Deducción de los primeros modelos cosmológicos

César Mora
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Av. Legaria 694, Col. Irrigación, Del. Miguel Hidalgo, C. P. 11500, México D. F.

E-mail: cmoral@ipn.mx

(Recibido el 16 de Enero de 2008; aceptado el 3 de Abril de 2008)

Resumen
Este artículo describe cómo se han fundamentado algunos de los primeros modelos cosmológicos clásicos, también discutimos los errores que aún persisten en la actualidad en algunos libros de texto básicos y avanzados. Discutimos los rudimentos de la cosmología Newtoniana y su conexión con la relatividad general.

Palabras clave: Modelos cosmológicos, dinámica del Universo, cosmología Newtoniana.

Abstract
This paper describes some formulations of the first classical cosmological models, also we discuss mistakes which nowadays are present in basic and advanced text books. We discuss the fundamentals of Newtonian cosmology and its connection with general relativity.

Keywords: Cosmological models, dynamics of the Universe.

PACS: 01.55.+b, 01.30.-y, 95.10.-a, 98.80.-k **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Los temas relacionados con el origen del universo son de actualidad en la física teórica [1] y también son de interés pedagógico [2]. En los últimos años se han realizado algunos estudios sobre cosmología básica para estudiantes preuniversitarios con el fin de proporcionar las herramientas básicas para comprender la descripción clásica y cuántica de nuestro universo [3, 4, 5, 6]. La cosmología Newtoniana se deriva de la dinámica, la gravitación y el principio cosmológico, esto es, que el Universo sea homogéneo e isotrópico, y puede reproducir los modelos cosmológicos de la relatividad general y los modelos evolutivos del big-bang. La descripción del Universo en expansión fue introducido por Milne y McCrea en 1934 [7], y aplicaron la gravedad Newtoniana a una distribución esférica uniforme de masa, ignorando la masa en el exterior de la esfera con el supuesto de que también es una distribución esférica y que se anula al permitir que el radio de la esfera llegue a ser arbitrariamente muy grande. Luego, utilizaron el principio de equivalencia, estableciendo que las fuerzas gravitacionales y de inercia producen efectos indistinguibles, y se requiere para que este Universo sea conforme con el principio cosmológico, pero esto lleva el análisis a la relatividad general. En este artículo consideramos la deducción de la cosmología Newtoniana realizada por Lemons [8] quien ha señalado que la cosmología Newtoniana estándar realmente es no Newtoniana. En su deducción utiliza el principio dado por Newton del sistema de referencia de las estrellas fijas, estando distribuidas uniformemente en todos los puntos del cielo, cancelando sus tirones con las atracciones opuestas. El cual es un argumento de simetría. Newton creía que el Universo era estacionario pero también infinito y uniforme. El desarrollo de Lemons muestra que la cosmología de Newton lleva a modelos evolutivos y que describen al Universo en curso en equilibrio neutro.

Una consecuencia interesante del principio de simetría de Newton en la cosmología Newtoniana es que se requiere de la introducción de un término cosmológico para la ecuación de campo clásico de la gravedad, esto en contraste con la constante cosmológica introducida por Einsten.

El artículo está organizado como sigue, el la sección II mostramos los rudimentos físicos para modelar matemáticamente nuestro Universo, se muestra el modelo cosmológico de Einstein, el de De Sitter y el de Friedmann, en la sección III mencionamos algunos errores sobre la deducción de los primeros modelos cosmológicos, en la sección IV tratamos sobre la fundamentación de la cosmología Newtoniana, y finalmente en la sección V mostramos nuestras conclusiones.

II. MODELANDO EL UNIVERSO

Para describir el Universo en el que vivimos tenemos que enfocaremos a la distribución de la materia a gran escala y al movimiento de la misma. Para ello, se considera una distribución homogénea de la materia contenida en el espacio y aclaramos que al estudiar el Universo no se tienen direcciones privilegiadas, esto es, nuestro Universo es homogéneo e isotrópico. En escalas cósmicas las fuerzas gravitacionales determinan el movimiento de la materia, y éstas deben ser de una intensidad enorme. Consideremos que la materia está contenida homogéneamente en el espacio con una densidad ρ, luego imaginemos un globo imaginario con un radio R tal como se muestra en la figura 1.

