

Cuerpos geométricos oscilando en un líquido: “Masa virtual”, paradoja de d’Alembert



Adrián Corona Cruz, Bruce Jiménez Salado y Josip Slisko
FCFM, BUAP, Apartado Postal 1152, 72001 Puebla, México

E-mail: acorona@fcfm.buap.mx

(Recibido el 4 de noviembre de 2012, Aceptado el 27 de Febrero de 2013)

Resumen

El efecto de la masa virtual o añadida en cuerpos que se mueven, en el régimen de flujo de potencial, inmersos en los fluidos, se ha estudiado ya por varios años. Teórica y experimentalmente se ha determinado el efecto de la masa añadida en el movimiento de burbujas, esferas, dinámica entre fluidos, etc. Sin embargo, no se había tratado el efecto de la forma de los objetos en la cantidad de masa añadida y tampoco se había mostrado experimentalmente el comportamiento descrito por la paradoja de d’Alembert. Para el caso del cuerpo esférico oscilando en un fluido se muestra el buen acuerdo con la solución teórica; para objetos de otras formas, se reporta que a medida que el objeto es de forma “aerodinámica”, la masa añadida es menor

Palabras clave: masa virtual, masa efectiva, masa añadida, oscilaciones en fluidos

Abstract

The effect of added mass on virtual or bodies moving in the potential flow rate, immersed in the fluid, has been studied for several years. Theoretically and experimentally been determined the effect of the mass added to the movement of bubbles, spheres, between fluid dynamics, etc. However, no attempt was the effect of the shape of objects in the quantity of added mass and was shown experimentally nor the behavior described by d’Alembert paradox. In the case of the spherical body in a fluid oscillating shows good agreement with the theoretical solution, to objects in other ways, it is reported that as the object is in an "aerodynamic", the added mass is smaller.

Keywords: virtual mass, effective mass, added mass, fluid oscillations

PACS: 47.15.-x, 47.15.G-, 71.18.+y

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

En consecuencia de la forma de trabajo en el laboratorio básico de mecánica de la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, de la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, fue planteada la presente investigación, derivada de la discusión sobre la aerodinámica de los cuerpos: se propuso medir la fuerza que experimenta un cono al moverse a través de un fluido (líquido), en particular cuando el cono es puesto a oscilar en la dirección de su eje. Se formuló la hipótesis: la fuerza presentara una asimetría; menor en la dirección de la punta y mayor en la dirección opuesta. De los resultados iniciales, se encontró que la fuerza cambio en forma senoidal (simétrica), se buscó la explicación teórica (paradoja de d’Alembert). Además, se observó que su frecuencia no correspondía a la obtenida cuando el cono fue oscilado fuera del líquido, efecto que se relacionó con el movimiento del líquido que rodea al cono (masa agregada).

Ya desde 1828, el matemático alemán, Friedrich Bessel de su investigación de un péndulo moviéndose en un fluido ideó el concepto de masa hidrodinámica (o masa agregada) [1] En el 1843 Stokes estudio el movimiento de un cilindro moviéndose en un fluido, concluyendo que la masa efectiva

del cilindro aumento debido al líquido que lo rodea [2]. El departamento de Ingeniería Nuclear MIT informó sobre el efecto de la masa virtual en las características y la estabilidad numérica de los flujos bifásicos [3]. Se ha estudiado el comportamiento de burbujas de aire en agua, utilizando simulaciones numéricas se derivan las características de las fuerzas de arrastre y virtuales que influyen en el comportamiento de la burbuja [4]. Mediante un modelo basado en la teoría de flujo potencial y el coeficiente de masa virtual se explica el movimiento de burbujas esféricas y distorsionadas, [5]. Uno de los primeros estudios experimentales sobre una esfera oscilando en un líquido, fue realizado por Odar y Hamilton (1964), quienes midieron la fuerza total debida a tres contribuciones: la fuerza de arrastre (aerodinámico), la fuerza de masa virtual (incremento instantáneo en la presión) y la fuerza de la historia (fricción) [6].

