

# El modo Helmholtz de dos prototipos de oscilador: el sistema masa-resorte y el péndulo



**Maricel Matar, Reinaldo Welti**

*Laboratorio de Vibraciones y Ondas, Departamento de Física y Química, Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario, Avenida Pellegrini 250, Rosario (2000), Argentina.*

**E-mail:** welti@fceia.unr.edu.ar

(Recibido el 11 de Septiembre de 2012, aceptado el 5 de Febrero de 2013)

## Resumen

Se comparan las oscilaciones de dos prototipos de oscilador, el sistema masa-resorte y el péndulo, con las oscilaciones del aire en el interior de una botella. Es bien conocido que para determinar la frecuencia de vibración más baja de este último sistema, Helmholtz formuló hipótesis especiales para poder analizarlo como uno de parámetros concentrados y no de parámetros distribuidos que exigiría resolver una ecuación de ondas. Es menos conocido que las hipótesis que normalmente utilizamos para construir un modelo simple que describa el movimiento del sistema masa-resorte y el péndulo, son análogas a las que utilizó Helmholtz. Tanto el sistema masa-resorte como el péndulo, al igual que la botella, son sistemas distribuidos que tienen un número infinito de modos de oscilación. En este trabajo mostramos que las oscilaciones de los sistemas masa-resorte y péndulo, que se estudian en los cursos básicos de física son análogos al modo Helmholtz. Se calculan también las frecuencias y los modos superiores de estos sistemas y el error que se comete al calcular la frecuencia fundamental con el modelo de parámetros concentrados.

**Palabras-clave:** Parámetros concentrados, parámetros distribuidos, modos normales de oscilación, modo Helmholtz.

## Abstract

In this paper we study the oscillations of two prototype oscillator, the mass-spring system and the pendulum, to compare them with the oscillations of the air inside of a bottle. It is well known that in determining the lowest vibration frequency of the latter system, Helmholtz made certain assumptions to analyze it like a lumped parameter system. It is less known that the assumptions that we normally use to build a simple model that describes the movement of the mass-spring system and the pendulum, are similar to those used by Helmholtz. Both the spring-mass system like the pendulum, as the bottle are distributed system with an infinite number of modes of oscillation. In this paper we show that the oscillations of mass-spring systems and pendulum studied in basic physics courses are analogous to Helmholtz mode. We also calculated the frequencies of the higher modes of these systems and the mistake we make when we compute the fundamental frequency with the lumped parameter model.

**Key words:** Lumped - distributed parameters, normal modes of oscillation, Helmholtz mode.

**PACS:** Include 01.40.-d, 43.40.-s, 46.40.-f

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La resonancia Helmholtz es el sonido que se crea cuando uno sopla transversalmente sobre el cuello de una botella. Cuando el aire es forzado a introducirse en la cavidad, su presión aumenta. Una vez que el agente externo que fuerza el aire desaparece, el aire comprimido del interior (cavidad principal de la botella) hace mover el aire del cuello hacia fuera, lo que provoca una disminución de la presión del aire en el interior de la cavidad, lo que nuevamente produce un movimiento hacia adentro. Este proceso tiende a repetirse de manera continua pero, debido a las pérdidas, es necesario sostener el soplido sobre el cuello para mantener la oscilación. Helmholtz supuso que el aire en la cavidad principal se comporta como un resorte y el del interior del cuello como una masa [1, 2]. Estimando la constante “efectiva” de dicho resorte y la masa del cuello pudo

calcular la frecuencia de oscilación del modo de más baja frecuencia de una botella con cuello, que hoy llamamos modo Helmholtz (de aquí en adelante modo H). Este modo, también puede hallarse analíticamente resolviendo la ecuación de ondas en el interior de la botella con las condiciones de borde apropiadas [3, 4]. La solución analítica establece que la botella tiene un número infinito de modos de vibración. Si la sección del cuello es mucho menor que la sección del volumen principal, la longitud de onda del modo más bajo es mucho mayor que las dimensiones de la botella y su frecuencia coincide con la frecuencia predicha por Helmholtz. En [4] se muestra que para este modo de baja frecuencia, la energía cinética se concentra en el cuello de la botella y la potencial en el volumen principal. Esto implica que, cuando la botella oscila en su modo más bajo, puede ser modelada como un oscilador masa-resorte. Esto prueba lo plausible de las

hipótesis de Helmholtz. Además, cuando el sistema oscila en el modo H puede ser considerado como de *parámetros concentrados*. En los modos superiores, sin embargo, la longitud de onda es comparable o menor que las dimensiones del sistema y las energías cinética y potencial se distribuyen sobre toda su extensión: en estos casos el sistema debe ser considerado de *parámetros distribuidos*. Esta clasificación del sistema, que depende de la relación entre su tamaño y la longitud de onda, es común en teoría de circuitos aunque no tanto en sistemas mecánicos. El resonador Helmholtz nos muestra que los conceptos de parámetros concentrados y distribuidos de la teoría de circuitos pueden extenderse a sistemas mecánicos.

En este trabajo mostramos que las oscilaciones de un sistema masa-resorte y las de un péndulo, que se estudian en los cursos básicos de física, son modos H pues corresponden al modo de oscilación de frecuencia más baja que tiene una longitud de onda grande comparada con las dimensiones del sistema. En casi ningún texto se menciona que estos osciladores también tienen modos de oscilación de frecuencias más altas con longitudes de onda comparables o menores que sus dimensiones.

## II. EL MODO HELMHOLTZ DE UNA BOTELLA

### A. Solución cualitativa

El prototipo del resonador H es una botella en la que el volumen principal termina abruptamente en un cuello corto de menor sección como la que se muestra en la Fig. 1.

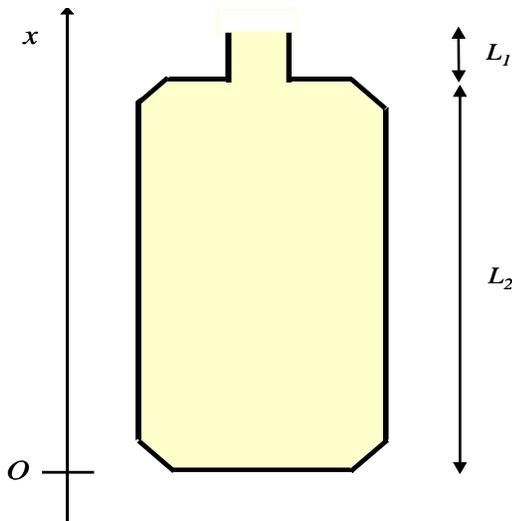


FIGURA 1. Dimensiones de la botella.

Cuando uno sopla transversalmente sobre el cuello se produce un sonido grave agradable que corresponde a su modo más bajo. Helmholtz [1], para encontrar la frecuencia más baja de las oscilaciones libres de la botella se supuso que el aire en el cuello se mueve como un pistón sólido mientras que el aire en el volumen principal se comprime y expande de manera alternativa como si fuera un resorte. Si

la masa de aire en el interior del cuello se desplaza una distancia  $x$  hacia la derecha en un cierto instante, la presión interna desciende y, como resultado, se origina una fuerza que trata de llevar a esta masa de aire a su posición de equilibrio. Esta fuerza de restitución, que se debe a la diferencia de presión del volumen principal,  $p$ , y la del exterior de la botella,  $p_0$ , viene dada por  $F_x = \delta p S_1$ , donde  $\delta p = p - p_0$  y  $S_1$  es la sección del cuello.