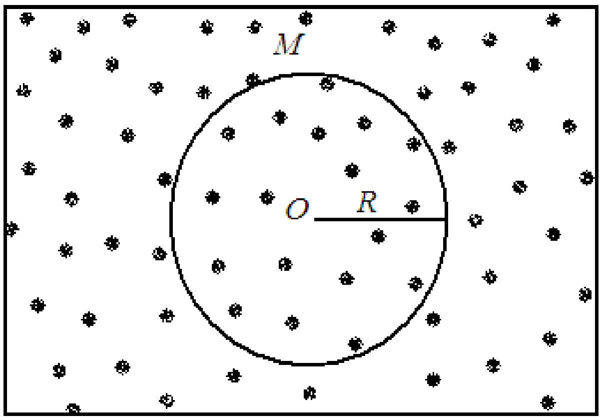

FIGURA 1. Representación del Universo homogéneo. Un globo imaginario conteniendo material distribuida uniformemente.

La masa del globo es

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho . \tag{1}$$

La fuerza gravitacional ejercida por la masa M en la superficie del globo es indicada por la ley de gravitacional de Newton

$$F = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R , \tag{2}$$

En donde G es la constante gravitacional de Newton y se ha sustituido la expresión (1). La ecuación (2) nos muestra que la fuerza gravitacional aumenta conforme aumenta el radio del globo en consideración. Si R es muy grande entonces es necesario utilizar las ecuaciones de Einstein, no obstante la dinámica del Universo se puede describir clásicamente, ya que una cubierta material esférica simétrica no crea ningún campo gravitacional en toda su cavidad interior. Para determinar la dinámica del globo calculemos la aceleración de una galaxia M que se halla en su límite, debido a la acción de la gravitación de la masa de todo el globo, en relación a otra galaxia O, localizada en su centro. De acuerdo con Newton tenemos que

$$a = -\frac{GM}{R^2} , \tag{3}$$

el signo menos indica que la aceleración corresponde a una atracción y no a una repulsión, así (3) nos indica que dos galaxias cualesquiera en el Universo homogéneo a una distancia R experimentan una aceleración negativa a. Esto nos indica que el Universo no debe ser estacionario. La ecuación (3) es la ecuación básica que determina la dinámica del Universo, su solución dependerá del radio R en función del tiempo t. Cuando la presión es muy pequeña la densidad ρ es inversamente proporcional al volumen V

$$\rho V = cte. \tag{4}$$

Conociendo la variación del radio R con el tiempo, conoceremos pues el movimiento relativo de cualesquier partícula, por consiguiente la solución de la ecuación (3) con una u otra suposiciones es esencialmente la construcción del modelo mecánico del Universo. Otro aspecto importante para conocer la dinámica del movimiento de la materia es la determinación de las propiedades geométricas del espacio para lo cual se utiliza la teoría de la relatividad general. En las siguientes secciones analizaremos algunos modelos cosmológicos concretos.

A. El modelo de Einstein

En 1917 Einstein construyó el primer modelo cosmológico, esto fue justo después de su formulación de la teoría general de la relatividad [9], y su modelo prácticamente se reduce a la ecuación (3). Sin embargo, según la concepción cosmológica de su época, se esperaba que el Universo fuera estacionario, lo cual cayó en contradicción las predicciones de su modelo teórico, habrían de pasar más de 10 años para el descubrimiento de Hubble sobre la expansión del Universo, por consiguiente Einstein arregló su modelo introduciendo las fuerzas de repulsión para equilibrar las fuerzas de gravitación, esto al parecer también con la finalidad de explicar el origen de las fuerzas de inercia. Para revisar las propiedades hipotéticas de las fuerzas de repulsión, escribamos la ecuación (3) sustituyendo la masa del globo M por $M=4/3\pi R^3\rho$, por consiguiente para las fuerzas de gravitación obtenemos que

$$a_{grav} = -\frac{4}{3}\pi G \rho R . \tag{4}$$

Si queremos equilibrar la gravitación, la aceleración creada por la fuerza de repulsión, debe ser igual a a_{grav} por el valor absoluto y opuesta en el signo

