El campo magnético de una carga en movimiento como ejemplo didáctico de aplicación de la corriente de desplazamiento

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Álvaro Suárez
Departamento de Física, Instituto de Profesores Artigas, Av. Libertador 2025, C.P. 11, 800, Montevideo, Uruguay.

E-mail: alsua@outlook.com

(Recibido el 21 de Agosto de 2012; aceptado el 3 de Enero de 2013)

Resumen
En este artículo se deduce la expresión del campo magnético generado por una partícula cargada en movimiento a partir de la ley de Ampère-Maxwell, demostrándose que dicho campo se puede modelar como generado por una corriente de desplazamiento.

Palabras clave: Campo magnético, corriente de desplazamiento.

Abstract
In this article we derive the expression for the magnetic field generated by a charged particle in motion from the Ampère-Maxwell law, showing that such field could be modelled as being generated by a displacement current.

Keywords: Magnetic field, current displacement.

PACS: 01.55.+b, 07.55.Db, 41.20.Cv **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Cuando se introduce el tema de la corriente de desplazamiento en los cursos de electromagnetismo, los primeros ejemplos y problemas que se presentan antes de describir las ondas electromagnéticas, se refieren en general a distribuciones de carga que varían su densidad de carga con el tiempo, siendo el ejemplo más común presentado por los textos de Física general [1, 2, 3, 4] el de la corriente de desplazamiento entre las placas de un capacitor cargándose.

El uso exclusivo de este ejemplo, lleva a que haya alumnos que consideren el concepto de corriente de desplazamiento como un simple artilugio matemático, que se utiliza para corregir la ley de Ampère; perdiéndose la idea fundamental que subyace del concepto de corriente de desplazamiento, que un flujo de campo eléctrico variable en el tiempo genera un campo magnético.

Si una partícula cargada se encuentra en movimiento y se toma una curva cerrada *C* como la indicada en la Fig. 1, el flujo de campo eléctrico a través de cualquier superficie delimitada por dicha curva disminuye con el tiempo, generándose por ende una corriente de desplazamiento, la cual genera un campo magnético. Nos encontramos aquí con una situación simple y diferente a la presentada usualmente en los textos, donde se genera una corriente de desplazamiento.

En las siguientes secciones se demuestra cómo se puede obtener la expresión del campo magnético generado por una partícula cargada en movimiento a partir de la ley de Ampère-Maxwell, validándose por ende el ejemplo descrito de corriente de desplazamiento.

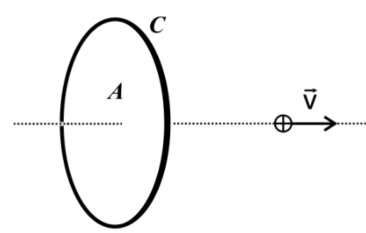

FIGURA 1. Partícula cargada en movimiento y curva cerrada C.

II. CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO ASOCIADA A UNA PARTÍCULA CARGADA MOVIÉNDOSE CON VELOCIDAD CONSTANTE

Consideremos una partícula cargada positiva moviéndose con cierta velocidad v constante respecto a un sistema de referencia inercial *S*. Tomemos una curva cerrada *C*, tal como indica la Fig. 1. Como la partícula cargada se aleja de la curva mencionada, el flujo de campo eléctrico a través de una superficie delimitada por la misma, disminuye con el tiempo. Por lo tanto existe una corriente de desplazamiento a través de la superficie de área *A*.

El flujo de campo eléctrico a través de un diferencial de superficie $\overrightarrow{dA}$ está dado por:

$$d\Phi_E = \vec{E}\bullet\overrightarrow{dA}. \quad (1)$$

Donde el campo eléctrico generado por una partícula cargada en movimiento está dado por [5]:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 w^2}\frac{(1-v^2/c^2)}{[1-(v^2/c^2)sen^2\alpha]^{3/2}}\hat{e}_r. \quad (2)$$

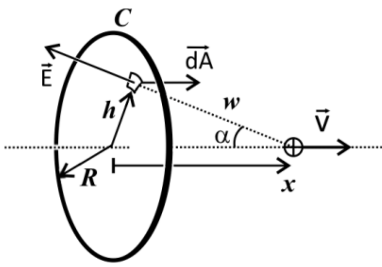

FIGURA 2. Representación de las variables del problema para determinar el flujo de campo eléctrico a través de la superficie.