La variación de presión  $\delta p$  se relaciona con la variación de volumen  $\delta V$  a través del módulo de compresibilidad  $B$  del gas,  $\delta p = -B \delta V / V_2$  [5], donde  $V_2$  es el volumen de la cavidad principal. Como la variación de volumen viene dada por  $\delta V = S_1 \delta x$ , se tiene:

$$F_x = -B(S_1^2/V_2)x = -k_{eq}x, \quad (1)$$

donde

$$k_{eq} = B(S_1^2/V_2), \quad (2)$$

es la *constante elástica equivalente* del aire contenido en el volumen principal.

La masa del aire en el cuello de la botella es  $m = \rho_0 S_1 L_1$ , donde  $L_1$  es la longitud del cuello y  $\rho_0$  la densidad del aire. Por lo tanto, la frecuencia angular  $\omega_H$  del “modo Helmholtz” viene dada por

$$\omega_H = \sqrt{k_{eq}/m} = c \sqrt{\frac{S_1}{V_2 L_2}} \quad (3)$$

Para una botella abierta a la atmósfera que tiene las siguientes dimensiones: cavidad principal de longitud  $L_2 = 0.15\text{ m}$  y sección  $S_2 = 6.8 \times 10^{-3}\text{ m}^2$ ; cuello de longitud  $L_1 = 0.02\text{ m}$  y sección  $S_2 = 10^{-2} S_1$ , si suponemos  $c \approx 343\text{ m/s}$ , se tiene  $\omega_H \approx 394\text{ s}^{-1}$  ( $f_H \approx 63\text{ Hz}$ ). Si se sopla suave y sostenidamente en la boca de esta botella se obtendrá un sonido de esta frecuencia. La longitud de onda asociada es  $\lambda_H \approx 5.4\text{ m}$ . Observemos que esta longitud de onda es mucho más grande que la longitud total de la botella ( $L = L_1 + L_2 = 0.17\text{ m}$ ).

En un tubo de sección constante, abierto en un extremo y cerrado en el otro, de longitud  $L = 0.17\text{ m}$ , la frecuencia de su modo más bajo es  $c/4L = 504.4\text{ Hz}$  y su longitud de onda,  $0.68\text{ m}$ . Es el cuello, que reduce abruptamente la sección, lo que hace que el sonido de la botella del primer modo sea mucho más grave y con una longitud de onda mucho más grande que el largo de la botella.

### B. Solución analítica

Se puede calcular también la frecuencia del modo Helmholtz resolviendo directamente la ecuación de ondas en el interior de la botella. Para la botella que se describió en la sección anterior, existen soluciones, [3, 4], sólo para

los valores de  $\beta = \omega/c$  (donde  $c$  es la velocidad del sonido) que verifican la ecuación:

$$\tan \beta L_1 \tan \beta L_2 = S_1/S_2. \quad (4)$$

La (4) tiene infinitas soluciones  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ , que corresponden al conjunto de frecuencias  $\omega_1 = c\beta_1, \omega_2 = c\beta_2, \omega_3 = c\beta_3, \dots$ . Si  $L_1 = 0.02, L_2 = 0.15, S_2 = 6.8 \times 10^{-3} m^2, S_1 = 10^{-2} S_2$  y  $c = 343 m/s$ , los dos primeros autovalores son  $\omega_1 = 619.3 s^{-1}$  y  $\omega_2 = 7245.2 s^{-1}$ . El primer modo tiene una longitud de onda  $\lambda = c/f \approx 3.48 m$ , que es mucho mayor que la longitud total de la botella,  $L = L_1 + L_2 = 0.17 m$ . Sin embargo, la longitud

de onda del segundo modo ( $\approx 0.30 m$ ) es comparable a las dimensiones del sistema. Para el primer modo,  $\beta L_1 \ll 1$  y  $\beta L_2 \ll 1$ , entonces  $\tan \beta L_{1,2} \approx \beta L_{1,2}$  y, a partir de la ecuación (4), se encuentra que la frecuencia de este modo viene dada por:

$$\omega_1 \approx c \sqrt{S_1/V_2 L_1}. \quad (5)$$

Si comparamos (5) con (3) vemos que el modo de más baja frecuencia, que se obtiene resolviendo la ecuación de ondas, coincide con la frecuencia  $\omega_H$  que se determinó cualitativamente con las hipótesis de H.

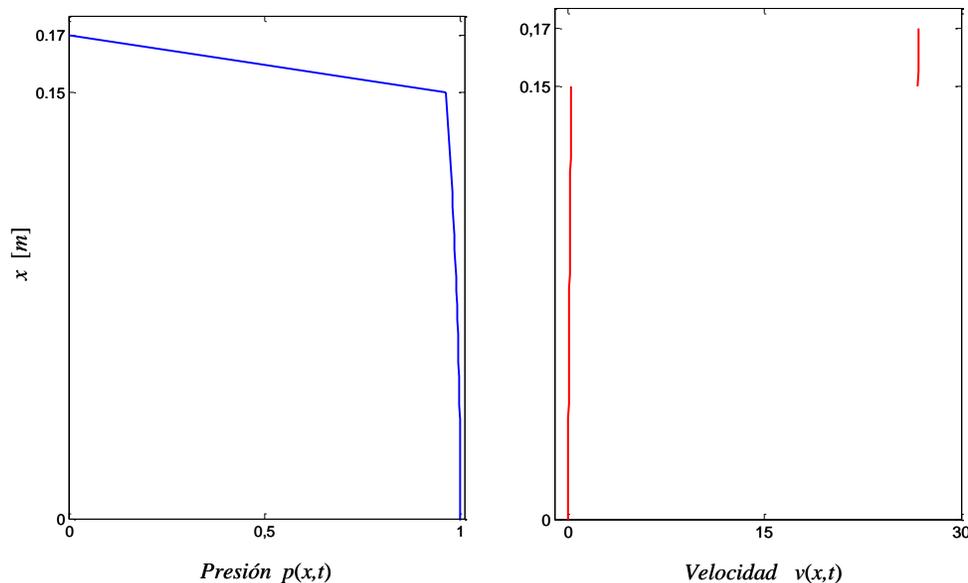


FIGURA 2. La presión y velocidad en el interior de la botella para el modo Helmholtz.

Las funciones de onda para el desplazamiento, la velocidad y la presión, en el interior de la botella son ondas estacionarias armónicas del tipo  $\cos(kx) \cos(\omega t + \varphi)$  o  $\sin(kx) \cos(\omega t + \varphi)$  donde  $k = 2\pi/\lambda$  y  $\varphi$  una fase arbitraria. Para el modo de más baja frecuencia,  $kL_1 \ll 1$  y  $kL_2 \ll 1$ , las ondas estacionarias son casi líneas rectas con una pequeña pendiente (las que varían como  $\sin(kx)$ ) y sin pendiente (las que varían como  $\cos(kx)$ ).