$$a_{rep} = -a_{grav} = \frac{4}{3}\pi G \rho R , \tag{5}$$

así la fuerza de repulsión debe ser directamente proporcional a la distancia. Con base en estos razonamientos, Einstein introdujo la fuerza cósmica de repulsión y de esta forma consiguió un Universo estacionario. La fuerza de repulsión es universal, no depende de la masa de los cuerpos, sino de la distancia que los separa. La aceleración que produce a cualesquiera cuerpos separados a una distancia *R*, es proporcional a la distancia, así (5) puede expresarse como

$$a_{rep} = mR\,, \tag{6}$$

En donde *m* es una constante. Si conocemos la densidad media ρ de todas las clases de las sustancias en el Universo, mediante (5) y (6) podemos conocer el valor numérico de la aceleración de la repulsión. Considerando que ρ=10^{-29} cm/s^2, obtenemos que

$$a_{rep} \approx 3 \text{ x } 10^{-36}\, R \text{ cm/s}^2. \tag{7}$$

La constante numérica en (7), es decir, el valor obtenido al dividir la constante al cubo por el cuadrado de la velocidad de la luz, se conoce como constante cosmológica, Λ con un valor de

$$\Lambda = 10^{-46} \text{ km}^{-2}. \tag{8}$$

Este valor tan pequeño complica la búsqueda de las fuerzas de repulsión mediante experimentos de laboratorio, por lo que más bien se tendría que buscar la aceleración de repulsión en el movimiento de las galaxias lejanas, sólo así se puede detectar las fuerzas de repulsión del vacío, o en otras palabras la acción gravitacional del vacío [10]. Una vez Hubble descubrió la expansión del Universo, Einstein reconoció que el error más grande en su carrera científica fue introducir la constante cosmológica en su modelo cosmológico.

Así fue como Einstein introdujo la constante cosmológica en sus ecuaciones de la gravitación, la cual describe las fuerzas de repulsión del vacío y su acción no depende de la naturaleza física del cuerpo en que se revela, por ello se conoce como acción gravitacional del vacío.

Para considerar las fuerzas de repulsión cósmica en la ecuación de la dinámica del Universo, se introduce la aceleración total como,

$$a = a_{grav} + a_{rep}\,, \tag{9}$$

esto es

$$a = -\frac{GM}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} R\,. \tag{10}$$

Si consideramos que el Universo es estacionario, entonces se cumple que $a_{grav} = -\,a_{rep}$, pero cualquier variación de *R* producirá que el sistema sea inestable, ya que mientras que un término disminuye, el otro aumenta ocasionando inestabilidad, esta fue una de las razones por las que el modelo cosmológico de Enstein fue desechado.

B. El modelo de De Sitter

En 1917 el astrónomo holandés De Sitter fue el primero en construir un modelo cosmológico sin materia. Para estructurar el modelo se retira toda la materia del Universo, por consiguiente $\rho=0$ y por consiguiente la masa del globo *M* en (10) también es igual a cero y la ecuación se reduce a

$$a = \frac{\Lambda c^2}{3} R\,. \tag{11}$$

Tomando dos partículas de prueba en el Universo libre de materia, representadas por dos galaxias distantes, la gravitación negativa descrita por el término Λ en (11) hace que ambas galaxias se alejen una de la otra con una aceleración proporcional a *R*. Luego integrado a (11) dos veces con respecto al tiempo, encontramos que

$$R = R_0 \exp \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} ct\,, \tag{12}$$

esto nos indica que la velocidad relativa de las galaxias crecerá grandemente en forma exponencial en el tiempo. De Sitter llegó a la conclusión de que un Universo casi vacío, es decir, en donde no es posible descartar la gravitación común entre galaxias en comparación con la gravitación negativa del término Λ, las galaxias pueden adquirir velocidades de alejamiento muy grandes. En la actualidad es difícil aplicar el modelo de De Sitter debido al valor tan pequeño de Λ y la dinámica del Universo se determina por la gavitación común de la materia.

