Formalismo Hamiltoniano: Modos normais de vibração de dois pêndulos com massas diferentes acoplados por uma mola

Romualdo S. Silva Jr.
Departamento de Física, Universidade Federal de Sergipe, 49100-000, São Cristóvão, Sergipe, Brasil.

E-mail: romu.fisica@gmail.com

(Recebido em 15 Agosto 2012; aceito em 22 Dezembro 2013)

Resumo

O formalismo Hamiltoniano é uma importante ferramenta no estudo de problemas Físicos e Matemáticos. Sistemas Físicos que envolvem pêndulos e molas elásticas são bastante conhecidos e normalmente são aplicados em aulas de mecânica clássica. Este trabalho tem por objetivo fazer uma breve introdução ao formalismo Hamiltoniano e mostrar de maneira mais detalhada a resolução do problema de dois pêndulos com massas diferentes (m_1 e m_2) acoplados por uma mola de constante elástica k, e assim encontrar seus modos normais de vibração.

Palabras clave: Formalismo Hamiltoniano, pêndulos acoplados, modos normais de vibração.

Abstract

The Hamiltonian formalism is an important tool in the study of problems Physicists and Mathematicians. Physical systems that involve pendulum and elastic springs are well known and are usually applied to classical mechanics classes. This paper aims to briefly introduce the Hamiltonian formalism and show in more detail the resolution of the problem of two pendulums with different masses (m_1 e m_2) coupled by a spring of elastic constant k, and so find their normal modes of vibration.

Keywords: Hamiltonian, pendulum coupled, normal modes of vibration.

PACS: 01.40.-d, 01.40.Ha. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUÇÂO

No caminhar do curso de graduação em Física, os estudantes se deparam com um grande número de teorías e conceitos destinados a explicar diferentes fenômenos físicos, muitos dos quais são descritos por sistemas de equações diferenciais. Para isso se faz necessário o uso de métodos matemáticos mais sofisticados que possibilitem solucionar problemas oriundos da complexidade destas equações [1].

Muitas dessas teorias são vistas em mecânica clâssica, um grande alicerce da Física teórica, que na maioria das universidades é uma disciplina especifica da graduação em Física Bacharelado. Os métodos matemáticos abordados nessa disciplina são bem ricos e permite que o estudante de graduação tenha o primeiro contato com técnicas e conceitos amplamente empregados nos mais váriados ramos da Física [4].

Uma grande vantagem com relação a métodos e técnicas avançadas empregadas nos cursos de graduação é a possibilidade de resolver problemas complexos de maneira mais sistemática e com um grau de álgebra matemática bem menor.

Sistemas físicos, como por exemplo, sistema massa-mola, pêndulos acoplados por molas, sistemas que apresentam comportamento caótico, entre outros, podem ser estudados e analisados quando se tem o conhecimento de algum formalismo matemático. Muitos desses sistemas citados anteriormente podem ser representados e solucionados através do Formalismo Hamiltoniano, e por esse motivo darei ênfase a esse formalismo para mostrar de forma mais detalhada a resolução de um exemplo já conhecido pelos discentes de graduação em física que tenham cursado a disciplina de mecânica clássica, mas que no entanto, nem sempre é visto em sala de aula.

Na seção a seguir será mostrado brevemente uma introdução ao formalismo hamiltoniano.

II. FORMALISMO HAMILTONIANO

Os primeiros passos da mecânica analítica se deve a obra de Lagrange contida em seu grande trabalho *Mecanica Analítica*, publicado em 1788. Ele afirma que os sistemas físicos evoluem com o tempo de modo que a intensidade de sua ação é representada por uma função denominada Lagrangeana [6].

Em seguida apareceu o Britânico William Rowan Hamilton (1805-1865), e disse que o formalismo lagrangeano não era o bastante para a realidade física, visto que não envolvia um mínimo de ação absoluta. Então, Hamilton desconsiderou as idéias de Lagrange e propôs o princípio de ação estacionária que, exige um valor estacionário para a ação, ou seja, que a variação de primeira ordem da integral da ação seja nula.

Hamiltom então formulou um novo conjunto de equações matemáticas, que são equivalentes as de Lagrange, só que mais sofisticadas, em que são funções das variáveis do sistema, as Hamiltonianas, conhecido como Formalismo Hamiltoniano, que devem chegar portanto as mesmas conclusões que o método Lagrangeano,.

Assim como o formalismo Lagrangeano, para a mecânica clássica, que permite descrever a mecânica em termos de uma função denominada Lagrangeana do sistema, para o formalismo hamiltoniano não é diferente, os sistemas devem ser escritos em termos de uma função de Hamilton, ou hamiltoniana do sistema, no qual pode ser obtida uma vez conhecida a Lagrangeana do sistema [2]. Que estão relacionadas por:

$$H(q,p,t)=\sum p_i q_i - L(q,\dot{q}(q,p),t), \tag{1}$$

onde, os q_i são as coordenadas generalizadas do sistema, que podem ser qualquer conjunto de coordenadas que especifiquem a posição de um sistema num dado instante de tempo, ou seja, as cartesianas $q=\{x,y,z\}$ ou esféricas $q=\{r,\theta,\varphi\}$. Os p_i são os momentos conjugados às coordenadas q_i, dados por;

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2}$$

e L é a lagrangeana do sistema. Dessa forma o hamiltoniano é uma função das coordenadas, momentos e do tempo.

