Un modelo para la distribución de semáforos en una calle como problema integrador en los cursos introductorios de las carreras de Ingeniería

Mateo Barkovich y Alexandra Carreño

Academia de Física, Universidad Autónoma de la Ciudad de México, Prolongación San Isidro 51, Col. San Lorenzo Tezonco, Del. Iztapalapa, México, D. F.

E-mail: mateobarkovich@gmail.com

(Recibido el 10 de Octubre de 2012; aceptado el 23 de Febrero de 2013)

Resumen

En este artículo se presenta un modelo para representar el movimiento de un automóvil que se mueve en una calle con una distribución de semáforos determinada. Este modelo puede usarse como un problema integrador en las materias introductoria de las carreras de Ciencias e Ingenierías.

Palabras clave: Enseñanza de la física, cinemática, modelación matemática.

Abstract

This page presents a model to represent the movement of a car that moves on the street with a determined distribution of lights. The model can be used in the introduction subject's as an integrator problem for the degrees of Science and Engineering's.

Keywords: Physics education, kinematic, mathematical modeling.

PACS: 01.40.gb, 01.40.Fk, 89.20.Kk. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

A grandes rasgos podemos decir que la función de un Ingeniero es la de resolver problemas y, por lo tanto, su formación debe estar centrada en esta premisa. Las materias del ciclo básico, o tronco común, de las carreras de ingeniería son en su mayoría materias de física y matemáticas. Estas áreas son, en principio, muy adecuadas para promover el desarrollo de las destrezas necesarias para resolver problemas de manera exitosa. Sin embargo, es evidente que la enseñanza tradicional, basada en la resolución de numerosos ejercicios del tipo de los que aparecen en los textos clásicos de estas disciplinas, no brinda ningún aporte significativo en esta dirección.

Un problema real es en general un problema abierto, en el que hay que definirlo y acotarlo, formular hipótesis, elegir y usar modelos apropiados, hacer simplificaciones adecuadas e, incluso, negociar la solución con otros colegas. En la mayoría de los ejercicios de texto solo se espera llegar al resultado numérico, sin ni siquiera inducir al estudiante a hacer un mínimo análisis del mismo, como el de asegurarse por lo menos si el resultado encontrado es razonable o no. Ni qué hablar de pedir una predicción antes de iniciar el cálculo, o de estudiar casos límite para reforzar el entendimiento de la situación. Parecería que la meta es hacer la mayor cantidad de ejercicios posibles con la esperanza de que esto ayude a los estudiantes a enfrentarse con verdaderos problemas en el futuro.

Esta problemática en realidad se encuadra en un contexto más amplio, el de la crisis de la enseñanza de la matemática a nivel universitario donde sigue reinando el enfoque formalista y estructuralista caracterizado por un deductivismo exagerado, un exceso de formalización y generalización, y una presentación de las matemáticas centradas en ellas mismas, sin referencias a otras ciencias [1]. Este enfoque es el que dio origen a la implementación de las llamadas matemáticas modernas en los años setenta. En la actualidad, sin embargo, hay cierto consenso sobre que la descontextualización de los problemas es uno de los grandes obstáculos para la comprensión de los conceptos matemáticos [2]. De hecho, existen varias escuelas centradas en la resolución de problemas abordados desde diferentes puntos de vista y que se están aplicando en la actualidad en diferentes Universidades. Entre estas corrientes están la de resolución de problemas, enseñanza problemática y aprendizaje basado en problemas.

