

# Puntualizaciones en las aplicaciones didácticas de la ley de Stokes



**Ricardo Fernández Cruz, José Luis Hernández Pérez,  
Jaime Solá de los Santos**

*Grupo Heurema. Departamento de Física y Química, I. E. S. Cervantes,  
C/ Embajadores 70, C.P. 28012, Madrid, España.*

**E-mail:** ridafercruz@gmail.com

(Recibido el 2 de Enero de 2014, aceptado el 30 de Marzo de 2014)

## Resumen

Los libros de Física recomiendan utilizar bolas de diámetros pequeños y números de Reynolds muy bajos, cuando se aplica la ley de Stokes a la medida de la viscosidad de líquidos, especialmente la glicerina, pero no cuantifican ni el Reynolds ni el diámetro, de modo que utilizando varias bolas de diámetros pequeños, sorprendentemente, se obtienen valores diferentes de la viscosidad, aun manteniendo constante la temperatura. En este artículo se hace un estudio que permite cuantificar los diámetros de las bolas y los valores del Reynolds, por debajo de los cuales se debe trabajar para obtener un valor de la viscosidad constante.

**Palabras clave:** Ley de Stokes, Viscosidad, Fotografía digital.

## Abstract

Physics books recommend employing small diameter balls and very low Reynolds numbers, when Stokes' Law is applied for measuring liquid viscosity, especially that of glycerine. However, neither Reynolds nor ball diameters are quantified, so that if several small diameter balls are employed, surprisingly, different viscosity values are obtained, even under constant temperature. In this study we performed experiments that enabled us quantify the actual ball diameters and Reynolds values, under which work should be carried out to obtain a constant viscosity value.

**Keywords:** Stokes law, Viscosity, Digital photography.

**PACS:** 01.40.Fk, 47.15.G, 07.05.Fb, 07.68.+m

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Una práctica frecuente en los primeros cursos de Facultades y Escuelas Técnicas, es aplicar la ley de Stokes para estudiar fácilmente el movimiento de sólidos (esferas) en un medio resistente. Generalmente se utiliza glicerina y esferas de diámetro superior a 1 mm; se mide su velocidad límite, el número de Reynolds y como aplicación, el coeficiente de viscosidad del fluido.

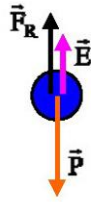
Los autores hemos verificado, que utilizando distintas esferas de radio superior al milímetro, sí que se alcanza rápidamente la velocidad límite, sin embargo, se obtienen resultados que conducen a valores distintos del coeficiente de viscosidad de la glicerina, aun teniendo gran cuidado en mantener la temperatura constante. En otras palabras, alcanzar la velocidad límite es una condición necesaria pero no suficiente. No obstante, cuando se emplean esferas de radios inferiores al milímetro, los valores del coeficiente de viscosidad se mantienen muy aproximados dentro de los errores experimentales, lo que parece indicar que la teoría de Stokes funciona bien para esferas de radios muy pequeños ( $r \leq 1$  mm) y no tan bien para esferas de radios superiores.

## II. FUNDAMENTO TEÓRICO

Cuando un sólido se desplaza verticalmente y en sentido descendente en el seno de un fluido sobre él actúan las siguientes fuerzas: El peso del sólido  $\vec{P}$ , en vertical y sentido hacia abajo, la fuerza de empuje  $\vec{E}$ , vertical y sentido hacia arriba y una fuerza resistente al movimiento  $\vec{F}_R$ , vertical y hacia arriba, Fig.1. Esta fuerza dependerá de la naturaleza del fluido, de la sección transversal, de la forma del sólido y directamente de una potencia de la velocidad  $v$  con que se desplaza. Para el caso de sólidos esféricos dicha fuerza podrá expresarse como:

$$F_R = -C_D r^2 \eta v . \quad (1)$$

Donde  $r$  es el radio de la esfera,  $C_D$  un coeficiente de rozamiento o de arrastre y  $\eta$  el coeficiente de viscosidad del fluido.



**FIGURA 1.** Fuerzas sobre una esfera en movimiento en el seno de un fluido.

Analizando el balance de las fuerzas, si  $|\vec{P}| > |\vec{E} + \vec{F}_R|$  el movimiento es acelerado, con aceleración no constante y en sentido vertical descendente. Teniendo en cuenta que según la ecuación (1)  $\vec{F}_R$  aumenta con la velocidad, resulta que un movimiento inicialmente acelerado, termina por convertirse en otro uniforme, cuando

$$|\vec{P}| = |\vec{E} + \vec{F}_R|. \quad (2)$$

En este caso, la velocidad constante alcanzada, recibe el nombre de *velocidad límite*  $v_L$ .

