

# Interferencia y difracción cuántica sin dualidad onda – partícula



**Luis Gabriel Hernández Román, Víctor David Granados García**

*Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional “Adolfo López Mateos”, Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, Edificio 9, C.P. 07738, México D. F.*

**E-mail:** luisito\_hdzroman@hotmail.com

(Recibido el 4 de Octubre de 2012; aceptado el 17 de Febrero de 2013)

## Resumen

Analizamos críticamente la dualidad onda – partícula de la teoría de de Broglie, en base de la teoría de la relatividad especial de ondas y partículas. De la función de estado de partícula libre de la ecuación de Schrödinger, probamos la existencia de interferencia análoga a la doble ranura de Young sin usar la dualidad onda – partícula. Similarmente por analogía con la integral de Fresnel – Kirchhoff obtenemos expresiones para difracción en ranuras también sin usar dualidad onda – partícula. Concluimos que la teoría de de Broglie es relativísticamente inconsistente y que los fenómenos cuánticos de interferencia y difracción se explican por la superposición de funciones de estado y la linealidad de la ecuación de Schrödinger sin necesidad de la dualidad de onda – partícula.

**Palabras clave:** Dualidad, Interferencia, Difracción, partículas, ranuras.

## Abstract

The wave – particle duality of de Broglie’s theory is analyzed critically, based on the theory of the special relativity of waves and particles. From the state function of free particle of Schrödinger’s equation, we prove the existence of interference analogous to the Young’s double slit without using the wave – particle duality. Similarly by analogy with the Fresnel – Kirchhoff’s integral we obtain equations for diffraction in slits also without using the wave – particle duality. We conclude that de Broglie’s theory is inconsistent with the theory of relativity and the quantum phenomenon of interference and diffraction are explained by the superposition of state functions and the linearity of the Schrödinger’s equation without taking into account the wave – particle duality.

**Keywords:** Duality, Interference, Diffraction, particles, slits.

**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Ta, 03.30.+p, 42.25.Fx, 42.25.Hz.

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

En 1924 de Broglie en una serie de artículos [1] y en su tesis doctoral introdujo la dualidad onda – partícula en mecánica cuántica. Su tesis doctoral presentada en la Sorbona y ante la incapacidad del jurado para evaluarla por la novedad de los conceptos introducidos, fue enviada a Einstein por Langevin [2]. Einstein aprobó la dualidad partícula – onda de de Broglie, como complemento de la dualidad onda – partícula en la radiación térmica. Casi simultáneamente Compton [3] observó la dispersión de rayos gamma por electrones, introduciendo la llamada longitud de onda Compton  $\lambda = h/mc$ .

Posteriormente a de Broglie, fueron realizados experimentos de difracción de electrones en cristales de níquel por Davisson y Germer, y por Thompson en polvos cristalinos [4]. Supuestamente por estos experimentos y otros análogos, se probó el comportamiento ondulatorio de la materia, pero Duane y Compton no aceptaron la idea de de Broglie y probaron la ecuación de difracción de Bragg basándose en la integral de Sommerfeld en el espacio fase

[5]. Aunque Schrödinger no usó el concepto de dualidad en la deducción de la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, posteriormente la usó para justificar su ecuación [6]. Heisenberg observó que la teoría de de Broglie simplemente da una explicación cuantitativa de los experimentos de Davisson y Germer, Thompson y otros [7]. Experimentos de este tipo fueron también con moléculas de hidrógeno y helio por Stern y colaboradores. Posteriormente fueron hechos experimentos de difracción de electrones en ranuras en las condiciones de Fraunhofer y Fresnel [8], de difracción de neutrones [9] y aún de moléculas de fullerenos [10].

Se ha considerado que todos estos experimentos son prueba del comportamiento ondulatorio de acuerdo con la teoría de de Broglie. En este artículo demostraremos que los fenómenos de interferencia y difracción cuántica de partículas son intrínsecos a la mecánica cuántica de partículas libres, como consecuencia de la superposición de estados. Así obtenemos el patrón de probabilidad de interferencia de un haz de partículas libres por una doble ranura, análogamente a la doble ranura de Young.

Similarmente mediante la ecuación de Helmholtz a la que se reduce para partícula libre la ecuación de Schrödinger, encontramos por analogía la integral de Kirchhoff – Fresnel, tanto para la difracción en ranuras y obstáculos de Fraunhofer. Así obtenemos como establece Feynman en el análisis del efecto de Bohm – Aharonov que las fórmulas de interferencia y difracción cuánticas, se obtienen de la óptica física combinando  $\lambda$  por  $h/p$  [11].