C. El modelo de Friedmann

El matemático soviético A. Friedmann en los años 1922 a 1924 obtuvo algunas soluciones de las ecuaciones de Einstein (10), aplicadas a la descripción de todo el Universo, y sus soluciones describen un Universo en expansión o contracción. Los modelos de Einstein y de De Sitter son casos límite de los modelos de Friedmann. Para la descripción de su modelo por simplicidad tomaremos Λ=0, y recordando que $v^2 + v_0^2 = 2aR$, podemos hallar la velocidad integrando la aceleración mostrada en (2), así

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R} + C}\,, \tag{13}$$

En dónde *C* es una constante, que dependiendo de las condiciones del problema puede ser negativa, positiva o cero. Analizando el globo con masa *M*, en el transcurso del tiempo cambiará su radio *R*, tomando un tiempo t_0, se conocerá su magnitud R_0 y la velocidad en su superficie v_0, entonces podemos encontrar el valor de *C* sustituyendo estos valores en (13). El destino del globo dependerá si *C* es positiva, negativa o cero. Suponiendo *C*>0 entonces durante la expansión del globo su radio *R* crecerá, por tanto la velocidad (13) se reducirá ya que el primer término dentro del radical tiende a cero. Esto se da porque la gravitación frena la dispersión. En este modelo tenemos el límite de que la velocidad nunca será menor que $v=\sqrt{C}$. La velocidad de dispersión tiende a este valor límite, cuando el radio del globo crece indefinidamente ($R\rightarrow\infty$). Por consiguiente cuando *C*>0 el globo crecerá sin límite.

Mediante un análisis similar tenemos que para C=0 la expansión del globo continúa ilimitadamente, y para C<0 la variación del globo alcanzará un máximo y luego decrecerá hasta cero modelando un Universo que después de una expansión termina por colapsarse.

III. PROBLEMAS RELACIONADOS CON LA DEDUCCIÓN DE LOS PRIMEROS MODELOS COSMOLÓGICOS

Para la deducción de la cosmología Newtoniana se parte ya sea de la ley de fuerza Newtoniana tal como se hizo en los modelos anteriores, o de la conservación de la energía.

El problema con el primer método es que se supuso que al calcular la fuerza, la masa en el exterior de la esfera de radio R se puede ignorar, pero se toma la masa total del sistema como finita. La prueba falla entonces si la densidad es constante en todo el Universo infinito.

Para la deducción por medio de la conservación de la energía, se parte también del ejemplo de la esfera de radio R [11, 12, 3], con la consideración de que la materia contenida en ella tenga densidad constante ρ, con masa total dada por (1), así la energía potencial gravitacional de una galaxia típica de masa m sobre la superficie de la esfera es

$$E_p = -\frac{GmM}{R} = -\frac{4\pi GmR^2\rho}{3}. \qquad (14)$$

La velocidad de esta galaxia se supone radial $v=dR/dt$. Se define la constante de Hubble como $H \equiv R^{-1}dR/dt$ entonces $v=HR$. La energía cinética de la galaxia relativa al centro de la esfera es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mH^2R^2. \qquad (13)$$

Considerando que la energía total se conserva tenemos que

$$E = mR^2\left[\frac{1}{2}H^2 - \frac{4\pi G\rho}{3}\right], \qquad (14)$$

La cual se puede escribir como

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{(-2E/m)}{R^2}, \qquad (15)$$

La cual es conocida como la ecuación de Friedmann si se identifica la constante ($-2E/m$) con la constante de curvatura k. Pero el defecto de la deducción de la energía potencial se obtiene suponiendo que el potencial puede normalizarse a cero en $R=\infty$, pero esto no es verdad si la masa total del Universo diverge a infinito cuando R^3, tal como es requerido por una densidad constante. Tipler [13] señala que si se corrige este problema suponiendo que la densidad se va a cero en algún radio muy grande, entonces la suposición de homogeneidad (el centrar la esfera en un punto arbitrario en el Universo) se viola. Por consiguiente no es claro qué significa la conservación de la energía en un Universo de densidad constante que se extiende espacialmente al infinito.

IV. DEDUCCIÓN DE LA COSMOLOGÍA NEWTONIANA

En esta sección se mostrará la deducción de la cosmología Newtoniana tal como lo presenta Lemons [8], pues es interesante su deducción y la aparición del término cosmológico Newtoniano en contraste con el término cosmológico de Einstein. Se parte pues, del principio cosmológico, así el Universo parece el mismo a diferentes observados situados en puntos diferentes del Universo. La ley de Hubble es una consecuencia directa del principio cosmológico, y establece que para cada observador, la velocidad **v** de un objeto cosmológico está relacionada con su vector de posición **r** mediante