Se comprueba que si se emplean bolas de acero de masa  $m$  y densidad  $\rho_B$  y glicerina de densidad  $\rho_G$  el movimiento uniforme a la velocidad límite, según la teoría se alcanza a tiempo infinito, pero en la práctica se alcanza en seguida como puede verse en la fotografía estroboscópica [1] de la Figura 2.



**FIGURA 2.** Fotografía estroboscópica de una esfera de radio 4 mm descendiendo en glicerina. Se ha tomado en intervalos de tiempo de 0,104 s. La distancia entre los índices de la regla es 200 mm.

En esta ocasión el intervalo temporal entre cada dos posiciones consecutivas de la bola, es  $\Delta t = 0,104$  s y la distancia entre los índices de la regla es 200 mm. Intencionadamente, hemos empleado una bola de radio 4 mm, mayor que el de las esferas utilizadas posteriormente para medir la viscosidad, para comprobar realizando medidas cuantitativas en la foto, que la velocidad límite se

establece muy pronto, y así nos aseguramos que con esferas más pequeñas, la velocidad límite se alcanzará rápidamente. Cuando la bola se mueve con la velocidad límite, el problema físico es equivalente al del movimiento de un fluido alrededor de un obstáculo estático, cuando la velocidad del fluido en el infinito es uniforme e igual a  $v_L$ . Suponiendo el flujo incomprensible, las ecuaciones de la Física de Fluidos para este problema dependen de un único parámetro adimensional, que se llama número de Reynolds.

$$R_E = \frac{2r\rho_G v_L}{\eta_G}. \quad (3)$$

Donde  $\eta_G$  es la viscosidad de la glicerina y  $\rho_G$  su densidad. Stokes demostró en 1851 que en el límite  $R_E \rightarrow 0$  (equivalente a despreciar las fuerzas de inercia frente a las fuerzas viscosas) y para el caso de una esfera, existe una solución exacta (y laminar) para *el campo de velocidades del fluido*, a partir de la cual se puede obtener una expresión explícita para el coeficiente de arrastre.

$$C_D = 6\pi/r. \quad (4)$$

De tal forma que la fuerza de resistencia es  $F_R = -6\pi r \eta v_L$ . Desde el trabajo pionero de Stokes, el estudio del movimiento de un fluido viscoso en torno a un sólido se ha convertido en uno de los problemas fundamentales de la Física de Fluidos y de la Hidrodinámica. Por supuesto esta fuera de lugar en este artículo, de intención meramente didáctica extenderse más en este asunto. Tan solo mencionaremos que obtener expresiones teóricas más allá del límite de Stokes un campo que, a pesar de más de 150 años de avances, todavía no está cerrado [2]. Lo mismo ocurre, incluso tras los bien conocidos estudios de von Karman, con el fenómeno de la inestabilización del flujo por detrás del sólido (aparición de estelas y de turbulencias) que sucede a valores del  $R_E$  más altos de los que manejamos aquí.

Una vez alcanza la velocidad límite, combinando las ecuaciones (1), (2) y (4) se obtiene:

$$\begin{aligned} mg &= V\rho_G g + 6\pi r \eta v_L, \\ \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_B g &= \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_G g + 6\pi r \eta v_L, \\ \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_B - \rho_G) &= 6\pi r \eta v_L, \\ \eta &= \frac{2}{9}g(\rho_B - \rho_G) \frac{r^2}{v_L}. \end{aligned} \quad (5)$$

Existen diversos libros de Física Experimental [3, 4, 5, 6, 7, 8], en los que se incluye una práctica para determinar la viscosidad de la glicerina, midiendo las variables que contiene la ecuación (5). Si se utiliza dicha ecuación, es preciso lograr que la esfera alcance la velocidad límite y medirla, junto con las dos densidades y el radio de las esferas.