La presión tiene su valor máximo en el extremo cerrado del volumen principal y se mantiene aproximadamente constante hasta llegar al extremo del cuello como se muestra en la Fig. 2. Esto es así porque  $\cos(kx)$  difiere muy poco de 1 en el intervalo que va de  $x=0$  hasta  $x=L_2$ , ya que  $\cos(kL_2) = \cos(2\pi L_2/\lambda) \approx 1$  por ser  $\lambda \gg L_2$ . A partir de  $x=L_2$  y hasta el extremo abierto del cuello, la presión decrece linealmente hasta hacerse cero. La velocidad es nula

en el extremo cerrado ( $x=0$ ) y su amplitud incrementa linealmente con una pendiente muy pequeña hasta llegar a la base del cuello ( $x=L_2$ ). En esa sección, donde se conecta el volumen principal con el cuello, el flujo de volumen debe mantenerse constante [4]. Esto significa que la velocidad en el cuello debe ser igual a la velocidad en el interior del volumen principal multiplicada por la relación  $S_2/S_1$  que es mucho mayor que 1. El comportamiento que se muestra en la Fig. 2, de las ondas de presión y de velocidad, es coherente con el modelo que elaboró Helmholtz para encontrar la frecuencia propia de este modo. En efecto, de esas gráficas se desprende que, en la cavidad principal la energía es casi puramente potencial y en el cuello, casi puramente cinética. En otras palabras, la energía potencial elástica está localizada en el volumen principal mientras que la cinética, en el cuello. En estas condiciones, las oscilaciones del aire en el interior de la botella pueden estudiarse como un sistema de parámetros concentrados. Esto también ocurre en los circuitos eléctricos; cuando pueden ser tratados como de parámetros concentrados, se supone que los capacitores

almacenan sólo energía eléctrica y las inductancias, sólo energía magnética. Calculando la energía potencial en el volumen principal de la botella [4] se reencuentra la constante elástica efectiva  $k_{ef}$ , que coincide con la ecuación (2). Observemos finalmente que las autofunciones, presión y velocidad, del modo H son casi lineales, tanto en el volumen principal como en el cuello.

En la Tabla I se muestran las frecuencias de los tres primeros modos obtenidos mediante la ecuación (4), para diferentes secciones del cuello. En el Anexo I se explica un método, relativamente simple, para encontrar las raíces de esta ecuación. Observemos que la frecuencia del segundo modo es casi 12 veces mayor que la frecuencia del primer modo cuando  $S_1/S_2 = 10^{-2}$  y sólo 3 veces cuando  $S_1/S_2 = 1$ .

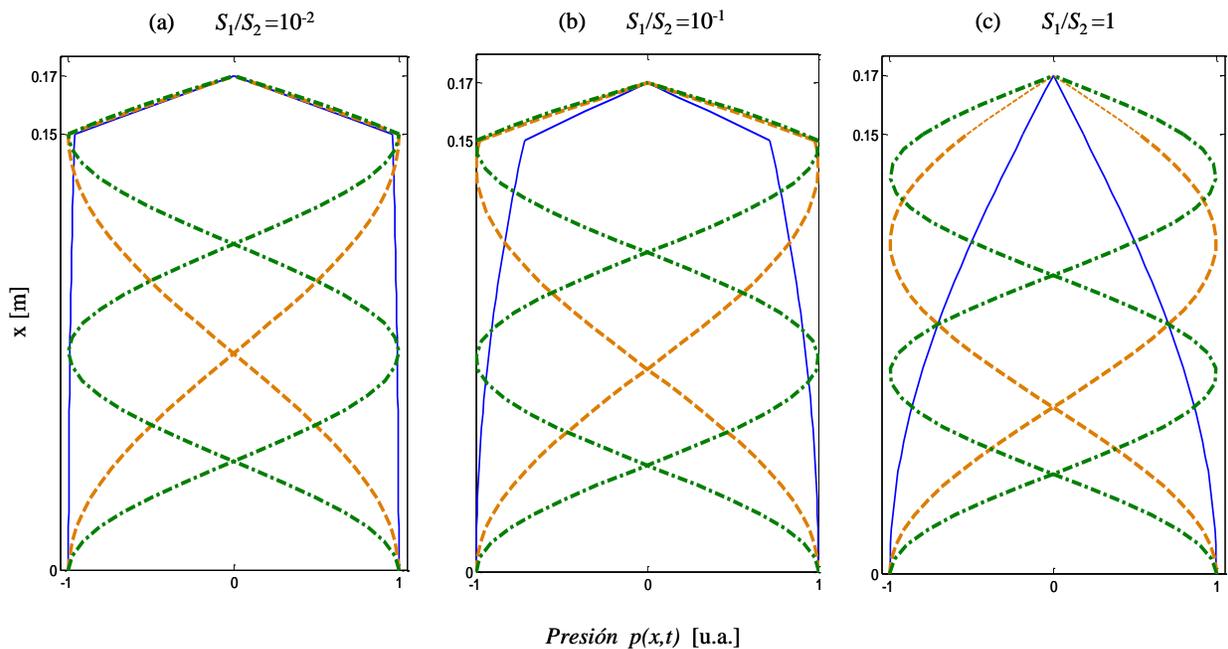
**TABLA I.** Las tres primeras frecuencias naturales de oscilación de una botella con cuello para diferentes valores de  $S_1/S_2$ .

$S_1/S_2$	$\omega_1$ [ $s^{-1}$ ]	$\omega_2$ [ $s^{-1}$ ]	$\omega_3$ [ $s^{-1}$ ]
$10^{-2}$	619	7245	14410
$10^{-1}$	1764	7666	14590
1	3174	9523	15870

En la Fig. 3 se muestran las ondas de presión de los tres primeros modos, cuando la relación entre la sección del cuello y la del volumen principal,  $S_1/S_2$ , es igual a  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$  y 1, respectivamente.

El modo más bajo de la Fig. 3a, es la onda de presión del modo H que se muestra por separado en la Fig. 2. En la misma figura, se observa el aumento de la curvatura de las ondas de presión del segundo y tercer modo, indicando que sus longitudes de onda son comparables o menores que la dimensión de la botella. En efecto, las longitudes de onda del segundo y tercer modo son aproximadamente 0.3 m y 0.15 m, respectivamente. Por el contrario, al modo H de la Fig. 3a, le corresponde una onda de presión con curvatura casi nula puesto que su longitud de onda es 3.48 m. En la Fig. 3c se muestran los tres primeros modos cuando la relación entre secciones  $S_1/S_2$  es 1. En este caso el sistema es un tubo de sección constante, cerrado en un extremo y abierto en el otro, de longitud  $L = 0.17$  m. En la Fig. 3b, se muestra la transición entre estas dos relaciones de secciones.