Respecto a la enseñanza de las ciencias, y en especial de la física, en la mayoría de la Universidades de nuestro país la situación es muy similar al caso de la enseñanza de las matemáticas: sigue predominando el modelo tradicional de transmisión de conocimiento, en el cual el estudiante es un actor pasivo de su proceso de aprendizaje y debe asimilar un temario muy dilatado a través de clases magistrales. En este caso también existen muchas estrategias de aprendizaje alternativas, pero lamentablemente aún no existe un consenso universal que de un apoyo unánime a una de ellas. Sin embargo, muchas ya se están aplicando en diferentes instituciones y en diferentes niveles educativos con resultados muy alentadores. Uno de estos enfoques es el de la enseñanza de las ciencias basado en la resolución de problemas [3, 4]. La propuesta consiste en organizar actividades didácticas que sean, fundamentalmente, una colección de problemas. Generar estas unidades didácticas no es tan sencillo. Hay que seleccionadas cuidadosamente y secuenciadas de manera de lograr el aprendizaje significativo [5].

Otra estrategia es del aprendizaje de las ciencias como un proceso de investigación dirigida. En forma muy simplificada, en este sistema se trata de simular la forma en que se construye el conocimiento científico a través del planteamiento de situaciones problemáticas de interés que los estudiantes resuelven a modo de una investigación dirigida por el profesor [6, 7, 8].

En este artículo vamos un presentar un problema concreto, que es un problema real de la ingeniería de tránsito, y que puede usarse como un problema integrador en las materias de primer semestre de las carreras de ingeniería y ciencias (mecánica, cálculo, algebra y programación). Esta estrategia, la de usar problemas/proyectos integradores no es nueva, y hay en la literatura reportes de su aplicación [9]. Como veremos, una característica del modelo que vamos a desarrollar es qué los contenidos que los estudiantes necesitan para abordarlo son muy básicos, incluso diríamos que la mayoría de ellos son de nivel preuniversitarios. Esto es muy adecuado ya que los estudiantes se pueden abocar directamente a la metodología de la modelización matemática sin necesidad de tener que lidiar con los contenidos. Por otro lado, este problema puede considerarse como una introducción a la complejidad de los métodos usados para estudiar el tránsito de una ciudad [10, 11].

II. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Es muy instructivo para los estudiantes presentar el problema en forma de una situación problemática abierta, capaz de generar una resolución acorde con las características del trabajo científico. De esta manera se les brinda a los estudiantes la posibilidad de analizar cualitativamente la situación, estudiar las diferentes variables que intervienen, delimitar el problema a través de elegir hipótesis adecuadas, seleccionar variables, etc.
La situación que se plantea es la siguiente:

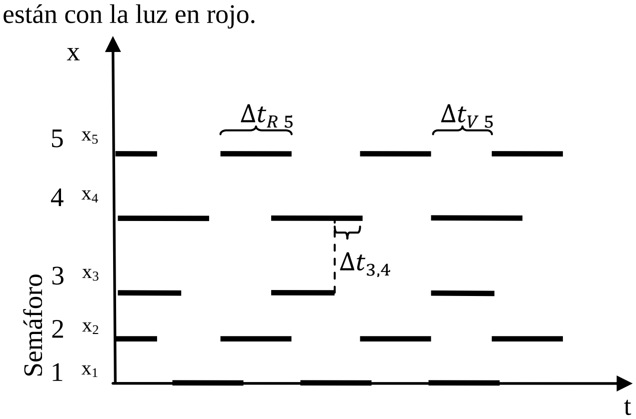
Determina el intervalo de tiempo que tarda un carro que parte de un semáforo al inicio del corredor cuando la luz de este cambia de rojo a verde hasta que atraviesa otro semáforo indicado como final. El carro se mueve a lo largo de una única calle y durante su trayecto atraviesa varios semáforos.

Antes de abordar la solución del problema planteado es importante detenerse un momento para analizar con los estudiantes la utilidad que tendría el estudio de este modelo. Como es de esperarse, haremos más adelante la suposición de que el carro se mueve a velocidad constante. Al ser un solo carro que se mueve a velocidad constante, es obvio que este modelo no es adecuado para estudiar el flujo vehicular de una avenida, problema muy complejo en el que intervienen numerosos factores y que es estudiado por la Ingeniería en Transporte. Nuestro tratamiento es mucho más sencillo y puede aplicarse para estudiar el movimiento de ciertos medios de transportes colectivos que existen en varias ciudades donde el mismo se mueve en un carril exclusivo de la calle.