Uma importante característica do formalismo hamiltoniano é que as coordenadas e os momentos são tratados igualmente, com quantidades independentes.

A dinâmica do sistema é governada pelas equações de Hamilton [3], dadas por:

$$\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}\cdot \tag{3}$$

A dedução dessas equações pode ser vista com detalhe nas Ref. [4, 5]

III. PÊNDULOS ACOPLADOS

O exemplo de pêndulos acoplados por molas é bastante conhecido no curso de Física e importantes para o estudo de modos normais de vibração. Neste trabalho foi considerado um sistema formado por dois pêndulos com hastes leves e peso desprezíveis, de comprimento L e massas diferentes (m_1 e m_2) ligados por uma mola de constante elástica k (ver a Fig. 1). É conveniente usar as coordenadas φ_1 e φ_2 para descrever melhor a configuração do sistema.

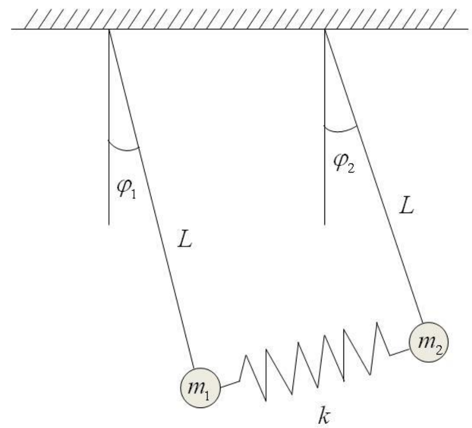

FIGURA 1. Esquema do sistema Físico composto por dois pêndulos com massas diferentes, de comprimento L acoplados por uma mola de constante elástica k.

Sabemos que em muitos sistemas físicos as equações de movimento são escritas em termos das energias Cinética e Potencial. Para o nosso sistema formado por dois pêndulos acoplados por uma mola, temos que levar em consideração a interação elástica da mola que está presa aos pêndulos, portanto, para entender melhor as energias que rejem as leis da física e que atuam no sistema, vou escrevê-las separadamente. Não foi considerado forças externas atuando no sistema.

Energia Cinética:

$$E_K=\frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{m_1L^2}+\frac{P_2^2}{m_2L^2}\right)\cdot \tag{4}$$

Energia Potencial:

$$E_P=\frac{1}{2}\left(m_1gL\varphi_1^2+m_2gL\varphi_2^2\right)\cdot \tag{5}$$

Energia Elástica:

$$E_E=\frac{1}{2}\left(kL^2\varphi_1^2+kL^2\varphi_2^2\right)-kL^2\varphi_1\varphi_2\cdot \tag{6}$$

O Hamiltoiano é dado pelo somatório das energias que atuam no sistema, ou seja:

$$H=E_K+E_P+E_E\,. \tag{7}$$

Portanto;

$$H=\frac{1}{2}\left(\frac{P_1^2}{m_1L^2}+\frac{P_2^2}{m_2L^2}\right)+\frac{1}{2}\left(m_1gL\varphi_1^2+m_2gL\varphi_2^2\right)+ \tag{8}$$
$$\frac{1}{2}\left(kL^2\varphi_1^2+kL^2\varphi_2^2\right)-kL^2\varphi_1\varphi_2.$$

Note que se a interação for interrompida, ou seja, fazer k=0, o hamiltoniano se torna o mesmo de dois pêndulos movendo-se livremente.

Utilizando as equações de Hamilton (3), é possível encontrar as equações de movimento do sistema, derivando o hamiltoniano em termos dos dois graus de liberdade, φ_1 e φ_2.

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi_1}=m_1gL\varphi_1+kL^2\varphi_1-kL^2\varphi_2, \tag{9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial\varphi_2}=m_2gL\varphi_2+kL^2\varphi_2-kL^2\varphi_1\cdot \tag{10}$$

Como $\frac{\partial H}{\partial\varphi}=-\dot{p}=-m_1L^2\ddot{\varphi}$ que é o momento conjugado, lembrando que o ponto encima da coordenada significa a derivada da coordenada em relação ao tempo, podemos reescrever (9) e (10) como:

$$-m_1L^2\ddot{\varphi}_1=m_1gL\varphi_1+kL^2\varphi_1-kL^2\varphi_2, \tag{11}$$

$$-m_2L^2\ddot{\varphi}_2=m_2gL\varphi_2+kL^2\varphi_2-kL^2\varphi_1. \tag{12}$$

Logo, as equações de movimento são:

$$\ddot{\varphi}_1=-\varphi_1\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_1}\right)+\frac{k}{m_1}\varphi_2$$
$$\ddot{\varphi}_2=-\varphi_2\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_2}\right)+\frac{k}{m_2}\varphi_1 \tag{13}$$