En la mayoría de los textos se sugiere, solamente de forma cualitativa, que las esferas utilizadas sean de radio pequeño y algunos ponen otra condición y es que el número de Reynolds sea mucho menor que 1,  $Re \ll 1$ , de acuerdo con el carácter asintótico de la fórmula de Stokes, Ec. (4). Finalmente, dos textos de los citados [3, 6] indican que la velocidad límite medida experimentalmente debe corregirse, mediante la ecuación conocida con el nombre de Ladenburg, debido a que la esfera se mueve en un medio limitado por paredes y no en un fluido de extensión infinita.

$$v_{\text{Corregida}} = v_L \left( 1 + k \frac{r}{R} \right) = v_L \left( 1 + 2,4 \frac{r}{R} \right). \quad (6)$$

En la que R es el radio del cilindro donde se ha determinado la velocidad límite y k una constante. No existe unanimidad en el coeficiente k, algunos autores indican el valor 2,1 como la referencia [9]. La ecuación (5) puede escribirse:

$$v_L = \frac{2g(\rho_B - \rho_G)}{9\eta} r^2. \quad (7)$$

Resultando que si la ecuación es válida para esferas que alcancen la velocidad límite, al representar  $v_L$  frente a  $r^2$ , a una cierta temperatura, se debe obtener una línea recta. Para verificarlo es necesario emplear varias esferas de distinto radio, pero de la misma densidad  $\rho_B$ .

Comenzamos el experimento con esferas de radio  $r \geq 4$  mm y aunque se alcanzaba enseguida la velocidad límite, al representar  $v_L = f(r^2)$  no se obtenía la recta esperada, o en otras palabras, el valor obtenido de la viscosidad parecía depender del diámetro de la esfera. Decidimos entonces trabajar con esferas de radios  $r \leq 1,50$  mm, buscando a partir de qué valores de r los resultados de la viscosidad se mantenían constantes dentro de los errores experimentales.

### III. TÉCNICA DE MEDIDA

#### A. Materiales y dispositivo

Se utilizaron los instrumentos indicados en la Figura 3: (1) Sonda de temperatura, (2) Termómetro digital, (3) Reloj digital, (4) Probeta.

Otros elementos que no están en la imagen: Electroimán (situado encima de la probeta) con interruptor y fuente de c.c. Cámara fotográfica digital conectada a un ordenador. Dos focos de iluminación con paraguas reflectores. Barras y nueces de montaje. Fondo negro.

Esferas de acero de diferentes radios, en mm: 0,50 ; 0,79 ; 1,00 ; 1,25 ; 1,50.

Las esferas de acero se venden, a precio muy asequible, en tiendas de rodamientos. Se suministran con el valor de sus diámetros, los comprobamos empleando un micrómetro y los valores suministrados por el fabricante son muy fiables.

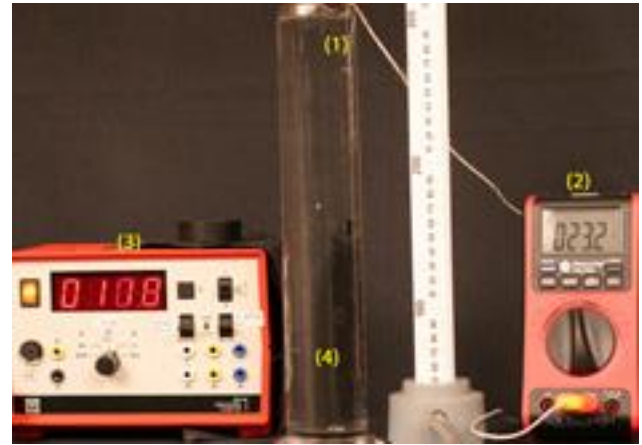


FIGURA 3. Montaje experimental con la sonda de temperatura (1) en la probeta (4), conectada al termómetro digital (2). Un reloj digital (3) y la regla para determinar las posiciones de la bola, sobre la propia fotografía. Obsérvese también a la bola descendiendo.

#### B. Determinación de la densidad de las esferas

Para determinar la densidad de las bolas se han medido, para diversas esferas sus diámetros, con un micrómetro y sus masas con una balanza electrónica, obteniéndose como valor medio de la misma:

$$\rho_B = (7,77 \pm 0,09) \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

#### C. Determinación de la densidad de la glicerina

La glicerina utilizada es un producto comercial designado como “glicerina bidestilada”. Su densidad se determinó midiendo los volúmenes de líquido con una probeta y pesando cada contenido en una balanza electrónica. La temperatura de la glicerina estaba comprendida entre 23 y 24°C.