## II. CRÍTICA A LA TEORÍA DE DE BROGLIE

La manera en que procede de Broglie es haciendo una analogía entre la relación de onda – partícula del fotón de Einstein  $E = h\nu = cp$ , donde  $\nu$  es la frecuencia de la onda y  $p$  su momento,  $h$  la constante de Planck y  $c$  la velocidad de la luz. Así, establece la relación entre la frecuencia y masa propia  $m_0$  de una partícula por la condición cuántica

$$h\nu = m_0c^2. \quad (1)$$

Lo primero que se observa es que esta misma ecuación se usa en radiación térmica de partículas de masa cero para obtener la relación entre la densidad de energía y presión de Boltzmann [12]. Lo que hace de Broglie es dotar de masa al campo escalar de la onda sin indicar un mecanismo de generación de masa, como el mecanismo de Higgs o rompimiento de la simetría en partículas elementales [13]. Luego si en el sistema propio la onda tiene una frecuencia  $\nu_0$ , en otro sistema inercial que se mueve con velocidad  $v$ , la frecuencia la propone relacionada por

$$\nu_1 = \frac{\nu_0}{\beta}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (2)$$

En el sistema propio la energía es  $m_0c^2\beta$  y en otro sistema inercial la relación cuántica con la frecuencia es

$$\nu = \nu_0\beta, \quad (3)$$

que es diferente de  $\nu_1$  y por lo tanto las relaciones cuánticas  $h\nu_1 = m_0c^2/\beta$  y  $h\nu = m_0c^2\beta$  son distintas. Esta dificultad intrigó a de Broglie para considerar entonces el tiempo. Ahora debido a la transformación relativista de Lorentz del tiempo

$$t_0 = \beta(t - vx/c^2), \quad (4)$$

y la fase en el sistema propio la considera dada por la función

$$\nu_0\beta(t - vx/c^2), \quad (5)$$

es decir, para una onda de frecuencia  $\nu_0\beta$ , la velocidad de propagación es  $v = c^2/\nu$ . Pero esta velocidad de

propagación viola la teoría de la relatividad porque es mayor que la velocidad de la luz. La forma de obtener esta velocidad de una onda no es correcta al obtenerse de la transformación de Lorentz del tiempo. Para librar esta contradicción, de Broglie recurre a la velocidad de Rayleigh de grupo de una onda escrito en la forma

$$\frac{1}{u} = \frac{d}{dv} \left( \frac{\nu}{v} \right) = \frac{1}{v}, \quad (6)$$

que da una identidad trivial ya que no proporciona una relación de dispersión ni ha considerado explícitamente una onda.

A continuación él considera desde el punto de vista relativista el cuadrivector  $x = (x, y, z, ct)$  y el diferencial de la fase de una onda por la relación con suma en índices repetidos

$$d\varphi = 2\pi O_i dx_i = 2\pi \left( dt - \frac{d\ell}{v} \right), \quad (7)$$

donde  $\ell$  es la dirección de propagación de la onda con fase  $\varphi$ , con frecuencia  $\nu$  y velocidad  $v$  constantes y las  $O_i$  están dadas por

$$\begin{aligned} O_1 &= -\frac{\nu}{v} \cos(x, \ell), & O_2 &= -\frac{\nu}{v} \cos(y, \ell), \\ O_3 &= -\frac{\nu}{v} \cos(z, \ell), & O_4 &= \frac{\nu}{v}. \end{aligned} \quad (8)$$

Así las  $O_i$  son componentes vectoriales de un vector  $\mathbf{n}$  de magnitud  $\nu/v = 1/\lambda$ . Establece de Broglie ahora el principio de mínima acción entre dos puntos del espacio  $A$  y  $B$  para la onda en la forma variacional

$$\delta \int_A^B Q_j dx_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (9)$$

de tal forma que al expresar de acuerdo a la Ec. (7) se obtiene el principio de Fermat

$$\delta \int_A^B \frac{v d\ell}{v} = 0 = \delta \int_A^B \frac{d\ell}{\lambda}. \quad (10)$$