Observamos en la Tabla I que las frecuencias de los modos, que se muestran en la Fig. 3c, son múltiplos impares de la frecuencia fundamental, como era de esperar. En la misma Tabla se puede ver como se modifican las frecuencias de los tres primeros modos de la botella a medida que disminuye la sección del cuello. La frecuencia del modo fundamental disminuye y cuando la longitud de onda correspondiente es grande, comparada con las dimensiones de la botella, se tiene el modo H. Cuando  $S_1/S_2 = 10^{-2}$  la frecuencia del tercer modo es casi el doble de la del segundo, indicando que la botella casi se comporta como un tubo cerrado-cerrado, pero con un modo adicional de baja frecuencia que es el modo H. Matemáticamente, este modo desaparece cuando  $S_1/S_2 \rightarrow 0$ .



**FIGURA 3.** Ondas de presión de los tres primeros modos de la botella para las relaciones de sección  $S_1/S_2$ : (a)  $10^{-2}$ , (b)  $10^{-1}$  y (c) 1.

### III. LAS OSCILACIONES DE UN OBJETO SUJETO A UN RESORTE CON MASA

Los resortes se utilizan en las clases de física para ilustrar la ley de Hooke y las oscilaciones armónicas. La suposición que habitualmente se hace es que el resorte no tiene masa. ¿Qué ocurre si la masa del resorte no es despreciable? Como la masa del resorte se distribuye a lo largo de su longitud, el sistema debe considerarse como uno de infinitos grados de libertad. El cambio que se produce es substancial: el sistema pasa de tener un solo grado de libertad (masa “puntual” y resorte sin masa) a tener infinitos grados de libertad (masa puntual y resorte con masa).

Llamemos  $m$  a la masa del resorte, uniformemente distribuida y  $M$  a la masa unida a él. Cuando la masa  $M$  está oscilando se observa que cada elemento del resorte se mueve, en forma longitudinal, con una velocidad diferente a la de  $M$ . Por lo tanto, ahora debe especificarse no sólo el movimiento de  $M$  sino también, el movimiento de cada uno de los elementos del resorte. Subrayemos que, cuando ignoramos la masa del resorte, cada uno de sus elementos no tiene masa y por tanto no tiene sentido hablar de su movimiento. En este último caso, el rol que cumple el resorte sólo es el de producir la fuerza restauradora lineal que actúa sobre la masa. Si no se tiene en cuenta la masa del resorte el sistema puede ser tratado como de parámetros concentrados: la energía potencial se almacena en el resorte y la cinética, en la masa colgada.

Suponemos que el resorte es un medio elástico de sección  $S$ , masa  $m$  longitud  $L$ , densidad  $\rho_0 = m/SL$  y un módulo de Young “efectivo”  $E$  que se relaciona con la constante del resorte de la siguiente manera:

$$F/S = E\Delta l/L \Rightarrow F = (SE/L)\Delta l = k\Delta l \Rightarrow k = SE/L, \quad (6)$$

Para estudiar el movimiento del sistema vamos a suponer que el mismo está sobre una “superficie horizontal sin rozamiento”. Esto nos ahorra el cálculo del estiramiento del resorte debido al campo gravitatorio. De todas maneras, la ecuación diferencial que describe el movimiento del sistema alrededor de su posición de equilibrio es la misma si el sistema está horizontal o vertical.

El resorte, se extiende a lo largo del eje  $x$ , desde  $x = 0$  (punto fijo) hasta  $x = L$ , donde está unido a la masa  $M$  que suponemos de pequeñas dimensiones. Vamos a designar con  $u(x,t)$  el desplazamiento longitudinal (paralelo al eje  $x$ ) de una sección del resorte ubicada en  $x$  en el instante  $t$ . El resorte se comporta como una barra elástica con el módulo de Young efectivo que se determina mediante la ecuación (1), por lo tanto, sus desplazamientos longitudinales  $u(x,t)$  satisfacen [6] la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x < L. \quad (7)$$

En (7),  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas elásticas longitudinales a lo largo del resorte que viene dada por

$$c = \sqrt{E/\rho_0} = \sqrt{kL/S\rho_0} = \sqrt{kL/\mu}, \quad (8)$$

donde  $\mu = S\rho_0$  es la masa del resorte por unidad de longitud.

En  $x = L$ , la fuerza que hace el resorte sobre la “masa concentrada”  $M$  es igual a la masa de ésta por su aceleración (que coincide con la aceleración del extremo  $u(L,t)$  del resorte), esto es:

$$SE \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} = M \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{x=L}. \quad (9)$$

La (8) y la condición  $u(0,t) = 0$  en el extremo fijo son las condiciones de borde de la ecuación diferencial (7) para este problema.

Para encontrar las autofrecuencias del sistema buscaremos soluciones del tipo

$$u(x,t) = X(x)e^{i\omega t}. \quad (10)$$

Reemplazando (10) en (7) se obtiene la ecuación diferencial

$$d^2 X/dx^2 + (\omega/c)^2 X = 0. \quad (11)$$

Las condiciones de contorno para  $X$  son:

$$\begin{aligned} (a) \quad X(0) &= 0, \\ (b) \quad SE(dX/dx)|_{x=L} &= -M\omega^2 X(L). \end{aligned} \quad (12)$$

La ecuación (11) y las condiciones (12) constituyen un problema de valores propios [7]. La solución de la ecuación diferencial (11) que satisface la condición de borde (12a) es

$$X(x) = A \sin \beta x, \quad \beta = \omega/c. \quad (13)$$

La condición de borde (12b) impone que

$$\frac{E}{c} \cos \beta L = M \omega \sin \beta L. \quad (14)$$

Teniendo en cuenta que  $E = \rho_0 c^2$ , obtenemos

$$\beta L \tan \beta L = \frac{m}{M}. \quad (15)$$

Esta ecuación, análoga a la (4) de la Sección 2, también tiene infinitas soluciones  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ , que corresponden al conjunto de autofrecuencias  $\omega_1 = c\beta_1, \omega_2 = c\beta_2, \omega_3 = c\beta_3, \dots$ .

Si  $\beta L = \omega L/c \ll 1$  (esto implica, por (15), que  $m/M \ll 1$ ), obtenemos para la frecuencia de oscilación del modo más bajo la expresión aproximada

$$\omega_1 \approx (c/L)\sqrt{m/M} = \sqrt{k/M} = \omega_0. \quad (16)$$

Esta es la frecuencia que le asignamos al oscilador cuando se considera despreciable la masa del resorte. Este primer modo del sistema masa-resorte es análogo al modo H de una botella. Esto nos permite afirmar que, cuando  $\beta_1 L \ll 1$ , el sistema oscila en su “modo Helmholtz”, con una frecuencia que viene dada por (16). La condición  $\beta_1 L \ll 1$  es equivalente a  $\lambda_1 \gg L$ , donde  $\lambda_1$  es la longitud de onda del modo.

**TABLA II.** Las tres primeras frecuencias naturales de oscilación de un resorte que sujeta una masa  $M$  para diferentes valores de la relación  $M/m$ .