El valor medio obtenido para la densidad de la glicerina:

$$\rho_G = (1,26 \pm 0,01) \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

#### D. Determinación de la velocidad límite y de la temperatura

Para determinar la velocidad límite se siguieron los siguientes pasos:

- 1) Se coloca la bola en el electroimán cerrando el circuito.
- 2) Se abre el interruptor del electroimán, con lo que la bola cae en vertical, al mismo tiempo que se pone en funcionamiento el reloj digital.
- 3) Se fotografía la caída de la bola. Dado que la velocidad de caída es muy lenta se obtiene un conjunto de varias fotografías con las posiciones de la bola, en distintos instantes de tiempo, siendo una la de la Fig.3. En cada

Ricardo Fernández Cruz, José Luis Hernández Pérez, Jaime Solá de los Santos  
 fotografía quedan registradas: la temperatura, el instante de tiempo y la posición de la bola.

4) Con cada bola se han realizado tres series de medidas, para confirmar la validez de los datos experimentales. Las bolas de radio inferior a 1 mm a veces quedan retenidas en el electroimán debido al magnetismo remanente, por ello fue preciso soltarlas con la mano. La bola de radio 0,50 mm permanecía sobre la superficie de la glicerina sin hundirse, debido a la tensión superficial y a su pequeño peso, por lo que fue necesario empujarla dentro de la glicerina con un objeto ligero, para que empezara a descender.

La viscosidad de la glicerina depende de forma notable de la temperatura. Hemos realizado todos los experimentos manteniendo su temperatura dentro de un intervalo de  $23,2 \pm 0,1^\circ\text{C}$ .

El trabajo se efectuó en un laboratorio con calefacción y el control de la temperatura se hacía con un ventilador dirigido directamente a la probeta que contenía la glicerina y abriendo y cerrando las ventanas del laboratorio, cuando era necesario. Esto nos exigió dosis de paciencia para mantener constante la temperatura adecuada.

La posición se obtiene directamente en la pantalla del ordenador. En cada fotografía se traza una línea recta que va desde la bola a la regla. En el ordenador se amplía al máximo la fotografía y esto nos permite leer la posición con una incertidumbre de  $\pm 1\text{ mm}$  (Figura 4).



FIGURA 4. Trazando con el ordenador una línea horizontal, desde la bola a la regla, medimos su posición en cada instante. El cable que aparece en vertical, a la derecha dentro de la probeta, es la sonda de temperatura introducida en la glicerina.

## IV. RESULTADOS

### A. Representaciones gráficas

Para cada esfera se representa la posición  $y$ , frente al tiempo  $t$ . La pendiente de la recta nos da la velocidad límite experimental. Se muestran los resultados para las distintas esferas, en las Figuras 5 y 6.

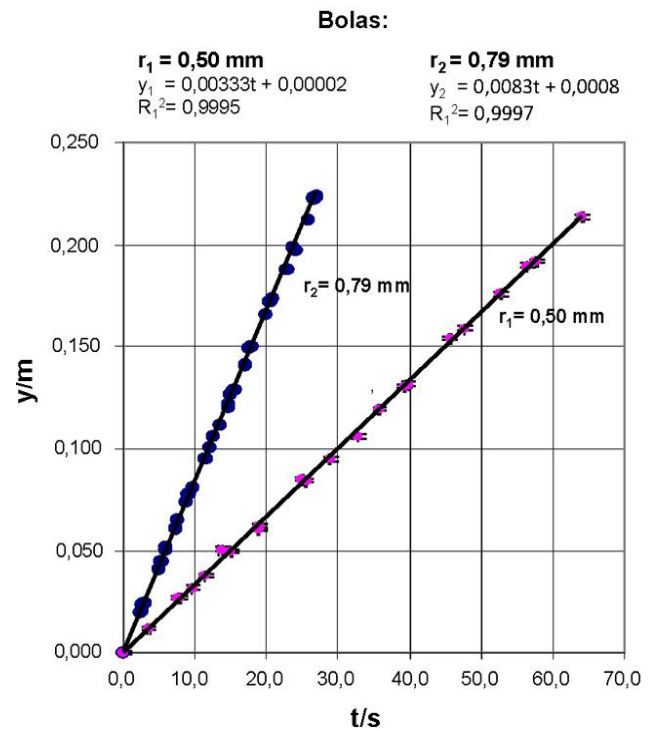


FIGURA 5. Gráfica posición-tiempo de las bolas de radios: 0,50 mm y 0,79 mm.