Considerando ahora la expresión para el cuadrivector de momento lineal

$$J_1 = (m\beta v_x, m\beta v_y, m\beta v_z, E/c), \quad (11)$$

y comparando con el principio de Hamilton de la mecánica clásica, el principio de Fermat, de Broglie establece su igualdad

$$\delta \int_A^B J_i dx_i = 0 = \delta \int_A^B O_i dx_i. \quad (12)$$

$$V = \frac{h\nu}{mv} = \frac{c}{v}, \quad (17)$$

Así se llega a la dualidad onda – partícula expresada por las siguientes relaciones

$$J_4 = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}, \quad \mathbf{J} = h\mathbf{O},$$

es decir, usando para el momento lineal  $\mathbf{p}$  en lugar de  $\mathbf{J}$

$$E = h\nu, \quad p = \frac{h}{\lambda}, \quad (3)$$

que son las relaciones de dualidad de de Broglie. La relación entre los cuadrivectores se escriben en la forma

$$p_i = (\mathbf{p}, E/c) = h(\mathbf{O}, \nu/c) = hO_i. \quad (14)$$

Las relaciones relativistas de dualidad de de Broglie (14), presentan inconsistencias porque el módulo cuadrado de Lorentz del cuadrivector  $p_i$  es igual a  $m^2 c^2$  [14], mientras que el correspondiente de  $O_i$  no está bien definido. Por lo tanto, la relación de dualidad de la Ec. (14) no es covariante relativista. Esto surge porque de acuerdo a la relatividad especial [14] el cuadrivector de onda se expresa como

$$k_i = O_i = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{n}, \frac{2\pi\nu}{v} \right), \quad (15)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector de la dirección de propagación de magnitud euclídeana uno, tiene módulo cero, es decir, es un cuadrivector nulo. Además las componentes  $k_4 = O_4 = \nu/v$  de la onda, difiere en el de de Broglie de la Ec. (7)  $O_4 = \nu/c$ , al poner  $v = c$  para poder llegar a la relación de Planck – Einstein  $E = h\nu$  como se observa en la Ec. (14). Así podemos decir que la siguiente fase

$$\varphi = O_i x_i = \frac{\nu}{v} (n_x x + n_y y + n_z z) - \frac{\nu}{v} t, \quad (16)$$

no corresponde estrictamente a una onda, al menos que  $v = c$ , en cuyo caso se tendría un cuadrivector  $O_i$  nulo, es decir, para partículas de masa cero y por lo tanto no tiene sentido la dualidad propuesta por de Broglie. Para el caso de una partícula libre, la teoría de de Broglie proporciona los siguientes resultados

$$E = h\nu = mc^2 \beta, \\ p_j dq_j = mv^2 dt = m\beta v dl = \frac{h\nu}{v} dl,$$

de la cual se sigue la relación

ya considerada previamente, que es otra hipótesis fuera del concepto de dualidad de la Ec. (14). Como ya se hizo notar en la Ec. (17), no se puede igualar la energía de Planck – Einstein de una onda con la energía relativista y la Ec. (17) para la velocidad de una onda viola la teoría de la relatividad. Así concluimos que la hipótesis de de Broglie es inconsistente en la relación  $E = h\nu = mc^2$  y en la relación  $\lambda = h/p$ , es evidente ya que al dividir la constante de acción de Planck  $h$  por un momento, da una longitud, que al asociarla con la longitud de onda, con la relación de la Ec. (14) presenta inconsistencias.

Davisson y Germer sin proponerse probar la hipótesis de dualidad, hicieron experimentos de difracción de electrones en un cristal de níquel, después G. Thompson en polvos cristalinos. Posteriormente por Kikuchy, Roupp, encontrando todos ellos patrones de difracción análogos a los de los rayos X [15] con lo cual se considera probada la hipótesis de de Broglie.

La explicación de la difracción ondulatoria está descrita por la ley de Bragg

$$n\lambda = 2d \cos \theta = \frac{nh}{p}, \quad (18)$$

donde  $d$  es la distancia interplanar en el cristal,  $\theta$  es el ángulo entre la normal a la cara del cristal y la dirección de incidencia del vector de propagación de la onda y  $n = 1, 2, 3, \dots$  Casi simultáneamente que de Broglie, Duane y Compton dedujeron la ley de Bragg solo a partir del concepto de fotón sin considerara ondas [15, 16].