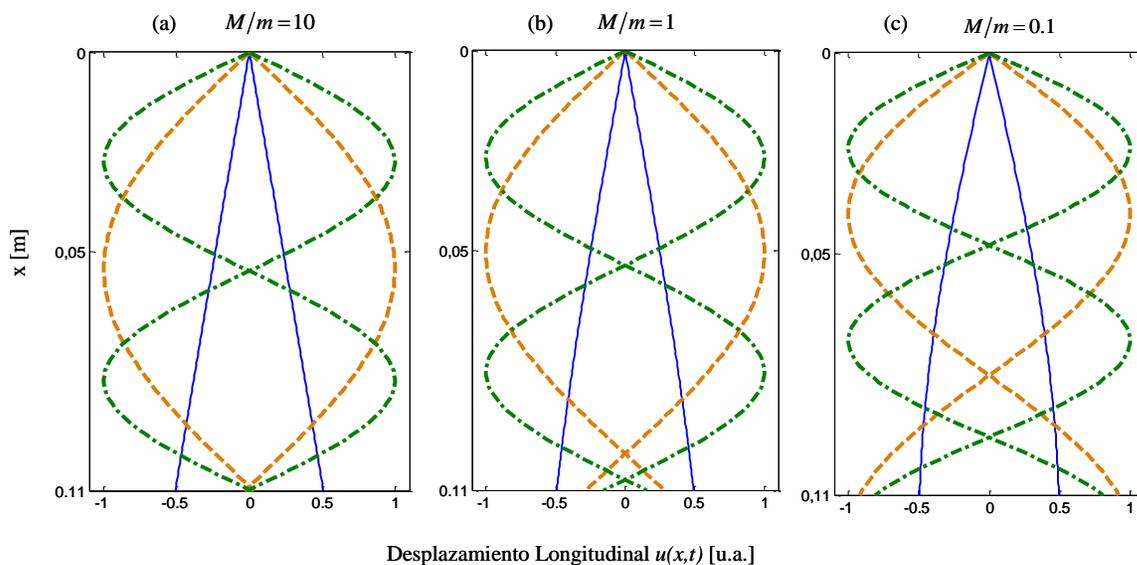
$M/m$	$\omega_1 [s^{-1}]$	$\omega_2 [s^{-1}]$	$\omega_3 [s^{-1}]$
100	0.651	20.5	41
10	2.03	20.7	41.1
1	5.61	22.34	42
$10^{-1}$	9.31	28.1	47.1
$10^{-2}$	10.14	30.4	50.7

En la Tabla II se muestran las frecuencias de los tres primeros modos obtenidos mediante la ecuación (15), para diferentes valores de  $M$  (la masa colgada), para un resorte de constante  $k = 0.71 N/m$ , longitud  $L = 0.11 m$  y masa  $m = 16.7 g$ , en todos los casos. Estos valores coinciden con los del resorte demostrador de ondas longitudinales PASCO® W-9401 con el cual hicimos las experiencias.

Observemos que, cuando  $M/m \gg 1$ , la frecuencia del primer modo coincide con la de un oscilador en el que el resorte tiene masa despreciable. Esta frecuencia puede calcularse directamente con la ecuación (16); por ejemplo, si  $M/m = 100$ , obtenemos para la frecuencia del primer modo  $0.652 s^{-1}$ , que coincide con el valor de la Tabla II. Si calculamos  $c$  mediante (8) obtenemos que la longitud de onda de este modo es  $7m$ , mucho mayor que la longitud del resorte ( $L = 0.11 m$ ). Las frecuencias del segundo ( $20.5 s^{-1}$ ) y del tercer modo ( $41 s^{-1}$ ) prácticamente coinciden con las frecuencias del primer y segundo modo normal de oscilación de un resorte fijo en ambos extremos,  $c/2L$  y  $c/L$ , respectivamente.

En el otro límite,  $M/m \ll 1$  por ejemplo, si  $M/m = 0.01$ , puede verse que las tres frecuencias de la última fila de la Tabla II prácticamente coinciden con  $c/4L$ ,  $3c/4L$  y  $5c/4L$ , que son las frecuencias de los tres primeros modos normales de oscilación de un resorte fijo en un extremo y libre en el otro.

En la Tabla II también se ve cómo se modifican las frecuencias de los tres primeros modos del sistema masa-resorte cuando aumenta la relación  $M/m$ . La frecuencia del modo fundamental disminuye y, cuando la longitud de onda es suficientemente grande comparada con la longitud del resorte, se tiene el modo H. Así como en la botella es la sección del cuello, en el caso del resorte, es el incremento de la masa  $M$  lo que hace disminuir la frecuencia y aumentar la longitud de onda del primer modo hasta que se hace mucho más grande que la longitud del resorte.



**FIGURA 4.** Ondas longitudinales de desplazamiento de los tres primeros modos del sistema masa-resorte para las relaciones de masas  $M/m$ : (a) 10, (b) 1 y (c) 0.1.

Cuando  $M/m=10$ , las frecuencias que se calculan con las ecuaciones (15) y (16) difieren en menos del 1% y la longitud de onda del modo es de  $2.25 m$ , mucho más grande que la longitud del resorte ( $0.11 m$ ). Las frecuencias del segundo y tercer modo, decrecen más lentamente y se aproximan a las frecuencias del primer y segundo modo de un resorte fijo en sus dos extremos.

Las Figuras 4a, 4b y 4c muestran las gráficas de los tres primeros modos de oscilación del sistema masa-resorte para tres valores diferentes de la relación  $M/m$ , (10, 1 y 0.1). Observemos que la función de onda del modo fundamental, cuando  $M/m=10$ , es prácticamente lineal. Esta es una característica de los modos Helmholtz, pues la longitud de onda correspondiente es mucho mayor que la longitud del resorte: en este caso la energía potencial se almacena en el resorte y en la masa  $M$  la energía cinética. Así, la masa concentrada se comporta como el cuello de la botella y el resorte como el volumen principal de la misma. A medida que  $M/m$  disminuye, la curvatura de la función de onda del primer modo se va incrementando, como se observa claramente en la Fig. 4c. Cuando  $M/m \rightarrow 0$ , esta función de onda es un cuarto de una senoide.

En la Fig. 4a se observa que el segundo y el tercer modo son aproximadamente los dos primeros modos de un resorte con sus dos extremos fijos. Los tres modos de la Fig. 4c se aproximan a los de un resorte fijo en un extremo y libre en el otro, lo que ocurre cuando  $M/m=0$ . En este caso, el sistema se comporta como una columna de aire en un tubo cerrado en  $x=0$  y abierto en  $x=L$ . Para observar estas interesantes oscilaciones del resorte sin masa, éste debe ser “blando” como el PASCO® W-9401. Uno de nuestros estudiantes, observando estas oscilaciones, expresó asombrado “... el resorte está oscilando sin la masa!!!”

Es interesante también analizar la variación de la frecuencia del modo fundamental del sistema masa-resorte en función de  $m/M$ , suponiendo  $M$  constante. Si  $m/M \ll 1$  se puede demostrar [8], a partir de la ecuación (15), que

$$\omega_1 \cong \frac{\omega_0}{\sqrt{1+m/3M}}, \quad (17)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ .

En la Fig. 5 se muestran dos gráficas de  $\omega_1/\omega_0$  en función de  $m/M$ . La que está en línea llena es la que corresponde a la expresión aproximada (17) y la otra, en línea a trazos, la que se obtiene “en forma exacta” a partir de la ecuación (15). Observamos que, si  $m/M < 1$ , la diferencia entre las frecuencias es muy pequeña, llegando a 0.6% cuando  $m/M = 1$ . Es notable que la diferencia resulta ser sólo del 6% cuando  $m/M = 10$ .