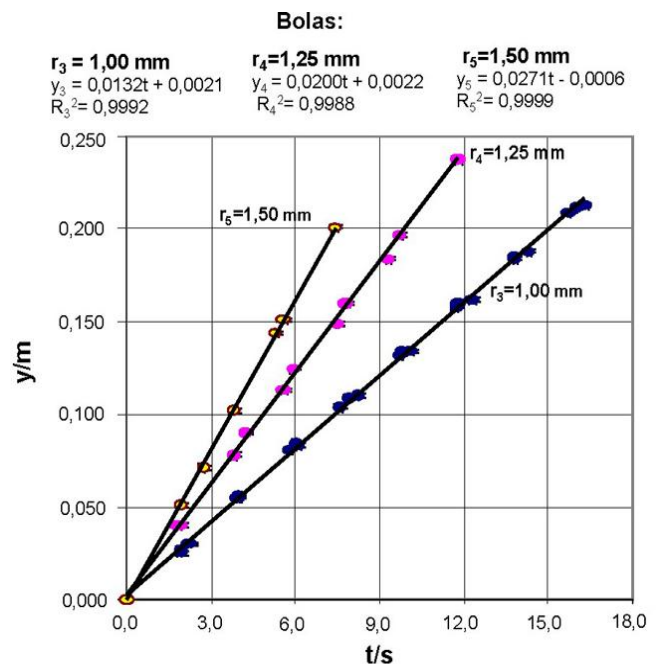


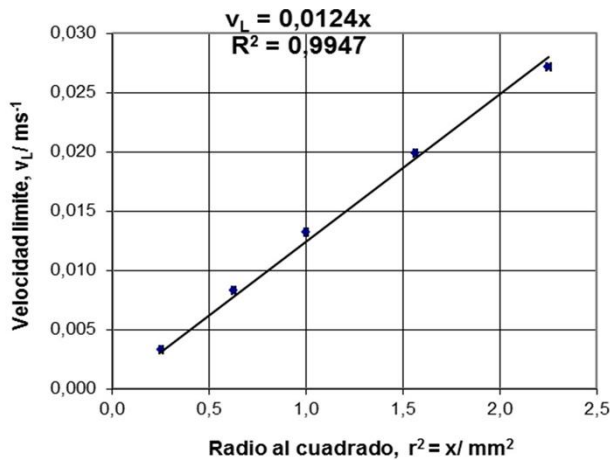
FIGURA 6. Gráfica posición-tiempo de las bolas de radios: 1,00, 1,25 y 1,50 mm.

Todos los resultados experimentales correspondientes a las velocidades límites, en función de los diámetros de las bolas se muestran en la Tabla I.

**TABLA I.** Velocidades límite.

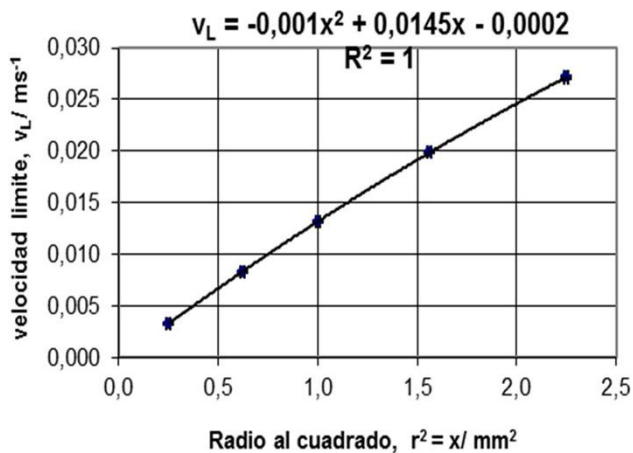
Diámetro de las bolas/mm	Velocidad límite $v_L/\text{ms}^{-1}$
$1,00 \pm 0,01$	$(3,33 \pm 0,01) \cdot 10^{-3}$
$1,58 \pm 0,01$	$(8,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
$2,00 \pm 0,01$	$(13,2 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
$2,50 \pm 0,01$	$(20,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$
$3,00 \pm 0,01$	$(27,1 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$

Representamos la velocidad límite frente al cuadrado del radio, ajustando por una recta, como cabe esperar de acuerdo con la ecuación (7), deducida de la ley de Stokes, véase la Figura 7.