En el caso de oscilaciones pequeñas de un cuerpo inmerso en un fluido, se presenta el flujo potencial [9]. Si la amplitud de las oscilaciones es pequeña en comparación con la dimensión del cuerpo, el flujo que circula junto al cuerpo será flujo potencial, en consecuencia la presión es constante y, por tanto, la fuerza total es cero. Por la acción de una fuerza externa F , el cuerpo ejecuta un movimiento oscilante,

y la ecuación del movimiento se obtiene de la derivada respecto al tiempo de la suma del impulso $m_c u$ del cuerpo y el impulso $P = m_v u$ del fluido,

$$F = m_c \frac{du}{dt} + m_v \frac{du}{dt}, \quad (1)$$

donde m_c es la masa del cuerpo, u su velocidad, y m_v la masa agregada o virtual. Por lo tanto el segundo término, se conoce como fuerza de masa virtual. La masa agregada depende de la forma real del cuerpo, y su cálculo exacto se obtiene de la solución de la ecuación de Laplace ($\Delta\phi = 0$). De manera que en general se puede establecer, que la masa agregada sea proporcional al volumen del cuerpo y la densidad del fluido:

$$m_v = \xi \cdot \rho V_0, \quad (2)$$

donde el valor de la constante de proporcionalidad ξ corresponderá a la forma geométrica del cuerpo. En el caso de una esfera, $\xi = 1/2$, implicando que la masa agregada es igual a la mitad del agua desplazada por el cuerpo.

La segunda ley de Newton en términos de la masa efectiva (masa del objeto más la masa “virtual” añadida), es:

$$F = (m_c + m_v) \frac{du}{dt}. \quad (3)$$

Debido a que la masa añadida depende de la densidad del fluido, su efecto es a menudo descuidado para cuerpos densos moviéndose en el seno de los fluidos mucho menos densos. Para situaciones donde la densidad del fluido es comparable o superior a la densidad del cuerpo (burbuja de aire), la masa añadida es mayor a la masa del cuerpo [2].

Resolviendo la ecuación para el sistema masa efectiva-resorte, la frecuencia es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_c + \xi \cdot \rho V_0}}. \quad (4)$$

II MEDICIÓN DE LA FUERZA

El oscilador fue implementado con 662 gm. de plastilina ($\rho_c = 1.65 \text{ Kg/cm}^3$) a la que se le dio las formas mostradas en figura 1, un resorte ($k = 13.54 \text{ N/m}$) que pende del sensor de fuerza, modelo CI-6537, conectado al sistema de adquisición de datos, Science Workshop 750 de Pasco, con el que se obtiene el comportamiento de la fuerza durante la oscilación de los objetos, a una frecuencia de captura de 100 hz. La masa del oscilador fue puesto en un recipiente de aproximadamente 30 litros con agua ($\rho = 1.02 \text{ Kg/cm}^3$).



FIGURA 1. Fotografías de los objetos puestos a oscilar, haciendo uso de la misma masa se elaboraron, respectivamente; un cono, un diábolo, un cono doble, una esfera y media esfera.

III RESULTADOS Y SU ANÁLISIS

A. Masa virtual

En la siguiente tabla se reportan los valores obtenidos de la fuerza vs tiempo de los sistemas formados por cada uno de los cuerpos mostrados en la figura 1. De los valores obtenidos del ajuste de la solución del sistema masa resorte amortiguado y la ecuación 4, se calcularon las constantes de proporcionalidad.

TABLA I. Relación de los valores experimentales de la frecuencia angular ω , la constante de proporcionalidad ξ . Además, se listan los valores de amortiguamiento α .

Cuerpo	ω	ξ	α
Libre	4.69	0	0.00
Cono doble	4.38	1/8.7	0.07
Esfera	3.98	1/2	0.05
Cono	3.94	1/1.8	0.24
Diábolo	3.82	1/1.45	0.22
Media Esfera	3.67	1/1.12	0.19

De los valores obtenidos se observa que el caso del cono doble, la masa añadida es del orden del 11%, mientras que a la media esfera se le agrego el 89% de su masa. Resultados que nos indican que a mayor área en la dirección del movimiento, mayor masa añadida. Respecto a la amortiguación, se observa que a mayor asimetría mayor amortiguación.

B. Paradoja de d’Alembert

Las graficas a y b de la figura 2, son dos ejemplos de los comportamientos de los objetos estudiados, muestran el buen acuerdo entre el ajuste de los datos con la función que describe el movimiento de una esfera en un fluido viscoso.