De la regla de cuantización de Sommerfeld, consideran la incidencia en el plano de la red en la forma,

$$\int_0^d p_z dz = nh \quad \text{ó} \quad p_z = \frac{nh}{d}. \quad (19)$$

El momento de los fotones es  $p = h\nu/c$ , así que la componente a lo largo del eje  $z$  está dado después de la reflexión en las consideraciones anteriores por la relación  $2h\nu \sin \theta/c = 2h \sin \theta/\lambda$  que al igualar con el momento de la Ec. (19) se obtiene la ley de Bragg desde el punto de vista solo de partículas.

De la ecuación (10) del principio de Fermat, sustituyendo  $\lambda = h/p$  y quitando la variación se retorna a la regla de cuantización de Sommerfeld [5, 16] integrando en un ciclo

$$\oint \frac{dl}{\lambda} = \oint pdq = nh. \quad (20)$$

Por lo tanto, la hipótesis de de Broglie desde este punto de vista no es más que una teoría semiclásica. Así por ejemplo, en las órbitas circulares del modelo de Bohr de radio  $r$ , la

Luís Gabriel Hernández Román, Víctor David Granados García  
 Ec. (20) de Sommerfeld – de Broglie, conduce a la ecuación de cuantización

$$2\pi pr = nh = h2\pi/\lambda, \quad n\lambda = 2\pi r. \quad (21)$$

La primera condición de la Ec. (20) establece la cuantización del momento angular  $L = pr = nh/2\pi$  que permite obtener los niveles del átomo de hidrógeno y la segunda como una condición de resonancia en la órbita como se estudia en los textos de física general, como se observa en la figura (1) [17].

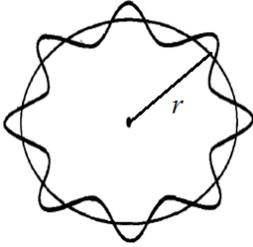


FIGURA 1. Órbita circular del modelo de Bohr de radio  $r$  [17].

### III. INTERFERENCIA Y DIFRACCIÓN CUÁNTICAS

Basados ahora en la solución de onda esférica para partícula libre de la ecuación de Schrödinger, daremos una teoría cuántica de la interferencia y difracción de partículas con masa, sin la hipótesis de dualidad de de Broglie. De la ecuación de Schrödinger para estados estacionarios

$$\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}), \quad (22)$$

en coordenadas esféricas, la solución está dada por la expresión

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{A}{r} e^{ipr/\hbar}, \quad (23)$$

donde  $\hbar = h/2\pi$  y el autovalor de energía está relacionado con el momento por  $E = p^2/2m$  y  $A$  es una constante compleja [7]. Supongamos ahora un haz de partículas incidentes sobre una pantalla con dos ranuras idénticas como en el experimento óptico de Young [18] y que se observa en una pantalla paralela a la primera separada una distancia  $D$ , como se ve en la figura (2). Entonces en la segunda pantalla de observación se tiene la siguiente superposición de las dos autofunciones

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}) &= \Psi_1(\mathbf{r}_1) + \Psi_2(\mathbf{r}_2) = \frac{A}{r} \left( e^{ipr_1/\hbar} + e^{ipr_2/\hbar} \right) \\ &= \frac{A}{r} e^{ipr_1/\hbar} \left[ 1 + e^{ip(r_2-r_1)/\hbar} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Esto es posible ya que  $\Psi_1$  y  $\Psi_2$  son ambas soluciones de la ecuación de Schrödinger que es lineal y el momento lineal es el mismo al salir de la rendijas y además  $r_1 \sim r_2 \sim r$ , ya que  $D \gg d, r$ . Por lo tanto, el módulo de la función de la superposición es

$$|\Psi|^2 = 2|A|^2 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{p(r_2-r_1)}{\hbar} \right] \right\}. \quad (25)$$

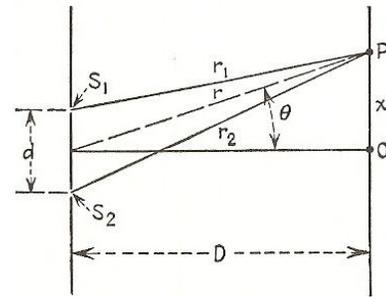


FIGURA 2. Experimento de Young con un haz de partículas [18].