$$\mathbf{v} = H\mathbf{r}, \qquad (16)$$

en donde la constante de Hubble es un parámetro que se desarrolla en el tiempo con el Universo. Expresando H en términos del factor de escala R, tenemos

$$H = \frac{\dot{R}}{R}, \qquad (17)$$

en donde el punto denota derivación con respecto al tiempo. La razón $R(t)/R(t_0)$ es el factor por el que la distancia entre cualesquiera dos objetos cosmológicos en el Universo es multiplicada antes un intervalo $t - t_0$. Cuando el Universo crece, suponemos que la masa se conserva. Cuando se cumple (16), la conservación de la masa toma la forma simple

$$\rho_0 R^3 = cte., \qquad (18)$$

en donde ρ_0 es la densidad de masa promedio del Universo en la época t, y el principio de simetría de Newton determina la dinámica de este modelo. El principio, establece que el campo gravitacional tiende a cero en cualquier parte del Universo uniforme e infinito. Por consiguiente para un observador ubicado en objeto cosmológico encuentra que los otros objetos parecen estar en movimiento uniforme en línea recta. Más aún, cada posible observador coincide con esto ya que no está acelerado con respecto a otros. Así $\dot{v}$=0 o de acuerdo a la ecuación (16) $\dot{H} + H^2 = 0$ que es equivalente a

$$\ddot{R} = 0. \qquad (19)$$

Integrando dos veces a (19) tenemos que

$$R = \dot{R}_0(t - t_0) + R_0, \qquad (20)$$

en donde $\dot{R}_0$ es una constante arbitraria que indica el ritmo de expansión ($\dot{R}_0 > 0$) o de contracción ($\dot{R}_0 < 0$) del Universo. También es posible un universo estático con $\dot{R}_0 = 0$ y $H = 0$. Las ecuaciones (16), (17) y (20) describen completamente el Universo Newtoniano en curso.

Por otro lado, comúnmente el campo vectorial gravitacional ***g*** se determina por la ley universal de la gravitación más el requerimiento de que ***g*** sea cero en un punto central alrededor del cual hay una simetría esférica o de las ecuaciones clásicas de campo

$$\nabla \cdot \mathrm{g} = -4\pi G\rho , \qquad (21)$$

y que $\nabla \times \boldsymbol{g} = 0$ más una condición para fijar a ***g*** en la frontera. *G* es la constante gravitacional en el sistema de unidades SI y ρ es la densidad de masa local. En cualquiera de los dos casos, las condiciones necesarias de frontera o auxiliares no preservan la homogeneidad e isotropía que se requiere en un modelo del Universo. Por consiguiente la ecuación (21) debe ser modificada para representar esta cosmología. Para deducir el término cosmológico Newtoniano, Lemons [8] considera el siguiente experimento mental.

Primero, se debe imaginar un Universo con campo cero con una densidad de masa ρ_0 uniforme infinitamente extendida. Entonces se toma la masa que ocupa la región esférica y se mezcla uniformemente con la masa en una región esférica idéntica alguna distancia lejana de la original. Luego, hay dos regiones extraordinarias, una es un vacío y la otra tiene densidad $2\rho_0$ .También hay un campo gravitacional diferente de cero ocasionado por las masas en las dos regiones extraordinarias. Su magnitud y dirección se pueden determinar mediante la superposición de dos términos de fuerza. Uno es una fuerza central repulsiva con magnitud igual a la fuerza gravitacional causada por una densidad de masa ρ_0 en el vacío. La otra es la usual fuerza gravitacional atractiva ejercida por una densidad de masa ρ_0 en la región en donde la densidad es realmente $2\rho_0$.

Este proceso se puede generalizar para construir una función de densidad de masa arbitraria ρ fuera de la inicialmente uniforme ρ_0. En cualquier lugar ρ es ya sea mayor que, igual o menor que ρ_0. Así una partícula de prueba masiva es atraída a regiones muy densas y es repelida de las regiones menos densas con fuerzas proporcionales a la desviación de densidad de su valor promedio ρ_0, y la ecuación de campo para este caso es