**FIGURA 7.** Representación de la velocidad límite frente al cuadrado del radio, ajustando por una recta.

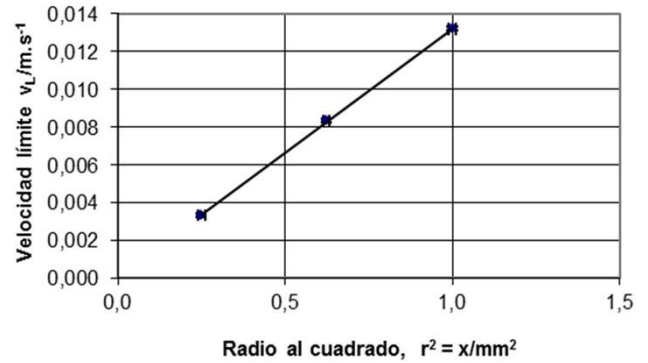
Los puntos experimentales se adaptan aproximadamente a una recta, sin embargo, el coeficiente de correlación está algo alejado de la unidad. Probamos a ajustar los datos anteriores por una curva de segundo grado y el valor de  $R^2$  se hace la unidad, Figura 8.



**FIGURA 8.** Representación de la velocidad límite frente al cuadrado del radio, ajustando por una parábola.

*Puntualizaciones en las aplicaciones didácticas de la ley de Stokes*  
Representamos ahora solamente, los puntos correspondientes a las tres esferas de radios más pequeños y los puntos experimentales se ajustan a una recta, con un coeficiente de correlación  $R^2$  que es prácticamente la unidad (Figura 9).

Bolas de radios/mm: 0,50; 0,79; 1,00  $v_L = 0,0132x + 7E-0$   
 $R^2 = 0,9999$



**FIGURA 9.** Representación de la velocidad límite frente al cuadrado del radio para las tres bolas de menor radio.

Los resultados parecen indicar que la ley de Stokes funciona bien para radios de las esferas inferiores o iguales a 1 mm.

## B. Determinación de la viscosidad y del número de Reynolds

Incertidumbre en la diferencia de densidades:

$$\rho_B - \rho_G = (7,77 \pm 0,09) \cdot 10^3 - (1,26 \pm 0,01) \cdot 10^3 = (6,5 \pm 0,1) 10^3$$

$$\varepsilon_r = \frac{0,1}{6,5} 100\% = 1,5\%$$

Empleando la ecuación (5) se determina la viscosidad de la glicerina con cada bola y el número de Reynolds con la ecuación (3); mostrándose los resultados en la Tabla II.

**TABLA II.** Viscosidad de la glicerina según el radio de la bola y el número de Reynolds.

Diámetro bolas/mm	$v_L/10^{-3}\text{ms}^{-1}$	Viscosidad/ $\eta/\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$	Número de Reynolds
$1,00 \pm 0,01$	$3,33 \pm 0,01$	$1,06 \pm 0,04$	$(4,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$
$1,58 \pm 0,01$	$8,3 \pm 0,1$	$1,06 \pm 0,04$	$(16 \pm 1) \cdot 10^{-3}$
$2,00 \pm 0,01$	$13,2 \pm 0,1$	$1,07 \pm 0,03$	$(31 \pm 2) \cdot 10^{-3}$
$2,50 \pm 0,01$	$20,0 \pm 0,1$	$1,11 \pm 0,04$	$(57 \pm 3) \cdot 10^{-3}$
$3,00 \pm 0,01$	$27,1 \pm 0,1$	$1,18 \pm 0,04$	$(87 \pm 4) \cdot 10^{-3}$

Se deduce de la Tabla II, que cuanto menor es el número de Reynolds, los valores de la viscosidad son más similares dentro de los errores experimentales, sin embargo, para Reynolds mayores se empiezan a dispersar. El resultado está vinculado al hecho de que la fórmula de Stokes es una aproximación válida, en el límite  $R_E \rightarrow 0$ .

Finalmente se ha representado la viscosidad frente al radio, confirmándose lo visto acerca del tamaño adecuado de las esferas, para lograr medidas coherentes de ésta magnitud (Figura 10).