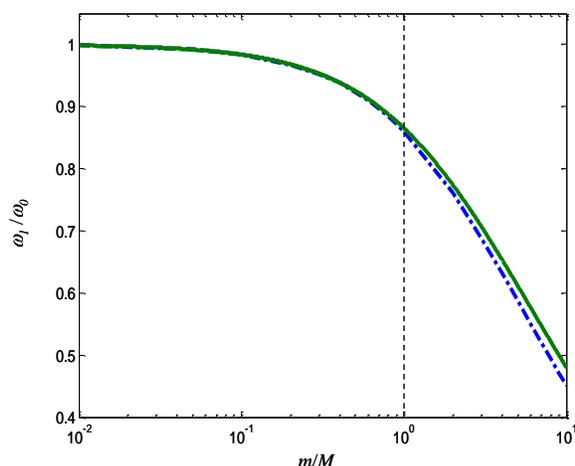


FIGURA 5. Gráfica de  $\omega_1/\omega_0$  en función de  $m/M$ . En raya y punto, la que se obtiene “exactamente” a partir de (15) y, en línea llena, la relación aproximada (17).

#### IV. LAS OSCILACIONES DE UN PÉNDULO CUYA CUERDA TIENE MASA

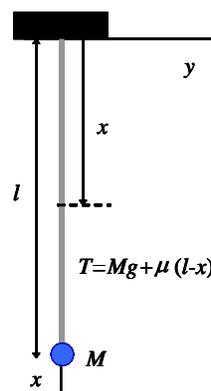


FIGURA 6. Esquema del péndulo: cadena de longitud  $l$ , de masa  $m$  y masa concentrada  $M$ .

El estudio y utilización del movimiento del péndulo ha tenido un inmenso impacto científico, cultural, filosófico y educacional [9]. El péndulo es un tópico corriente en los cursos básicos de física. Las oscilaciones de pequeña amplitud de un péndulo, cuya cuerda no tiene masa, pueden estudiarse con un modelo matemático simple. Cuando se tiene en cuenta la masa de la cuerda, es necesario recurrir a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para describir su movimiento. En lo que sigue, a la cuerda con masa la llamaremos *cadena*. El estudio del movimiento de una cadena vertical, sin la masa concentrada en su extremo inferior, fue hecho hace más de 200 años por Bernoulli y Euler [10]. Mucho más reciente [11, 12] es el estudio del movimiento de una cadena vertical con una masa concentrada en su extremo (en rigor, éste es el péndulo real, pues el hilo siempre tiene masa). Este estudio requiere de una matemática un poco más compleja; en particular, requiere estar familiarizado con las funciones de Bessel.

Consideremos un péndulo con una masa “puntual”  $M$  sujeta a una cadena homogénea, de longitud  $l$ , masa  $\mu$  por unidad de longitud y que está atada al punto  $O$ , como muestra la Fig. 6. La ecuación diferencial que describe el movimiento transversal  $y(x,t)$  de un elemento  $dx$  de la cadena que, en su posición de equilibrio está en el punto  $x$ , viene dada por

$$\partial/\partial x(T(x)\partial y(x,t)/\partial x) = \mu \partial^2 y(x,t)/\partial t^2, \quad 0 \leq x < l, \quad (17)$$

si se suponen pequeños desplazamientos respecto de la posición de equilibrio. Ésta es la ecuación diferencial para las ondas transversales en una cuerda cuya tensión  $T$  es función de  $x$ . En este caso  $T(x) = Mg + \mu g(l - x)$ .

Para encontrar los modos de oscilación del sistema, buscamos soluciones armónicas de la ecuación (17) del tipo

$$y(x,t) = \tilde{y}(x)e^{i\omega t}. \quad (18)$$

Reemplazando (18) en (17) obtenemos:

$$\partial/\partial x((Mg + \mu g(l - x))\partial \tilde{y}/\partial x) = -\mu \omega^2 \tilde{y} \quad 0 \leq x < l. \quad (19)$$

Las condiciones de borde para este problema son:

$$(a) \tilde{y}(0) = 0, \quad (b) Mg \partial \tilde{y}/\partial x = M \omega^2 \tilde{y}, \quad \text{en } x = l. \quad (20)$$

Si introducimos las variables adimensionales  $\eta = M/m$ , donde  $m = \mu l$  es la masa de la cuerda,  $u = x/l$ ,  $v = \tilde{y}/l$  y  $\varpi = \omega/\omega_0$ , donde  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  y hacemos el cambio de variables  $\eta + 1 - u = (s/2\varpi)^2$  la ecuación (19) puede escribirse de la forma

$$d^2 v/ds^2 + (1/s)dv/ds + v = 0, \quad (21)$$

que es una ecuación de Bessel ([13] Nagle) cuyas soluciones son

$$v = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s), \quad (22)$$

donde  $J_0$  e  $Y_0$  son las funciones de Bessel de orden cero, de primera clase y de segunda clase, respectivamente.

Las condiciones de borde (20a) y (20b) imponen que

$$\begin{aligned} c_1 J_0(s_0) + c_2 Y_0(s_0) &= 0, & (a) \\ c_1 (\hat{\omega} \sqrt{\eta} J_0(s_1) - J_1(s_1)) + & & (23) \\ c_2 (\varpi \sqrt{\eta} Y_0(s_1) - Y_1(s_1)) &= 0, & (b) \end{aligned}$$

donde  $s_1 = 2\varpi \sqrt{\eta}$  y  $s_0 = 2\varpi \sqrt{\eta + 1}$ .

Este es un sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones con dos incógnitas. Para que se tengan soluciones no triviales, el discriminante del sistema debe ser cero:

$$\begin{aligned} Y_0(s_0)J_1(s_1) - Y_1(s_1)J_0(s_0) + \\ \varpi \sqrt{\eta} (Y_0(s_1)J_0(s_0) - Y_0(s_0)J_0(s_1)) &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