Las suposiciones que haremos son las siguientes:
a) El carro se mueve a velocidad constante v durante todo el trayecto.
b) A tiempo inicial $t_0 = 0$ el carro parte de la posición inicial $x_0 = 0$ en el momento en que el semáforo inicial da la luz verde.
c) Se desprecia los tiempos de reacción del conductor. Es decir, el carro parte en el mismo instante en el que el semáforo da la luz verde.
d) No vamos a considerar la luz amarilla.

Por otro lado, y tomando como N el número total de semáforos, las variables que describen el problema son:
i) Las posiciones x_i , con $i = 1, 2, \dots N$, de los semáforos. Si tomamos el primer semáforos en el origen de coordenadas ($x_1 = 0$), entonces las posiciones del resto de los semáforos están referidas a este punto y tenemos $N - 1$ variables independientes.
ii) El intervalo de tiempo en que el semáforo ubicado en la posición x_i está en rojo lo indicamos como $\Delta t_{R\,i}$, y el que está en verde $\Delta t_{V\,i}$. Estos datos no son requeridos para el semáforo 1. Solo importa que el semáforo 1 cambie rojo a verde en el instante $t = 0$.
iii) Indicamos por $\Delta t_{i,i+1}$ al intervalo de tiempo que trascurre desde que el semáforo i cambia de rojo a verde hasta que lo hace el semáforo $i + 1$. En este caso el valor de i cumple la condición $i < N$.

Para resolver el problema es de gran utilidad realizar una gráfica que represente la evolución de las luces de los semáforos a medida que transcurre el tiempo. Esta gráfica, que en adelante la llamaremos *mapa de los semáforos*, tiene la forma que se muestra en la Fig.1. Los segmentos llenos representan el intervalo de tiempo en que los semáforos están con la luz en rojo.



FIGU RA 1. Representación de la evolución de los colores de las luces de los semáforos de una calle (mapa de los semáforos) en un diagrama de posición vs tiempo.

Esta es una gráfica de posición x en función del tiempo t. Por esta razón, en este mismo sistema de coordenadas se puede representar el movimiento del carro. Al moverse con velocidad constante, la gráfica que representa su movimiento es una recta o una poligonal de segmentos horizontales y oblicuos (con la misma pendiente) debido a que al llegar el automóvil a un semáforo con luz roja debe detenerse y esperar la luz verde para reiniciar su movimiento. Una gráfica característica del movimiento de un carro se muestra en la Fig. 2.

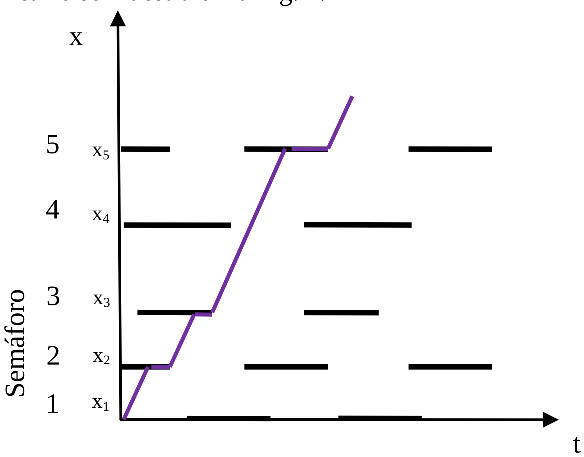


FIGURA 2. Representación del movimiento de un carro que se mueve a velocidad constante en un mapa de semáforos. El carro debe detenerse en los semáforos 2, 3 y 5 ya que en ellos la luz está en rojo.