Procediendo de acuerdo a la geometría de la figura 2 y de la manera usual como en óptica para la doble ranura de Young [18], se obtiene

$$|\Psi|^2 = 4|A|^2 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{D} \frac{p}{h} x \right). \quad (26)$$

Si se compara con la correspondiente expresión, para el caso óptico [18]

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda D} x \right), \quad (27)$$

se tiene que se puede pasar de la Ec. (26) a la (27) cuando se tome  $\lambda = h/p$ . Tenemos así de acuerdo a la Ec. (26), que se produce un patrón de interferencia de partículas de masa  $m$  y momento  $p$  al emerger de las ranuras y superponerlas y luego observarlas en una pantalla, sin necesidad de la hipótesis de dualidad y que por lo tanto, la interferencia es consecuencia de la descripción cuántica dada por la función de estado.

Comparando las ecuaciones de la función de estado de partícula libre dependiente del tiempo en coordenadas esféricas

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} \exp\left[i\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{\hbar} - \frac{Et}{\hbar}\right)\right] \quad (28)$$

con la función de una onda esférica

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{A}{r} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (29)$$

con  $A$  constante, se puede tener la siguiente identidad de los términos de las fases, idéntica a la de de Broglie

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar}, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{p}{h}, \quad E = \hbar\omega. \quad (30)$$

Aunque estas relaciones son solo formales, son simples de justificar y permiten además observar que no es necesario tomar en cuenta la parte temporal de la función de onda y por tanto la relación de Planck  $E = h\nu$ , para tratar la interferencia y difracción cuánticas. En efecto, los patrones observados experimentalmente dependen de la geometría, es decir, de la parte espacial y no del tiempo. Aunque existe el caso de la difracción de Moshinsky [19] dependiente del tiempo, que no se considerará en lo siguiente.

La teoría rigurosa de la difracción [20, 21, 22] inicia con el hecho de que una onda esférica del tipo de la Ec. (29) que incide en la pantalla de la ranura y que satisface la Ec. (22) de Helmholtz.

Considerando otra función de onda  $\Phi$  que satisface también la ecuación de Helmholtz, se les puede aplicar a ambas el teorema de Green, obteniendo

$$\int (\Phi \nabla_n \Psi - \Psi \nabla_n \Phi) \cdot ds = \int (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) dV = 0, \quad (31)$$

en donde la segunda integral se anula porque ambas funciones y satisfacen la Ec. (22) de Schrödinger y el subíndice  $n$  en el Laplaciano, indica normal a la superficie de integración. De la Ec. (31) se obtiene como en óptica física [20, 21, 22] el teorema integral de Kirchhoff, que relaciona el valor de la función de estado en el interior de una superficie cerrada, al valor de la función sobre la superficie

$$\Psi_p = \frac{1}{4\pi} \int \left( \Psi \nabla_n \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} - \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}}{r} \nabla_n \Psi \right) \cdot ds, \quad (32)$$

donde  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$  es el vector de propagación, para una partícula de momento lineal  $\mathbf{p}$ . Como en el caso óptico ondulatorio, se asume que la función de estado incidente al plano de la ranura está dada por

$$\Phi(\mathbf{r}', t) = \frac{B}{r} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' - i\omega t}, \quad (33)$$

*Interferencia y difracción cuántica sin dualidad onda – partícula*  
con  $B$  una constante, y su gradiente normal al plano de la ranura  $\nabla_n \Phi$ , contribuyen a la integral de Kirchhoff de la Ec. (32) solo sobre el espacio de la ranura [20, 21]. El vector  $\mathbf{r}'$  es así, el de posición de un punto en la ranura, con origen en la fuente y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de un punto en la pantalla, con origen en la ranura.

Asumiendo que la distancia entre la fuente de partículas y el plano de la ranura es muy grande y que la función de estado incidente de la Ec. (33) represente ahora un estado diferente de onda plana, la integral que establece el valor de la función de ésta en un punto  $P$  en la pantalla donde se observa que el patrón de difracción queda expresado por la análoga de la integral de Fresnel – Kirchhoff de la óptica [20, 21, 22] en la forma

$$\Psi_p = D \int_R e^{i\frac{\mathbf{p}}{\hbar}(\mathbf{r}+\mathbf{r}')} dx dy, \quad (34)$$

donde  $D$  es una constante compleja que incluye la exponencial del tiempo y  $x, y$  son las coordenadas en el plano de la ranura y la  $R$  en la integral se hace sobre una región en la ranura.