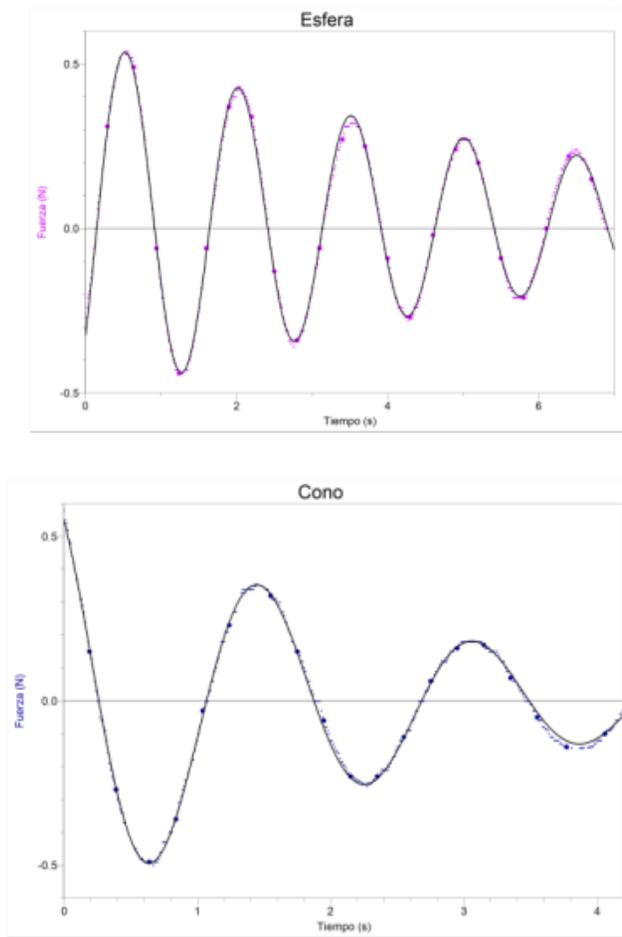


FIGURA 2. Ejemplo de gráficas fuerza tiempo de la esfera y cono respectivamente. La curva es la solución de un sistema oscilatorio con amortiguamiento.

Cuando fueron restados los valores calculados (ajustados) a los experimentales, quedan valores con un comportamiento aleatorio, evidencia de que la fuerza es la misma en ambas direcciones.

IV CONCLUSIONES

Hemos implementado un experimento simple, que analíticamente presenta gran complejidad, como el resolver la ecuación de Laplace, para un cono, o una mancuerna cónica, etc. Por otra parte se fue "testigo" de efectos

mecánicos de difícil predicción, como la fuerza que experimenta un cono, al moverse a través de un fluido; el que la frecuencia de un oscilador (masa-resorte) cambia al oscilar en un fluido, resultados no tratados en los laboratorios y menos en los textos.

REFERENCIAS

- [1] Stokes, G. G., *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* **9**, 8–106 (1851). Bibcode 1851TCaPS.9.8S.
- [2] Jo, J. Ch., *Fluid-Structure Interactions*, *Encyclopedia of Live Support Systems (EOLSS)*, <http://www.eolss.net/Sample-Chapters/C05/E6-165-01-00.pdf>, Visitado en Julio 29, 2012.
- [3] No, H. C. and Kazimi, M. S., *The effect of virtual mass on the characteristics and the numerical stability in two-phase flows*, *Energy Laboratory and Department of Nuclear Engineering*, MIT Energy Laboratory, Report N° MIT-EL 81-023 (1981).
- [4] Dijkhuizen, W., Van den Hengel E.I.V., Deen, N.G., Van Sint Annaland, M., Kuipers, J. A. M., *Numerical investigation of closures for interface forces acting on single air-bubbles in water using volume of fluid and front tracking models*, *Chemical Engineering Science* **60**, 6169–6175 (2005).
- [5] Sankaranarayanan, K., Shan, X., Kevrekidis, I. G. and Sundaresan, S., *Analysis of drag and virtual mass forces in bubbly suspensions using an implicit formulation of the lattice Boltzmann method*, *J. Fluid Mech*, **452**, 61–96 (2002).
- [6] Cate, A. T. and Sundaresan, S., *Analysis of unsteady forces in ordered arrays of monodisperse spheres*, *J. Fluid Mech*. **552**, 257–287 (2006).
- [7] Alembert (Jean Le Rond d') 1717-1783, (2007), Manuscrit auteur, publié dans "Encyclopedia Universalis (1984) 693-694", http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/13/26/26/PDF/Alembert_Jean_Le_Rond_.pdf, Visitado en Mayo 02, 2012.
- [8] Neill, D., Livelybrooks, D. and Donnelly, R. J, *A pendulum experiment on added mass and the principle of equivalence*, *Am. J. Phys.* **75**, 226-229 (2007).
- [9] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Mecánica de Fluidos*, Vol. 6, (Editorial Reverte, Madrid, 1986), pp. 18-22.