III. UN CASO PARTICULAR

En esta sección vamos a analizar un caso particular. Los parámetros que lo definen son: $N = 6,\ x_1 = 0, x_2 = 0.5\ km, x_3 = 1\ km, x_4 = 1.5\ km, x_5 = 2, x_6 = 2.5$.
Además, para cualquier i tomamos: $\Delta t_{R\,i} = \Delta t_{V\,i} = 0.5\ min$ y $\Delta t_{i,i+1} = 0.25\ min$ (en último caso $i < 6$). Esta configuración es sencilla y simétrica, con los semáforos separados a la misma distancia. El mapa de los semáforos que representa esta situación se muestra en la Fig. 3.

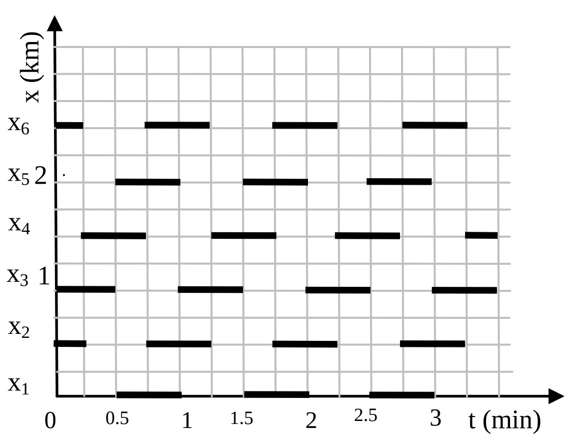


FIGURA 3. Mapa de semáforos para el caso particular $N = 6$, $x_1 = 0\ , x_2 = 0.5\ km, x_3 = 1\ km, x_4 = 1.5\ km, x_5 = 2\ km$ y $x_6 = 2.5\ km$.

Para trabajar con los estudiantes, la situación se puede abordar desde cuatro niveles de dificultad diferentes. Estos niveles son:

1) Preguntas directas, cuyas respuestas se obtienen directamente de la gráfica. Por ejemplo:
a) Si el carro viaja a 1 km/min ¿cuánto tiempo tarda en atravesar el semáforo 6? (No confundir, es atravesar, no es llegar).
b) ¿Y si viaja a 2 km/min? ¿y a 0.5 km/min?
c) ¿A qué velocidad, o intervalo de velocidad, debe viajar el carro para qué no se detenga en ningún semáforo?
d) Encuentra para qué valor de velocidad el carro se detiene solo en dos semáforos.

2) Encontrar la ecuación del tiempo en el que el carro atraviesa el semáforo 6 en función de la velocidad del mismo. Esta función es discontinua y tiene infinitas partes.
Para encontrar la forma de esta función es conveniente empezar por velocidades de módulo elevado e ir disminuyendo el mismo. De la gráfica de la Fig. 4 es fácil ver que si $v_1 < v < \infty$, donde v_1 es la velocidad del carro que se mueve de acuerdo a la recta indicada por 1, entonces el tiempo que demora en atravesar el semáforo 6 es $\frac{5}{4} min$. En otras palabras el carro se detendrá en todos los semáforos y finalmente atravesará el semáforo 6 en $t = \frac{5}{4} min$. La velocidad $v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1/2}{1/4} \frac{km}{min} = 2\ \frac{km}{min}$.

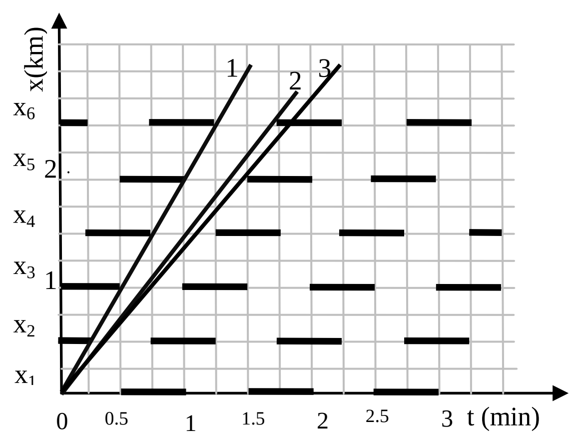


FIGURA 4. Representación de los primeros valores de las velocidades que determinan los intervalos de la función analítica del tiempo que tarda un carro en atravesar el semáforo 6 en función de su velocidad.