$$\nabla \cdot \mathrm{g} = -4\pi G\left(\rho - \rho_0\right). \qquad (22)$$

Lo interesante de esta ecuación es que incluye el principio de simetría de Newton. Por lo tanto, la dinámica expresada por las ecuaciones (19) y (20) se deduce directamente de (22). Pero se debe notar que (22) difiere de (21) por un término cosmológico Newtoniano, y algunas veces conviene considerar como surgido de una fuerza cosmológica repulsiva. Este término cosmológico difiere del introducido por Einstein en su cosmología, quien reconoció que la ecuación (21) no determinaba un campo gravitacional único en un Universo infinito y en lugar de (22) propuso

$$\nabla^2\phi = \Lambda\phi + 4\pi G\rho , \qquad (23)$$

En donde ***g*** = $-\nabla\phi$. Einstein no tomó en serio esta ecuación, pero si la utilizó para introducir una versión de relatividad general de la constante cosmológica Λ, la cual realmente es una constante mientras que el término cosmológico Newtoniano incluido en (22), $4\pi G\rho_0$, no lo es en el sentido estricto, pues varía en el tiempo con la densidad promedio del Universo

V. CONCLUSIONES

La cosmología moderna es una rama de la física que capta grandemente la atención de los alumnos y que puede ser utilizada para introducir y relacionar temas como el de las partículas elementales, las leyes de la mecánica clásica y la termodinámica. No obstante la simplicidad de las deducciones de los primeros modelos de la cosmología clásica, estos fueron generados incorrectamente. El modelo de Einstein que fue el primero y que inauguró la cosmología moderna está mal planteado, también la forma de deducir la ecuación de Friedmann en algunos libros de texto es incorrecta, se debe tener cuidado con las consideraciones sobre la densidad de masa del universo y la conservación de la energía. Por otro lado, en la cosmología Newtoniana autores como Tipler y Lemons han señalado los errores comunes al deducirla y su relación con la relatividad general. En la concepción Newtoniana aparece un término cosmológico en contraste con la constante cosmológica de Einstein, que la introdujo con la esperanza de reconciliar la relatividad general con el principio de Mach, lo cual no pudo realizarse. Es interesante resaltar que a partir del principio cosmológico y el de simetría de Newton también se puede predecir un Universo en expansión, quizás en otro trabajo mencionaremos los comentarios de Newton sobre un Universo en expansión y se creencia religiosa de la intervención de Dios para mantener el Universo estático.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece a Rubén Sánchez del Posgrado en Física Educativa del CICATA Legaria por la revisión y sugerencias para mejorar el manuscrito original. Este trabajo fue realizado mediante el proyecto de investigación SIP-20082788, y con apoyo de las becas EDI-IPN y COFAA-IPN.

REFERENCES

[1] Lindy, D., Kolb, D. and Schramm, D. N., *Resource Letter: CCP-1 Cosmology and particle physics*, Am. J. Phys. **56**, 492-501 (1988).

[2] AAPT, *American Association of Physics Teachers statement on the teaching of evolution and cosmology*, Am. J. Phys. **68**, 11 (2000).

[3] García-Salcedo, R. y Moreno C., *Descripción de la evolución del Universo: una presentación para alumnos preuniversitarios*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **1**, 95-100 (2007).

[4] Jordan, T. F., *Cosmology calculations almost without general relativity*, Am. J. Phys. **73**, 653-662 (2005).

[5] Akridge, R., *A simple cosmology: General relativity not required*, Am. J. Phys. **69**, 195-200 (2001).

[6] Sales, J. A., *Note on solving for the dynamics of the Universe*, Am. J. Phys. **69**, 1245-1247 (2001).

[7] McCrea, W. H. and Milne, E. A., Q. J. Math. **5**, 73 (1934).

[8] Lemons, D. S., *A Newtonian cosmology Newton World understand*, Am. J. Phys. **56**, 502-504 (1998).

[9] Einstein, A., "Cosmological Considerations on the General Theory of Relativity", in *The Principle of Relativity*, edited by Sommerfeld, A. (Dover, New York, 1923) pp. 175-188.

[10] Novikov, I., *Cómo explotó el Universo*, (Editorial Mir, Moscú, 1990).

[11] Weinberg, S., *The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*, (Fontana/Collins, Glasgow, 1977).

[12] Silk, J., *The Big Bang: The Creation and Evolution of The Universe*, (Freeman, San Francisco, 1980).

[13] Tipler, F. J., *Rigorous Newtonian cosmology*, Am. J. Phys. **64**, 1311-1315 (1996).