Sustituyendo esta ecuación en la 1 y realizando el producto escalar entre $\vec{E}$ y $\overrightarrow{dA}$ se obtiene:

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 w^2}\frac{(1-v^2/c^2)}{[1-(v^2/c^2)sen^2\alpha]^{3/2}}\cos(\pi-\alpha)dA. \quad (3)$$

A partir del diagrama de la Fig. 2, se ve que $\cos(\pi-\alpha) = -x/w$ y $sen\,\alpha = h/w$ siendo $w=\sqrt{x^2+h^2}$. Por lo tanto:

$$d\Phi_E = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)}{\left[1-(v^2/c^2)\dfrac{h^2}{(x^2+h^2)}\right]^{3/2}}\frac{x}{(x^2+h^2)^{3/2}}dA. \quad (4)$$

Operando sobre la expresión anterior y simplificándola se obtiene:

$$d\Phi_E = -\frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{\left[x^2+h^2(1-v^2/c^2)\right]^{3/2}}dA. \quad (5)$$

Para determinar el flujo de campo eléctrico a través de toda la superficie, se integra la expresión anterior en toda la superficie.

$$\Phi_E = -\frac{q(1-v^2/c^2)}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{x}{\left[x^2+h^2(1-v^2/c^2)\right]^{3/2}}hd\theta dh. \quad (6)$$

$$\Phi_E = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left[\frac{x}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{1/2}}-1\right]. \quad (7)$$

A partir de la derivada respecto al tiempo del flujo de campo eléctrico, se obtiene la corriente de desplazamiento que atraviesa la superficie de área *A*.

$$i_D = \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}. \quad (8)$$

Como el flujo de campo eléctrico depende de la posición *x* de la partícula, que a su vez es función de la velocidad de la misma:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d\Phi_E}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\Phi_E}{dx}v. \quad (9)$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = v\frac{d\,\dfrac{q}{2\varepsilon_0}\left[\dfrac{x}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{1/2}}-1\right]}{dx}. \quad (10)$$

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{vq}{2\varepsilon_0}\frac{R^2(1-v^2/c^2)}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{3/2}}. \quad (11)$$

Por lo que la expresión de la corriente de desplazamiento resulta:

$$i_D = \frac{vq}{2}\frac{R^2(1-v^2/c^2)}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{3/2}}. \quad (12)$$

III. DETERMINACIÓN DEL CAMPO MAGNÉTICO GENERADO POR UNA PARTÍCULA CARGADA MOVIÉNDOSE CON VELOCIDAD CONSTANTE, A PARTIR DE LA LEY DE AMPÈRE-MAXWELL

Para determinar el campo magnético generado por la partícula cargada en un punto *P* ubicado sobre la curva *C*, se aplicara la ley de Ampère-Maxwell sobre dicha curva.

$$\oint\vec{B}\bullet\vec{dl} = \mu_0(i_C+i_D). \quad (13)$$

La corriente de conducción (i_C) a través de la superficie delimitada por la curva *C* es nula, además, a partir de las transformaciones de Lorentz para los campos eléctrico y magnético sabemos que el campo magnético generado por la partícula cargada en movimiento tiene igual módulo en cada punto de la curva y es tangencial a la misma [6], por lo que determinando la circulación del campo magnético a lo largo de la curva *C* en el sentido indicado en la Fig. 3, se obtiene:

$$\oint \vec{B}\bullet\vec{dl} = B\,2\pi R = \frac{\mu_0 vq}{2}\frac{R^2(1-v^2/c^2)}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{3/2}}. \quad (14)$$

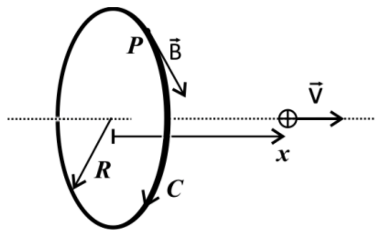

FIGURA 3. El campo magnético es tangente a la curva *C* en cada punto de la misma.