Si ahora $v_2 < v < v_1$, donde v_2 es la pendiente de la recta 2 ($v_2 = \frac{10}{7} km/min$) entonces el carro se moverá del semáforo 1 hasta el 6 sin detenerse en ningún semáforo intermedio. Por lo tanto, en este caso $t = \frac{5}{2\,V} km$.

Continuando, si $v_3 < v < v_2$, con $v_3 = \frac{4}{3} km/min$, entonces el carro atravesará todos los semáforos en verde salvo el semáforo 6. En este se detendrá y lo atravesará en $t =\ 9/4\ min$.

Del mismo modo se puede continuar con todos los trozos sucesivos de la función. El resultado es:

$$t=\begin{cases} \vdots & & \\ 3+\frac{1}{2v} & si & \frac{2}{3}<v\leq 1, \\ \frac{7}{4}+\frac{1}{v} & si & 1<v\leq\frac{6}{5}, \\ 2+\frac{1}{2v} & si & \frac{6}{5}<v\leq\frac{4}{3}, \\ \frac{9}{4} & si & \frac{4}{3}<v\leq\frac{10}{7}, \\ \frac{5}{2v} & si & \frac{10}{7}<v\leq 2, \\ \frac{5}{4} & si & 2<v<\infty, \end{cases}$$

con t en min cuando v está en km/min.

Este es un ejercicio muy interesante que los estudiantes pueden hacer bajo la guía de su profesor. La gráfica de la solución se muestra en la Fig. 5.

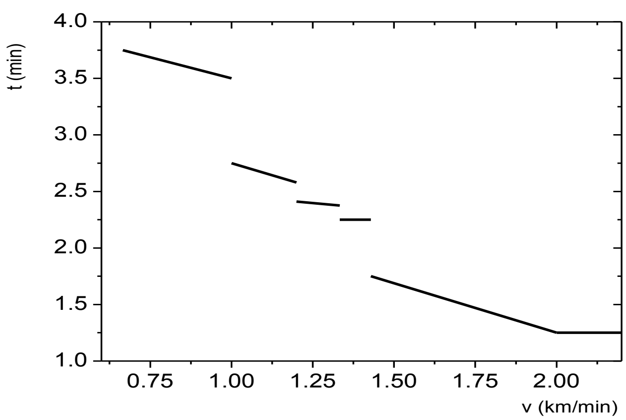


FIGURA 5. Intervalo de tiempo que tarda un carro en atravesar el semáforo 6 en función de su velocidad.

3) Programa de computadora. Otra alternativa para resolver el problema es realizar un programa en la computadora en el lenguaje que los estudiantes estudien en su curso de programación. En el punto anterior encontramos la función analítica que resuelve el problema, o por lo menos una parte de la solución. Sin embargo, en el caso de que el mapa de los semáforos sea más complicado o que se requieran más partes de la solución que la encontrada, la solución más viables es sin duda la de contar con un programa de computadora. El programa hay que hacerlo con cuidado (no es para principiantes) pero los estudiantes lo pueden desarrollar bajo la supervisión de su profesor de computación.

Los autores realizamos el código en el programa *Mathematica* y está disponible para quienes lo soliciten a nuestros correos electrónicos.

