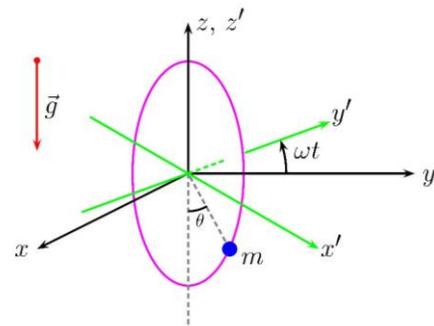


FIGURA 4. Esfera constreñida a moverse por una circunferencia de radio R , el cual rota con velocidad angular ω alrededor del eje vertical en presencia del campo gravitacional constante \vec{g} .

Ejemplo 2: Problema escolar con un vínculo esclerónomo y otro rehónomo.

Considere una esfera de masa m obligada a moverse en una circunferencia de radio R dispuesta verticalmente, la cual rota con una velocidad angular constante $\bar{\omega}$ alrededor de su diámetro vertical, tal como se muestra en la Fig. 4. No hay

fricción entre la esfera y la circunferencia, de manera que queda sujeta a dos ligaduras: La restricción esclerónoma descrita por una esfera de radio R con centro en el origen, y la restricción rehónoma descrita por el plano $z'-x'$ mostrado en la Fig. 4, el cual contiene al origen y se encuentra rotado un ángulo ωt respecto al eje x . Así, los dos vínculos vienen expresados por:

$$\phi_1(x, y, z) = R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \approx 0, \quad (26a)$$

$$\phi_2(x, y, z, t) = -x \text{sen} \omega t + y \text{cos} \omega t \approx 0. \quad (26b)$$

Resulta claro que la intersección de una esfera con un plano da origen a una circunferencia. En tal sentido, el símbolo de igualdad débil (\approx) indicará que las expresiones serán evaluadas sobre la circunferencia Σ , por lo que se debe cumplir simultáneamente que $\phi_1 \approx 0$ y $\phi_2 \approx 0$. Estos vínculos caracterizan a la interacción de contacto entre la esfera y la circunferencia, de forma que la fuerza normal puede ser escrita como [7]

$$\vec{N} \approx \lambda_1 \vec{\nabla} \phi_1 + \lambda_2 \vec{\nabla} \phi_2 \equiv \vec{N}_1 + \vec{N}_2. \quad (27)$$

Esta descomposición permite separar la parte conservativa de la fuerza normal de la que no lo es: \vec{N}_1 proviene de un vínculo que no tiene dependencia explícita del tiempo, mientras que \vec{N}_2 proviene de uno que depende explícitamente del tiempo. Además, se puede ver que el producto escalar entre \vec{N}_1 y \vec{N}_2 es débilmente cero

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = -2\lambda_1 \lambda_2 \phi_2 \approx 0. \quad (28)$$

Es decir, las proyecciones \vec{N}_1 y \vec{N}_2 de la fuerza normal son perpendiculares sobre la trayectoria dinámica seguida por la partícula. La descomposición (27) hace que la energía de interacción asociada a la fuerza normal sea escrita de la siguiente forma,

$$U_{\vec{N}} = U_{\vec{N}_1} + U_{\vec{N}_2} = -\lambda_1 \phi_1 - \lambda_2 \phi_2. \quad (29)$$

La energía mecánica para la esfera en coordenadas cartesianas, respecto al marco de referencia inercial desde donde se observa a la circunferencia rotando, viene dada por

$$\begin{aligned} E &= K + U_{m\vec{g}} + U_{\vec{N}} \\ &= \frac{1}{2} m (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2) - \lambda_1 (R^2 - x^2 - y^2 - z^2) \\ &\quad - \lambda_2 (-x \text{sen} \omega t + y \text{cos} \omega t). \end{aligned} \quad (30)$$

Derivado respecto al tiempo y usando (26) se obtiene,

$$\begin{aligned} \dot{E} &\approx [m a_x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \text{sen} \omega t] V_x \\ &\quad + [m a_y + 2\lambda_1 x - \lambda_2 \text{cos} \omega t] V_y + \\ &\quad + [m a_z + mg + 2\lambda_1 z] V_z \\ &\quad + \omega \lambda_2 (x \text{cos} \omega t + y \text{sen} \omega t). \end{aligned} \quad (31)$$

Para el sistema mostrado en la Fig. 4, la fuerza normal no es conservativa debido a que (29) depende explícitamente del tiempo. En tal sentido, la tasa con que la energía mecánica es transferida viene dada por

$$\dot{E} \approx \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} = \omega \lambda_2 (x \text{cos} \omega t + y \text{sen} \omega t). \quad (32)$$