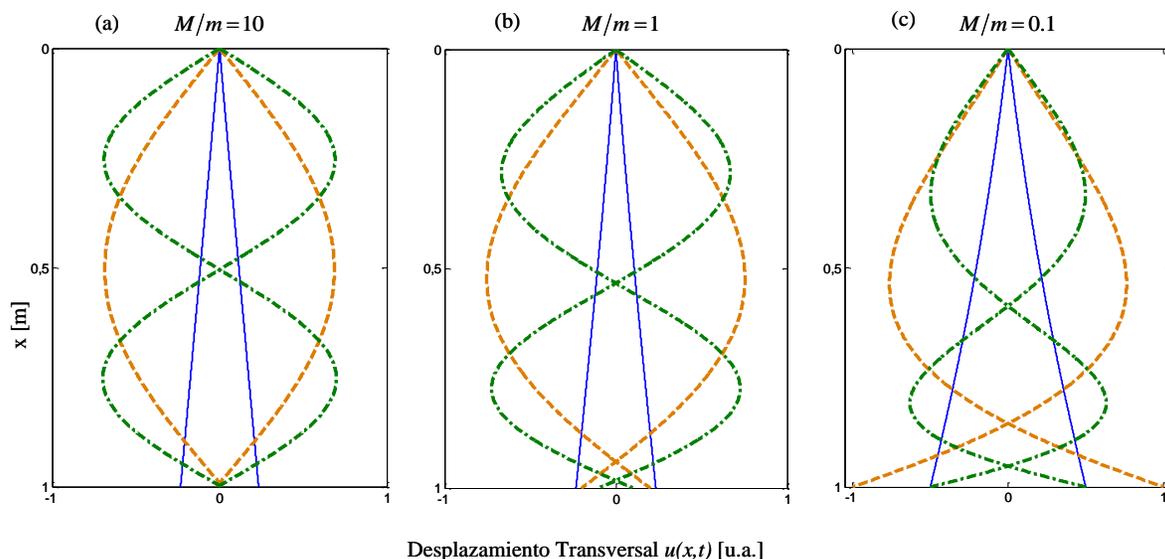
Las soluciones de esta ecuación son los autovalores  $\varpi$  de nuestro problema. El cálculo numérico de los autovalores  $\varpi_n$  es relativamente simple a pesar del aspecto poco amigable de la ecuación (24). Reemplazando estos autovalores, por ejemplo, en (23a) se encuentra la relación entre  $c_1$  y  $c_2$ , finalmente, mediante (22) se encuentran las autofunciones  $v_n$ .

**TABLA III:** Las tres primeras frecuencias naturales de oscilación de un péndulo para diferentes valores de la relación  $M/m$ .

$M/m$	$\varpi_1$	$\varpi_2$	$\varpi_3$
10	1.01	10.1	20.4
1	1.06	4.08	7.74
0.1	1.16	2.82	4.71
$\rightarrow 0$	1.20	2.76	4.33

En la Tabla III se muestran los tres primeros autovalores para diferentes valores del cociente  $M/m$ . Es interesante observar que todos los autovalores del primer modo están en el intervalo  $1 \leq \omega_1 \leq 1.202$ . El valor inferior de esta desigualdad corresponde al caso  $M/m \rightarrow \infty$  (cadena sin masa) y el superior, a  $M/m \rightarrow 0$  (cadena sin masa colgada). Es sorprendente como, en una variación infinita del parámetro  $M/m$ , el autovalor  $\varpi_1$  varía sólo en un 20%. Sin embargo, la variación de este parámetro modifica notablemente las frecuencias de los modos superiores; en el caso de la cadena sin masa colgada,  $\varpi_2$  es relativamente próximo a  $\varpi_1$  pero, cuando  $M/m$  aumenta,  $\varpi_2$  se aleja de  $\varpi_1$ , llegando a ser 31.5 veces más grande cuando  $M/m = 100$ .

Las Figuras 7a, 7b y 7c muestran los tres primeros modos de oscilación del péndulo para tres valores diferentes de la relación  $M/m$  (10, 1 y 0.1). Observemos que la función de onda del modo fundamental, cuando  $M/m = 10$ , es prácticamente lineal. En las experiencias habituales la relación entre  $M/m$  es 10 o mayor, motivo por el cual el hilo se mantiene recto durante la oscilación. Este modo tiene todas las características del modo H que analizamos en las secciones anteriores. A medida que  $M/m$  disminuye, la curvatura de la función de onda del primer modo se va incrementando, como se observa claramente en la Fig. 7c. También, en esta misma figura, se observa que las formas de estos modos se asemejan a los tres primeros modos de una cadena colgada en un extremo ( $x = 0$ ) y libre en el otro ( $x = l$ ).



**FIGURA 7.** Ondas de desplazamiento transversal de los tres primeros modos del péndulo para las relaciones de masas  $M/m$ : (a) 10, (b) 1 y (c) 0.1.

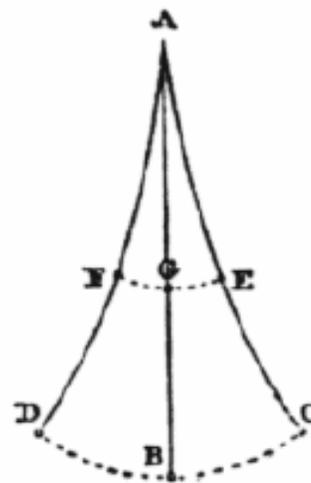
Como se observa en la Fig. 7 la cuerda se mantiene casi rectilínea, cuando oscila en su primer modo, para valores muy grandes de la razón  $M/m$ , sin embargo, para valores del orden de 1, o superior, la cadena forma un arco. Es interesante comentar que esto ya era conocido por Galileo [14]. En efecto, en la Fig. 8 se muestra un dibujo hecho por Galileo basado en sus observaciones de las oscilaciones de un péndulo cuando la masa suspendida es pequeña. Palmieri [15] afirma que Galileo conocía la existencia de los modos de oscilación (que Palmieri llama “modos latentes de oscilación”) y también que el movimiento más general de un péndulo es una superposición de sus diferentes modos. Si el movimiento del péndulo es una superposición de modos, su movimiento deja de ser periódico. Palmieri [15] sostiene que ésta es la causa por la cual Galileo [14], en sus experimentos para demostrar el isocronismo del péndulo, insistía en utilizar hilos delgados para que su masa sea despreciable comparada con la del objeto suspendido. En esta situación, la frecuencia del segundo modo es muy grande (30 veces superior a la frecuencia fundamental, como se muestra en la Tabla II, si  $M/m = 100$ ) y, por lo tanto, sólo se excita su modo fundamental cuando, para hacerlo oscilar, se lo aparta del equilibrio en la forma habitual.

Si  $m/M \ll 1$  se puede demostrar [16], a partir de la ecuación (24), que la corrección a la frecuencia de oscilación del péndulo debido a la masa de la cuerda viene dada por

$$\omega_1 \approx \omega_0 \sqrt{1 + m/6M}. \quad (25)$$

Observemos que, en este caso, la frecuencia del primer modo aumenta si se tiene en cuenta la masa de la cadena. La masa de la cadena incrementa tanto la inercia del sistema como la fuerza “restauradora”. Sin embargo, el efecto de la fuerza restauradora supera al de la inercia por lo que, en definitiva, la frecuencia aumenta (aunque muy débilmente), como

puede verse en (25). En cambio, en el oscilador masa-resorte, la masa del resorte sólo aumenta la inercia del oscilador y no tiene ningún efecto sobre la fuerza restauradora, por eso su frecuencia disminuye con el incremento de dicha masa.



**FIGURA 8.** Dibujo de Galileo mostrando las oscilaciones de un péndulo con una masa colgada pequeña comparada con la masa de la cadena.