El campo magnético en un punto sobre la curva *C* vale:

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi}\frac{R(1-v^2/c^2)}{\left[x^2+(1-v^2/c^2)R^2\right]^{3/2}}. \quad (15)$$

Factorizando R^2 del denominador de la expresión anterior, simplificando y reordenando:

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi}\frac{(1-v^2/c^2)}{R^2\left[(x^2/R^2)+(1-v^2/c^2)\right]^{3/2}}. \quad (16)$$

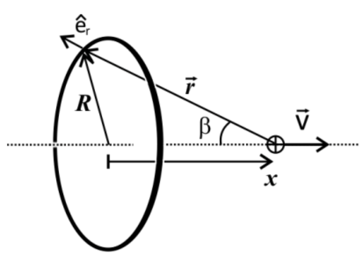

FIGURA 4. El sentido del campo magnético coincide con el del vector definido por el producto vectorial $\vec{v}\wedge\hat{e}_r$.

A partir del diagrama de la Fig. 4, se ve que $tg\beta = R/x$. Sustituyendo la definición de tangente en la Ec. 16 y utilizando la relación trigonométrica $\frac{1}{tg^2\beta} = \frac{1}{sen^2\beta} - 1$, se obtiene:

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi}\frac{(1-v^2/c^2)}{\left(R^2/sen^3\beta\right)\left[1-(v^2/c^2)sen^2\beta\right]^{3/2}}. \quad (17)$$

Como $sen\,\beta = R/r$, siendo $r = \sqrt{x^2+R^2}$:

$$B = \frac{\mu_0 vq}{4\pi r^2}\frac{(1-v^2/c^2)\,sen\beta}{\left[1-(v^2/c^2)sen^2\beta\right]^{3/2}}. \quad (18)$$

Considerando la dirección y sentido de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{r}$, se encuentra la expresión vectorial para el campo magnético generado por una partícula cargada moviéndose con velocidad constante v:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(1-v^2/c^2)}{\left[1-(v^2/c^2)sen^2\beta\right]^{3/2}}\frac{q\vec{v}\wedge\hat{e}_r}{r^2}. \quad (19)$$

Cuando $v \ll c$, la Ec. 19 se puede aproximar a:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\wedge\hat{e}_r}{r^2}. \quad (20)$$

Siendo la última expresión idéntica a la ley de Biot-Savart aplicada a una partícula cargada en movimiento.

IV. CONCLUSIONES

El haber encontrado a partir de la ley de Ampère-Maxwell una expresión para el campo magnético generado por una partícula cargada en movimiento idéntica a la ley de Biot-Savart, muestra la profunda diferencia que existe entre dichas leyes al momento de interpretar la forma en que es generado el campo magnético de una partícula cargada en movimiento. Desde el punto de vista de la ley de Biot-Savart, dicho campo se modela como el generado por un elemento de corriente de conducción, mientras que desde la ley de Ampère-Maxwell como el generado por una corriente de desplazamiento.

La demostración presentada resulta un instrumento valioso del punto de vista didáctico ya que muestra una aplicación directa del concepto de corriente de desplazamiento distinta a las presentadas usualmente en los libros de texto, donde subyace claramente el hecho de que un flujo de campo eléctrico variable en el tiempo genera un campo magnético.

REFERENCIAS

[1] Tipler, P. y Mosca, G., *Física para la ciencia y la tecnología*, 5da Ed., Vol. 2 (España, Reverté, 2005).
[2] Resnick, R. y Halliday, D., *Física*, 4ta Ed., Vol. 2 (CECSA, México, 1992).

[3] Sears, F. y Zemansky, M., *Física Universitaria*, 11ª Ed., Vol. 2 (Pearson, México, 1992).
[4] Serway, R., Buechner, R., *Física para Ciencias e Ingeniería*, 5ª Ed., Vol. 2 (México, McGraw-Hill, 2002).
[5] Purcell, E., *Electricidad y Magnetismo*, 2da Ed. (Reverté, España, 1988).
[6] Landau, L. y Lifshitz, E., *Teoría clásica de los campos,* 2da Ed. (Reverté, España, 1992).