Donde se ha sustituido la energía pseudo-potencial (29). Igualando (31) con (32) se llega a la expresión

$$\begin{aligned} &[m a_x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \text{sen} \omega t] V_x \\ &+ [m a_y + 2\lambda_1 x - \lambda_2 \text{cos} \omega t] V_y \\ &+ [m a_z + mg + 2\lambda_1 z] V_z = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

eligiendo a los multiplicadores λ_1 y λ_2 de forma tal que las componentes de la velocidad de la esfera sean tratadas como variables independientes, resulta que cada corchete que aparece en (33) debe anularse. Quedando

$$\begin{cases} m a_x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \text{sen} \omega t = 0, \\ m a_y + 2\lambda_1 x - \lambda_2 \text{cos} \omega t = 0, \\ m a_z + mg + 2\lambda_1 z = 0. \end{cases} \quad (34)$$

El conjunto de ecuaciones dadas en (34) junto a los vínculos mostrados en (26) corresponden a las ecuaciones de movimiento de la esfera mostrada en la Fig. 4. Derivando dos veces el conjunto de vínculos (26) y sustituyendo (34) se logra despejar a los multiplicadores, resultando

$$\lambda_1 = \frac{m}{2R^2} [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - gz], \quad (35a)$$

$$\lambda_2 = 2m\omega [\dot{x} \text{cos} \omega t + \dot{y} \text{sen} \omega t]. \quad (35b)$$

Al sustituir (35) en (34) resulta un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Para el desacoplo de este sistema conviene hacer un cambio de coordenadas, compatible con los vínculos (26), que exhiba el único grado de libertad que posee la esfera. Eligiendo al ángulo θ , mostrado en la Fig. 4, como coordenada generalizada, se tiene que la transformación

$$x = R \text{sen} \theta \text{cos} \omega t, \quad (36a)$$

$$y = R \text{sen} \theta \text{sen} \omega t, \quad (36b)$$

$$z = -R \text{cos} \theta, \quad (36c)$$

desacopla al sistema de ecuaciones mostrado en (34), además de ser compatible con las ecuaciones de vínculo (26). Obteniéndose,

$$\lambda_1 = \frac{m}{2R} [R\dot{\theta}^2 + R\omega^2 \sin^2 \theta + g \cos \theta], \quad (37a)$$

$$\lambda_2 = 2m\omega R\dot{\theta} \cos \theta, \quad (37b)$$

$$\ddot{\theta} + \left[\frac{g}{R} - \omega^2 \cos \theta \right] \sin \theta = 0. \quad (37c)$$

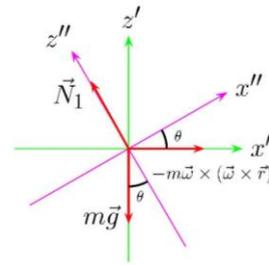


FIGURA 5. Diagrama de fuerza de la esfera mostrada en la Fig. 4, el cual es descrito por un observador no inercial que rota con la circunferencia.

Las intensidades de las proyecciones \vec{N}_1 y \vec{N}_2 de la fuerza normal vienen dadas por,

$$|\vec{N}_1| = |\lambda_1| |\vec{\nabla}\phi_1| = 2\lambda_1 R, \quad (38a)$$

$$|\vec{N}_2| = |\lambda_2| |\vec{\nabla}\phi_2| = \lambda_2. \quad (38b)$$

De (32) se evidencia que la circunferencia le transfiere una cantidad de energía a la esfera dada por

$$\begin{aligned} W_{\vec{N}_2}^{[A,B;C]} &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} dt = \int_{\theta_A}^{\theta_B} \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial \theta} \frac{d\theta}{\dot{\theta}} \\ &= 2m\omega^2 R^2 \int_{\theta_A}^{\theta_B} \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (39) \\ &= 2m\omega^2 R^2 \sin(\theta_B + \theta_A) \sin(\theta_B - \theta_A), \end{aligned}$$

donde se ha sustituido (32) y las transformaciones (38a) y (38b), para eliminar la dependencia temporal que aparece en el integrado de (39). Así, la circunferencia realiza un trabajo igual a $m\omega^2 R^2$ para llevar a la esfera desde el polo sur al ecuador, y un trabajo igual a $-m\omega^2 R^2$ para llevar a la esfera del ecuador al polo norte. De manera que, en promedio, la circunferencia no realiza trabajo para llevar a la esfera de un polo a otro.

Las expresiones dadas por (37) pueden ser obtenidas a partir del diagrama de fuerza mostrado en la Fig. 5; el cual es descrito por un observador ubicado en el marco de referencia no inercial que rota con la circunferencia. Sobre la esfera actúan la fuerza centrífuga, la fuerza de Coriolis, la fuerza normal y la fuerza debida al campo gravitacional. Considerando la segunda ley de Newton a lo largo del eje z'' mostrado en la Fig. 5, se llega a la expresión (37a) la cual después de sustituir la transformación (36) coincide con (35a). Al considerar la componente y'' perpendicular al plano del papel de la Fig. 5, se observa que \vec{N}_2 se equilibra con la fuerza de Coriolis, lo cual conduce a (37b) que coincide con (35b) después de sustituir la transformación (36).