## V. CONCLUSIÓN

En este trabajo analizamos el movimiento de tres osciladores que frecuentemente utilizamos en los cursos básicos de física. Los tres tienen infinitos modos normales de oscilación y se caracterizan por tener un modo de baja frecuencia con una longitud de onda mucho mayor que las dimensiones lineales del oscilador. Esto faculta considerarlos como de parámetros concentrados, lo que permite encontrar de

manera simple una expresión aproximada de las frecuencias de sus respectivos modos fundamentales. Son bien conocidas las hipótesis hechas por Helmholtz para calcular la frecuencia del modo más bajo de una botella. En esencia, sus hipótesis se corresponden con una modelización de la botella como si fuera de parámetros concentrados: el volumen principal almacena sólo energía potencial y el cuello, sólo energía cinética. Es bien conocido que una botella tiene además otros modos normales de oscilación de frecuencias más altas. Esto puede comprobarse experimentalmente de manera muy simple y, con un poco más de esfuerzo, teóricamente [3, 4]. Sin embargo, cuando se analiza el movimiento de un péndulo o de un resorte, en los textos habituales de física básica, no se enfatiza que con las hipótesis que se utilizan, se los reduce a sistemas de parámetros concentrados de un solo grado de libertad. Generalmente no se menciona la existencia de otros modos y queda la idea que estos sistemas tienen solamente una frecuencia natural de oscilación.

El objetivo de este trabajo es mostrar que las oscilaciones de los sistemas resorte-masa y péndulo, que se presentan en los cursos básicos de física de nivel universitario, corresponden solamente al modo de frecuencia más bajo, el que tiene una longitud de onda mucho mayor que las dimensiones lineales del sistema. En otras palabras, se estudia solamente el modo H. de estos osciladores.

En la naturaleza y en los dispositivos construidos por el hombre, los sistemas que vibran tienen muchos modos de oscilación. Es conveniente, por lo tanto, introducir la noción de que el movimiento más general de un sistema es la superposición de todos sus modos a partir de los primeros cursos de física de nivel universitario. La existencia de los otros modos de estos osciladores puede mostrarse experimentalmente: si se eligen adecuadamente los parámetros del sistema se observa, al menos, el segundo modo, con relativa facilidad. Esto permite discutir el rango de validez de los supuestos del modelo que se utiliza para describir estos dos osciladores y acotar el error que esto introduce en el cálculo de la frecuencia fundamental.

## ANEXO 1

### Cálculo de los autovalores

Para calcular los autovalores de los sistemas que analizamos en este trabajo se deben calcular, gráfica o numéricamente, las raíces de las ecuaciones (22). En lugar de hallar estas raíces es más conveniente encontrar los polos de la inversa de estas ecuaciones. Por ejemplo, en el caso de la botella de Helmholtz, el problema de autovalores correspondiente determinó que las autofrecuencias son las  $\omega$  que satisfacen la ecuación:

$$F(\omega) = \tan(\omega L_1/c) \tan(\omega L_2/c) = S_1/S_2 . \quad (A1)$$

En lugar de hallar las raíces de (A1), es más conveniente encontrar los máximos de la función

$$U(\omega) = \frac{1}{|F(\omega)| + \varepsilon} , \quad (A2)$$

donde  $\varepsilon$  es un número positivo muy pequeño (por ejemplo,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ), utilizado para limitar los valores máximos: en un cero de  $F(\omega)$ ,  $U(\omega)$  es del orden de  $10^6$ .

Por una cuestión de escala, en la Fig. A1, se muestra la gráfica de  $\log_{10} U$  en función de  $\omega$ , para una botella que tiene las dimensiones:  $L_1 = 0.15m$ ,  $L_2 = 0.02m$  y  $S_1/S_2 = 10^{-2}$ . En la figura pueden visualizarse las frecuencias de los tres primeros modos. Algo interesante de mencionar es que esta gráfica es proporcional a la función de respuesta del sistema en función de la frecuencia puesto que ésta es inversamente proporcional a  $F(\omega)$ . Entonces, la Fig. A1 muestra las frecuencias de resonancia.

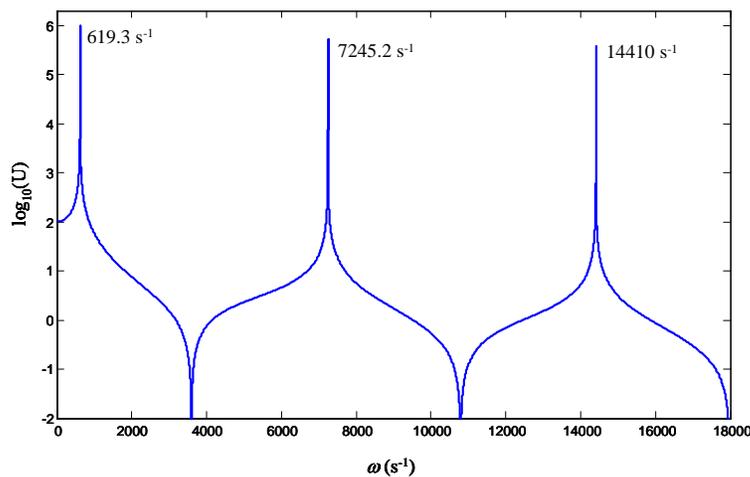


FIGURA 9.  $\log_{10}(U)$  en función de  $\omega$ .

## REFERENCIAS

- [1] Helmholtz, H., *On the Sensations of Tone as a Physiological basis of the Theory of Music*, (Dover, New York, 1954).
- [2] Rayleigh, J. W., *The Theory of Sound*, (Dover, New York, 1954).
- [3] Crawford, F. S., *Lowest modes of a bottle*, Am. J. Phys. **56**, 702 (1988).
- [4] Matar, M. y Welti, M., *Capturando la física de los resonadores Helmholtz con la ecuación de ondas acústica*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 127-134 (2009).
- [5] French, A.P., *Vibration and Waves*, (W. W. Norton, New York, 1971).
- [6] Roederer, J. G., *Mecánica Elemental*, (Eudeba, Buenos Aires, 2002).
- [7] Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., *Equations of Mathematical Physics*, (Dover, New York, 1990).
- [8] Galloni, E. and Kohen, M., *Influence of the mass of the spring on its static and dynamic effects*, Am. J. Phys. **47**, 1076–1078 (1979).
- [9] Matthews, M. R., Gould, C. F. and Stinner, A. (Editores), *The Pendulum: Scientific, Historical, Philosophical and Educational Perspective*, (Springer, Dordrecht, 2005).
- [10] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1944).
- [11] Sujith, R. I. and Hodges, D. H., *Exact Solution for the Free Vibration of a Hanging Cord with a Tip Mass*, J. Sound Vib. **179**, 359-361 (1995).
- [12] Deschaine, J. S. and Suits, B. H., *Spin 3/2 Zeeman perturbed NQR in the presence of slow sample rotation*, Eur. J. Phys. **29**, 1211-1222 (2008).
- [13] Nagle, R. K., Saff, E. B. y Suider, A. D., *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, (Addison Wesley, México, 2005).
- [14] Galileo, G., *Dialogues Concerning Two New Sciences*, (Dover, New York, 2003).
- [15] Palmieri, P., *A phenomenology of Galileo's experiments with pendulums*, The British Journal for the History of Science **42**, 479-513 (2009).
- [16] Montgomery, C. G., *Pendulum on a Massive Cord*, Am. J. Phys. **46**, 411 (1978).