Percebemos que a constante elástica da mola *k* acopla as duas equações de movimento, que devem portanto ser solucionadas simultâneamente. Para isso, é conveniente usar o método da álgebra matricial, ou seja:

$$\ddot{\varphi}=-\tilde{A}\varphi. \tag{14}$$

Então, reescrevendo a Eq. (13) na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_1}\right) & -\frac{k}{m_1}\\ -\frac{k}{m_2} & \left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_1\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Como a equação (14) tem a mesma forma que a de um oscilador harmônico simples, ela possui soluções estacionárias do tipo:

$$\varphi=Xe^{iwt}. \tag{16}$$

Onde as componentes de X são dadas pelas condições iniciais.

Substituindo (16) em (14), encontraremos uma equação de *autovalores*, veja:

$$\dot{\varphi}=iwXe^{iwt}\qquad \ddot{\varphi}=i^2w^2Xe^{iwt}=-w^2Xe^{iwt}, \tag{17}$$

$$-w^2Xe^{iwt}=-\tilde{A}Xe^{iwt}, \tag{18}$$

$$w^2X=\tilde{A}X. \tag{19}$$

Para encontrar as soluções, ou seja, os autovalores, igualamos o determinante do sistema a zero:

$$\det\left|\tilde{A}-w^2\right|=0, \tag{20}$$

$$\begin{vmatrix}\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_1}\right)-w^2 & -\frac{k}{m_1}\\ -\frac{k}{m_2} & \left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_2}\right)-w^2\end{vmatrix}=0. \tag{21}$$

Resolvendo o determinante:

$$\left(\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_1}\right)-w^2\right)\left(\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_2}\right)-w^2\right)-\left(-\frac{k}{m_1}\right)\left(-\frac{k}{m_2}\right)=0. \tag{22}$$

Ou ainda;

$$\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_1}-w^2\right)\left(\frac{g}{L}+\frac{k}{m_2}-w^2\right)-\left(\frac{k^2}{m_1m_2}\right)=0. \tag{23}$$

É fácil ver que os modos normais de vibração são:

$$w_1=\pm\sqrt{\frac{g}{L}}, \tag{24}$$

$$w_2=\pm\sqrt{\frac{g}{L}+\frac{(m_1+m_2)k}{m_1m_2}}. \tag{25}$$

Note que se fizermos $m_1=m_2=m$ chegamos ao caso de dois pêndulos acoplados com massas iguais, provando então que os modos normais de vibração para dois pêndulos acoplados com massas diferentes aqui encontrados estão corretos.

Assim, tanto para o exemplo em que as massas dos pêndulos são iguais, ou quando consideramos massas diferentes como foi proposto neste trabalho, os modos normais de vibração são semelhantes, apenas o w_2 tem uma cara algébrica diferente em que a expressão está escrita em termos das massas (m_1 e m_2) e não só de m, como já era esperado.

Portanto, se $w = w_1$ teremos os pêndulos oscilando em fase, no entanto se $w = w_2$ teremos uma defasagem e os pêndulos oscilando fora de fase.

IV. CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho permitiu fazer uma breve introdução ao formalismo Hamiltoniano, bem como aplicá-lo na resolução de um exemplo bem conhecido da mecânica clássica, um sistema de dois pêndulos com massas diferentes acoplados por uma mola.

Diante dos resultados aqui apresentados, foi possível concluir que os modos normais de vibração do sistema apresentam as seguintes características: a primeira solução (24) não apresenta defasagem e oscila a uma frequência igual a $w_1 = \left(g/L \right)^{1/2}$, enquanto que a segunda solução (25) apresenta uma defasagem e oscila a uma frequência igual a $w_2 = \left(m_1 m_2 g + (m_1 + m_2)kL \big/ m_1 m_2 L \right)^{1/2}$.

REFERÊNCIAS

[1] Monerat, G. A., Corrêa, S. E. V., Oliveira-Neto, G., A. de Assumpcão, R. P. e Papa, A. R. R., *Explorando sistemas Hamiltonianos: Estudo analítico*, Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 177-189 (2006).

[2] Amaral, M. G., Marques, G. T., Coutinho, F. S. D., Vasquez, C. S. E., *O Formalismo Variacional de Lagrange e Hamilton no ensino de Mecânica Básica na graduação em Engenharia*, Revista de Ensino de Engenharia **26**, 9-17 (2007).

[3] Barcellos, N. J., *Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).

[4] Lemos, N. A., *Mecânica Analítica*, (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).

[5] Lemos, N. A., *Canonical approach to the damped harmonic oscillator*, American Journal of Physics **47**, 857 (1979).

[6] Alemañ, B. R. A., *Introducción al formalismo gauge con ligaduras en lós casos clásico y cuántico*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **6**, 116-127 (2012).