De la integral de Fresnel – Kirchhoff se pueden tener dos casos, el de Fraunhofer en la que la distancia entre los planos de la ranura y de observación del patrón de difracción sea mucho mayor que la longitud  $\lambda = h/p$  y la de Fresnel cuando sea simplemente mayor. De la integral de la Ec. (34), realizando la aproximación de Fraunhofer [20, 21, 22], se llega a la siguiente integral

$$\Psi_p(x_0, y_0, z_0) = D' \int_R e^{i p(\ell x_0 + m y_0)/\hbar} dx dy, \quad (35)$$

donde  $D'$  es otra constante compleja,  $x_0, y_0, z_0$  las coordenadas en la pantalla donde se observa el patrón de difracción de la partículas y  $\ell = x_0/R$ ,  $m = y_0/R$ , los cosenos directores del radio vector  $\mathbf{R}$  del origen de coordenadas de la ranura, a cualquier punto  $P(x_0, y_0, z_0)$  en la pantalla de observación. Análogamente al caso de interferencia anterior, se observa que la relación con la integral de Fraunhofer para difracción de partículas de la Ec. (35) y la de la óptica ondulatoria es la relación  $\lambda = h/p$ . Para la geometría de una ranura rectangular de lados  $a, b$ , como se observa en la figura (3), la integral de Fraunhofer (35), proporciona el resultado para la distribución de probabilidad  $P(\ell, m) = |\Psi_p|^2$

$$P(\ell, m) = P_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2}, \quad (36)$$

donde están definidos

$$\alpha = \frac{\pi \ell a p}{h}, \quad \beta = \frac{\pi b p}{h}, \quad (37)$$

y  $P_0 = |D|^2$  es la densidad de probabilidad que es independiente del tiempo incidente de las partículas que llegan a la ranura. Para una ranura muy larga, tal que  $b \gg a$ , solo se considera en primer término de (36), así que

$$P(\alpha) = P_0 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}, \quad (38)$$

que representa un máximo en el centro para  $\alpha = \ell = 0$  y mínimos en  $\alpha = \pm n\pi, n=1,2,\dots$  y los máximos entre estos mínimos como se observa en la figura (4). En el experimento de difracción de partículas en una ranura [8, 9, 10] se observa un patrón de difracción de bandas de máximos y mínimos como el descrito por la Ec. (38), análogo al del caso óptico [20, 21, 22]. Pero lo importante en el análisis que se ha presentado está basado totalmente en la mecánica cuántica sin considerar dualidad onda – partícula. Se puede concluir que los fenómenos de interferencia y difracción son intrínsecos de las partículas que describe la mecánica cuántica y no dependen de la hipótesis ondulatoria.

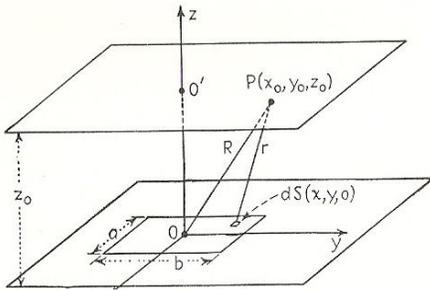


FIGURA 3. Geometría en la difracción de Fraunhofer.

Para el caso de la ranura muy larga se tiene  $m=0$ , por lo que de acuerdo a la Ec. (37) y de la figura (5), la posición  $x_0$  de los mínimos de difracción están determinados por

$$\begin{aligned} \sin \theta = \ell &= \frac{x_0}{R} \\ &= \frac{nh}{ap} \end{aligned} \quad (39)$$

o bien

$$x_{0n} = n \frac{Rh}{ap}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (40)$$

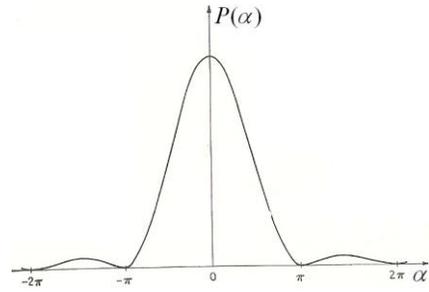


FIGURA 4. Distribución de probabilidad en una ranura muy larga.

Por lo tanto, la anchura de las franjas de difracción  $x_{0n+1} - x_{0n}$  está dada por la expresión

$$x_{0n+1} - x_{0n} = \frac{Rh}{ap},$$

la cual expresa que dados  $R \approx D$  y  $h$ , la anchura es inversamente proporcional a la abertura de la ranura y al momento lineal de las partículas.