IV. DISCUSIÓN

La función potencial (5) asociada a la fuerza normal (2), media la interacción entre la partícula que está en contacto con la superficie que la soporta; siendo esta función potencial nula sobre la trayectoria dinámica seguida por la partícula. Resulta claro que el multiplicador de Lagrange que aparece en (2) y (5), ha sido introducido para ajustar el sentido y la intensidad de la fuerza normal compatible con las ecuaciones de movimiento. Por ello, puede suceder que λ dependa explícitamente del tiempo. En este caso la energía potencial (5) depende del tiempo y la fuerza normal sigue siendo conservativa, contrariamente a lo que se afirma que las fuerzas provenientes de funciones potenciales que dependen explícitamente del tiempo son no conservativas. La función potencial (5) es irrelevante para efecto de contabilizar la energía mecánica ya que $U_{\vec{N}} \approx 0$. Esta es la razón por la cual no es considerada en los textos de Física General y Mecánica cuando se estudia el tópico de energía mecánica. Sin embargo, tal función potencial es relevante al contabilizar la transferencia de energía asociada a la fuerza normal en virtud a que (6) no es débilmente cero, a pesar que $U_{\vec{N}}$ si lo es. Lo cual permite obtener la ecuación de movimiento de un sistema con ligadura holónoma a partir de consideraciones energéticas.

Es de mencionar que el criterio esgrimido por muchos autores de que una fuerza es conservativa si el rotor de dicha fuerza se anula; es decir, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, no se aplica en el caso de las fuerzas de ligaduras que provienen de pseudo-potenciales, ya que en dichos casos se sigue que

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U_{\vec{N}} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \dot{E} \approx \frac{\partial U_{\vec{N}}}{\partial t} \neq 0. \quad (40)$$

Por ello se ha considerado, en este artículo, que una fuerza es conservativa cuando ésta conserva la energía mecánica. En tal sentido, el criterio de que un campo de fuerza irrotacional es conservativo no es aplicable en general [12].

V. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha mostrado que las siguientes afirmaciones son equivalentes: (I) La fuerza normal es conservativa cuando la superficie permanece estática, es decir, la función de vínculo no depende explícitamente del tiempo; (II) la fuerza normal es conservativa cuando ésta es perpendicular a la trayectoria, es decir, la fuerza normal que actúa sobre una partícula es perpendicular a la velocidad de ésta; (III) La fuerza normal es conservativa cuando el trabajo realizado por dicha fuerza es nulo a lo largo de la trayectoria descrita por la partícula sobre la cual actúa dicha fuerza. En el caso de no cumplirse alguna de las tres afirmaciones antes mencionada, entonces la fuerza normal no será conservativa. La caracterización de la interacción entre una partícula y la superficie de contacto que la soporta, puede ser descrita a través de la función potencial (5), considerando a esta interacción de manera simple en la energía mecánica de la partícula.

REFERENCIAS

- [1] Serway, R., y Jewett, J., *Física para ciencias e ingeniería*, (International Thomson, México, 2005); Alonso, M., and Finn, E., *Física: Mecánica*, (Fondo Educativo Interamericano, lugar¿?, 1976) Volumen I, pp.219-231.
[2] French, A., *Mecánica Newtoniana*, 1ra Ed, (Editorial Reverte, España, 1974) Tomo 1, pp. 142-144 y 446-450.
[3] Pars, L. A., *Treatise on analytical dynamimcs*, 1th Ed. (HEINEMANN, London, 1965) pp. 12-19. Meirovitch, L., *Methods of analytical dynamics*, (McGraw-Hill, New York, 1970) pp. 48-52.

[4] José, J., and Saletan, E., *Classical Dynamics: A contemporary approach*, (Cambridge University Press, New York, 1998), pp. 50-54.

[5] Keepports, D., *The common force: conservative or nonconservative?*, Phys. Educ. **41**, 219-222 (2006).

[6] Chow, T., *Classical Mechanics*, (John Wiley & Sons, New York, 1995), pp. 137-143; Goldstein, H., *Classical Mechanics*, 2a Ed. (Addison-Wesley Publishing Company, Philippines, 1980), pp. 11-29; Norwood, J. Jr., *Mecánica Clásica a nivel intermedio*, (Editorial Dossat, España, 1981), pp. 353-359.

[7] Gaskill, J. R., and Arenstein, M., *Geometrical basis of Lagrange multipliers and system constraint in Mechanics*, Amer. Jour. Phys. **37** 93-100 (1969).

[8] Savéliev, I. V., *Curso de física general: Mecánica y Física Molecular*, (Mir, Moscú, 1984), Tomo 1, p. 90.

[9] Santaló, L. A., *Vectores y tensores con sus aplicaciones*, 1ra Ed, (Editorial Universitaria de Buenos Aires, Argentina, 1976) pp. 91-93.

[10] Una partícula de masa m sujeta a una función potencial $U(\vec{x}, t)$ tiene una energía mecánica $E = K + U$ que no se conserva, sobre las ecuaciones de movimiento, esto es

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + U \right] = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

[11] Una situación física en la cual el multiplicador depende del tiempo y el vínculo no, surge al considerar que existen fuerzas externas dependientes del tiempo actuando sobre la partícula en estudio.

[12] Díaz, S. S. y González, D. L., *Estudio de las definiciones asociadas al concepto de fuerza conservativa*, en preparación.