4) Situaciones problemáticas que requieren una extensión del problema original. Este modelo presenta grandes posibilidades para aplicarse a otras situaciones derivadas. Muchas de ellas pueden provenir de preguntas que se puedan formular los propios estudiantes. Algunos pocos ejemplos son:

a) Modificar los parámetros (posición de los semáforos, intervalos de tiempos de las luces de los mismos, etc) respecto del caso presentado.

b) Realizar el mapa de semáforos de una calle (o tramo de la misma) de la ciudad.

c) Si suponemos, como se dijo antes, que este modelo se aplica a un sistema de trasporte que circula en un carril único, se podría hacer un diseño del mapa de semáforo para que el transporte no se detenga en ningún semáforo si se conoce la velocidad promedio del mismo. Incluso se pueden incorporar las estaciones en las cuales suben y bajan los pasajeros.

d) Otro problema interesante es el diseño de un mapa de semáforo considerando una calle de doble sentido si se espera que la velocidad para que atraviesen todos los semáforos en verde sea la misma en ambas direcciones.

IV. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos un modelo para estudiar el movimiento de un carro en una calle con semáforos. La base de este modelo es la construcción de un mapa de los semáforos que representa la evolución de las luces de los mismos en función del tiempo. En esta gráfica también se puede representar el movimiento del automóvil lo cual es muy conveniente ya que se puede visualizar de una manera muy sencilla el momento en el que debe detenerse en la luz roja del semáforo y reiniciar su movimiento cuando cambia a verde.

El número de variables involucradas en el problema es grande y la construcción del mapa y la representación del movimiento del carro en el mismo representa un reto importante para los estudiantes. Por otro lado, el nivel de los contenidos mínimos para entenderlo es muy básico.

Para encontrar la solución analítica del problema también es de vital ayuda el uso del mapa de los semáforos. La solución es una función definida en infinitos trozos y encontrar la forma de la misma se dificulta a medida que la velocidad del carro tiende a cero o cuando el número de semáforo es muy grande. Por esta razón es muy conveniente encontrar la solución usando un programa de computadora, mismo que los estudiantes pueden hacer con ayuda de un docente del área.

En este artículo desarrollamos una solución particular del problema, pero el mismo puede extenderse y ampliarse a diferentes casos. Este es un modelo cuya área de aplicación es muy amplia y no queda solo limitado a lo aquí expuesto. Sino, por el contrario, queda abierto a la imaginación del profesor y principalmente de los estudiantes.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Miriam Téllez por sus valiosas y acertadas sugerencias.

REFERENCIAS

[1] Núñez Espallargas, J. M. y Font, Moll V., *Aspectos ideológicos en la contextualización de las matemáticas: una aproximación histórica*, Revista de Educación **306**, 293-314 (1995).

[2] Gil, D., Furió, C. y Mortínez Torregrosa, J., *La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria*, (ICE/Horsoi, Barcelona, 1991).

[3] Campanario, J. M. y Moya, A., *¿Cómo enseñar ciencias? Principales tendencias y propuestas*, Enseñanza de las ciencias **17**, 179-192 (1999).

[4] Boud, D. y Feletti, G., *The challenge of problem based learning*, (KoganPage, Londres, 1992).

[5] Lopes, B. y Costa, N., *Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas*, Enseñanza de las Ciencias **14**, 45-61 (1996).

[6] Gil, D., *Contribución de la historia y de la filosofía de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza-aprendizaje como investigación*, Enseñanza de las Ciencias **11**, 197-212 (1993).

[7] Gil, D., *Relación entre el conocimiento escolar y el conocimiento científico*, Investigación en la Escuela **23**, 17-32 (1994).

[8] Gil, D., Martínez-Torregrosa, J. y Senent, F., *El fracaso en la resolución de problemas: una investigación orientada por nuevos supuestos*, Enseñanza de las Ciencias **6**, 131-146 (1988).

[9] Sánchez-Pérez, E. A., García Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez, J. V., *Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas*, Enseñanza de las ciencias **17**, 119-129 (1999).

[10] Cal y Mayol, R. y Cárdenas J., *Ingeniería de Tránsito*, (Alfaomega, México, 2007).

[11] May, A., *Traffic Flow Fundamentals*, (Prentice Hall, EUA, 1990).