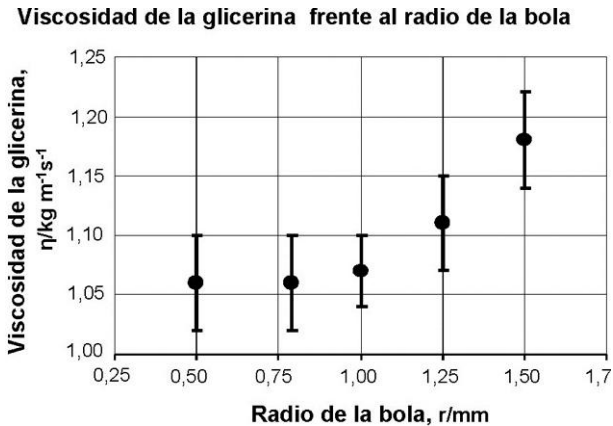


FIGURA 10. Valores de la viscosidad frente al radio.

Se observa, que aunque la viscosidad es una a cada temperatura, sin embargo su determinación experimental parece estar influenciada por el radio de la bola, exceptuando las de radios  $\leq 1$  mm. Los resultados muestran que hay que elegir el radio correcto, para hacer adecuadamente el experimento.

### C. Corrección de Ladenburg

La corrección de Ladenburg (6) afecta en mayor cuantía a las esferas de radio mayor y tiende a proporcionar valores de la viscosidad, (como se observa en la Tabla III), que se acerquen a los valores obtenidos con las esferas de menor radio. En dicha Tabla, se dan los valores de las viscosidades corregidas. ( $V.C./kg.m^{-1}.s^{-1}$ ) para cada diámetro de diversas esferas. Observamos que, cuando se aplica la ecuación de Ladenburg desaparece la aparente (y no física) dependencia de la viscosidad del líquido con el radio de la esfera que se emplea para medirla.

TABLA III. Viscosidades con la corrección de Ladenburg.

D/mm	1,00	1,58	2,00	2,50	3,00
V. C.	1,02±0,04	1,00±0,04	0,99 ±0,03	1,01±0,02	1,04±0,03

## V. CONCLUSIONES

- Empleando glicerina, la velocidad límite se alcanza rápidamente hasta con bolas de 4 mm de diámetro.
- El suceso de alcanzar la velocidad límite, no es una condición suficiente para obtener un valor correcto de la viscosidad a una cierta temperatura.
- Los valores que parecen más fiables de la viscosidad se obtienen con bolas de radios muy pequeños ( $\leq 1$  mm) a las que corresponden velocidades límites muy bajas y también números de Reynolds menores que 0,03.
- A la vista de la Tabla.III debe hacerse siempre la corrección de Ladenburg, para obtener unos valores concordantes de la viscosidad.
- Para medir la viscosidad de la glicerina, hay que procurar que la temperatura se mantenga constante y nunca con variaciones superiores a  $\pm 0,1$  °C.

## REFERENCIAS

- [1] Hernández Pérez, J. L., Solá de los Santos, J., y Fernández Cruz, R., *Caída libre. Realidad y modelos*, Rev. Española de Física **20**, 39-42 (2006).
- [2] Veysey, J. y Goldenfeld, N., *Simple viscous flow: From boundary layers to the Renormalization Group*, Reviews of Modern Physics **79**, 883-927 (2007).
- [3] Worsnop, B. L. y Flint H. T., *Curso Superior de Física Práctica*, Tomo I, (Eudeba, Editorial Universitaria de Buenos Aires, 1960), p. 171.
- [4] Daish, C. B. y Feunder, D. H., *Experimental Physics*, (2ª Edition), (The English Universities Press, London, 1970), p. 71.
- [5] Schaefer, C., L. y Bergmann, Ll., *Prácticas Fundamentales de Física*, (Traducción de la segunda edición alemana por el Prof. Julio Palacios) (Editorial Labor S.A., Barcelona, 1946), p. 85.
- [6] Tyler, F., *A Laboratory Manual of Physics* (4ª edition), (Edward Arnold (publishers), London, 1974), p. 52.
- [7] Nelkon, M. y Ogborn, J. M., *Advanced Level Practical Physics* (4ª Edition), (Heinemann Educational Books, London, 1978), p. 34.
- [8] Hackey, S. W. y Mills, J. K., *Physics by Experiment*, (Wheaton, UK, 1973), p. 117.
- [9] *Bulletin of the National Research Council*, Febrero, N° 84 (1932).