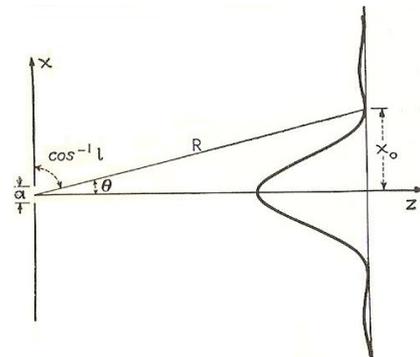


FIGURA 5. Patrón de difracción en el cual se toma  $b \gg a$  para la ranura rectangular en la cual se tiene esencialmente un patrón unidimensional.

Para el caso de las ranuras idénticas muy largas de abertura y separadas una distancia  $d$ , la integral de Fraunhofer (35) proporciona el resultado dado por la expresión

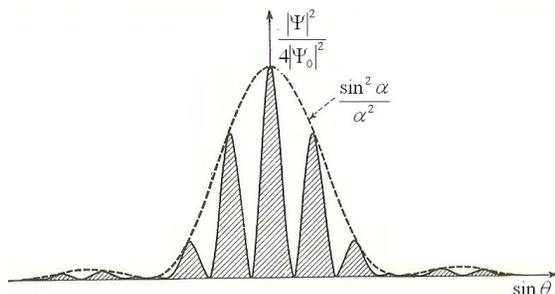
$$|\Psi|^2 = 4|\Psi_0|^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \cos^2 \gamma, \quad (41)$$

donde como antes  $\alpha = \pi \ell a p / h$  y  $\gamma = \pi \ell d p / h$ , así que la distribución de probabilidad para encontrar partículas en la pantalla está dada por el producto del modelo de difracción de una ranura por el de interferencia de las ranuras de la Ec. (41). De manera análoga como en el caso de una ranura, los mínimos de este patrón de difracción están dados por las expresiones siguientes

$$\frac{p}{h} d \sin \theta = \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

$$\frac{p}{h} a \sin \theta = \left( m + \frac{1}{2} \right), \quad m, n = 1, 2, 3 \dots \quad (42)$$

La gráfica de la distribución de probabilidad de la doble ranura de la Ec. (41) se ve en la figura (6). Estos resultados para difracción de partículas son muy interesantes, porque los experimentos realizados con electrones [8], neutrones [9], átomos [4] y aun moléculas de fullereno [10], dan una explicación bastante razonable de las franjas de los patrones de difracción observados. Pero es muy importante resaltar que estos patrones como los de los observados con electrones en tiempo real en los laboratorios de Hitachi [23] se forman por las partículas que se registran al inducir una por una sobre una pantalla. Esto determina que la función de estado, al menos en estos experimentos de difracción describe un conjunto de partículas y no a una sola partícula. También que una partícula no pueda difractarse en una ranura, que si en un experimento de difracción de dos ranuras de partículas se cierra una de ellas, el patrón de difracción se convierte en el de una sola ranura.



**FIGURA 6.** Distribución de probabilidad de la doble ranura con  $d = 3a$ .

Además no tiene ningún sentido analizar que si se produce un patrón en una doble ranura preguntarse por cual ranura cruzó como Feynman [11, 24] discute, ya que la función de onda describe un conjunto de partículas de un haz incidente y no alguna en particular. Pero lo más importante es que se pueden explicar patrones de difracción de partículas, sin considerar la dualidad onda – partícula de de Broglie, solo a partir de la ecuación de Schrödinger. Es posible tratar la difracción de partículas por una ranura circular o una red de difracción de manera análoga, pero que no se tratarán ahora.

#### IV. CONCLUSIONES

Observamos que la teoría de dualidad onda – partícula es relativísticamente inconsistente, porque corresponde a partículas de masa cero. Entonces para dotar a las partículas de masa se necesita un mecanismo extra que la genere. La difracción de partículas en sólidos puede obtenerse como lo

*Interferencia y difracción cuántica sin dualidad onda – partícula* hicieron Duane y Compton para probar la ecuación de Bragg sin necesidad de usar el concepto de dualidad. La teoría de dualidad no es más que una teoría semiclásica, como la regla de cuantización de Sommerfeld. Por analogía entre la interferencia de un haz de partículas, con el de la doble ranura de Young, encontramos un patrón de interferencia sin considerar dualidad, solo la función de estado de partícula libre, lo cual indica que la interferencia es una propiedad intrínseca de las partículas. También con estados de partícula libre, obtuvimos por analogía de Fresnel – Kirchhoff, la expresión para la difracción de la integral de Fraunhofer. Encontramos los patrones de difracción de una y dos ranuras idénticas, análogas a las de difracción con luz y observamos que se puede pasar de un caso al otro como observa Feynman tomando  $\lambda = h/p$ , pero la difracción también es una característica de las partículas libres que obedecen la ecuación de Schrödinger y nos es necesario considerar la dualidad onda – partícula.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con apoyo de COFFA-IPN, EDD-IPN y del proyecto SIP-IPN clave 20120720.

#### REFERENCIAS

- [1] Ludwig G., *Wave Mechanics*, Parte 2, Artículo 1, Fragmento de la tesis doctoral de de Broglie, Pergamon Press, Oxford (1968).
- [2] Jammer, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, (Mc Graw – Hill, New York, 1966).
- [3] Stufwer, R. H., *The Compton Effect*, (Science History Publications, New York, 1975).
- [4] Semat, H., *Física Atómica y Nuclear*, (Aguilar, Madrid, 1957).
- [5] Born, M., *The Mechanics of Atom*, (Ungar, New York, 1966).
- [6] Schrödinger, E., *Collected Papers on Wave Mechanics*, (Chelsea, New York, 1978).
- [7] Powel, J. and Craseman, B., *Quantum Mechanics*, (Addison Wesley, Reading, 1965).
- [8] Jonsson, C., *Electron diffraction at multiple slits*, Am. J. Phys. **42**, 411 (1974).
- Donati, O., Missiroli, G. F. and Pozzi, G., *An experiment on electron interference*, Am. J. Phys. **41**, 639–644 (1978).
- Mollenstedt, G. and Duker, H., *Fresnelscher Interferenzversuch mit einem biprisma electronwellen*, Naturwissenschaften **42**, 41 (1955).
- Tomomura, A., *Applications of electron holography*, Rev. Mod. Phys. **59**, 639 – 669 (1987).
- Matteucci, G. and Pozzi, G., *Two further experiments on electron interference*, Am. J. Phys. **46**, 619–623 (1978).
- Merli, P. G., Missiroli, G. F. and Pozzi, G., *On the statistical aspect of electron interference phenomena*, Am. J. Phys. **44**, 306 – 307 (1976).
- Matteucci, G., *Electron wavelike behavior: A historical and experimental introduction*, Am. J. Phys. **58**, 1143–1147 (1990).

- [9] Gäler, R. and Zeilinger, A., *Wave-optical experiments with very cold neutrons*, Am. J. Phys. **59**, 316-324 (1991).
- [10] Nairz, O., Arndt, M., and Zeilinger, A., *Quantum interference experiments with large molecules*, Am. J. Phys. **71**, 319–325 (2003).
- [11] Feynman, R., Leighton, R. and Sands, M., *Lectures on Physics Vol. II, Electromagnetism*, (Addison Wesley, Reading, 1964).
- [12] Zemansky, M., *Calor y termodinámica*, (Aguilar, Madrid, 1980).
- [13] Halzen, F. and Martin, A., *An Introductory Course in Modern Particle Physics*, (Mc Graw – Hill, USA. (1984).
- [14] Schröeder, U., *Special Relativity*, (World Scientific, Singapore, 1990).
- [15] Heisenberg, W., *The Physical Principles of Quantum Theory*, (Dover, New York, 1930).
- [16] Pauling, L. and Wilson, E. B., *Introduction to Quantum Mechanics 2nd Edition*, (Dover, New York, 1935).
- [17] Resnick, R. and Halliday, R., *Física Vol. II*, (CECSA, México, 1999).
- [18] Frank, N., *Introducción a la Electricidad y Óptica*, (Grijalbo, México, 1958).
- [19] Móshinsky, M., *Apuntes del Curso de Mecánica Cuántica*, (UNAM, México, 2008).
- [20] Slater, J. and Frank, N., *Electromagnetism*, (Mc Graw Hill, New York, 1947).
- [21] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [22] Hetch, E., *Óptica*, (Addison Wesley Interamericana, Madrid, 2000).
- [23] Tonumura, A., Endo, J., Matsuda, T., Kawasaki, T. and Esawa, H., *Demonstration of single – electron buildup of an interference pattern*, Am. J. Phys., **57**, 117–120 (1989).
- [24] Feynman, R., *Lectures on Physics Vol. III, Quantum Mechanics*, (Addison Wesley, Reading, 1965).